REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 1, 70-88

RECONOCER ATRIBUTOS DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

ALEJANDRO BUSTOS, MARINA BALLÉN,
CAMILO SANTANA, MIRIAM SIERRA Y HÉCTOR MÉNDEZ

El proceso que se describe en este artículo, en torno al diseño, implementación y observación de un taller para abordar la interpretación de la fracción como relación parte-todo con estudiantes de grado séptimo, representó para el grupo de docentes de matemáticas de la institución, una experiencia novedosa. Principalmente, el cuidado y la riqueza del análisis realizado revelaron la necesidad de cambiar nuestras prácticas al respecto.

The process described in this paper, regarding the design, implementation and observation of a set of tasks addressing the fraction as whole-part relationship, with seventh grade students, was a really new experience for the group of mathematics teachers of the school. Mainly, it was the rich analysis done what reveals the necessity of changing our practices in this sense.

Palabras claves: aritmética, fracciones, diseño curricular, desarrollo curricular, básica secundaria.

INTRODUCCIÓN

Los docentes del área de matemáticas de la institución educativa Compartir, (sede Suba, de la jornada de la mañana), motivados por la necesidad de enriquecer nuestro quehacer en la clase de matemáticas y con el fin de poder abordar más efectivamente la enseñanza, hicimos, como parte de un programa de desarrollo profesional[1], una reflexión en grupo en torno a temas cuyo aprendizaje consideramos problemático. En particular, escogimos abordar el concepto de fracción, objeto de muchas dificultades en su comprensión y manejo por parte de los estudiantes. Queríamos así fortalecer y complementar nuestro conocimiento y el de los estudiantes con respecto a este tema específico y, también en el caso de los docentes, vivir el proceso de construir un taller para el aula con cierto cuidado y rigurosidad.

1. Este programa estuvo a cargo de “una empresa docente” de la Universidad de los Andes y contó con el apoyo financiero de la Fundación Compartir.

Después de llevar a cabo numerosas reuniones de trabajo y discusiones en grupo, de realizar algunas lecturas y de elaborar varias versiones de tareas, todo con la constante asesoría de "una empresa docente", llegamos a una secuencia didáctica que se concretó en un taller, cuyo propósito era que los estudiantes abordaran la fracción en su interpretación como relación parte-todo y con ello ampliaran su comprensión del concepto de fracción. El taller fue aplicado a diez estudiantes de grado séptimo de la jornada de la tarde de la misma institución.

Presentamos aquí en primer lugar, algunas de las ideas que fundamentaron nuestra propuesta y un resumen del proceso seguido en el trabajo de diseño; luego, se incluye una breve descripción del taller, su implementación y observación; posteriormente, se expone el análisis de las respuestas de los estudiantes, para terminar con unas reflexiones generales con respecto a toda la experiencia vivida. El taller se adjunta como apéndice.

EL PROCESO DE DISEÑO

Elementos conceptuales que fundamentan el taller

Para empezar el proceso del diseño utilizamos ideas de la literatura referente a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción, que presentan diferentes significados de tal concepto, también llamados conceptualizaciones, interpretaciones, subconstructos o imágenes por distintos autores (Kieren, 1988; Freudenthal, 1983; Martin, Kieren y Pirie, 1994; Streefland, 1978, Hart, 1981, Behr, Lesh, Post y Silver, 1983, citados en Mancera, 1992). Algunas de estas interpretaciones son: la fracción como relación parte-todo en contextos continuos y discretos y en la recta numérica; la fracción como noción de medida; la fracción como cociente y división; la fracción como elemento de una estructura algebraica; la fracción como razón, probabilidad y porcentaje; y la fracción como operador. Los anteriores y otros investigadores (ver Llinares y Sánchez, 1988; Kieren, 1976, Dienes, 1972, citados en Llinares y Sánchez, 1988) proponen un acercamiento al concepto de fracción desde las diversas interpretaciones de manera que las secuencias de enseñanza provean a los estudiantes experiencias acordes con la mayoría de estas interpretaciones, y propicien y faciliten la transición de la comprensión del concepto de una interpretación a otra. Encontramos entonces nuevas concepciones que nos condujeron a examinar y revaluar lo que veníamos realizando en ese sentido en nuestro quehacer pedagógico. De estas interpretaciones de la fracción, decidimos trabajar con los dos significados que inicialmente consideramos más conflictivos para los estudiantes: la relación parte-todo y la relación parte-parte, como aproximación a la razón.

Una consideración importante para tener en cuenta en el desarrollo del conocimiento de fracciones, según Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, citados en Kieren, 1992), es el carácter geométrico de las fracciones o los racionales, que se refleja en modelos regionales o lineales. Para Piaget la idea geométrica de la fracción requiere la habilidad de partir todos o unidades de varios tipos, reconstruir todos desde las partes, subdividir en partes congruentes y establecer la relación entre las subpartes, las partes y el todo original, es decir ver las partes como totalidad. Teniendo en cuenta estas ideas y las sugerencias de Llinares y Sánchez (1988) sobre la necesidad de que el estudiante trabaje con ejercicios que involucren aspectos relevantes de los atributos de la relación parte-todo, para que así pueda aproximarse y construir este significado de fracción, se determinaron en primer lugar los atributos que caracterizan dicha relación y que se iban a contemplar en esta propuesta: una región o superficie (el todo) se puede dividir en partes; las partes forman y cubren el todo; las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes[2]); las partes, en sí mismas, se pueden considerar como un todo que se puede dividir; un todo puede estar compuesto por elementos separables.

Descripción general de la estrategia didáctica

Una idea que se fortaleció en el grupo de docentes y que tratamos de reflejar en el taller, fue que éste fuera un instrumento didáctico de instrucción donde se promoviera el análisis por parte de los estudiantes, y no el trabajo que tradicionalmente hacen en clase de matemáticas, consistente en realizar cálculos y poner en juego la memoria. Para esto nos pareció indispensable proponer una variedad de situaciones en las que gradualmente se aumenta su complejidad, se exige que el estudiante explique el trabajo realizado y justifique sus respuestas, y se propicia el tránsito desde niveles informales de representación hasta llegar a la representación numérica convenida en matemáticas para las fracciones. Dicen Behr, Lesh, Post y Silver (1983, citados en Mancera, 1992) que las secuencias de enseñanza deben crear las oportunidades para trabajar en diferentes representaciones y conservar el equilibrio entre las situaciones con aplicación práctica y las situaciones abstractas de cálculo no referidas a una situación práctica. Se tuvo en cuenta además, que el niño desde sus primeros años utiliza expresiones del lenguaje como “media manzana”, y que es labor del docente posibilitarle

2. El término “congruente” se utiliza aquí en el mismo sentido empleado por Llinares y Sánchez (1988) para indicar figuras con cantidades iguales de área, independientemente de si las figuras son o no congruentes en el sentido geométrico.

que conecte estos términos con las fracciones para contribuir a una mejor comprensión de éstas; así, con las tareas del taller, se quiso promover el uso de términos como "la mitad", "el doble", "un cuarto", "un tercio", etc. Los estudios de Behr, Lesh, Post y Silver (1983, citados en Mancera, 1992) plantean que para llegar a comprender una idea matemática, vale la pena tener la habilidad de "manejarla" en diferentes representaciones y de poder realizar traducciones entre éstas. De acuerdo con Llinares y Sánchez (1988) mediante actividades sencillas y variadas se debe ir llevando al estudiante al manejo de estas representaciones, teniendo en cuenta que se debe partir de la forma verbal, pasando por la gráfica para finalizar en la numérica. En el taller se enfatiza la utilización de estas representaciones para el concepto de fracción, y la secuencia de tareas propicia el tránsito desde las representaciones verbal y gráfica a la numérica.

Gómez (1998) señala la necesidad de que el estudiante trabaje con problemas de distinto tipo, como situaciones reales de reparto, de organización y de compensación para lograr una comprensión amplia del concepto de fracción. Atendiendo tales recomendaciones, al comienzo se plantearon y formularon en el taller, problemas de repartición, organización y compensación en contextos continuos, que llevaran al estudiante a considerar el tamaño del todo, el tamaño de las partes y las relaciones entre las partes, aspectos involucrados en los atributos necesarios para ver la fracción como relación parte-todo y parte-parte. Al desarrollar y revisar los diferentes problemas propuestos e imaginar posibles respuestas se vio que la intención de abordar ambas relaciones podía ser muy ambiciosa para lograrla en máximo dos bloques de clase, tiempo destinado para la implementación del taller, pues las características con las que éste se estaba elaborando implicaban bastante trabajo de parte de los estudiantes. En consecuencia, se decidió abordar en el taller únicamente la primera relación, y se definió como propósito que los estudiantes ampliaran su comprensión del concepto de fracción en su interpretación parte-todo en contextos continuos, mediante el reconocimiento y manejo de los atributos establecidos.

Se previó que los estudiantes podían tener dificultades con la noción de área y su significado en el ambiente de fracciones. Esta previsión se basó por un lado, en las dificultades de los estudiantes con la noción misma de área en geometría, pero también en el hecho de que en el trabajo escolar con fracciones usualmente no se menciona esta noción y se habla de parte o si acaso de región. En concordancia con esto, Morris (1995) reporta que los estudiantes tienen muy poca consciencia del área como un atributo crítico en las fracciones dentro de contextos continuos, y encuentra que su habilidad para manejarla consistentemente es limitada. Los estudiantes identifican partes sombreadas y no sombreadas, más que el área en las figuras dibujadas, y al manipular las regletas de Cuisenaire, escogen regletas de diferente color para indicar regiones sombreadas y no sombreadas. Así, esta inhabilidad de los estudiantes relega el papel del modelo de área como referente concreto en el trabajo con fracciones. Para abordar esta problemática durante el proceso de diseño, se analizó un taller en el cual se trabajan diversas figuras geométricas con el fin de establecer relaciones entre ellas de acuerdo al área de cada una (ver Obando y Riascos, 1993). El trabajo en este taller nos permitió a los docentes ver de una forma más clara la importancia de poner en juego el trabajo con tres atributos —la congruencia entre las partes, las partes forman el todo y el todo se puede dividir en partes— sin necesariamente referirse a la fracción implicada, bien sea en su representación verbal o numérica. Este ejercicio nos motivó a incluir en nuestro taller un problema similar y tareas específicas para los estudiantes, donde ellos pudieran relacionar el concepto de fracción con el de área, a través del tamaño del todo y de sus partes.

Plan de observación

Los profesores realizamos cada tarea propuesta en el taller de diferentes maneras para detectar así los atributos de la relación parte-todo antes mencionados, que estaban implicados en las posibles respuestas; esto permitió reelaborar las preguntas para forzar a que el estudiante trabajara y reconociera aun de forma implícita, dichos atributos.

Partiendo de que es necesario que el estudiante haga uso de los atributos para responder las preguntas, estos atributos fueron a su vez las pautas que se consideraron para observar las respuestas de los estudiantes una vez aplicado el taller, y para evaluar así la efectividad del mismo en el alcance de las intenciones establecidas. Adicionalmente, se contemplaron otros indicios de una comprensión más amplia del concepto de fracción en su interpretación como relación parte-todo, entre los que se encuentran las evidencias de la consideración del área del todo y/o de las partes en las respuestas de los estudiantes, el establecimiento de unidades de medida, el nivel cuantitativo y numérico del trabajo, el reconocimiento de la conservación del área, el empleo de movimientos en el plano como rotación, traslación y reflexión, el uso de términos relativos a las fracciones en el lenguaje ordinario, la traducción y coherencia entre las representaciones gráfica, verbal y numérica.

DESCRIPCIÓN DEL TALLER

La primera tarea planteada en el taller fue un problema de repartición de tres pizzas entre cuatro personas (véase el Apéndice), que tenía la intención de movilizar en los estudiantes, los atributos: un todo está compuesto por elementos separables; una región o superficie (el todo) se puede dividir en partes; las partes forman y cubren el todo; las partes tienen que ser del mismo tamaño, es decir, congruentes. En esta tarea se aborda el paso de la representación gráfica a la verbal. La última tarea de este problema se presenta sólo después de que los estudiantes han desarrollado las anteriores.

El segundo problema se elaboró con el objetivo de involucrar al estudiante en el manejo del concepto de área, en el ambiente de las fracciones; mediante seis rectángulos del mismo tamaño, divididos de distinta manera cada uno, en los cuales la parte sombreada correspondía a lo que comió de pan cada uno de seis niños (véase el Apéndice), se quería promover la relación de la congruencia de las partes sombreadas con la cantidad de área. De igual manera, aquí hay que ir de la representación gráfica a la verbal.

En el tercer problema se presenta una figura (rectángulo) con una serie de divisiones que a su vez forman diversas figuras como triángulos, cuadrados, rectángulos (véase el Apéndice). Las ocho preguntas que se hacen son relativas al área de dichas figuras e involucran el manejo de los atributos considerados para caracterizar la relación parte-todo. Además, para responder las preguntas, el estudiante puede realizar traslaciones, rotaciones, reflexiones de las figuras. También se incentiva en esa tarea la traducción entre las representaciones gráfica y verbal, en ambos sentidos.

Los problemas cuarto y quinto exhiben representaciones de fracciones en los diferentes sistemas (véase el Apéndice) para que los estudiantes establezcan correspondencias entre ellas y hagan así traducciones entre las representaciones verbal, gráfica y numérica, y además expliquen el porqué de las correspondencias definidas. Con las tareas planteadas aquí se esperaba favorecer que el estudiante trabajara también los atributos establecidos, pues el paso de una representación a otra implica el reconocimiento por ejemplo, de la congruencia de las partes, del todo compuesto por elementos separables, de las partes recubriendo el todo, y de las partes vistas como un todo que se puede dividir.

IMPLEMENTACIÓN DEL TALLER Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Los diez estudiantes que trabajaron el taller fueron seleccionados al azar y se reunieron en el salón de audiovisuales donde se organizaron para resolverlo en forma individual. Acompañados por tres profesores, recibieron algunas indicaciones generales y empezaron su trabajo de manera individual, el cual realizaron en un lapso de hora y media. Los alumnos que tenían alguna inquietud o dificultad se dirigían a los profesores, quienes aclaraban sus dudas.

A partir de las evidencias del reconocimiento o trabajo con los atributos de la relación parte-todo, miramos las respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes preguntas de cada tarea propuesta en el taller. Interpretamos así el logro o no de las intenciones de las tareas y del propósito general del taller completo.

Respuestas al primer problema

Tomando como referencia el atributo “las partes son congruentes”, en las respuestas a la situación de reparto planteada como primer problema, encontramos que ocho estudiantes reparten las pizzas equitativamente en diferentes formas (ver Figura Nº 1); parecería entonces que estos estudiantes reconocen que las partes tienen que ser del mismo tamaño.

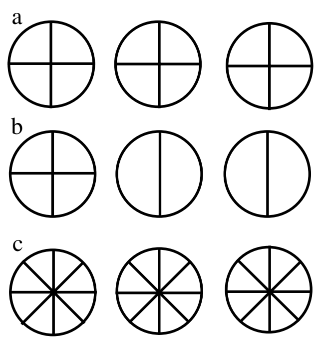


Figura Nº 1.

Un estudiante realiza la repartición sin tener en cuenta que las partes sean congruentes o por lo menos sin ver que no son iguales (ver Figura Nº 2). Otra respuesta, presentada en la Figura Nº 3, no permite detectar el reconocimiento del atributo, pero tampoco explicar cómo es la repartición que se propone. Al describir verbalmente la cantidad de pizza que le corresponde a cada persona, es palpable que sólo seis estudiantes de los ocho que dividieron el todo en partes iguales, dan muestras de reconocer tal atributo mediante respuestas como “dividí la pizza en 8 partes cada una, así a cada persona le corresponden exactamente 6 pedazos de pizza (2 de cada una)”. Las respuestas de los estudiantes en donde no es visible este reconocimiento, fueron por ejemplo, “a cada persona le corresponde de a 7/5”, o cuando escriben para la repartición indicada en el caso (b) de la Figura Nº 1: “a cada persona le corresponden dos pedazos de pizza” sin especificar si son dos mitades, dos cuartos o un cuarto y una mitad. En las respuestas a la pregunta acerca del proceso seguido en la repartición, únicamente cinco estudiantes de los seis que en la descripción verbal habían reconocido el atributo, dan muestras de reconocerlo al hacer referencia al número total de pedazos obtenidos cuando se hicieron los cortes, que luego se repartieron entre las cuatro personas. Como razones para justificar que su respuesta cumple con las condiciones del problema — se esperaba algo como "tres pizzas entre cuatro personas, cantidades de pizza iguales para todas sin que sobre pizza"—, sólo dos estudiantes hacen alusión a la congruencia de las partes, lo que lleva a pensar que no identifican claramente las condiciones de la situación.

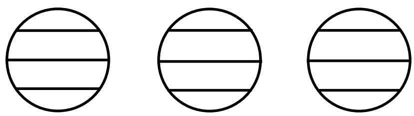


Figura Nº 2.

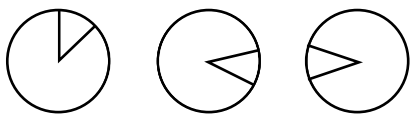


Figura Nº 3.

En la última pregunta de este problema, es claro que a pesar de que siete estudiantes expresan frases donde se ve el reconocimiento del atributo, este reconocimiento está ligado al hecho de que los cortes de las tres pizzas se hayan hecho de la misma manera o el número de pedazos de cada pizza coincida con el número de personas. Al respecto, un estudiante escribe: "yo creo que la [respuesta adecuada es] 3, porque dividieron la pizza en 4 pedazos iguales para 4 personas". La repartición expuesta en la figura 1 del literal d. (véase el Apéndice) no fue considerada por los estudiantes como repartición posible donde cada persona podría recibir la misma cantidad de pizza, ni siquiera por el estudiante que en principio había hecho una división similar (ver caso (b) de la Figura Nº 1).

Con respecto al atributo "un todo está compuesto por elementos separables" en la situación de las pizzas, se evidencia que siete estudiantes reconocen el atributo pues toman las tres pizzas para dividirlas. Aquí vale la pena aclarar que al hacer referencia a un todo compuesto de partes separables (3 pizzas) —lo que podría verse como una combinación de contextos continuo y discreto— el estudiante tendría que atender simultáneamente a ambos contextos, o —tal como lo señalan Behr, Wachsmuth, Post y Lesh (1984, citados en Kieren, 1992)— ver las partes como una entidad relativa o proporcional (3 pizzas para 4 personas o 1.5 pizza para 2 personas) y no como una entidad absoluta o cantidad extensiva (1/2 de pizza le corresponde a alguien). Encontramos que dos de los estudiantes no dan muestras de reconocer el atributo pues no tienen en cuenta todas las pizzas, o sólo consideran pedazos de ellas para la repartición.

En referencia al atributo "las partes cubren el todo", encontramos que siete estudiantes presentan indicios de reconocer el atributo, ya que todas las partes obtenidas son tenidas en cuenta para la repartición, sin que sobre algo; al respecto un estudiante escribe: "dividí la pizza en 8 partes cada una, así a cada persona le corresponden exactamente 6 pedazos de pizza (2 de cada una)". Dos estudiantes no muestran evidencias del reconocimiento del atributo; una de sus respuestas es: "a las tres primeras personas les corresponde de a 3 pedazos y a la última unos 2 o 4", cuando ha dividido cada una de las pizzas en ocho porciones. Aquí el estudiante ignora 13 porciones para el primer caso y 11 porciones para el segundo caso.

El reconocimiento del atributo "las partes se pueden considerar como totalidad" se hubiera podido evidenciar en el caso de que los estudiantes hubieran contestado la pregunta d. de este problema, con respuestas del estilo "la primera y la tercera figuras presentadas cumplen con las condiciones del problema". Sin embargo, solamente un estudiante contestó de esta manera: "en la primera y en la tercera; en la primera porque según el gráfico para cada uno es media pizza y en un cuarto (o una tajada) y en la tercera porque cada uno le corresponde 3 tajadas de pizza; estas dos cumplen las condiciones del ejercicio porque se dividen en las 4 personas y no sobra ninguna parte".

Respuestas al segundo problema

En las respuestas de los estudiantes a la primera pregunta del segundo problema, no hay mención de la palabra "área"; las muestras del reconocimiento del atributo relativo a la congruencia de las partes sólo se presentan cuando la división del rectángulo es en partes con la misma forma. En la pregunta que explicita la palabra "área", cuatro respuestas pueden interpretarse como explicaciones coherentes a lo que se plantea. Sin embargo, todos los estudiantes dicen haberse dado cuenta de que se puede hablar de partes iguales porque tales partes tienen la misma área. En la tercera pregunta de este problema, únicamente un estudiante identifica como igual la cantidad de área sombreada en los dos trapecios, alegando que el rectángulo sombreado se puede dividir en dos triángulos iguales a los otros; así, en este caso tampoco puede decirse algo con respecto al reconocimiento del atributo relativo a las partes congruentes.

Respuestas al tercer problema

Con relación a las tareas del tercer problema, solamente en las respuestas de tres estudiantes a la pregunta "El área del cuadrado G, ¿cuántas veces contiene al cuadrado H?", hay evidencias del reconocimiento del atributo: "una parte es vista como un todo que se puede dividir". Nos cuestionamos entonces la redacción de la pregunta. Si se hubiera preguntado mejor "¿Cuántas veces recubre el área del cuadrado H al área del cuadrado G?", se podría esperar otro tipo de respuestas, dado que la acción de recubrir para los estudiantes involucra sobreponer varias veces el cuadrado H —lo que quizás habría permitido ver a G como una parte divisible— que no fue la estrategia empleada por ellos tal y como se observa en una de las tres respuestas mencionadas a esta pregunta: "creo que es una sola vez, ya que es la misma área, es decir es el mismo cuadrado". Respuesta en la que además se ve que se privilegia la forma y no la noción de área misma. En las respuestas de los otros dos estudiantes se observa que no utilizan movimientos de traslación para ubicar el cuadrado H sobre el cuadrado G y recubrirlo completamente, como cuando dicen: "aproximadamente contiene unas dos y media veces el cuadrado H". Entonces no hay tampoco, indicios del reconocimiento del atributo de las partes recubriendo el todo.

Con respecto al atributo "las partes forman el todo", que se quería movilizar al contestar la pregunta "¿Qué parte del área del rectángulo S es el área del cuadrado G?", también en seis de los estudiantes se observan dificultades para tener en cuenta el área, ya que respondieron aludiendo a la forma y a la posición que ocupa el cuadrado G en el rectángulo S. Dentro de las respuestas encontramos: "la parte de la esquina izquierda inferior", "tal vez en lo ancho", "como de la mitad hacia atrás", "una parte solamente está constituida por el cuadrado G". Únicamente dos estudiantes contestaron dentro de lo esperado, diciendo: "es la octava parte del rectángulo S". Además un estudiante no contestó la pregunta.

En este punto del análisis de las respuestas notamos la dificultad que se presenta al preguntar directamente por "¿Qué parte de...?", ya que ello no conlleva a que en general los estudiantes mencionen expresamente o den muestras explícitas de involucrar en su trabajo de alguna manera los atributos que caracterizan la relación parte-todo. Parecería que simplemente de manera visual comparan las figuras y estiman las veces que cabe una figura en otra, por sus tamaños.

En referencia al atributo "las partes deben ser congruentes", examinado en las respuestas a la pregunta "¿El área del triángulo E es igual o diferente al área del rectángulo C?", sólo en un estudiante hay evidencia de que reconozca el atributo al contestar: "sí, porque al rectángulo al comparar con él, sobra una punta pero se le pone a la parte que le hace falta al rectángulo y nos queda igual". En este caso, se observa que el estudiante recurrió a dos movimientos, uno de traslación y otro de rotación, para poder establecer la congruencia. En el resto de los estudiantes no hay indicios de reconocer la congruencia entre estas áreas, ya que en todas las respuestas se observa que se privilegia comparar la forma; dentro de este tipo de respuestas encontramos: "es diferente porque la dimensión del triángulo es más grande si se mide", "es diferente porque tienen diferentes ángulos".

En relación con el atributo "las partes se pueden considerar como un todo que se puede dividir", que se espera movilizar al responder la pregunta: "El área del cuadrado G, ¿cuántas veces contiene al área del rectángulo F?", en cinco estudiantes hay evidencia de un reconocimiento del atributo, a través de respuestas como: "una vez, porque si dividimos podemos darnos cuenta que es una vez", "el cuadrado F cabe una vez en el cuadrado G", "si dividimos el rectángulo F en dos y luego los unimos nos da el mismo cuadrado G". En otras respuestas —aunque no coherentes con lo que se pregunta— también hay evidencias de reconocer el atributo, como por ejemplo: "dos veces porque se podría decir que se divide en dos y forma un rectángulo largo", "contienen aproximadamente uno y medio al rectángulo F". Un estudiante contestó a la pregunta de la siguiente manera: "creo que ni una porque la F es un rectángulo". En esta respuesta se observa que se privilegia la comparación de formas y no se tiene en cuenta el área de las figuras. Al reconocer que una parte puede verse como un todo, se están dando muestras también del reconocimiento del atributo "un todo se puede dividir".

Al analizar, en las respuestas a las preguntas de este problema, el uso de diferentes formas de representación de la fracción en su interpretación como relación parte-todo, un estudiante hace mención de "medios", y otro estudiante utiliza expresiones como "la tercera parte", "la octava parte". En los demás estudiantes se observa que mencionan sólo números enteros para dar respuesta a las preguntas; es el caso de respuestas como "cinco veces".

Respuestas al cuarto problema

En relación con este problema del taller que buscaba promover la habilidad para hacer la traducción entre diferentes representaciones de la fracción (verbal, numérica y gráfica) en su interpretación como relación parte-todo, encontramos que siete estudiantes hicieron corresponder adecuadamente las tres representaciones, pero solamente en los casos de las fracciones que son más comunes para ellos, es decir, aquellas más frecuentemente trabajadas en el aula: un medio, dos cuartos, cuatro octavos. Como ejemplos de las explicaciones que dieron encontramos: "la primera figura representa un medio porque está dividida en dos partes, en la cual se toma 1", "cuatro octavos: dividimos una porción en 8 y tomamos 4". Para las demás fracciones representadas, dos de los estudiantes no establecieron correspondencia alguna, y los otros establecieron correspondencias que atendieron al número de partes sin tener en cuenta la congruencia de su área ni que las partes pueden ser vistas como un todo que a su vez se puede dividir, y ubicaron el número que las representa indistintamente como numerador o como denominador.

Respecto al atributo "las partes se pueden considerar como un todo que se puede dividir" que era necesario reconocer para indicar la fracción que representa la parte de área sombreada de la sexta y la novena figuras de este problema (véase el Apéndice), encontramos que hubo un reconocimiento de él por parte de los siete estudiantes mencionados. Una de las explicaciones a la correspondencia entre representaciones en este punto es: "yo las relacioné mirando el gráfico, luego la forma verbalmente y luego numéricamente; además dependiendo de la cantidad sombreada en el gráfico".

En relación con la fracción mayor que la unidad (cuatro tercios) expuesta en este problema, observamos que cuatro estudiantes relacionaron sus representaciones adecuadamente, mientras que los demás no las relacionaron de manera alguna. Se evidencian aquí las dificultades que tienen los estudiantes para trabajar con fracciones impropias.

Respuestas al quinto problema

En el último problema del taller, se presentaron variedad de respuestas disímiles que de nuevo parecen atender al número de partes y no dan muestras del reconocimiento de la congruencia de las partes, ni tampoco del reconocimiento de que las partes pueden ser vistas como un todo que a su vez se puede dividir. Además las respuestas no denotan que el trabajo del punto anterior haya sido de ayuda para desarrollar este punto. Uno de los estudiantes contestó a la pregunta a. (véase el Apéndice) con la siguiente respuesta: "un y 1/1", en donde se observa que no relaciona las partes con el todo sino tiene en cuenta sólo el número de partes sombreadas. De igual manera en la pregunta c. contestó: "un tercio", y se ve que aunque subdividió la región sombreada —una parte del todo— en tres partes congruentes, no tiene en cuenta el resto de la figura y expresa la cantidad de partes sombreadas (3) de manera relacionada con la forma en que se representan las fracciones más conocidas, es decir como "1/3". Otro estudiante contestó a la pregunta a. con "cuatro cuartos", donde se percibe que aunque divide la región sombreada —una parte del todo— en cuatro partes congruentes, no establece una relación parte-todo sino una relación parte-parte entre el área sombreada y la no sombreada. Este hecho sólo se presenta en esta pregunta, ya que en la pregunta c. (véase el Apéndice) el mismo estudiante contesta "diez tercios", dando de nuevo indicios del reconocimiento de la congruencia de las partes y de la división de una parte, y estableciendo una relación entre el todo y la parte sombreada. Se podría concluir en este caso, que las dificultades del estudiante apuntan principalmente a la representación numérica de las fracciones.

CONSIDERACIONES FINALES

A pesar del esfuerzo invertido en el diseño de las tareas, y de las diversas consideraciones de tipo didáctico que se tuvieron en cuenta al proponerlas, en general, no podemos asegurar que con la implementación de este taller los estudiantes hayan ampliado significativamente su comprensión del concepto de fracción en la interpretación como relación parte-todo.

Aunque hubo respuestas adecuadas y hay indicios del manejo de algunos atributos, tenemos la sensación de que la calidad del desempeño de los estudiantes no varió sustancialmente a lo largo del desarrollo del taller, lo que hubiera mostrado que éste pudo haber promovido algo nuevo en ellos. Esto es cierto tanto para los estudiantes que dieron muestras de trabajar los atributos en muchas de las preguntas como para los que no lo hicieron. El reconocimiento y manejo de los atributos que caracterizan la relación parte-todo fue variable, incluso para un mismo estudiante, en las diversas tareas y se puede decir que se evidencia su manejo cuando la representación que se trabaja les es familiar a los estudiantes, lo cual no quiere decir que necesariamente lo hayan reconocido. La repartición de la pizza en la representación gráfica, similar a los problemas usualmente tratados en la escuela, que fue exitosa en la mayoría de los estudiantes ilustra esto. Además, se corrobora con las explicaciones verbales poco coherentes a esta repartición, que son aun menos solicitadas en el aula. La forma de las figuras y de los cortes de éstas definitivamente inciden en que el estudiante pueda hablar de igualdad de partes. Las dificultades previstas con la representación numérica y la falta de significado del numerador y denominador, se hacen patentes y parece que siguen vigentes en estos estudiantes.

Nuestra impresión es que si los estudiantes pudieron ver algo nuevo, esto fue relativo a la idea de que al hablar de un todo y sus partes en contextos continuos, el área está involucrada, y es la magnitud implicada que permite comparar y hablar de partes iguales o congruentes. Sin embargo, no por este reconocimiento verbal que expresaron, se vio que posteriormente en los otros problemas del taller, los estudiantes lo tuvieran necesariamente en cuenta.

Estos resultados ponen de presente la difícil labor de los docentes para elaborar talleres que no sean para evaluar lo que supuestamente el estudiante ya sabe, sino para promover algo nuevo en los estudiantes con respecto a las matemáticas para lo cual se requiere que sean los estudiantes quienes exploren, descubran y concluyan. Es claro que aun después de haber elaborado varias versiones del taller, se requiere hacerle modificaciones tanto en la manera de preguntar, como en las tareas mismas, pero sobre todo en la forma de implementarlo. Creemos que es indispensable abrir espacios frecuentes durante su implementación para compartir y discutir las respuestas y así permitir que los estudiantes se cuestionen, lleguen a consensos y avancen en su comprensión.

Los docentes que participamos de la experiencia, mediante las actividades en que estuvimos involucrados, ampliamos nuestro conocimiento acerca del concepto de fracción y sus significados. Basados en esta experiencia, nos damos cuenta de que la comprensión y apropiación de una interpretación o significado de la fracción va más allá de las tareas que tradicionalmente proponemos a nuestros estudiantes y exige mucho más que plantear cada interpretación como una simple definición. Nos dimos cuenta de que algunos aspectos matemáticos que a simple vista parecían sencillos de enseñar o pensábamos que no era necesario analizar, en el fondo influyen notoriamente en el manejo del concepto de fracción y es necesario que los estudiemos con cuidado. Es el caso de la representación numérica, entre otros.

Todo el trabajo realizado, pero en particular el análisis de las respuestas al taller, nos lleva a revisar y replantear la forma en que presentamos y miramos los resultados de las diferentes tareas, trabajos y actividades asignadas a los estudiantes para que su aprendizaje sea exitoso. Hacer el análisis de las respuestas, interpretar lo encontrado y escribirlo, fueron actividades de mucha dificultad para nosotros, pues implicaron dejar atrás toda una vida de mirar los resultados de los estudiantes en términos de lo apropiado o no de la respuesta, y hacer un ejercicio previo de imaginar posibles respuestas y descubrir en ellas otros aspectos del trabajo matemático que sirvan como indicios de lo que pasa en el estudiante. Sin embargo, a la vez fueron actividades muy enriquecedoras y cuestionadoras que desde ya nos han conducido a detenernos un poco cuando hacemos preguntas a los estudiantes, cuando escuchamos o miramos sus respuestas, y cuando las calificamos o sometemos a juicio. En particular somos conscientes de que una respuesta correcta no es necesariamente indicio de comprensión, tal como se vio en el análisis.

REFERENCIAS

Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (traducción de Luis Puig de textos seleccionados, documento no publicado). México: CINVESTAV-IPN.

Gómez, C. (1998). Números racionales y razonamiento proporcional: una propuesta curricular basada en los estándares del NCTM. *Revista EMA*, *3* (2), 112-132.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc., Publishers.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Editorial Síntesis.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática, 4* (2), 30-54.

Martin, L., Kieren, T. y Pirie, S. (1994). Mathematical images for fractions: help or hidrance? En J. da Ponte y J. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteen International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. III, pp. 247-254). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Morris, A. (1995). Meaningful instruction in fractions: Implementing a theory in a low-achieving mathematics classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17* (3), 16-40.

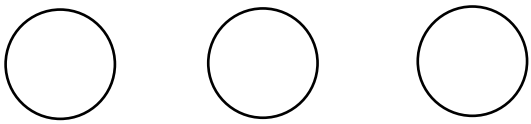
Obando, G. y Riascos, F. (1993). Experiencia pedagógica en matemáticas. Areas y fracciones (documento no publicado). Bogotá: Colegio Jefferson.

Luis Alejandro Bustos
Marina Ballén
Camilo Santana
Miriam Sierra
Héctor Méndez
Colegio Compartir Suba (J.T.)
Transversal 120 Nº 148-52
Bogotá, Colombia

APÉNDICE
TALLER DE MATEMÁTICAS

Nombre:____

I) A continuación encontrarás 3 pizzas, las cuales tendrás que repartir entre 4 personas, de tal forma que a cada una le corresponda la misma cantidad y no sobre.



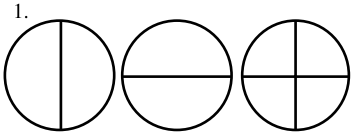
a. Describe con tus palabras la cantidad de pizza que le corresponde a cada persona.

b. Explica verbalmente el procedimiento que seguiste para dar respuesta a la actividad anterior.

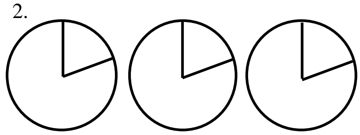
c. Escribe las razones por las cuales crees que tu respuesta cumple con las condiciones del ejercicio.[3]

d. Ahora, observa las respuestas dadas por tres personas al desarrollar la misma actividad. ¿En cuál o cuáles de las respuestas anteriores se cumplen las condiciones del ejercicio? Explica el porqué en cada caso.

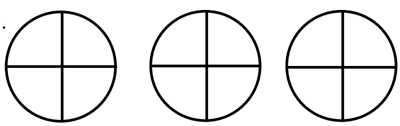
1.



2.

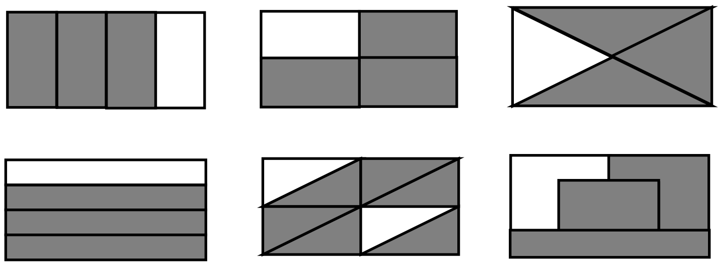


3.



II) En los siguientes dibujos cada rectángulo representa un pan; la parte sombreada corresponde a lo que comió cada uno de seis niños.

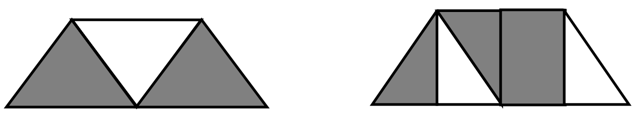
3. El enunciado d. debe ir impreso en una hoja distinta, que se presenta a los estudiantes después de que han desarrollado los puntos anteriores.



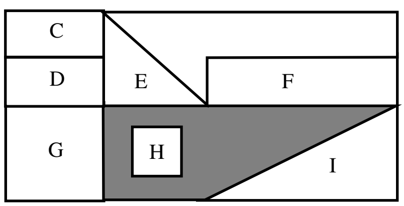
a. ¿Se puede decir que todos comieron la misma cantidad de pan? Explica las razones de tu respuesta.

b. Uno de los niños dice que todos comieron la misma cantidad de pan porque las partes sombreadas tienen la misma área. Explica con tus palabras qué quiere decir este niño.

c. En las siguientes figuras, ¿podrías indicar cuál de las partes sombreadas tiene un área mayor? Explica tu respuesta.



III) Responde las siguientes preguntas con base en la información suministrada por la siguiente figura. En cada pregunta expresa verbalmente los pasos que seguiste para encontrar la respuesta.



El rectángulo grande será nombrado como S

a. El área del cuadrado G, ¿cuántas veces contiene al cuadrado H?

b. El área del cuadrado G, ¿cuántas veces contiene al área del rectángulo F?

c. El área del triángulo E, ¿es igual o diferente al área del rectángulo C?

d. ¿Qué parte del área del triángulo I es el área del rectángulo D?

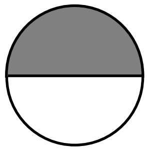
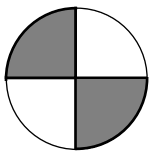
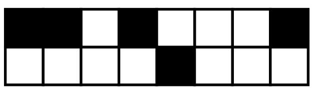
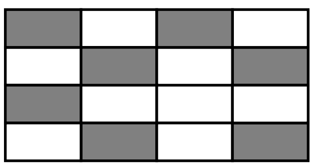
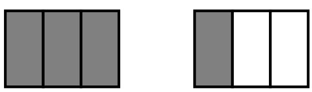
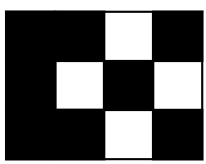
e. ¿Qué parte del área del rectángulo S es el área del cuadrado G?

f. El área de la región sombreada, ¿cuántas veces contiene al área del cuadrado H?

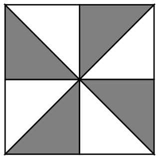
g. ¿Qué parte del área del rectángulo S es el área del triángulo I?

h. El área del triángulo I, ¿cuántas veces contiene al área del cuadrado H?

IV) Relaciona la representación verbal, gráfica y numérica en las siguientes fracciones y explica el porqué de 3 (tres) de esas relaciones.

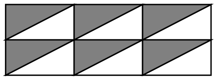
seis doceavos		2/4
siete doceavos		1/2
tres cuartos		4/3
ocho doceavos		8/12
un medio		5/16
cuatro octavos		6/12

dos cuartos



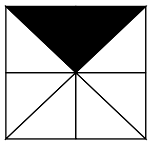
3/4

cuatro tercios



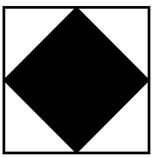
4/8

cinco dieciseisavos

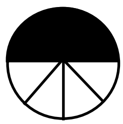


7/16

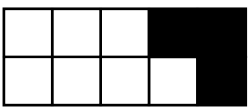
V) Expresa en forma verbal y numérica la fracción que corresponde a la región sombreada en cada figura.



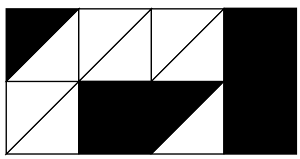
a



b



c



d

	Verbal	Numérica
a.	____________	____________
b.	____________	____________
c.	____________	____________
d.	____________	____________