REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 1, 47-69

UNA EXPERIENCIA DE AULA EN TORNO A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

PATRICIA PERRY, LUZ DIVIA RICO,
MARCOS BOLÍVAR Y DIANA CHAVES[1]

En la escuela es frecuente que para introducir la gráfica cartesiana de la función de expresión simbólica $f(x) = x^2$*, se parta de dicha expresión para hacer una tabla de valores, se determinen los correspondientes puntos en el plano cartesiano y se trace "una curva suave" que conecte tales puntos. En este artículo presentamos detalles de una experiencia de aula que buscaba plantear una estrategia metodológica alternativa a la ya mencionada. Somos conscientes de la necesidad de hacerle modificaciones, sin embargo creemos que darla a conocer permite a profesores colegas ver la posibilidad de tomar rutas diferentes en la enseñanza del tema. Además, nos parece importante mostrar la gran cantidad y diversidad de información relevante para aproximarse a la comprensión de los estudiantes, que pudimos acopiar a partir de sus producciones al hacer una observación directa mientras los alumnos trabajaban y también al mirar con detenimiento el trabajo escrito de ellos.*

The cartesian graph of a quadratic function is usually introduced in school by making tables of values, plotting the correspondent points and then joining them with a "soft line". In this paper we present some details about a classroom experience aimed to make an alternative methodological approach. We are aware that it may be necessary to modify some of this approach aspects, however describing it here could show our colleagues that is possible to innovate teaching of this particular topic. It is important for us to show the great deal and diversity of relevant information for approximating students´ understanding, we could get from their written work and direct observation while they were working in the classroom.

Palabras claves: función cuadrática, gráfica cartesiana, diseño curricular, desarrollo curricular, básica secundaria.

1. Agradecemos a Luisa Andrade, Edgar Guacaneme y Hernando Alfonso por sus valiosos comentarios a las versiones preliminares de este artículo.

INTRODUCCIÓN

Durante el año 2002, por iniciativa de las directivas de la Fundación Compartir y con el apoyo financiero de tal entidad, los profesores de matemáticas del Colegio Compartir (sede Suba, jornada de la tarde) participaron en un programa de desarrollo profesional a cargo de "una empresa docente". En el segundo semestre se acordó llevar a cabo una actividad de indagación en el aula en la que la tutora pudiera asumir un papel de acompañante más que de asesora.

La actividad que entonces llevamos a cabo tenía como propósito principal abrir un espacio para vivir una experiencia de diseño y desarrollo curricular en torno a un tema matemático específico; es decir, se pretendía que en la práctica, pudiéramos concretar para un tópico matemático muy puntual, un significado de las acciones de:

- analizar aspectos del contenido matemático, de la enseñanza y aprendizaje del mismo;
- elaborar una secuencia de tareas con una intención específica y hacer previsiones con respecto a las producciones de los estudiantes;
- planear detalles de la implementación de tal secuencia de tareas;
- observar directamente el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes;
- describir y analizar las producciones de los estudiantes.

En este artículo nos proponemos hacer una breve descripción del taller que diseñamos y de su implementación, presentar unos resultados y, para terminar, exponer algunas consideraciones ligadas a la experiencia vivida.

EL TALLER

Descripción general

El taller tenía la intención de que los estudiantes, como resultado de considerar, en la representación tabular, características de la relación que asocia a un número su cuadrado, pudieran ver que la gráfica de tal relación debe tener necesariamente algunas características: es una curva suave y no una línea poligonal, es abierta, una parte de su trazo es descendente y la otra es ascendente, y es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

La estrategia didáctica para abordar el tema matemático pretende propiciar que el estudiante: (i) advierta —con base en la información de una tabla de valores— que la relación que asocia a cada número su cuadrado (para números no negativos) es funcional y es creciente; (ii) llegue a ver cómo deben reflejarse tales características de la relación en la que sea su gráfica cartesiana; (iii) haga un esbozo de la gráfica cartesiana teniendo como dominio de variación a [0, 4]; (iv) advierta que para los reales negativos, la relación es funcional y es decreciente: (v) identifique y explicite diferencias y semejanzas de la relación para valores negativos y no negativos; (vi) advierta la relación de simetría entre las dos ramas de la curva; (vii) haga la gráfica de la relación con dominio de variación [-4, 4].

El taller está conformado por tareas y preguntas planteadas por escrito a través de dieciocho numerales; los enunciados son textos más o menos cortos cuyo contenido requiere de parte del estudiante una lectura cuidadosa y completa (véase el Apéndice). Un rasgo característico del taller es que en todos los numerales se solicita registrar por escrito la explicación o justificación para las respuestas dadas. Otro rasgo es que utiliza pocos términos matemáticos especializados y en cambio pretende poner en juego ideas centrales que hacen parte del significado de tales términos.

Detalles de la implementación

Este taller se implementó, en calidad de experimento, con diez estudiantes, cinco hombres y cinco mujeres, de grado once, provenientes de dos cursos diferentes. Los eligió su profesor de matemáticas entre los alumnos que durante el año lectivo fueron aplicados en sus tareas escolares y extraescolares; esto se hizo con el fin de facilitar la implementación, dada la exigencia tanto en contenido como en cantidad de trabajo, pues realizar el taller no hacía parte del trabajo del curso. Para desarrollar el taller, los estudiantes trabajaron en grupos[2] de a dos —un hombre y una mujer.

Durante la implementación estuvimos presentes los cuatro autores de este artículo y un profesor de física del colegio que participó ocasionalmente en el programa de desarrollo profesional que enmarca esta experiencia; cada uno estuvo en calidad de observador de un grupo. Habíamos previsto la posibilidad de interactuar ocasionalmente con los alumnos para evitar que algunas respuestas inadecuadas obstaculizaran el desarrollo fluido del trabajo, pero la idea era no hacerles comentarios que les redujeran la responsabilidad del trabajo que tenían entre manos. Así, cada observador anotó detalles de las acciones que los estudiantes realizaron para desarrollar el taller —notas

2. En este artículo hacemos referencia a los diferentes grupos usando las abreviaturas G1, G2, G3, G4 y G5.

que nos permitieron dar cuenta de detalles que no quedaron registrados en las respuestas escritas de los estudiantes—, pero también dio orientaciones cuando fue necesario. Se hizo una grabación de audio en dos de los grupos.

Se había planeado hacer la implementación del taller en dos sesiones, cada una de noventa minutos, en dos días consecutivos y en caso de que ese tiempo no fuera suficiente, se tenía previsto pedir a los alumnos que terminaran el trabajo en la casa; sin embargo, no fue posible cumplir tales planes y la implementación del taller se hizo en dos sesiones el mismo día, con un receso de media hora; la primera sesión tomó hora y media, y la segunda, una hora para cuatro de los grupos y hora y media para el otro grupo (G5).

A cada uno de los estudiantes se le entregó una copia de la guía de trabajo y hojas de papel cuadriculado; se aclaró a los estudiantes que a pesar de estar en la biblioteca —lugar donde no se permite hablar— los alumnos de un mismo grupo podían hablar entre ellos para realizar el trabajo.

Al iniciar el desarrollo de la guía, en cada grupo se percibió que los dos integrantes estaban atentos y cuidadosos al leer cada pregunta, con un buen grado de involucramiento en la conversación que sostenían para llegar a una respuesta y con una buena disposición para escribir sus respuestas; hacia la mitad del taller se advirtió que en los diferentes grupos, uno de los dos estudiantes jugaba un papel más activo en la interacción y el otro lo apoyaba en las respuestas dadas; en la última parte se percibió mayor rapidez en la solución de las tareas, hecho que se puede vincular a dos condiciones: por una parte, los estudiantes estaban cansados —pues llevaban en la actividad casi el tiempo equivalente a tres horas de clase— y querían terminar pronto, y por otra parte, habían logrado cierta claridad en relación con el asunto de la guía y no requerían considerar las respuestas tan detenidamente.

ALGUNOS RESULTADOS

Como parte del análisis de la información recogida tanto en la observación directa como en las producciones escritas de los grupos, inicialmente describimos con todo el detalle que nos fue posible el desempeño de cada uno de los cinco grupos en relación con cada uno de los numerales que configuran el taller. Posteriormente, en tales descripciones procedimos a buscar semejanzas y diferencias entre los grupos con el fin de hacer una sola descripción que diera cuenta, para cada numeral, del desempeño de los grupos. Luego de lograr dicha descripción procedimos a buscar en ella puntos que nos fueran dicientes y significativos para nuestra experiencia y conocimiento profesional. Es así, como llegamos a unos resultados importantes para nosotros porque nos ayudan a ver la complejidad que hay detrás de la enseñanza y el aprendizaje del tópico en cuestión.

En los siguientes dos apartados incluimos resultados relativos, en primer lugar, al trabajo y conocimiento de los estudiantes que puso en juego el taller y, en segundo lugar, al logro de los propósitos planteados para el taller.

Con respecto al trabajo y conocimiento matemático de los estudiantes

El trabajo bajo el esquema de taller

En términos generales, los estudiantes pudieron enfrentar el desarrollo de la guía de trabajo a pesar de que las tareas propuestas allí les exigió realizar acciones a las que no necesariamente estaban habituados como, por ejemplo, la lectura e interpretación de textos relativamente complejos en su redacción para enterarse de lo que se les pedía hacer, la consideración de asuntos matemáticos con respecto a los cuales ni el profesor ni un libro habían dado previamente información acerca de cómo proceder o qué tipo de respuestas eran las deseables o esperadas, y la explicitación por escrito de explicaciones y/o razones para las respuestas dadas.

La conversación en los grupos

Durante el desarrollo de todo el taller se dio una interacción entre los dos integrantes de cada grupo en torno a lo que les planteaban las tareas y en ese sentido puede decirse que efectivamente hubo trabajo en grupo. En tal interacción, uno de los integrantes del grupo (casi siempre el mismo) leía en voz alta el enunciado completo del numeral que iban a trabajar, luego se llevaba a cabo una breve conversación para resolver cada tarea o pregunta específica, y al final, uno de los estudiantes (siempre el mismo) escribía la respuesta. Hacia el final de la actividad se advirtió un cambio en la interacción en el sentido de que fue más evidente el liderazgo de uno de los dos integrantes, cambio que se reflejó en una aceptación sin mayor consideración de lo dicho por el líder.

En general, la conversación en los grupos se constituyó mediante la expresión de las ideas que cada quien quiso explicitar al respecto del asunto que estaban considerando ya fuera con la intención de proponer, complementar, ratificar, pedir aclaración, o corregir lo expuesto por el otro; en cambio, en ninguno de los grupos se percibió que los dos integrantes se involucraran en una discusión con la clara intención de dilucidar la idea expuesta más aceptable o correcta en el caso de que se hubieran explicitado ideas diferentes. Por ejemplo, al respecto de la respuesta al ítem d) del segundo numeral, los integrantes de G5 sostuvieron un intercambio en el que percibimos que inicialmente tenían puntos de vista diferentes pues la estudiante se estaba enfocando en la variación de los cuadrados y lo estaba haciendo con referencia a la variación ascendente de los números asignados, mientras que el muchacho se estaba enfocando en la correspondencia número-cuadrado para las diferentes parejas de la tabla; al parecer, en el diálogo que tuvieron, cada uno de ellos pudo explicitar y explicar al otro lo que estaba viendo y consideraron que ambas ideas eran verdaderas, pero no tuvieron criterio para decidir cuál perspectiva respondía a la pregunta formulada en el taller y en consecuencia procedieron a reportar por escrito ambas ideas como respuesta:

> El enunciado es falso, ya que a medida que el valor crece, se sabe que el cuadrado también crece.
> Cuando el número es anterior a 1, a nivel general el cuadrado va en aumento, pero independientemente, el cuadrado es menor al número trabajado.

La explicación o justificación de sus respuestas

En general, en las producciones escritas vimos un esfuerzo importante de los alumnos para explicar o justificar las respuestas dadas. Reconocemos indicios de ello en la construcción de oraciones completas, casi siempre con sentido (aunque no necesariamente acertadas), en las que se presentan elementos que al parecer tienen la intención de parafrasear y/o ampliar lo dicho previamente o de dar razones; también encontramos indicios en el recurso a enunciados generales. Las siguientes dos citas de las respuestas dadas respectivamente por G2 y G4 al tercer numeral pueden ilustrar a qué nos estamos refiriendo:

> De acuerdo con la tabla, para cada número asignado siempre existe su cuadrado ya que siempre que tomemos un número y lo elevemos al cuadrado nos va a dar un resultado. Para cada número asignado, su cuadrado es único ya que a la hora de elevar un número al cuadrado siempre nos va a dar el mismo resultado para ese número. A medida que los números van siendo más grandes, sus cuadrados van siendo más grandes ya que como dijimos son directamente proporcionales. (G2)

> Siempre que vayamos a buscar el cuadrado de un número nos daremos cuenta que sí existirá su única respuesta; el número que tomemos, cualquiera que sea, tendrá una sola respuesta porque es imposible afirmar y no se puede mostrar que un número al cuadrado tenga más de una respuesta. En cuanto al tema de si los cuadrados van siendo más pequeños o más grandes a medida que los números asignados son más grandes, podemos afirmar que si el número asignado está entre 0 y 1, siempre su cuadrado será menor; el resto de los números, su cuadrado será mayor al número. (G4)

Cabe una aclaración con respecto a lo dicho anteriormente. Aunque detrás del recurso a un enunciado general con sentido podemos ver un esfuerzo de parte de los estudiantes por explicar o justificar sus respuestas, creemos que es importante ser cautelosos con tal interpretación sobre todo en situaciones en las que el enunciado surge a partir de casos particulares que no cubren las diversas posibilidades pues, incluso si se tratara de un enunciado verdadero, podría no ser acertado inferir que quien lo expresa comprende realmente lo que dice ya que es posible que no haya hecho la consideración efectiva de la generalidad a la que se refiere. Por ejemplo, bien podría suceder que la afirmación "Siempre que vayamos a buscar el cuadrado de un número nos daremos cuenta de que sí existirá su única respuesta", como posible respuesta al quinto numeral hubiera sido establecida sin tener siquiera la consciencia de que a través de la expresión "un número" se están incluyendo todos los números, incluso los irracionales sobre los cuales puede no haberse hecho consideracion alguna.

La expresión de las ideas por escrito

En varias ocasiones pudimos darnos cuenta de la diferencia que hubo entre lo dicho en el diálogo y lo que quedó registrado por escrito: tal diferencia se refiere a la forma de expresar las ideas, cuando no al contenido de las ideas mismas, y también a la cantidad de información registrada. Los siguientes tres casos pueden ayudarnos a ilustrar lo dicho. Un primer caso lo vimos en el marco de la respuesta al ítem c) del segundo numeral, cuando uno de los integrantes de G4 expresó "sólo hay un único cuadrado para cada número" afirmación con la que estuvo de acuerdo su compañero, pero que en el proceso de registrarla se transformó en "sólo tiene una respuesta y es exacta". Un segundo caso está vinculado al ítem d) del segundo numeral, cuando uno de los integrantes de G3, señaló que la afirmación era falsa y explicó "porque los números van ascendiendo", sin embargo, lo que registró por escrito el otro estudiante fue "es falso, porque a medida que vamos multiplicando un número su resultado va a ser mayor". Como tercer caso incluimos la razón que uno de los integrantes de G4 adujo durante el diálogo, pero no quedó registrada por escrito en la hoja de respuestas, con respecto a los valores a asignar al número en la tabla de valores: "Para qué incluir al uno si su cuadrado es uno?".

Conocimientos matemáticos que puso en juego el taller

Percibimos que algunos estudiantes tienen poca familiaridad con los números racionales no enteros en su expresión decimal y, en particular, advertimos que para ellos no es usual emplear tales números en una tabla de valores. Esto se hizo notorio a través de la explicitación de algunas preguntas y dudas por parte de los alumnos en relación con el primer numeral. Vemos evidencias en los siguientes tres casos. Cuando comenzaron a abordar la primera tarea, los alumnos de G4 estaban sorprendidos de que hubiera tantas casillas que llenar entre 0 y 4, pero cuando el observador que estaba con ellos les preguntó "¿No hay números intermedios?", inmediatamente dijeron "debemos incluir números decimales". Cuando iban a completar la segunda fila de la tabla, los alumnos de G2 expresaron su duda acerca de si es posible obtener el cuadrado de un número decimal y los de G5 tenían duda de si el cuadrado, en el caso de un número decimal no entero, "afecta tanto a la parte entera como a la parte decimal".

También en el marco de la elaboración de la tabla de valores, nos llamó la atención la manera en que dos grupos procedieron para asignar valores al número. Supusieron tácitamente que los valores debían ir de tanto en tanto, por razón de organización de los datos, y procedieron a buscar al tanteo esa diferencia. Veamos qué fue lo que hizo G1: con una diferencia de 0.4 —obtenida de dividir 4 por 10— fueron generando, a partir de 0, la secuencia de valores hasta advertir que de esa manera les quedaba faltando un valor; entonces buscaron otro valor de diferencia dividiendo 4 por 9, valor que tampoco les sirvió; en el tercer intento, dividiendo 4 por 11, tomaron 0.36 como diferencia, lo que les permitió llenar la tabla atendiendo las instrucciones de la pregunta. Por su parte, G5 ensayó con tres valores de diferencia (0.7, 0.8 y 0.4), sin que haya sido evidente cómo los eligieron; antes de que se dispusieran a elegir un cuarto valor de diferencia, el observador que estaba con ellos les preguntó si el enunciado imponía la condición de que los números fueran de "tanto en tanto", a lo que respondieron negativamente y enseguida, uno de los alumnos asignó el valor de 3.8 al número que faltaba.

Tratando de comprender, o por lo menos describir, el proceder de los alumnos al determinar la diferencia como lo hicieron, vemos que no pusieron en juego un conocimiento que se podía esperar que tuvieran, el correspondiente a progresiones aritméticas: si en la situación que tuvieron entre manos, hubieran reconocido la presencia de una progresión aritmética y supieran qué relación vincula al número de términos (n), la diferencia (d), el primer término (a_1) y el último (a_n), habrían podido plantear y solucionar la ecuación $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ para calcular el valor de la diferencia. Por otro lado, centrando la atención en cómo procedieron los dos grupos después de haber constatado que el primer valor que pusieron a prueba (0.4 y 0.7) no les servía, vemos que no hicieron un análisis que les habría permitido saber en ambos casos que el valor que estaban buscando tenía que ser menor que el dado inicialmente.

Otro resultado interesante del que nos percatamos se dio cuando estaban completando la segunda fila de la tabla, se pudo evidenciar la sorpresa de los integrantes de G1 al advertir que para valores entre 0 y 1, el cuadrado de un número resulta menor que el número mismo; esto se pudo ver ya que los estudiantes después de haber usado la función elevar al cuadrado de la calculadora revisaron el resultado obtenido multiplicando el número por él mismo.

Pudimos advertir que varios estudiantes utilizaron las expresiones “directamente proporcionales” o “inversamente proporcionales” para referirse a que la relación entre las dos secuencias de números es creciente o decreciente respectivamente; evidencia de ello se tiene por ejemplo, cuando con respecto al ítem d) del segundo numeral, G2 registró por escrito “Es falso ya que a medida que el valor asignado aumenta, su cuadrado también aumentará, es decir, son directamente proporcionales”, y con respecto al decimotercer numeral, G1 afirma que “En el caso de elevar un número negativo, mientras que éste aumenta su cuadrado disminuye por lo tanto son inversamente proporcionales”. Por otra parte, el uso del término “proporción” en la respuesta de G1 al ítem c) del séptimo numeral, “No se observa una relación debido a que la gráfica nos muestra una línea recta la cual sugiere que se conserva la misma proporción” nos hace conjeturar que el significado de tal término puede estar aludiendo bien sea a que la pendiente es constante o a que la pendiente es 1.

Por otro lado, también encontramos empleados los términos “proporción” y “directamente proporcional” con significados difusos para nosotros. Veamos algunos casos: en relación con el ítem a) del séptimo numeral, G1 afirma que “No se ve una relación debido a que no hay una proporción adecuada entre la sucesión de puntos”; para el ítem d) del mismo numeral, G2 afirma que la gráfica sí representa la relación en cuestión porque “nos muestra una escala directamente proporcional y cumple con las condiciones que hemos tomado de los puntos anteriores”; la razón de G1 para explicar por qué la gráfica dada no puede representar la relación en cuestión (décimo numeral) señala que “No se conserva una proporción debida al unir los puntos ya que la línea se ubica en valores que no corresponden a la proporción”; explicando su respuesta para el decimoquinto numeral, G1 afirma que encuentra semejanzas en el comportamiento de la relación para valores positivos o negativos del número asignado “porque la proporción es la misma y el resultado es el mismo”.

Con respecto a la notación usada, en las respuestas a los numerales segundo y cuarto nos percatamos de que algunos estudiantes utilizaron la misma notación —una flecha vinculando dos números— probablemente con dos significados diferentes, el de *correspondencia* y el de *igualdad*.

$$1,2 \rightarrow 1,44 \qquad 1,8^2 \rightarrow 3,24$$

Con respecto al séptimo numeral, los estudiantes que recurrieron al uso de escalas —por sugerencia del observador— eligieron y mantuvieron la unidad de medida, hecho al cual pudo contribuir el uso de papel cuadriculado.

Con respecto al logro de los propósitos planteados para el taller

En términos generales, pensamos que el taller cumplió por lo menos parcialmente con los propósitos para los cuales fue diseñado. A continuación exponemos algún sustento para la aseveración hecha.

En primer lugar, los estudiantes fueron capaces de construir enunciados verbales referidos a las características de la relación que fueron abordadas en el taller. En los textos de respuesta al tercer numeral (se incluyen después de este párrafo) encontramos que los cinco grupos hacen mención explícita a la existencia y unicidad del cuadrado, y que sólo un grupo (G3) no intentó referirse de manera explícita al carácter creciente de la relación; este grupo, en cambio, se centró en señalar algo (no verdadero) con respecto a la correspondencia que define la relación: "su cuadrado que será mayor al número asignado". Ahora bien, al examinar el enunciado de G1, el hecho de que se mencione la relación de aumento entre los cuadrados sin la correspondiente referencia a la relación de aumento entre los números asignados nos sirve de indicio para pensar que los estudiantes no están enfocándose en la relación sino en el conjunto de los cuadrados. Al examinar el enunciado de G4 relativo a la tercera característica vemos que las dos partes que lo conforman se refieren a aspectos diferentes; la primera parte —copia textual del taller— alude a la variación de una de las variables (el cuadrado) cuando la otra variable (el número asignado) varía ascendentemente; la segunda parte se refiere a una característica de la correspondencia que define la relación de estudio para valores entre 0 y 1, al decir que "[para números entre 0 y 1] siempre su cuadrado será menor"; por tanto, consideramos que en esta respuesta, G4 mezcló dos aspectos de la relación en cuestión, a saber: la variación conjunta de las dos variables relacionadas y la correspondencia. Por su parte, los textos de G2 y G5 no nos dan indicios de que estén enfocados en algo diferente del carácter creciente de la relación, a pesar de que en ambos casos, las aclaraciones hechas sean incorrectas o imprecisas.

> Dentro de la relación y su cuadrado se observa que siempre existe un cuadrado para cada número, siendo único; observamos una relación de aumento entre los cuadrados. (G1)
>
> De acuerdo con la tabla, para cada número asignado siempre existe su cuadrado ya que siempre que tomemos un número y lo elevemos al cuadrado nos va a dar un resultado. Para cada número asignado, su cuadrado es único ya que a la hora de elevar un número al cuadrado siempre nos va a dar el mismo resultado para ese número. A medida que los números van siendo más grandes, sus cuadrados van siendo más grandes ya que como dijimos son directamente proporcionales. (G2)
>
> Para empezar a detallar lo que se observa en la tabla, debemos destacar que colocamos números ascendentes y no, descendentes; entonces, para cada número asignado siempre existe su cuadrado que será mayor al número asignado. Sí, para el número asignado, su cuadrado es único y no cambia. (G3)
>
> Siempre que vayamos a buscar el cuadrado de un número nos daremos cuenta que sí existirá su única respuesta; el número que tomemos, cualquiera que sea, tendrá una sola respuesta porque es imposible afirmar y no se puede mostrar que un número al cuadrado tenga más de una respuesta. En cuanto al tema de si los cuadrados van siendo más pequeños o más grandes a medida que los números asignados son más grandes, podemos afirmar que si el número asignado está entre 0 y 1, siempre su cuadrado será menor; el resto de los números, su cuadrado será mayor al número. (G4)
>
> Siempre va a existir el cuadrado de todo número y éste no varía, es decir, siempre será único. A medida que un número crece, su cuadrado lo hace de igual forma. (G5)

Por otra parte, para dar cuenta del comportamiento de la relación en el caso de los valores negativos considerados en la tabla, en lo concerniente a los tres puntos ya tratados para los positivos (decimotercer numeral), todos los grupos elaboraron por escrito una respuesta completa, clara y acertada. Sin embargo, cabe reportar un hecho notable: los integrantes de G5 al basarse en la tabla para dar su respuesta relativa a si la relación es o no creciente, recorrían los valores asignados al número de izquierda a derecha sin advertir que, tal como estaba escrita, esa secuencia era decreciente y en consecuencia, decían incorrectamente que “para los negativos, a medida que el número se hace más grande, el cuadrado se hace más grande”; el observador les hizo caer en la cuenta de la manera como estaban organizados los valores asignados al número y ellos reformularon su respuesta así: "a medida que el número crece, su cuadrado va disminuyendo".

Frente a las tareas de determinar si hay o no diferencias y semejanzas en el comportamiento de la relación para los positivos y los negativos (undecimocuarto y undecimoquinto numerales), aunque no todas las respuestas se refirieron a todo lo que se pedía y en la explicitación verbal de las ideas se pueden detectar errores e imprecisiones, en general, las consideramos indicios de que los estudiantes vieron características de la relación en cuestión. En particular, hubo mención explícita a: la unicidad del cuadrado de cada número (G3), el crecimiento o decrecimiento (G2, G3, G4), el cuadrado de cualquier número es positivo (G2, G3), el cuadrado de un número y el de su opuesto son el mismo (G1, G3, G4). A continuación se presentan las respuestas de los cinco grupos:

> No hay diferencia debido a que al no importar si un número es positivo o negativo, el cuadrado será el mismo. Si hay semejanza porque la proporción es la misma y el resultado es el mismo. (G1)

> Que cuando un número negativo es elevado a una potencia par su resultado es positivo; cuando los valores dados son positivos, son proporcionales y cuando los valores dados son negativos, los resultados son inversamente proporcionales. La semejanza es que los resultados de los cuadrados son positivos. (G2)

> Sí encuentro diferencia ya que si los positivos aumentan los cuadrados aumentan, mientras que los negativos si aumenta el número su cuadrado disminuye. Sí existen semejanzas: tanto negativos y positivos tienen un único cuadrado; al hacer una gráfica en el plano cartesiano con números negativos y positivos, por ejemplo, $1,\ 2$ y $-1,\ -2$ su cuadrado es positivo el cual es 1 y 4, y al representarlos se reflejan los positivos en los negativos. (G3)

> Con todos los números positivos a excepción de los números entre 0 y 1, entre mayor sea el número, mayor será el cuadrado; por otro lado, los números negativos, menor es el número, mayor el cuadrado. Cuando es el mismo número, no importa si es positivo o negativo, el cuadrado siempre es igual; ejemplo $9,2 \to 84,64$ y $-9,2 \to 84,64$. (G4)

> En los dos primeros aspectos es igual al caso con los números negativos. Con respecto a sus cuadrados es lo contrario a los números positivos. (G5)

Cabe destacar que casi todos los estudiantes en algún momento del desarrollo del taller, vieron —sin la mediación de una tarea que tuviera tal intención— que para valores entre 0 y 1, el cuadrado de un número es menor que el número, en tanto que para valores mayores que 1, el cuadrado de un número es mayor que el número mismo. Relacionado con lo anterior, percibimos una dificultad de algunas personas para enfocar la variación conjunta de las variables relacionadas y más bien, una tendencia a concentrarse en la correspondencia.

Por otra parte, no obstante las deficiencias del enunciado del sexto numeral en lo que tiene que ver con su formulación (más adelante hablaremos al respecto, p. 62), las respuestas dadas por dos grupos nos permiten conjeturar que sus integrantes fueron conscientes del carácter creciente de la relación para números positivos al poner en juego tal información para argumentar con respecto al posible valor del cuadrado de un número sin necesidad de calcularlo. A continuación se transcriben las respuestas a los ítems a) y d) dadas respectivamente por G5 y G4:

> Es falso ya que el cuadrado de 4 es 16 y al ser 3,85 menor que 4, su cuadrado va a ser menor y va a oscilar entre el cuadrado de 4 y el de 3,8. (G5)

> Sabemos que el cuadrado de 3 es 9 y el cuadrado de 4 es 16 y entonces al ser 3,85 mayor que 3 y menor que 4, sabremos que el resultado está entre 9 y 16. (G4)

En segundo lugar, consideramos que varios estudiantes pudieron ver cómo se reflejarían en una gráfica cartesiana los hechos de que una preimagen tuviera dos imágenes y de que una relación no fuera creciente. Además, pudieron ganar alguna consciencia acerca de que la gráfica de la relación estudiada es una curva suave y no una línea poligonal o una curva cualquiera. De las justificaciones dadas por los grupos a la tarea planteada en el séptimo numeral, las siguientes nos dan indicios positivos en relación con lo que intentaba lograr el taller:

> [Con respecto al ítem b] debido a que la sucesión de puntos no es uniforme y se presenta una inconsistencia al denotarse una disminución en los valores lo cual es ilógico al ser una función en aumento. (G1)

> [Con respecto al ítem a] pues hay dos puntos en la misma línea. [Con respecto al ítem b] pues el punto del número menor está más arriba del punto del número mayor. (G3)

> [Con respecto al ítem a] porque para un mismo número no hay dos cuadrados. [Con respecto al ítem b] porque el cuadrado de un número mayor no puede ser menor al de un número menor. (G4)

> [Con respecto al ítem a] ya que hay dos puntos que indican un mismo número con distinto correspondiente. [Con respecto al ítem b] puesto que hay un punto que aumenta en una característica y disminuye en otra. (G5)

Adicionalmente, las razones expresadas por tres de los grupos para justificar la respuesta negativa que dieron al décimo numeral nos indican que los estudiantes comenzaron a ver que las características de la relación de estudio se deben reflejar en ciertos rasgos de la gráfica cartesiana y en consecuencia, a advertir que el hecho de que no se den tales rasgos informa sobre la imposibilidad de que una gráfica corresponda a la relación en cuestión. En particular, las razones dadas se refieren a que habría que aceptar que un número tiene dos cuadrados y que la relación no es creciente; a continuación se transcriben las respuestas de dos de los grupos:

> No se puede unir los puntos como se muestra en la gráfica porque la línea curva tocaría puntos que no están en la relación cuadrada, por otro lado nos podemos guiar porque un número tendría dos números cuadrados y también porque el cuadrado de un número menor estaría arriba de un número mayor. (G3)

> No cumple la relación que asigna a un número positivo su cuadrado porque el cuadrado de un número mayor no puede ser menor a un número menor. (G4)

En este punto cabe mencionar que en el diálogo de G3, uno de los integrantes señaló su duda acerca de cuál sería la curva precisa que representa a la relación, a la vez que trazaba otras tres curvas que pasaban por los mismos puntos marcados en la gráfica dada. Por otro lado, uno de los integrantes del grupo G5, aludiendo a una marca de la gráfica que pretende representar un hueco, preguntó "este cero ¿qué es?", después de una explicación de parte del observador, el estudiante indicó que "habría un número sin cuadrado".

Con respecto al numeral octavo que plantea una pregunta relativa a si se deben o no "unir"[3] los puntos ubicados en el plano cartesiano para representar la relación en cuestión en los números positivos y en caso de que se deban unir, si se debe hacer con segmentos de recta, al parecer ningún grupo se detuvo a considerar la primera parte de la pregunta. A la segunda parte,

3. Este término se usa con una acepción que aunque no está aceptada por la Real Academia Española de la Lengua, la consagra el uso: unir puntos es conectarlos mediante una línea.

tres de los grupos (G2, G3 y G5) respondieron que "se pueden unir con segmentos de recta"; sin embargo, G2 añadió que "[…] o simplemente teniendo en cuenta siempre los valores que se correspondan que conllevan a una línea curva". Cuando G5 comenzó a abordar la tarea, uno de sus integrantes interpretaba el asunto de unir los puntos ubicados en el plano con segmentos de recta como un asunto de trazar las proyecciones ortogonales de los puntos sobre los ejes de coordenadas; ante esto, el observador les indicó que se trataba de "unir entre sí los puntos ubicados" y eso fue suficiente para que interpretaran la tarea como se quería; cuando el observador les preguntó si era necesario unir los puntos para poder representar la relación de interés en los positivos, respondieron que "no es un requisito indispensable para el entendimiento [para comprender la relación]". G1 respondió que "la forma más adecuada de unir los puntos no es mediante líneas rectas sino uniendo las coordenadas entre sí para así poder observar la diferencia entre el cuadrado y su base". Por su parte, G4 leyó de seguido los enunciados de los numerales octavo y noveno y de ellos sólo respondió al noveno.

Los alumnos de los tres grupos (G3, G4, G5) que desarrollaron la tarea planteada en el noveno numeral parecen haber vislumbrado algo de la problemática que hay detrás del trazo que conecta los puntos de la gráfica de la relación. Con base en la sugerencia dada en el numeral, G3 ubicó en un plano cartesiano los puntos (1, 1), (2, 4), (2.6, 6.76) y (3, 9) y unió con un segmento de recta los puntos de abscisa 1 y 3; a partir de la observación rectificaron la respuesta a la octava pregunta argumentando que "al trazar un segmento de recta no pasa por los puntos". En la gráfica del ítem d) del séptimo numeral, los integrantes de G4 dibujaron la misma escala para ambos ejes de coordenadas y unieron con segmentos de recta cada dos puntos que percibieron como consecutivos y en la misma gráfica ubicaron puntos de la tabla elaborada en el primer numeral, dándose cuenta de que algunos de esos puntos quedaban por fuera de la gráfica trazada; en el texto de respuesta establecieron que "al utilizar segmentos de recta podemos estar dejando por fuera algún dato, por esta razón los segmentos de recta no sirven para esta relación. Para esta es mejor utilizar un trazo"; en el diálogo que tuvieron este par de alumnos antes de responder por escrito uno de ellos mencionó un "trazo curvo" y "esto parece una parábola pero le falta la mitad". Por su parte, G5 llegó a concluir que "al momento de unir los puntos de parejas se podría realizar con un trazo curvo"; sin embargo, en el diálogo que tuvieron al respecto los dos alumnos y el observador fue evidente que uno de los estudiantes, a pesar de ver que un segmento de recta que unía a dos parejas de la relación dejaría de incluir a alguna pareja de la relación, en todo caso, veía la posibilidad de que la gráfica fuera hecha con segmentos de recta muy pequeños.

Con respecto a que la curva es abierta, no tenemos ninguna base para decir si los estudiantes pudieron ver tal hecho —a pesar de que la hayan trazado como tal— puesto que en el taller no se realizó ningún cuestionamiento que nos diera información pertinente; en lo que concierne a la simetría de la curva con respecto al eje de las ordenadas, creemos que sólo algunos estudiantes pudieron enfocar esta característica en la medida en que algunos grupos manifestaron el hecho y otros no lo hicieron.

Por estar vinculados al asunto relativo al logro de los propósitos planteados para el taller, consideramos conveniente hacer por lo menos algunos comentarios críticos frente a las tareas propuestas. Vemos que el taller no planteó tareas encaminadas a destacar lo que implica gráficamente el hecho de que todo número tiene su cuadrado, lo mismo que el hecho de que es una línea abierta. Tampoco se centró en mostrar que no puede ser una línea poligonal no sólo porque se dejan puntos por fuera sino porque se incluyen otros que no son de la relación. Por otra parte, no planteó tareas para que los estudiantes tuvieran que expresar verbalmente lo que veían acerca de la gráfica de la relación.

Consideramos necesario revisar cuidadosamente las tareas y preguntas propuestas en el taller, a la luz de las respuestas escritas de los alumnos, de lo que pudimos percibir en la observación directa y de una nueva reflexión que confronte las intenciones del taller con las tareas propuestas. Sin haber hecho la revisión mencionada, como resultado de la descripción del trabajo de los estudiantes, hemos identificado varios puntos en los que creemos que deberían hacerse modificaciones; a continuación, exponemos algunos de ellos.

Miremos por ejemplo la cuarta pregunta. Seguimos considerando que ésta es importante dentro del taller dado que pretende que los estudiantes vean que es posible generalizar para el intervalo [0, 4] lo dicho para los valores de la tabla hecha en la primera pregunta. Además, somos conscientes de que las respuestas de los cinco grupos estuvieron cerca de lo correcto; sin embargo, vemos que en este caso una respuesta correcta no necesariamente nos indica que se haya cumplido a cabalidad la intención, es decir, sospechamos que la respuesta correcta de los estudiantes no nos garantiza que ellos hayan visto que el asunto se cumple para todos los números del intervalo, en particular, para valores irracionales asignados al número; esta sospecha nos surgió a raíz de la duda expresada en G2 con respecto a la existencia del cuadrado de los decimales. Así, pues, vemos que sería necesario incluir otro numeral en el que se concrete una tarea que indague por el cuadrado de algunos números irracionales del intervalo.

También somos conscientes desde ya de la necesidad de modificar la tarea propuesta en el sexto numeral pues no logra su intención de precisar para casos particulares lo que implica saber que la relación es creciente: excepto, dos grupos, los demás respondieron correctamente estableciendo una relación de orden entre dos números específicos, sin poner en juego su consciencia de que la relación es creciente.

El hecho de que ninguno de los grupos hubiera considerado en el octavo numeral la pregunta acerca de si se deben o no unir los puntos para lograr la representación de la relación, nos hace ver la necesidad de enfatizar más en este asunto y quizás eso se logre reformulando la pregunta de manera que el estudiante tenga que pensar en qué representa una gráfica que no una algunos de los puntos correspondientes a parejas de valores de la tabla.

CONSIDERACIONES FINALES

Toda discusión académica entre un grupo de profesionales acerca de un tema específico deja aportes valiosos para la formación personal. Esto lo hemos podido constatar al participar en la realización de esta pequeña indagación en el aula, en particular, al participar en las discusiones acerca de la función cuadrática, tópico para el cual analizamos aspectos que se dan por sentados y no se tienen en cuenta ni en los programas de formación de docentes ni en la enseñanza a los escolares, aspectos tales como las características visuales de una representación gráfica, las componentes simbólicas de las representaciones algebraicas y las relaciones entre unas y otras; la variación conjunta de variables relacionadas en la función cuadrática como característica diferenciadora de las funciones polinómicas, concepto que nos facilitó entender mucho mejor el comportamiento de la función.

Implementar la guía de trabajo con una muestra de alumnos nos permitió ver cómo el estudiante, con sus conceptos previos y orientado por el maestro en situaciones previstas, puede llegar a tener ideas claras sobre un tema sin el tradicional discurso del maestro.

Nos percatamos de la importancia y necesidad de explorar con algún detenimiento respuestas de los estudiantes para las cuales no pudimos conjeturar alguna interpretación y que aunque tienen deficiencias en su formulación, tenemos la sensación de que lo que el estudiante quería expresar tiene sentido para él y podría esconder una respuesta aceptable para la respectiva pregunta.

Para la formación de profesores en ejercicio, este artículo que aquí presentamos permite vislumbrar el tipo de trabajo que se espera desarrollen los maestros como reflexión acerca de su práctica. La idea no es tener en un momento dado la solución a un determinado problema de su práctica; es más bien, involucrarse en un proceso de búsqueda de soluciones que probablemente nunca termina, pero que sí permite ir progresando tanto en la comprensión del problema como en su solución y además, propicia el desarrollo de la capacidad para abordar otros problemas del mismo tipo. Después de haberse involucrado seriamente en una experiencia como la que aquí se presenta, uno no es el mismo en su conocimiento profesional ni en la consciencia que de él tiene. En particular, destacamos a continuación un par de ideas que pueden ilustrar una perspectiva no usual entre los profesores.

Si se plantean tareas y preguntas que abran el espacio para que el estudiante observe hechos matemáticos, los analice, discuta con compañeros acerca de sus ideas, comunique y argumente por escrito sus ideas y las explicaciones y/o razones que puede aducir al respecto, habrá mucha información que recoger del trabajo de los estudiantes y con seguridad esa información dará luces al profesor acerca de las dificultades cognitivas de los estudiantes y cómo abordarlas. La información que se pueda recoger no será solamente acerca de si la respuesta dada por el alumno es o no correcta; habrá sinnúmero de detalles que pueden ser relevantes como realimentación para el trabajo del profesor y eso justificará plenamente los esfuerzos que éste haga para observar directamente el trabajo de sus estudiantes, siempre que pueda. Para sustentar lo dicho, repárese en la cantidad de información y la variedad de ella que hemos podido reportar con respecto al trabajo de los alumnos en el desarrollo del taller.

No hay tema matemático que no tenga su complejidad inherente y por tanto no requiera de un trabajo serio de diseño curricular para llevarlo al aula; tampoco hay tema matemático para el cual no sea posible hacer un tratamiento didáctico que propicie la búsqueda de significación y de conexión con otros conceptos, otras representaciones, otros temas. Para apoyar esta tesis, piénsese en el contenido de la información relativa al trabajo de los estudiantes que hemos reportado en este artículo, por ejemplo, lo que puede haber detrás de la 'simple' tarea de asignar valores a la variable independiente en una función. También, piénsese en cuál es la forma usual de presentar la gráfica cartesiana de la función $f(x) = x^2$ y el trabajo que fue posible en este taller para sólo tres particularidades de la gráfica.

Patricia Perry
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
E-mail: pperry@uniandes.edu.co

Luz Divia Rico
Marcos Bolívar
Diana Chaves
Colegio Compartir Suba (J.T.)
Transversal 120 Nº 148-52
Bogotá, Colombia

APÉNDICE
GUÍA DE TRABAJO

Vamos a ver algunas características de la relación que asocia a un número con su cuadrado y a ver cómo se plasman esas características en la gráfica cartesiana.

1) Organizados ascendentemente (de menor a mayor) en la tabla siguiente, escriban diez números **entre 0 y 4**, con sus correspondientes cuadrados.

un número	0										4
cuadrado del número	0										16

2) Con base en la tabla, respondan las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué valores asignaron al número?

   b. Para cada valor asignado, ¿encontraron algún valor que le corresponda? Den ejemplos.

   c. Para alguno de los valores asignados, ¿encontraron más de un valor que le corresponda? Si la respuesta es sí, den ejemplos; si no, expliquen por qué.

   d. ¿Es verdadero o falso el enunciado que se da a continuación? Explique el por qué de su respuesta.

A medida que el valor asignado es mayor, no se sabe si el número que corresponde, es decir, el cuadrado, es menor o mayor.

3) Escriban un texto en el que expresen detalles de lo que se puede observar en la tabla. Para ello deben referirse a:

   - si para cada número asignado, siempre existe su cuadrado,
   - si para cada número asignado, su cuadrado es único o hay más de un cuadrado para un mismo número,
   - si los cuadrados van siendo más pequeños o más grandes a medida que los números asignados van siendo más grandes.

4) En el texto anterior se habla sobre la relación que hace corresponder a un número su cuadrado, para el caso de los doce valores que se consideraron en la tabla. Tengan en cuenta otros valores entre 0 y 4 y determinen si lo que se afirma en el texto anterior también se puede aplicar a ellos. Registren por escrito su respuesta.

5) ¿Podría decirse que lo que se afirma sobre la relación en el texto escrito en la cuarta pregunta es cierto para **todos** los números positivos? Expliquen su respuesta dando ejemplos que involucren diversos números.

6) Para cada una de las cuatro afirmaciones siguientes determinen si es verdadera o falsa y expliquen el por qué de su respuesta. [**Sugerencia**: Imaginen qué lugar ocuparía el valor 3.85 en la tabla hecha en la primera pregunta. Utilicen esa información para responder la pregunta.]

   a. El número que corresponde en la relación a 3.85 es mayor que 16.

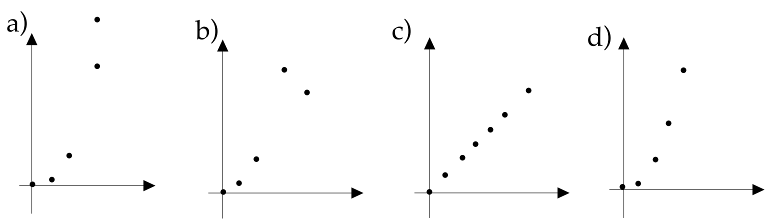
   b. No se puede saber nada con respecto al número que en la relación le corresponde a 3.85 sin haber hecho antes el respectivo cálculo (es decir, sin elevar al cuadrado a 3.85).

   c. El número que corresponde a 3.85 en la relación es menor que 16.

   d. El número que corresponde a 3.85 en la relación está entre 9 y 16.

A continuación vamos a analizar cómo se traducen las características vistas de la relación en la correspondiente gráfica cartesiana.

7) En las siguientes cuatro figuras se muestran puntos que representan pares de valores en los que se hacen corresponder números mediante alguna relación. Para cada una de ellas, determinen si los puntos representados hacen o no parte de la gráfica de la relación que asocia un número con su cuadrado o si no es posible saberlo. Expliquen sus respuestas. Para responder esta pregunta tengan en cuenta las características vistas de la relación que estamos estudiando.
   Nota: Aunque no se da ninguna escala, asuman que la escala en los dos ejes de coordenadas es la misma..



8) Dos estudiantes del curso están tratando de obtener la gráfica de la relación que asocia a cada número positivo con su cuadrado. Para ello, ubicaron en el plano cartesiano las parejas obtenidas en la tabla y luego están hablando sobre dos asuntos: se preguntan si deben o no unir los puntos localizados y en caso de que sí deban unirlos, cómo deben hacerlo. Uno de ellos dice que sí deben unir los puntos y deben hacerlo

trazando segmentos de rectas. ¿Ustedes que dicen al respecto? Expliquen su respuesta lo más posible.

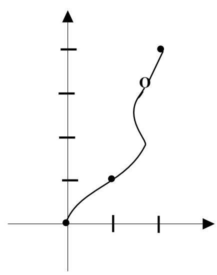
9) Si tienen dudas con respecto a lo que respondieron en la pregunta anterior, les sugerimos que:

   a. Consideren las parejas (1, 1) y (3, 9) que cumplen con la relación; ubiquen los respectivos puntos en el plano cartesiano y únanlos con un segmento de recta.

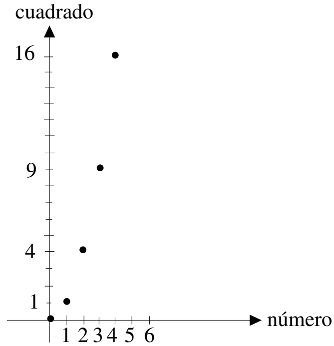
   b. Determinen otra pareja de números que cumplan con la relación y tal que el número asignado esté entre los dos números asignados en el ítem anterior, y ubiquen el respectivo punto en el mismo plano cartesiano en que ubicaron los puntos obtenidos en el ítem anterior.

   c. Revisen y reelaboren su respuesta a la pregunta 8 con base en lo que ven en la gráfica.

10) Un estudiante del curso que tiene ubicados en un plano cartesiano los tres puntos de coordenadas (0, 0), (1, 1) y (2, 4) se pregunta si para obtener la gráfica de la relación que asigna a un número positivo su cuadrado, podría unir tales puntos como se muestra en la siguiente figura. Respondan la pregunta y den razones que sustentan su respuesta.



11) La siguiente figura presenta puntos de la gráfica cartesiana de la relación que asocia a cada número positivo su cuadrado. Tracen el fragmento de gráfica que representa la relación para todos los valores que se pueden asignar al número, desde 0 hasta 4.



Hasta el momento hemos analizado la relación y su gráfica, asignando al número sólo valores positivos. Estudiemos ahora la relación, asignando al número valores negativos.

12) Organizados ascendentemente (de menor a mayor) en la tabla siguiente, escriban diez números entre –4 y 0, con sus correspondiente cuadrados.

un número	–4											0
cuadrado del número	16											0

13) Escriban un texto en el que expresen detalles de lo que se puede observar en la tabla. Para ello deben referirse a:

- si para cada número asignado, siempre existe su cuadrado,
- si para cada número asignado, su cuadrado es único o hay más de un cuadrado para un mismo número,
- si los cuadrados van siendo más pequeños o más grandes a medida que los números asignados van siendo más grandes.

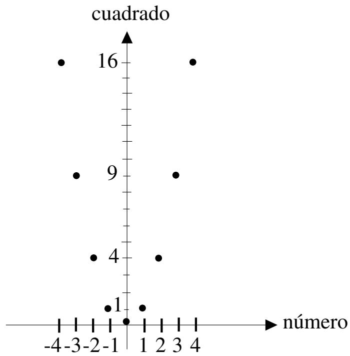
14) Teniendo en cuenta los aspectos considerados, ¿encuentran diferencias en el comportamiento de la relación para valores positivos o negativos del número asignado?, ¿cuáles?

15) Teniendo en cuenta los aspectos considerados, ¿encuentran semejanzas en el comportamiento de la relación para valores positivos o negativos del número asignado?, ¿cuáles?

16) Se puede hacer la gráfica de la relación que asigna a un número su cuadrado, para valores entre –4 y 0, utilizando la información de la gráfica de la relación para valores positivos (la que hicieron en la pregunta 11),

sin necesidad de recurrir a la tabla y ubicar puntos, uno a uno. ¿Ven ustedes la forma de hacer la gráfica? Expliquen su respuesta.

17) Hagan la gráfica de la relación para los valores entre -4 y 4.



18) Escriban un texto en el que destaquen las ideas más relevantes que pudieron ver en el desarrollo de este taller.