REVISTA EMA
2005, VOL. 10, Nº 2, - VOL. 10, Nº 3, 440-451

GRAFOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

El presente trabajo es una propuesta para introducir la teoría de grafos en la educación básica colombiana. Contiene una revisión de los aspectos matemáticos de la teoría de grafos incorporados en la secuencia de actividades y de algunos aspectos didácticos donde se examina la pertinencia del tema para la educación básica. Finalmente se presentan tres actividades diseñadas por nosotros, las cuales fueron aplicadas de manera experimental en un grupo de estudiantes de grado octavo, en un colegio distrital, junto con la reflexión acerca de la aplicación de la propuesta.

This article consists of a proposal to introduce Graph Theory in Middle School. It contains a review of the mathematics concepts and relations included in the sequence of activities designed, and a discussion of the didactical aspects involved, showing the relevance of including this topic in Middle School Mathematics. The activities designed are presented. Finally, some reflections, about the experimental application of the activities with eighth grade students, in a public school, are included.

Palabras claves: Educación Matemática, eduacion básica secundaria, grafos, secuencia de enseñanza, reflexión didáctica.

INTRODUCCIÓN

La presente reflexión es tomada del trabajo final presentado en la asignatura "Didáctica de la geometría" dentro del marco de la especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia en el segundo semestre de 2004. Es una secuencia de enseñanza que contiene tres actividades para introducir la Teoría de Grafos a estudiantes de grado octavo de la educación básica secundaria colombiana.

¿Por qué enseñar Teoría de Grafos en la educación básica? En primer lugar, el surgimiento histórico de la misma proporciona un excelente ejemplo de lo que significa la elaboración de un modelo matemático para el análisis de un problema real (el problema de los puentes de Könisberg resuelto por Euler) y sugiere un camino muy claro para organizar una secuencia didáctica encaminada a la práctica de la modelación. En segundo lugar, los contenidos y aplicaciones de la Teoría de Grafos están relacionados con muchos campos de la matemática (topología, combinatoria, matemática recreativa) y con otras disciplinas científicas (física, química, arquitectura, sociología). En tercer lugar, permite una presentación de los problemas en el marco de la matemática recreativa, lo que le da a los mismos una fuerte componente de motivación para los estudiantes.

A continuación presentaremos los aspectos matemáticos que enmarcan la secuencia de actividades diseñada, los aspectos didácticos que tomamos de referente, unos comentarios acerca de los resultados obtenidos después de que un grupo de estudiantes resolvieran las actividades y un análisis de las actividades.

Aspectos matemáticos que sustentan la propuesta

Ore (1963) describe de la siguiente manera un grafo.

> Está constituido por ciertos puntos A, B, C, D, E y F, llamados vértices y ciertos segmentos que unen pares de vértices, tales como AC, ED, etc., y que son los lados —o aristas— del grafo. Ver Figura Nº 1. (p. 13)

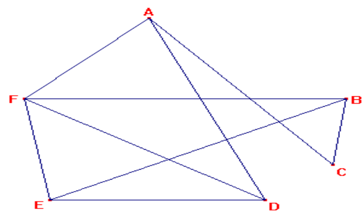


Figura Nº 1.

Esta es una idea muy general para hacer una primera aproximación intuitiva. Sin embargo, existen grafos que constan únicamente de vértices aislados (grafo vacío), y grafos en los cuales las aristas pueden tener una dirección definida a la manera de un vector (grafo orientado).

Los aspectos característicos que definen un grafo en particular son aquellos que permanecen invariantes a los estiramientos y todo tipo de deformaciones elásticas (transformaciones topológicas). A manera de ilustración podríamos decir: Si dibujamos un triángulo sobre una trozo de hule rectangular y jalamos de alguna de las esquinas de la lámina, el dibujo podría seguir representando una figura de tres lados, pero no se conserva la forma. En efecto, no es el mismo triángulo que presentamos originalmente, pues algunos de sus aspectos de forma, característicos en la geometría euclídea como son la amplitud de sus ángulos o la longitud y rectitud de sus lados, han variado considerablemente. Ver Figura Nº 2.

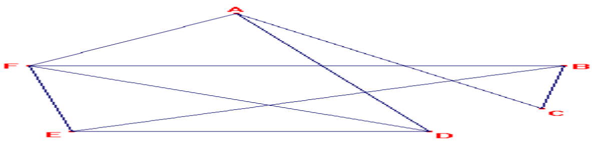


Figura Nº 2.

No ocurre así con los grafos pues en estos no importan los ángulos, ni la longitud o forma de los lados del grafo, en cambio son relevantes aspectos como: la conectividad entre vértices, la cantidad de lados que convergen en un vértice, la cantidad de aristas y de vértices, y en un grafo orientado, la dirección de las aristas, que no varían si se aplican estiramientos o contracciones de la representación del grafo. Por ejemplo, los grafos de la Figura Nº 3 se llaman isomorfos pues sus rasgos característicos como grafos permanecen invariantes (6 vértices, 9 aristas, y el orden de la conectividad).

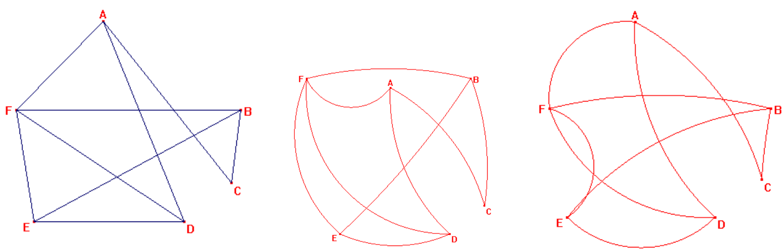


Figura Nº 3. Rasgos característicos de grafos que permanecen invariantes

En este trabajo nos limitamos a un tipo especifico de grafo, grafo conexo no orientado, en el cual todos sus vértices están conectados por medio de aristas (no hay vértices aislados). De esta clase de grafos interesa, para efectos del cumplimiento de los objetivos de la secuencia de actividades, el criterio para determinar si un grafo es recorrible o no recorrible, es decir, si partiendo de un punto puede recorrerse cada una de las aristas pasando por todas ellas una sola vez. En Teoría de Grafos, conviene establecer si un grafo constituye un circuito euleriano, semieuleriano, o no euleriano, Menendez (1998) presenta la definición de estos circuitos de la siguiente manera:

- Si todos los vértices del grafo tienen valencia par (…) se puede recorrer el grafo de una sola pasada y volver al punto de partida. En este caso, la ruta o circuito se denomina euleriano y el grafo en cuestión se denomina euleriano.

- Si el grafo tiene dos vértices con un número impar de aristas concurrentes, se le puede recorrer partiendo de uno de esos vértices y llegando al otro. A la ruta seguida en este caso se le denomina ruta semieuleriana y al grafo correspondiente grafo semieuleriano.

- Si el grafo tiene más de dos vértices con un número impar de aristas concurrentes. El problema no tiene solución. El grafo en cuestión es un grafo no euleriano" (pp. 11-26)

Aspectos didácticos que sustentan la propuesta

Utilizamos dos supuestos con un enfoque cognitivo particular a la didáctica de la matemática, para introducir la Teoría de Grafos. Esta última puede corresponder al tema topología en una dimensión, en el nivel de educación básica secundaria de los Estándares Nacionales.

El primer supuesto se refiere a lo enunciado por Piaget (1972a), sobre la manera como los niños construyen sus nociones espaciales. Afirma que las primeras intuiciones espaciales son de tipo topológico, es decir, intuiciones sobre las propiedades globales del espacio independientes de la forma, el color y el tamaño. Después, los niños distinguen las propiedades proyectivas y euclídeas alcanzando un equilibrio por lo general entre los nueve a diez años.

El segundo supuesto se sustenta en lo previsto en las corrientes constructivistas las cuales consideran que el niño forma los conocimientos por un proceso de construcción, producto de sus acciones y no por la recepción pasiva de información. En el caso de los conceptos de la topología, el niño tiene las nociones de interior, exterior, vecindad, conectividad, por mencionar algunas. Las nociones intuitivas de carácter topológico se han formado gracias a la acción de experiencias vividas en forma espontánea en la vida cotidiana, en las cuales no hay una intención educativa, como aquellas que se han programado en el currículo escolar.

Desde el punto de vista de la Educación Matemática, fundamentamos la propuesta en la perspectiva de la geometría escolar propuesta por Usiskin, que se cita en los Estándares Curriculares (2003):

> La geometría como estudio del mundo real y físico, o como la ciencia del espacio. Dimensión, cuyos inicios como herramienta para describir y medir figuras, ha evolucionado como una teoría de ideas y métodos que construye y estudia modelos idealizados del mundo

> físico y otros fenómenos idealizados del mundo real. De acuerdo con diferentes puntos de vista, se pueden mencionar las geometrías euclidiana, afín, descriptiva y proyectiva; también la topología y las geometrías no euclidianas.

Nos interesa esta perspectiva pues, como señalamos en la introducción, queremos enfatizar la relación que existe en la Teoría de Grafos entre las situaciones reales y su modelación matemática.

Reflexiones alrededor de las actividades

Presentaremos a continuación los supuestos que guiaron el diseño de la secuencia de enseñanza y en particular cada una de las actividades. Igualmente, explicitaremos las dificultades que tuvieron los estudiantes al realizar cada una de ellas y para finalizar reflexionaremos acerca de posibles problemas en la formulación de las actividades y los cambios que podrían darse en el diseño de las mismas para superar las dificultades encontradas.

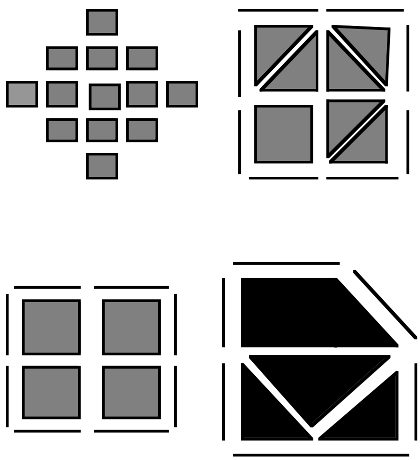
Actividad I

La primera actividad de la secuencia tenía como objetivos *que los estudiantes* elaboraran representaciones diagramáticas de situaciones reales y que representaran el grafo de una correspondencia entre conjuntos. En esta actividad partimos del supuesto de que los estudiantes no tienen un conocimiento formal de la Teoría de Grafos, pero suponemos que están en capacidad de tratar de representar, mediante un grafo, una situación que se les plantea.

El objetivo de esta actividad es hacer una introducción informal a los tópicos de la Teoría de Grafos que se quiere desarrollar con la secuencia de actividades (grafos conexos recorribles y no recorribles) mediante una adaptación del problema del cartero chino, un clásico problema en el cual se presenta una parte de un plano de una ciudad y el cartero debe recorrer calles y carreras entregando la correspondencia en determinados puntos, haciendo el recorrido más corto posible. En la Tabla Nº 1 presentamos la actividad, tal cual se le entregó a los estudiantes.

ACTIVIDAD I

A. *Los siguientes son los planos de conjuntos residenciales que debe recorrer un mensajero para entregar una correspondencia. Ayúdele a encontrar una ruta para recorrer todos los bloques con el menor esfuerzo posible*



1) Si encontró una ruta que usted considera óptima. ¿Por qué cree que es la mejor?

2) ¿En cuales de los casos fue más fácil encontrar una ruta óptima para el cartero?

3) Antes de buscar la ruta ¿Cuales de los planos parecen más sencillos para encontrar una ruta optima?

4) Intente hacer una gráfica de los planos de los conjuntos residenciales utilizando puntos para representar las entradas y líneas para las calles.

B. El problema de los noviazgos

- *María conoce a Andrés, Benito y Carlos*
- *Beatriz conoce a Benito y a Carlos*
- *Carmen conoce a Carlos, Esteban y Germán*
- *Daniela conoce a Andrés y Benito*
- *Elisa conoce a Andrés, Benito y Carlos.*

5) Represente mediante puntos y líneas esta situación.

6) ¿Es posible buscar un novio para cada mujer entre los hombres que conoce?

Preparen una exposición de las dos situaciones estudiadas.

Tabla Nº 1. Actividad I de la secuencia de enseñanza

Al proponer esta actividad a un grupo de estudiantes de grado octavo y observar sus actuaciones nos dimos cuenta que el objetivo que guió el diseño de la actividad I se alcanzó parcialmente.

En efecto, aunque queríamos que los estudiantes representaran la ruta óptima del cartero mediante un grafo, varios de los estudiantes encontraron las rutas óptimas, pero no entendieron que se les pedía que representaran el recorrido del cartero mediante puntos y líneas. Por esto la mayoría de ellos repitió el dibujo de los planos. Quizás esta situación se pueda mejorar formulando mejor la pregunta, pidiéndoles que planteen un modelo en el cual los puntos sean los bloques que debe visitar el cartero y las líneas los recorridos que hace este, es decir siendo mas explícitos.

En relación con la pregunta Nº 3 del item A, ¿Cuales de los planos parecen más sencillos para encontrar una ruta óptima?, la primera asociación que hicieron los estudiantes en relación con la ruta óptima y plano del conjunto fue con base en la percepción de la cantidad de bloques, pero después de experimentar sobre los planos la búsqueda de la ruta y de discutir en grupo sus resultados concluyeron que el mejor criterio para la ruta óptima es no repetir bloque ni camino.

Actividad II

Al diseñar la Actividad II de la secuencia de enseñanza buscábamos que los estudiantes pudieran realizar enumeraciones y recuentos de trayectorias en un grafo y reconocer grafos recorribles y no recorribles. Pensamos la actividad para que los estudiantes reconocieran los elementos constitutivos de los grafos conexos no orientados, trabajaran concretamente sobre su representación particularmente haciendo conteo de recorridos, y encontraran recorridos específicos.

Se les presentan dos grafos con tres vértices uno con seis aristas y el otro con cinco, y se formulan preguntas acerca de la cantidad de caminos para ir de un punto a otro, y del número de caminos para ir y volver entre dos puntos. Posteriormente deben encontrar una palabra oculta asociando los vértices con las letras y las aristas las conexiones entre estas[1].

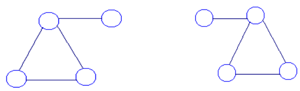
En la Tabla Nº 2 se encuentra la Actividad II de la secuencia de enseñanza.

1. (esta actividad fue tomada con autorización de los autores del “Calendario Matematico”)

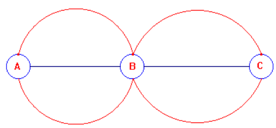
ACTIVIDAD II

Definición geométrica

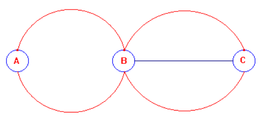
Geométricamente, un grafo es un conjunto de puntos llamados vértices, y un conjunto de líneas, llamadas aristas. Cada arista une dos vértices del grafo.
Es importante advertir que un grafo contiene únicamente información sobre las conexiones entre los puntos, es decir, en un grafo, no interesa la medida de los ángulos o la medida de las aristas, así, las figuras siguientes representan el mismo grafo:



1) El grafo siguiente se llama unicursal o recorrible, pues se puede recorrer de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir arista. Un recorrido puede ser ABCBABC



Observe el grafo y responda:



- *¿Cuantos caminos posibles hay para ir de A hasta C?*
- *¿Y para ir y volver?*
- *¿Puedes recorrer el grafo de un solo trazo, sin levantar la mano ni repetir arista?*

Tabla Nº 2. Actividad de la secuencia de enseñanza

Al aplicar nuevamente un razonamiento basado en la percepción inmediata de los elementos del grafo, la mayoría de los estudiantes (cerca de 20) señalaron que el número de caminos para ir desde a A hasta C es 5 guiados por el criterio que el grafo presenta 5 aristas. Pero nuevamente el trabajo concreto sobre la representación, en este caso la búsqueda de los caminos en el grafo les permite encontrar otras posibilidades y llegar a la conclusión correcta según la cual el grafo tiene 6 rutas para este recorrido.

Contestar la pregunta de cuantos caminos de ida y vuelta presenta el grafo requiere de un razonamiento combinatorio cuidadoso, aquí otra vez guiados por una generalización basada en lo aparente contestaron que eran 12 caminos de ida y vuelta, simplemente duplicando los caminos de ida de los cuales ya tenían certeza eran 6, pero aun después de invitarlos a hacer un mejor conteo, sólo algunos encontraron los 36 caminos.

El hecho que los estudiantes respondieran inicialmente las preguntas a partir de una percepción inmediata de los grafos, y que la contrastación con formas ordenadas de estudiarlo haga evidente el error, permite el cumplimiento cabal del primer objetivo propuesto "realizar enumeraciones y recuentos de las trayectorias en un grafo" pues surge como una necesidad para prevenir errores a los que puede inducir un razonamiento superficial.

El segundo punto de esta actividad captó vivamente el interés en su desarrollo pues se presentaba como un desafío el encontrar la palabra y su grafo. Aquí después de establecer cual era la palabra los estudiantes identificaban una letra que fuera característica de la misma y la buscaban para encontrar a cual grafo correspondía; el hacer el recorrido del grafo ya resultaba elemental.

Actividad III

Con la Actividad III pretendíamos que los estudiantes pudieran identificar grafos recorribles y no-recorribles y formular un criterio general para identificar grafos recorribles y no recorribles. En esta actividad el objetivo es que los estudiantes establezcan mediante la exploración y organización de la información el criterio para saber cuando un grafo es recorrible o no recorrible. Se les presentan 7 grafos los cuales tienen circuitos eulerianos, semieulerianos, o no eulerianos, después de recorrerlos deben completar una tabla en la cual esta discriminada la información de la paridad de los vértices y la característica de ser recorrible o no recorrible.

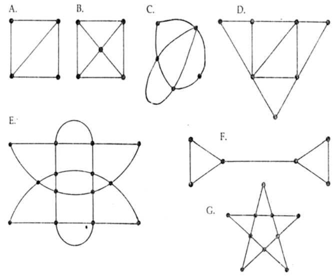
A partir de esta información se les pide formular un criterio para determinar si un grafo es recorrible o no y hacer una predicción con este criterio de esta característica (recorribilidad) en otros 7 grafos, luego someterlo a prueba.

En la Tabla Nº 3 describimos la Actividad III.

ACTIVIDAD III

Para realizar esta actividad deben trabajar en grupo de tres estudiantes. Deben entregar un reporte y preparar una exposición que recoja sus respuestas y todos los comentarios y explicaciones que consideren necesarias para justificar sus respuestas.

1) Comprueba si cada uno de los siguientes grafos es recorrible o no- recorrible. Completa la tabla.



Antes de completar la tabla es necesario tener presente, que se considera un vértice par si a el llega un número par de aristas, y se considera impar si a él confluye un número impar de aristas.

N° grafos	*N° de vértices pares*	*N° de vértices impares*	*Grafo recorrible*	*Grafo no recorrible*
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				

1) Analicen los datos de la tabla y establezcan un criterio para determinar cuando un grafo es recorrible.

2) Utilizando el criterio que establecieron en el punto anterior, digan cuales de los siguientes figuras son recorribles. Justifiquen para cada caso su respuesta.

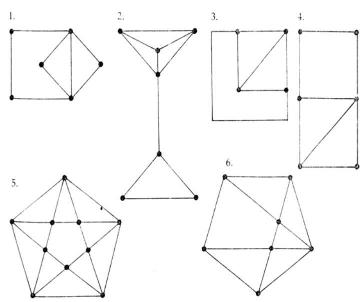


Tabla Nº 3. Actividad de la secuencia de enseñanza

La mayoría de estudiantes que realizó esta actividad llegó a la conclusión que los grafos que presentaban todos sus vértices pares eran recorribles, pero no plantearon claramente que cuando tiene mas de dos vértices impares no son recorribles. Simplemente asumieron que la presencia de la mayoría de vértices impares era condición suficiente para que el grafo no fuese recorrible.

Cuando se les pidió el criterio para que un grafo fuese recorrible, la mayoría lo confundió con la descripción de lo que significa ser recorrible (trazar una línea sin levantar el lápiz), aquí la confusión puede atribuirse a la manera en que fue planteado el punto en la actividad.

CONCLUSIONES

El diseño de esta secuencia de actividades presenta unas deficiencias en la manera en que fueron formuladas algunas de las preguntas o instrucciones que se les pidió a los estudiantes que desarrollaran. Específicamente en la actividad uno la elaboración del grafo de la ruta del cartero y en la actividad tres, el establecer un criterio para saber si el grafo es recorrible o no.

Las actividades resultaron retadoras e interesantes para los estudiantes, lo cual constituye un principio básico para el desarrollo de cualquier actividad de enseñanza-aprendizaje. Esto se hizo evidente en el grado de interés que expresaron en el desarrollo de las mismas y en el entusiasmo ante lo que ellos creían era una solución del problema planteado.

Los estudiantes aprendieron la terminología de base de los grafos y lograron establecer un criterio básico (el de ruta euleriana) para determinar si un grafo es recorrible.

Son contenidos muy elementales pero relevantes de la topología las ideas de vecindad y conectividad, y es un contenido muy importante de la teoría de grafos el criterio para determinar si un grafo tiene un circuito euleriano, semieuleriano o no euleriano. Con esta actividad se constató que es posible trabajar contenidos de topología y grafos a nivel comprensible para estudiantes de educación básica, garantizando la comprensión de los contenidos por parte de los mismos.

REFERENCIAS

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos, *SUMA,* 28, 11-26.

NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática.Thales: Sevilla.

Ore, O. (1963). *Teoría y aplicaciones de los gráficos*. Editorial Norma.

Piaget, J. (1972a). *Psicología y Epistemología*. Emecé Editores.

Piaget, J. (1972b). *Estudios de psicología genética*. Emecé Editores.

Zuluaga, C. Calendario Matemático. Colombia Aprendiendo

Carlos Vergel
Bogotá D.C, Colombia
caparoja17@hotmail.com

Beatriz Soledad Molina
Bogota D.C Colombia
bettysok67@hotmail.com

Armando Echeverry Gaitán
Bogotá D.C, Colombia
aecheverri@pedagogica.edu.co