FORMAS DE CONSTRUIR NOMBRES Y REFERIRSE A LAS CANTIDADES EN LAS ACTUACIONES DE ALUMNOS DE SECUNDARIA AL RESOLVER PROBLEMAS VERBALES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO [1]

David Arnau, Luis Puig

Universitat de València

Resumen

Presentamos parte de los resultados de un proyecto de investigación que pretende identificar qué características de la hoja de cálculo obstaculizan y cuáles promueven la evolución hacia un pensamiento algebraico. Concretamente, mostramos resultados relacionados con los nombres que los estudiantes construyen para las cantidades y las formas de referirse a ellas cuando resuelven problemas verbales. El grupo de estudiantes observado cursaba primero de secundaria, no había recibido instrucción previamente en la resolución de problemas utilizando el lenguaje del álgebra y se les enseñó a resolverlos en el entorno de la hoja de cálculo.

Abstract

This paper presents some results of a project that aims to identify which spreadsheet characteristics hinder and which ones promote the evolution towards algebraic thinking. Particularly, those results related to the names the students build for the quantities and the ways to refer to them when solving word problems. The group of students observed attended the first year of secondary school, they had not been previously trained to solve problems using the algebraic language and they were taught to solve them in the spreadsheet environment.

ANTECEDENTES, MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

Varios estudios han mostrado que el uso de la hoja de cálculo puede servir de intermediario entre la manera aritmética y algebraica de resolver los problemas verbales. Así, Rojano y Sutherland (1997, p. 72) señalan que “las estrategias informales de los alumnos cuando trabajan en el entorno de la hoja de cálculo pueden ser usadas como base para construir métodos ‘más algebraicos’ de resolución de problemas”. En Dettori, Garuti y Lemut (2001) se indica que el uso de la hoja de cálculo permite a los estudiantes resolver problemas mediante prueba y error, y que la ayuda del profesor permite “activar nuevos procedimientos de resolución de problemas” (p. 207). No obstante, también señalan que presenta ciertas limitaciones tales como la imposibilidad para realizar manipulaciones formales o la de expresar explícitamente ecuaciones.

Otros estudios han mostrado la importancia de la hoja de cálculo como instrumento para dotar de significado a la noción de variable. Haspekian (2005) identifica, cuando se usa la hoja de cálculo, tres representaciones de la variable, distintas de las habituales. Para señalar la diferencia de representación, a la variable en la hoja de cálculo la llama “variable celda” (*variable cell*). Así podemos identificar tres modos de representación no presentes en los entornos habituales a los que llama “contenido numérico”, “dirección” y “compartimento de la hoja”; y uno común, que llama “variable abstracta”. En Wilson, Ainley & Bills (2005) se analiza cómo el uso de la hoja de cálculo hace posible la evolución de significado para la variable. Concretamente se señala que “las metáforas dinámicas de cambio y arrastre junto con el proceso de asignación de nombre parecen apoyar la evolución del significado de variable” (p. 321).

Hemos utilizado los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999) como marco teórico y metodológico. En este marco de investigación el núcleo teórico se divide en cuatro

[1] Esta investigación se ha realizado con una ayuda de la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia de España, ref. SEJ2005-06697/EDUC.

componentes (componente de competencia formal, componente de actuación, componente de enseñanza y componente de comunicación). La construcción de los cuatro componentes la realizamos tomando fundamentalmente como punto de partida los resultados del *Anglo/Mexican Spreadsheet Algebra Project* de Rojano y Sutherland (1991, 1993a, 1993b, 1997) y la completamos con la definición del Método de Resolución de la Hoja Electrónica de Cálculo (MHEC). También hemos desarrollado una herramienta que nos permite analizar la estructura de los problemas, y las actuaciones de los estudiantes al resolverlos, que consiste en un tipo de grafo orientado en el que se representan las cantidades y las relaciones entre las cantidades (Arnau y Puig, 2004).

En la fase experimental nuestra investigación se centró en observar cómo los estudiantes afrontaban las limitaciones que el MHEC impone al resolutor, a qué cantidades asignaban nombres y qué tipo de etiquetas utilizaban, y cómo se referían a estas cantidades cuando construían las fórmulas.

EL MÉTODO DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

El MHEC describe la actuación de un resolutor ideal cuando resuelve un problema verbal algebraico en el entorno de la hoja de cálculo. Hemos definido una secuencia de pasos ideales teniendo en mente la división en pasos ideales del Método Cartesiano que establece Puig (2004) a partir de un análisis histórico-epistemológico (ver también Puig y Rojano, 2004). Esto nos permite comparar las actuaciones cuando se resuelve siguiendo el MHEC con las propias del uso del Método Cartesiano, es decir, con la manera algebraica de resolver los problemas. Los pasos del MHEC son los siguientes:

- El primer paso es una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
- El segundo, la elección de las celdas que van a representar a las cantidades, ya sean conocidas o desconocidas, y qué celda, representante de una cantidad desconocida, servirá de referencia en el paso siguiente. A esta celda, que debe ser única, la llamaremos “celda de referencia” ya que todas las celdas que representan cantidades desconocidas harán referencia directa o indirecta a ella.
- El tercero, expresar ciertas cantidades mediante fórmulas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras.
- El cuarto, el establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando explícita o implícitamente dos celdas que representan la misma cantidad.
- El quinto paso será la variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.

METODOLOGÍA

En la secuencia de enseñanza podemos diferenciar dos partes: la familiarización del estudiante con el entorno de la hoja de cálculo y la aplicación de un modelo didáctico basado en la división en pasos ideales del MHEC. Dentro de esta segunda parte se insistió en que se identificara con un nombre a cada celda que representaba a una cantidad. Se decidió usar filas en lugar de columnas, que es lo que suele ser habitual, ya que de esta forma se conseguía que el número de etiquetas visibles no dependiera de la longitud del nombre que se asignara a cada cantidad. También se enseñó a escribir las fórmulas utilizando el ratón para referirse a las celdas.

Tras la fase de enseñanza se observaron las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentaban a una prueba formada por cuatro problemas. Elegimos a 12 estudiantes de primer curso de secundaria (11-12 años) con buen historial académico en matemáticas y que no habían sido introducidos en la resolución algebraica de los problemas. La recogida de datos se realizó mediante grabaciones en vídeo y anotaciones del investigador, a partir de las cuales se obtuvo la transcripción de las sesiones. Por tratarse de una investigación que pretendía observar cierto tipo de actuaciones al resolver problemas, tomamos la decisión de que el investigador tuviera un grado de intervención muy bajo y que los estudiantes se agruparan por parejas.

A continuación presentamos tres de los cuatro problemas que utilizamos en la fase experimental, junto con el listado de cantidades y el grafo orientado que representa la estructura de relaciones y cantidades de una lectura de cada problema.

Problema 1. En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Número de cabezas = Nc = 20.
Número de patas = Np = 52.
Número de conejos = C.
Número de gallinas = G.
Número de patas por conejo = Pc = 4.
Número de patas por gallina = Pg = 2.
Total de patas de conejo = Tpc.
Total de patas de gallina = Tpg.

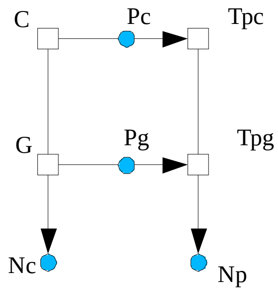

Figura 1: Lista de cantidades y grafo orientado del Problema 1.

Problema 2. Tres muchachos ganaron novecientos sesenta euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Joan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?

Dinero total ganado = T = 960.
Dinero ganado por Luis = L.
Dinero ganado por Joan = J.
Dinero ganado por Roberto = R.
Diferencia entre la cantidades ganadas por Joan y Luis = D = 24.
Cociente entre la cantidades ganadas por Roberto y Luis = C = 10.

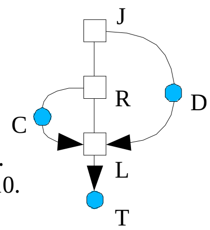

Figura 2: Lista de cantidades y grafo orientado del Problema 2.

Problema 3. En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, si sabemos que el de mujeres sobrepasa en 17 al de hombres?

Total de personas = T = 511.
Número de hombres = H.
Número de mujeres = M.
Exceso de mujeres respecto a hombres = A =17.

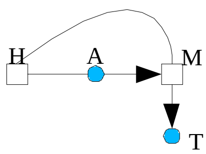

Figura 3: Lista de cantidades y grafo orientado del Problema 3.

LA CONSTRUCCIÓN DE NOMBRES PARA LAS CANTIDADES

Generalmente los estudiantes que participaron en el estudio asignaron nombre a las cantidades conocidas de tipo medida mencionadas explícitamente en el enunciado. Sin embargo, no etiquetaron, aunque sí que usaron, las cantidades conocidas mencionadas explícitamente que actúan como comparador entre dos medidas. Así, dieron nombre a las cantidades "Dinero total ganado", del Problema 2, y "Total de personas", del Problema 3; pero no a las cantidades "Diferencia entre las cantidades ganadas por Joan y Luis " y "Cociente entre las cantidades ganadas por Roberto y Luis", del Problema 2; ni "Exceso de mujeres respecto a hombres", del Problema 3. Tampoco asignaron nombres ni hicieron referencia a las cantidades conocidas de tipo medida "Número de patas por conejo" y "Número de patas por gallina" mencionadas implícitamente en el enunciado del Problema 1.

Se observaron comportamientos similares en la asignación de nombres a las cantidades desconocidas. Así, mientras los estudiantes asignaron nombre a todas las cantidades desconocidas de tipo medida mencionadas explícitamente, ninguna pareja etiquetó las cantidades "Total de patas de conejo" y "Total de patas de gallina" mencionadas implícitamente en el Problema 1. En el resto de problemas las actuaciones a la hora de dar nombre a las cantidades desconocidas no presentes en el enunciado fueron diversas. En la Figura 4 se muestra las cantidades a las que asignaron nombres y las fórmulas utilizadas por la pareja B (Amparo-Lola) en la resolución aritmética del Problema 3.

	A	B
1	personas	511
2	hombres	=(B1-17)/2
3	mujeres	=B2+17
4		

Figura 4: La fórmula usada por la pareja B en la resolución del Problema 3.

Para dar valor a la cantidad que han etiquetado como "hombres" ("Número de hombres") utilizan una fórmula en la que aparece más de una operación aritmética. De esta manera evitan crear una celda y dar nombre a la cantidad desconocida que se obtendría de la fórmula =B1-17 (que sería algo así como "El número de personas si hubiera tantos hombres como mujeres"). Sin embargo, hacen uso de esta cantidad dándole este significado.

Algunas parejas utilizaron la estrategia Todo/partes, descrita por Rojano y Sutherland (1997), en el Problema 2 para estimar lo que les correspondería a cada uno de los protagonistas si el reparto fuera equitativo. En esta situación la pareja F (Zulema-Paola) decide utilizar la etiqueta "extra" para referirse a esta cantidad. El uso de este nombre parece expresar su incapacidad para dar sentido a la cantidad dentro del contexto del problema.

Zulema: Entre tres.
Paola: Entre tres por qué.
Zulema: Yo lo haría así. Te lo juro.
Paola: Vale. A ver.
Zulema: Pero va a salir mal porque si dice la décima y todo eso.
Paola: A ver esto. [Hace clic en B4 cuyo contenido es 960.]
Zulema: ¿Y dónde se pone? ¿En extra como antes?
Paola: [Escribe "extra" en la celda A5.] Eso es igual a eso dividido entre tres. [Señala las celdas B5 y B4 y escribe en la celda B5 la fórmula =B4/3 mientras habla.]
Zulema: Trescientos veinte para cada uno.

En la misma circunstancia, la pareja B (Amparo-Lola) realiza un cálculo mental para evitar asignar una celda, y una etiqueta, a esta cantidad para la que no pueden construir un nombre.

Lola: Es que no tienen que ser iguales; porque si son iguales… ¿Hemos probado a dividir entre dos el total? Es que no va a dar… Entre tres. Sí, vamos a dividir entre tres… (Inaudible.)

Profesor: ¿Podéis hablar un poco más alto?

Lola: Vale. (Ríe.)

Amparo: Novecientos sesenta dividido entre tres. Para ver más o menos qué cantidad puede ser; para continuar la cadena a partir de ese número… (Hace la operación de cabeza.) Vale, trescientos veinte.

Lola: Vale. Trescientos veinte.

Otro comportamiento observado fue la reticencia a introducir fórmulas cuyo resultado no se sabía a qué cantidad se tenía que asignar. La Pareja D (Miguel-José) intentó encontrar la solución del Problema 1 por prueba y error sin tener en cuenta todas las relaciones entre las cantidades. Así, asignaron los valores 12 y 8 a las cantidades "Número de conejos" y "Número de gallinas", respectivamente; pero no comprobaron que el total de patas, para esos valores, fuera 52. Tras abandonar esta estrategia procedieron de manera aritmética. En el diálogo siguiente se muestra cómo a partir de la situación mostrada en la Figura 5 intentan dividir "Número total de patas" (52) entre "Número de gallinas" (en este caso 8).

	A	B
1	conejos	12
2	gallinas	8
3	nº cabezas	20
4	nº patas	52
5	total de conejos y gallinas	=B1+B2
6		

Figura 5: Nombres de las cantidades y fórmulas después de la prueba y error.

Miguel: Total conejos y gallinas veinte. Número de cabezas…

José: (Interrumpiéndole.) No. Sería… En todo caso sería ocho…

Miguel: Pero suponiendo que fueran ocho.

José: … Cincuenta y dos entre ocho.

Miguel: Cincuenta y dos entre ocho. ¿Y eso dónde lo haces?

José: Nada.

La observación de Miguel "¿Y eso dónde lo haces?" pone de manifiesto que no puede asignar este resultado a ninguna cantidad de las que ya están etiquetadas, pero que tampoco es capaz de construirle un nombre nuevo.

LAS FORMAS DE REFERIRSE A LAS CANTIDADES CUANDO SE INTRODUCÍAN LAS FÓRMULAS

Identificamos cuatro formas posibles para referirse verbalmente a las cantidades cuando se introducían las fórmulas:

(1) Referencia a la posición de la celda que representa a una cantidad como intersección de columna y fila. (En el caso que la celda B1 representara la cantidad "Número de patas" y tuviera el valor 52, en este caso se diría "be uno".)

(2) Referencia al nombre de la cantidad representada en la celda. (En este caso se diría "Número de patas")

(3) Referencia a la celda que representa a una cantidad con el apoyo de algún gesto. (En este caso se señalaría la celda B1 y se apoyaría con expresiones del tipo "esto", "éste"...)

(4) Referencia al valor de la cantidad presente en la celda. (En este caso se diría “cincuenta y dos”)

Podríamos encontrar puntos en común entre las distintas formas de referirnos a las cantidades y los diferentes modos de representación de la variable celda identificados por Haspekian (2005). Así los cuatro modos de referirse a las cantidades presentados anteriormente se corresponderían, respectivamente, con “dirección”, “variable abstracta”, “compartimento de la hoja” y “contenido numérico”.

Los estudiantes usaron únicamente la “Referencia al nombre” y la “Referencia a la celda” en los problemas que resolvieron utilizando el MHEC. En los resueltos aritméticamente aparecieron las cuatro formas de referirse a las cantidades. Ofrecemos, a continuación, un intento fallido de resolución aritmética del Problema 3 protagonizado por la Pareja B (Amparo-Lola) en que se usa la “Referencia al valor”. En la transcripción, que parte de la situación mostrada en la Figura 6, observamos que no se procede totalmente de lo conocido hacia lo desconocido.

	A	B	
1	personas	511	
2	hombres		
3	mujeres		
4			

Figura 6: Situación antes de la resolución aritmética.

Amparo: El de mujeres es igual a éste (señalando la celda B2)…
Ambas: … menos diecisiete. [A escribe en la celda B3 la fórmula =B2+17.]
Lola: Y el de hombres es igual a quinientos once entre dos menos diecisiete.
Amparo: Igual a quinientos once entre dos… [Escribe mientras habla la fórmula =B1/2-17 en la celda B2.]
Lola: Y ya está.

En la primera parte del diálogo, en la que se realiza una operación con una cantidad desconocida, se emplea la “Referencia a la celda”; mientras que en la segunda parte, donde las operaciones se realizan con cantidades conocidas, se utiliza la “Referencia al valor”.

CONCLUSIONES

Después de la secuencia de enseñanza los estudiantes parecen situar en un mismo nivel a las cantidades conocidas y desconocidas (lo que es una característica del pensamiento algebraico), ya que cuando introducen fórmulas tratan a las cantidades desconocidas como si fueran conocidas. Esto se refleja en que algunos estudiantes usan una manera “aritmética” de resolver problemas que no está orientada exclusivamente de lo conocido hacia lo desconocido.

Los estudiantes evitan asignar nombres a las cantidades no presentes en el enunciado del problema y, cuando lo hacen, construyen nombres que las sitúan fuera de contexto. Así se distinguen comportamientos como: hacer la operación de cabeza, utilizar más de una operación aritmética en una fórmula o asignar la etiqueta “extra” a la cantidad creada. Por otra parte, se observa una tendencia a no construir nombres para las cantidades conocidas mencionadas explícitamente en el enunciado del problema que sirven para comparar dos medidas. Una posible explicación a esta última observación la encontramos en que la construcción de nombres con significado en el contexto del problema exigiría expresar en lenguaje natural una operación aritmética entre las dos cantidades que se comparan, usando los nombres que previamente se habrían dado a dichas cantidades.

Cuando utilizan el MHEC, no usan la “Referencia a la posición”, lo que podemos justificar si se tiene en cuenta que se les enseñó a construir fórmulas usando el ratón. Sin embargo, esta manera de referirse a las cantidades aparece ocasionalmente cuando resuelven los Problemas 1 y 3 aritméticamente. Tampoco usan la “Referencia al valor” cuando utilizan el MHEC, lo que puede ser explicado por la ausencia de valor en las celdas o la presencia de valores “extraños”, como ceros o números negativos. Sin embargo, cuando resuelven aritméticamente, emplean frecuentemente la “Referencia al valor”. Esto parece señalar que los estudiantes que usan el método enseñado son conscientes del hecho de que los valores numéricos que aparecen en las celdas durante el proceso de resolución no pueden ser usados como nombres de las cantidades desconocidas, ya que se trata de valores provisionales que pueden variar mientras no se obtenga el resultado del problema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnau, D. y Puig, L. 2004. Un instrumento para analizar la estructura de los problemas aritmético-algebraicos cuando se resuelven en el entorno de la hoja de cálculo: los grafos. En E. de la Torre (Ed.) *VIII Simposio de la SEIEM. Comunicaciones en los Grupos de Investigación*. La Coruña: Universidade da Coruña.

Dettori, G.; Garuti, R. & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. y otros (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Haspekian, M. (2005). An “Instrumental Approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teachings: The case of spreadsheet. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.

Puig. L. (2004). History of algebraic ideas and research on educational algebra. *Regular Lecture at ICME-10*. Copenhagen. Texto disponible en http://www.uv.es/puigl/icme-10.pdf.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1991). Symbolising and Solving Algebra Word Problems: The Potential of a Spreadsheet Environment. In F. Furinghetti (Eds.). *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 3, pp. 207-213). Assisi, Italy: PME.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993a). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993b). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. In I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi & L. Fou-Lai (Eds.). *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 1, pp. 189-196). Tsukuba, Japan: PME.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1997). Pupils’ Strategies and the Cartesian Method for Solving Problems: The Role of Spreadsheets. In E. Pehkonen (Eds.). *Proceedings of the*

21st Psychology of Mathematics Education Conference (Vol. 4, pp. 72-79). Lahti, Finland: PME.

Wilson, K., Ainley, J. & Bills, L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 321-328). Melbourne, Australia: PME.