UN INDICADOR DE LA COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DERIVADA: EL USO DE LAS RELACIONES LÓGICAS

Gloria Sánchez-Matamoros
IES Andrés Benítez, Jerez de la Frontera. Cádiz

Mercedes García
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Sevilla

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante

RESUMEN

Desde distintos planteamientos las investigaciones han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes. Sin embargo, falta más información sistemática sobre indicadores que ayuden a describir el desarrollo de la comprensión de dicho concepto. En este trabajo, desde la teoría piagetiana del desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter, trans, caracterizamos una evidencia empírica de cómo el uso que se hace de las “relaciones lógicas” entre diferentes elementos matemáticos del concepto derivada por parte de los estudiantes cuando resuelven un problema, aporta información para explicar el fenómeno de paso de un nivel de desarrollo del esquema derivada al siguiente.

ABSTRACT

The researches have provided us information about the characteristics of the students’ understanding of derivative concept. Nevertheless, there is not enough systematic information about indicators that help us to describe its development. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a scheme through several levels (intra, inter and trans), we provide empirical evidence of the students’ use of the logical relationships among different mathematical elements of the derivative concept when they solve a problem as an indicator of the development of understanding. This use allows us to go deep about the stages in the development of derivative scheme.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares (2007). UN INDICADOR DE LA COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DERIVADA: EL USO DE LAS RELACIONES LÓGICAS, pp. 229-238.

INTRODUCCIÓN

El análisis de la comprensión del concepto de derivada ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintos planteamientos (Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997; Azcarate, 1990; Badillo, 2003; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Orton, 1983; Sánchez-Matamoros, 2004; Zandieh, 2000). Las investigaciones muestran la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los estudiantes y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferini-Mundy y Graham, 1994); la influencia de los contextos (Azcárate (1990); la influencia de los modos de representación gráfico y analítico en la construcción de los significados por parte de los estudiantes (Ferrini-Mundy y Graham, 1994) y la importancia de la relación entre la noción de derivada en un punto (f ’(a)) y la función derivada (f ’(x)) (Badillo, 2003). Además, se han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada al rango de cambio (Orton, 1983).

Las dificultades de los estudiantes en relacionar el modo gráfico y el modo analítico también se ponen de manifiesto cuando, en contextos eminentemente gráficos, los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). En este contexto, la enseñanza apoyada en las traslaciones entre distintos modos de representación parece que puede ayudar a la superación de estas dificultades (Font, 1999). Finalmente, el comportamiento de los estudiantes ante aspectos característicos de las funciones, como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales, cambios en las condiciones de continuidad, características de la comprensión de la segunda derivada pueden ser consideradas indicadores de la comprensión de los estudiantes (Baker et al., 2000).

Estas investigaciones nos han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes, y han empezado a proporcionar indicadores de cómo se desarrolla dicha comprensión. Sin embargo, falta más información sistemática sobre indicadores que ayuden a describir el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada.

MARCO TEÓRICO

Una manera de caracterizar la construcción de la comprensión de un concepto matemático es a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Sfard, 1992; Tall et al., 2000). En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y Garcia (1983, 1989) y la particularización a través de la teoría APOS (Dubinsky, 1991) permite abordar la cuestión de caracterizar la comprensión del concepto de derivada. Desde esta perspectiva un esquema puede considerarse

“la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas” (Piaget y Inherler, 1978, pp. 20).

Un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado “abstracción reflexiva” (Piaget & García (1983/1989 pp. 10). Desde esta perspectiva Dubinsky (1991) señala que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones - problemas percibidas a través de la (re-)construcción de (nuevos) esquemas con los cuales tratar con esas situaciones y describe la noción de esquema como la totalidad del conocimiento que está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular (Asiala et al 1996). Baker et al. (2000) señalan que la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema, y pueden tener incluso problemas diferentes con la misma situación en distintos casos. En su estudio definen un "esquema desarrollado" como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos. Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir cuando la noción es aplicable o no.

Globalmente consideradas, las caracterizaciones del desarrollo de un esquema realizadas a través de los niveles Intra, Inter, Trans, se apoyan en definir el desarrollo mediante el tipo de relaciones – "coordinación de operaciones" en términos piagetianos – que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto cuando resuelven un problema (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000 Sánchez-Matamoros et al., 2006). Desde este punto de vista queda por resolver cómo podemos ser capaces de dar una respuesta operativa a la cuestión de caracterizar el paso de un nivel a otro. Lo que si sabemos a partir de las investigaciones previas sobre el desarrollo de los esquemas es que un indicador de dicho desarrollo es el "tipo de relaciones" que los estudiantes son capaces de establecer entre los "elementos matemáticos" del concepto, comprendidos de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto) cuando resuelven problemas. El objetivo de la investigación realizada fue caracterizar el uso que los estudiantes hacen de las relaciones lógicas entre diferentes elementos matemáticos del concepto cuando resuelven un problema considerado como un indicador del paso de un nivel de desarrollo al siguiente.

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes fueron 150 estudiantes. 50 de 1º de Bachillerato (Ciencias de la Naturaleza), 50 de 2º de Bachillerato (Tecnológico) y 50 de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas. Estos estudiantes no tenían ninguna característica especial y participaron en la investigación de manera voluntaria.

Los alumnos de 1º curso de Bachillerato se les había introducido por primera vez el concepto de derivada. Los estudiantes de 2º curso de Bachillerato era el segundo año que tenían un contacto con la idea de derivada y empezaban a trabajar con la idea de segunda derivada (f '') y las interpretaciones vinculando expresiones analíticas y gráficas. Los estudiantes de primer año de la Licenciatura de Matemáticas habían cursado la asignatura "Elementos de Análisis Matemáticos" por lo que podíamos considerarlos en un nivel avanzado de conocimiento del concepto de derivada de función real de variable real.

Instrumentos de recogida de datos

Se utilizaron dos tipos de instrumentos para recoger los datos: tres cuestionarios diseñados específicamente para cada uno de los grupos de estudiantes, y un guión de entrevista diseñada teniendo en cuenta el cuestionario, y que se realizaba apoyándonos en las respuestas producidas por los estudiantes al cuestionario. La entrevista tenía como objetivo obtener una información más detallada de las resoluciones a los problemas realizadas. El diseño de los instrumentos siguió dos etapas:

Etapa 1: análisis de la noción de Derivada desde la perspectiva de los elementos matemáticos y relaciones lógicas (transformaciones y coordinaciones en el sentido piagetiano) que pueden darse entre ellos para la resolución de problemas según es presentado, usado y justificado en algunos libros de texto (Editoriales Editex, Oxford, S.M., Anaya, Santillana), y en algunos textos de Análisis Matemático que son referencia en la introducción al Análisis en el primer año en la Licenciatura de Matemáticas (Spivak, Apóstol, Demidovich).

El segundo aspecto considerado en el análisis de la noción de derivada fue la idea de "coordinación entre las operaciones", entendidas como relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos que se puedan poner de manifiesto en la resolución de los problemas. Un estudiante cuando tiene que resolver un problema puede establecer relaciones lógicas entre los elementos para inferir nueva información. Algunas de las relaciones que se ponen de manifiesto durante la resolución de un problema son

- Conjunción lógica ($A\wedge B$) ("y lógica")
- Contrarrecíproco [$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$]
- Equivalencia lógica [$(A\leftrightarrow B)$, $A\rightarrow B \wedge B\rightarrow A$]

Por ejemplo, la conjunción lógica es la relación que se produce cuando el estudiante relaciona a través de la **"y lógica"** dos elementos matemáticos para hacer inferencias.

Sea f continua en (a ,b) y derivable en (a ,c) y (c, b)
A) si f ''>0 en (a, c) y (c, b)→ f convexa en (a, c) y (c, b)
B) f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a)

Considerando conjuntamente esta información (A y B) a través de la **"y lógica"**, se infiere que x = c es punto anguloso. La información sobre el crecimiento de f en el intervalo (a, c) y el decrecimiento de f en (c, b) puede venir de haber considerado previamente

f '>0 en (a, c) → f es creciente en (a, c), y
f '<0 en (c, b) → f es decreciente en (c, b).

Sin embargo, aquí lo que se subraya es que cuando se tiene información de un determinado tipo (como en este caso: *f convexa en (a, c) y (c,b), y f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a)*) se vinculan los significados, y permite tomar una decisión sobre la naturaleza del punto x =c (en este caso x =c es punto anguloso).

Para identificar las relaciones lógicas que hipotéticamente podrían establecerse entre los elementos matemáticos en la resolución de los problemas, se resolvieron un conjunto de problemas de diversas maneras, y analizamos las diferentes resoluciones considerando los elementos matemáticos usados y las relaciones establecidas. Con este procedimiento adaptamos algunos problemas y seleccionamos otros para producir un grupo de problemas desde el cual diseñar los cuestionarios.

Etapa 2: diseño y selección de los problemas.

Diseñamos y/o adaptamos 12 problemas considerando las relaciones lógicas que se podían establecer y los aspectos de los elementos matemáticos (analíticos y gráficos, puntuales (x=a) y globales (en un intervalo (a, b))) necesarios en su resolución. En la selección de los problemas para los cuestionarios, la idea fue que la "demanda del problema propuesto" al resolutor en cada curso fuera tal que pudiéramos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada y obtener información que pudiera explicar los mecanismos de cambio de nivel. Por ello tuvimos en cuenta el currículo de los diferentes cursos (1º, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura de Matemáticas) y los resultados de las investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de derivada. Con los problemas inicialmente elegidos se realizaron algunas entrevistas piloto con estudiantes de Bachillerato, lo que permitió modificar algunas expresiones del texto escrito y del guión de entrevista.

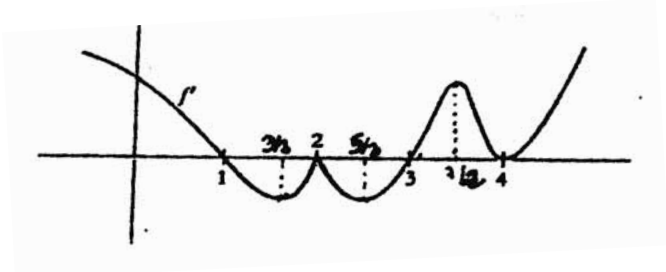
Procedimiento y análisis

Los cuestionarios fueron contestados por los estudiantes en su horario de clase de Matemáticas. En días posteriores a la realización de los cuestionarios se realizaron las entrevistas centradas en la forma en la que se habían resuelto los problemas. Previamente a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes, para descartar los cuestionarios entregados en blanco, y para adecuar las preguntas de las entrevistas a las respuestas producidas, con el objetivo de intentar en lo posible que los estudiantes explicitaran lo que estaban pensando al resolver los problemas. Una vez realizadas las entrevistas se procedió al análisis de los cuestionarios y las entrevistas de forma conjunta.

El análisis se centraba en identificar los elementos matemáticos y las relaciones que los estudiantes establecían durante la resolución de los problemas. Los resultados que se presentan en esta comunicación proceden de la información reunida con el análisis conjunto de las entrevistas y los cuestionarios correspondientes.

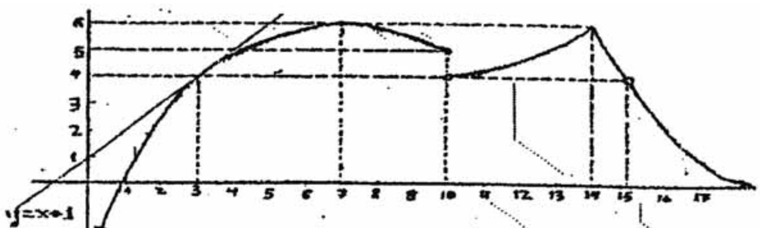
TAREA 1

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



TAREA 3

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Cuadro1: Tareas 1 y 3 del cuestionario de la Licenciatura de Matemáticas.

RESULTADOS

La manera en la que los estudiantes manejaban las diferentes relaciones lógicas que se pueden establecer entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema se considera un indicador del nivel de comprensión y de la manera en la que los estudiantes podían empezar a realizar una proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, o la manera en la que se podía estar realizando una reorganización y reconstrucción del conocimiento para formar nuevas estructuras. Para caracterizar este tipo de indicador mostraremos el uso que hacen de las relaciones lógicas entre elementos matemáticos dos estudiantes de 1º de Licenciatura de Matemáticas, Sara y Mario, a través de las tareas 1 y 3 (cuadro 1).

En la tarea 1 Sara usa la **"y lógica"** entre elementos matemáticos analíticos puntual y global:

- sea f derivable en (a, b), si f '>0 en (a, b) →f crece en (a, b) y si f '<0 en (a, b)→ f decrece en (a, b)

- f ' (a)=0 →f tiene un máximo, un mínimo o un P.I. en x =a

permitiéndole decidir que en x = 1 había un máximo de f:

Sara: donde la derivada es cero hay máximos o mínimos o puntos de inflexión

E: escribes en x = 1 máximo, x = 2 *punto de Inflexión, x =* 3 *mínimo y x =* 4 *punto de inflexión,* ¿por *qué x =* 2 *y x =* 4 *son puntos de inflexión?*

Sara: por ser f '= 0 *en esos puntos, la recta tangente en ese punto es paralela al eje de las x*

(Sara usa un elemento matemático gráfico puntual correspondiente a la interpretación geométrica de la derivada)

E: ¿cómo has diferenciado los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión?, *porque en todos es f '=0*

Sara: si, eso es que no me acuerdo, viendo el signo de la derivada

E: Por ejemplo en x = 1

Sara: desde menos infinito hasta 1, *la función es creciente y a partir de* 1 *es decreciente, hay un máximo*

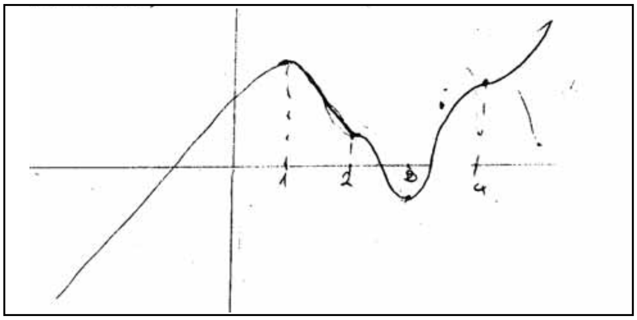
E: ¿ en x = 2 *P.I?*

Sara: porque f ' = 0

E: en los puntos x = 1.5, *x =* 2.5, *x =* 3.5, *¿qué sucede en f?*

Sara: en la función habría un cambio de concavidad, se ve por f ", estudiando el signo

Sara esboza un gráfico correcto de f:



(Sara, Tarea 1)

En la tarea 1 Sara ha usado de forma correcta el elemento matemático analítico global:

- si f ’>0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f ’<0 en (a, b) → f decrece en (a, b)

Sin embargo, en la resolución del apartado B) de la tarea 3 podía haber hecho uso del elemento matemático global:

- sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f ’>0 en (a, b), y si f decrece en (a, b) → f ’<0 en (a, b)

implicación contraria a la del elemento utilizado en la tarea 1. Haber hecho uso de él sería una evidencia del uso de la equivalencia lógica. No tenemos evidencia de por qué no lo hizo ya que en la entrevista tan sólo comentó:

E: ¿y el apartado B), la gráfica de la derivada?

Sara: me puse con otra cosa y no...

E: el hecho de que en el enunciado se comente que la función está formada por ramas de parábolas, ¿ te dice algo de f ’?

Sara: serían rectas la derivada, o algo así

E: ¿serías capaz de esbozarla?

Sara: no sé, no me lo he planteado.

(Sara, Tarea 3)

Esto nos llevó a tener en cuenta que el uso de algunas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos presentan más dificultades que otra, pues mientras que Sara había utilizado la relación **“y lógica”** entre elementos matemáticos en varias ocasiones, sin embargo no había sucedido lo mismo con la relación **equivalencia lógica** entre otros elementos matemáticos cuando era pertinente su uso y hubiera ayudado en la resolución del problema. El uso de estas relaciones lógicas en esta situación hubiera mostrado una proyección del conocimiento que hubiera indicado una reconstrucción del conocimiento en un plano superior.

Veamos como a Mario no le sucedía lo mismo que a Sara. Así, en la Tarea 1, utiliza la idea de la **derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter local y global**, y la utiliza reconstruyendo su significado, pues indica que **el signo de f ’ proporciona información sobre el crecimiento de f:**

“*si f ’>0, f crece porque f ’es la pendiente de la recta tangente a f, entonces si la pendiente es positiva, f es creciente*”.

Además, el cambio de creciente a decreciente le permite identificar los puntos x=1 (x=3) como máximo (mínimo) relativos, haciendo uso de la relación **“y lógica”** entre los mismos elementos que habíamos visto anteriormente con Sara:

- sea f derivable en (a, b), si f ’>0 en (a, b) →f crece en (a, b) y si f ’<0 en (a, b)→ f decrece en (a, b)

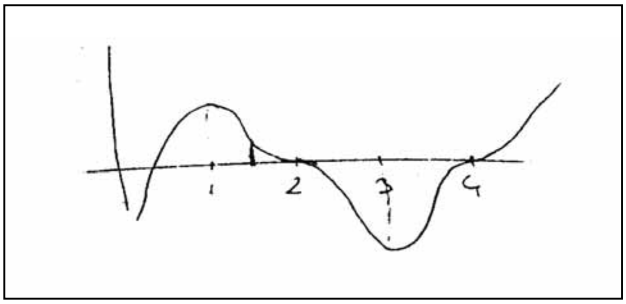
- f ’ (a)=0 →f tiene un máximo, un mínimo o un P.I. en x =a

Cuando se le pregunta a Mario por el comportamiento, en x =1.5, x =2.5 y x =3.5 contesta: *“dependería de la inclinación de la tangente, de la pendiente de la recta tangente, que es la derivada,... cambia la inclinación con más o menos velocidad”*.

Y en x =2 y x=4, comenta:

“en x=2, f ’=0,..., entonces ha cambiado la variación de la tangente. En x =4 lo mismo”.

Por la forma de resolver la tarea podemos inferir que Mario usa la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter global y usa la relación **“y lógica”** entre los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la tarea, lo que le permite esbozar un gráfico correcto de f:



(Mario, Tarea 1)

En la Tarea 3, Mario usa el elemento matemático: si **f derivable en x =a → f continua en x=a**, en la forma de la relación lógica de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x=a → f no es derivable en x =a) para expresar que como f no es continua en x =10, entonces no existe la derivada en x =10.

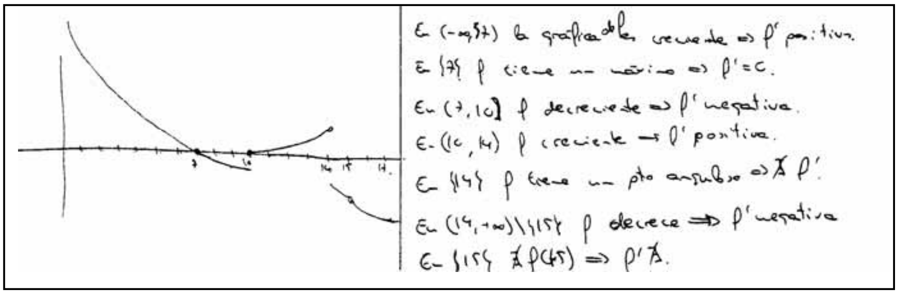
Además, en la segunda parte de la tarea 3 Mario esboza un gráfico de la primera derivada, f ’, correcto, excepto en su forma, pero al preguntarle en la entrevista comenta que f ’ estaría formado por trozos de rectas. Para el esbozo de la gráfica establece las siguientes relaciones

sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f ’>0 en (a,b), y si f decrece en (a, b) → f ’<0 en (a, b)

(**implicación contraria** a la utilizada en la tarea 1 del mismo elemento). Este uso de las relaciones directas y contrarrecíprocas muestra aspectos de la manera en la que Mario realiza una proyección del conocimiento existente en un plano superior. Es decir, la naturaleza de las relaciones lógicas establecidas entre elementos matemáticos durante la resolución del problema es un indicador de una reorganización y reconstrucción del conocimiento y por tanto del mecanismo de traslación entre diferentes niveles de desarrollo.

No tenemos evidencia de que este hecho que se pone de manifiesto en la resolución de la tarea por parte de Mario, haciendo uso de la doble implicación (equivalencia lógica) en las tareas 1 y 3, se ponga de manifiesto en la resolución de las mismas tareas por Sara. Ya comentamos anteriormente que no tenemos evidencia de por qué Sara no lo hizo.

La información obtenida por la utilización de varios elementos matemáticos en diversos puntos en la primera parte de la tarea 3 (como puede observarse en la justificación de la respuesta que aparece en la tarea 3) ha hecho que Mario realice un esbozo correcto de f ’.



(Mario, segunda parte de la Tarea 3)

Del análisis realizado de la manera en la que Sara y Mario han resuelto las dos tareas podemos inferir que existen manifestaciones de diferentes maneras de comprender el esquema de derivada. Mientras que Sara sólo es capaz de hacer uso de la relación de **"y lógica"** entre los elementos matemáticos que conoce (lo que la imposibilita para ser capaz de resolver la tarea 3), Mario hace uso de una mayor variedad de relaciones lógicas (**"y lógica"**, contrarrecíproco y equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos que conoce usando lo que se conoce de manera diferente.

CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos permiten pensar que la relación **equivalencia lógica** entre elementos matemáticos presenta dificultades en algunos niveles del desarrollo del esquema de derivada por lo que el uso de las relaciones lógicas indica posibles mecanismos de traslación de un nivel al siguiente. El análisis centrado en identificar la manera en la que los estudiantes relacionaban la información que poseían cuando intentaban resolver los problemas nos ha proporcionado dos tipos de información. Por una parte nos permitió describir la comprensión del concepto de derivada que tenía cada estudiante. Por otra parte, proporcionó información sobre la forma en la que parecía que se desarrollaba la comprensión del esquema de derivada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala M., Brown A., Devries D.J., Dubinsky E., Mathews D. & Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education,* Vol. 6 pp. 1- 32.

Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E. & Schwingendorf K. (1997). The Development of Students` Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical Behavior,* 16(4) pp. 399-431.

Aspinwall L., Shaw K.L. & Presmeg N.C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics,* 33, pp. 301-317.

Azcárate C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas de Colombia. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker B., Cooley L. & Trigueros M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education,* 31(5), pp. 557-578.

Clark J.M., Cordero F., Cottrill J., Czarnocha B., DeVries D.J., St. John D., Tolias G. & Vidakovic D. (1997). Constructing a Schema : The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior,* 14(4), pp. 345-364.

Dubinsky E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. L.P. Steffe, (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences,* New York: Springer – Verlag, pp. 160-202.

Font V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Ferrini-Mundy J. & Graham K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. In Dubinsky y Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics Learning* , pp. 31-45.

Meel D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la compresnsión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (3), pp. 221-271.

Orton A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* Vol 14, pp. 235-250.

Piaget J. & García R. (1983, 1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, s.a.

Piaget J., e Inhelder B. (1978). *Psicología del niño*. Madrid, 8ª edición: Ediciones Morata.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Sánchez–Matamoros García G., García Blanco M. & Llinares Ciscar S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias,* 24(1), pp. 85-98.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Washington, DC: MAA, Notes 25.

Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the Encapsulation of a Process?. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.

Zandieth M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In Dubinsky E., Shoenfeld A. H., Kaput J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 8 pp. 103-127.