APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA COM RECURSO A MATERIAIS TECNOLÓGICOS

António Domingos – Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL

amdd@fct.unl.pt

Carlos Carvalho – Escola Secundária Lima de Freitas

Conceição Costa – Escola Superior de Educação de Coimbra

José Manuel Matos - Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL

Paula Teixeira – Escola Secundária com 3º CEB Alfredo dos Reis Silveira

Resumo

Esta comunicação está inserida no desenvolvimento de um projecto de investigação que procura compreender a forma como os professores de matemática podem integrar o uso de materiais tecnológicos em benefício da aprendizagem dos alunos. O projecto centra-se essencialmente nos materiais electrónicos que acompanham os manuais escolares, CD-Roms, eBooks, portais, filmes e conjuntos de outras actividades que apelam ao uso do computador. Procura-se compreender o papel que estes materiais desempenham no processo de ensino aprendizagem, nomeadamente na forma como os professores se apropriam desses materiais e o uso que fazem dos mesmos na sala de aula. Procurar-se-á apresentar nesta comunicação um breve enquadramento teórico do tema em estudo indicando as principais opções assumidas pelos autores.

Abstract

This project seeks to research the ways in which math teachers integrate the use of technological materials to improve students' learning. The educational role of electronic resources incorporated into textbooks (CD-Roms, eBooks, sites, films, and sets of other activities with computers) is investigated in the teaching and learning process, especially in the ways teachers appropriate them and use them in class. This paper will present the theoretical background of the project showing the main options of the authors.

A abordagem ao uso de ferramentas tecnológicas no contexto da sala de aula deve ter em conta aspectos relacionados com a aprendizagem, o uso das tecnologias e o desenvolvimento curricular. No que se refere à aprendizagem devemos ter em conta o papel da complexidade do pensamento matemático que é requerido quando os conceitos são abordados com base nas suas diferentes representações. Destacam-se aqui os principais processos envolvidos neste tipo de pensamento, explicitando uma vertente psicológica que acompanha a vertente matemática. Nestes processos, o relacionamento do indivíduo com a ferramenta computacional são preocupações centrais onde a ferramenta assume um papel que vai para além do artefacto, tornando-se um instrumento que é apropriado pelo sujeito. Esta apropriação pressupõe uma atenção especial para com a natureza da capacidade técnica que vai para além da aplicação de procedimentos rotineiros. O desenvolvimento de todo este processo baseado na manipulação de ferramentas tecnológicas torna-se num movimento que através de pequenos e sucessivos progressos sobre problemas específicos vai transformando o currículo de uma forma prática e simples e por vezes com maior eficiência que a prevista nas reformas globais. Apresenta-se de seguida uma breve abordagem a estas três vertentes no sentido de contextualizar o uso e adaptação dos materiais electrónicos que acompanham os manuais escolares.

Aprendizagem complexa da matemática

No que se refere à aprendizagem deveremos ter em conta que os ambientes com recurso às tecnologias envolvem quase sempre um pensamento matemático complexo. Este tipo de pensamento é encarado por alguns autores como pensamento matemático avançado (Tall, Dreyfus, Dubinsky, Sfard, Vinner) e pode ser caracterizado com base nos processos de *representação* e de *abstracção* (Dreyfus, 1991), processos estes que se distinguem pelo nível de complexidade com que são utilizados. Estes processos permitem-nos passar de um nível de pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado e quando usados neste sentido são muitas vezes processos matemáticos e psicológicos em simultâneo. Por exemplo se considerarmos a construção de um gráfico de uma função, executamos um conjunto de processos que seguem certas regras que podem ser expressas em linguagem matemática, mas em simultâneo estamos a criar uma imagem mental do gráfico da função. Ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo. Para caracterizar mais em pormenor cada um destes processos seguiremos o enfoque que lhe é dado por Dreyfus (1991) onde os processos envolvidos na representação são: *o processo de representação*, *a mudança de representações e a tradução entre elas* e a *modelação*. O processo de representação envolve três componentes principais: as *representações simbólicas*, as *representações mentais* e a *visualização*. As representações simbólicas envolvem relações entre signos e significado, servem para desenvolver o conhecimento pessoal implícito, o significado, que é explicitado através desses símbolos. No que se refere à representação mental de um dado objecto ou processo, ela pode ser associada aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. A representação mental torna-se assim fundamental para que a pessoa possa comunicar o seu pensamento acerca de um dado objecto ou processo. A visualização é a outra componente do processo de representação, processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas. Ela oferece-nos intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos (Domingos, 1994). O segundo processo envolvido na representação refere-se à mudança de representações e à tradução entre elas. A necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que essa outra seja mais eficiente para o passo que pretendemos dar. O processo de mudar de representações está assim intimamente associado com o de representar. Segundo Dreyfus (1991), o processo que está fortemente relacionado com a mudança de representações é tradução entre elas. No caso do pensamento matemático avançado esta tradução pode ser entendida como o passar da formulação de uma propriedade matemática ou problema para outro. É o que acontece por exemplo com a resolução de problemas aplicados, onde é necessário utilizar determinados conceitos e propriedades matemáticas para representar fenómenos físicos. A modelação é outro dos processos envolvidos na representação. Este termo refere-se normalmente à procura de uma representação matemática para um objecto não matemático ou processo. No caso do pensamento matemático avançado Dreyfus (1991) considera que modelar significa construir uma estrutura matemática ou uma teoria que incorpora as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser descrito. O modelo pode assim ser usado para descrever o comportamento do objecto ou processo a modelar.

No que se refere à abstracção, Dreyfus considera que se trata de um processo que conduz ao pensamento matemático avançado e que envolve, para além do processo de representação, a *generalização* e a *síntese*. Dreyfus considera que generalizar é obter ou induzir de situações particulares para identificar traços ou atributos comuns que permitem expandir os domínios de validade. Este processo pode envolver diferentes níveis. Por exemplo se um aluno sabe pela experiência que uma equação linear de uma variável tem uma solução e que muitos sistemas de duas ou três equações lineares em duas ou três variáveis têm uma solução, ele pode generalizar este conhecimento a um sistema de n equações lineares com n variáveis. Neste caso trata-se de fazer a transição dos casos particulares n=2 e n=3 para o caso geral n, onde precisamos identificar o que há de comum nas condições iniciais para poder conjecturar e estabelecer o domínio de validade da generalização. Nesta situação o caso geral não requer a formulação de outros conceitos matemáticos para além dos que estavam presentes nos casos particulares. Noutros níveis pode ser necessário incluir a formulação desses conceitos. Por exemplo, se considerarmos a transição da convergência de uma sucessão numérica para a convergência de uma sucessão de funções é necessário ter em conta a topologia no espaço das funções, o que aumenta consideravelmente as necessidades cognitivas no processo de generalização. Tall (1991) refere-se à distinção cognitiva que deve ser feita entre diferentes tipos de generalização tendo em consideração as actividades cognitivas que estão envolvidas. Ele refere-se assim às *generalizações expansivas* como sendo aquelas em que se estende a estrutura cognitiva existente sem requerer mudanças nas ideias correntes. Quando tais mudanças são requeridas o processo é chamado *generalização reconstrutiva* e pode ser identificado com a abstracção. Outro tipo de generalização identificado pelo investigador, *generalização disjuntiva* diz respeito a peças de nova informação desligadas que são adicionadas às estruturas do conhecimento já existentes, sem que haja qualquer integração com estas. Por exemplo um aluno que é capaz de resolver uma equação linear de uma variável manifestando uma compreensão instrumental, isto é, executando o conjunto de procedimentos de forma rotineira, quando se lhe pede para resolver um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas ele é capaz de fazer as manipulações necessárias para resolver a situação ("adicionar ou multiplicar a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação", "isolar x num dos membros", "mudar de membro mudando de sinal", "substituir a variável evidenciada na equação seguinte", etc.) no entanto para o aluno trata-se de adicionar ao seu conhecimento mais um conjunto de processos e factos que é necessário fazer ("eliminar x numa equação e resolver em ordem a y" , "substituir y na anterior para encontrar x") para resolver esta nova situação. A generalização a sistemas de 3equações a 3 incógnitas até sistemas de $m \times n$ torna-se uma tarefa deveras complexa. Trata-se de uma generalização no sentido em que o aluno pode ser capaz de operar com um maior número de exemplos embora não seja capaz de compreender a extensão das implicações abstractas que lhe estão associadas, por se tratar de um conjunto de peças de informação que não estão ligadas entre si.

A síntese é outro dos processos envolvidos na abstracção. Segundo Dreyfus (1991), sintetizar significa compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade. Por vezes, este todo é mais do que a soma das partes. Por exemplo na álgebra linear os alunos aprendem em profundidade um conjunto de factos isolados sobre ortogonalização de vectores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, soluções de sistemas de equações lineares, etc. e, mais tarde, todos estes factos acabam por se fundir numa imagem simples no seio da qual todos eles estão compreendidos e inter-relacionados. É a este processo de fundir que Dreyfus chama de síntese. O processo de abstracção surge assim, para Dreyfus, intimamente ligado com a generalização e a síntese. No entanto, ele considera que nem um nem o outro fazem exigências cognitivas tão fortes como a abstracção. Ela destaca-se precisamente por conseguir reunir o potencial da generalização e da síntese. A natureza dos seus processos mentais é que é diferente da dos processos de generalização e de síntese. Abstrair é antes de mais um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objectos matemáticos. Este processo está dependente do isolamento que o indivíduo consegue fazer das propriedades e relações apropriadas e requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objectos para a estrutura das suas propriedades e relações. Segundo outros autores, para além de representar e abstrair outros processos intervêm no pensamento sobre matemática. Ervynck (1991) descreve aqueles que estão relacionados com a criatividade e que, segundo ele, envolvem quer a visão de construir partes de uma estrutura por conjectura e argumentação quer a capacidade de, por vezes, refinar a estrutura com base numa abordagem matemática dedutiva. Ervynck sugere que um acto de criatividade pode requerer compreensões tais como criar um conceito útil, descobrir uma relação não notada e construir uma ordenação útil. Embora a expectativa tradicional seja a de um resultado rigoroso e preciso, o processo em si próprio pode ser circular e errático. O poder da motivação para a criatividade matemática deve resultar de uma interacção de elementos tais como compreensão, intuição, reorientação em direcção ao que é importante, generalização e capacidade de se focar nos traços principais.

As tecnologias na educação matemática

No que se refere ao uso das tecnologias uma das questões centrais prende-se com a forma como o aluno se relaciona com a ferramenta tecnológica. Neste sentido há dois pontos que podem ser considerados como chave: a identificação do ponto a partir do qual o aluno escolhe recorrer à tecnologia para levar a cabo a actividade matemática e a determinação da extensão com que a tecnologia pode funcionar como uma ajuda efectiva que acompanhe os seus objectivos matemáticos. Os constructos de génese instrumental e técnica têm-se referido e centrado nas actividades que envolvem aluno-ferramenta e têm-se concentrado nas relações entre o aluno e a ferramenta.

A génese instrumental é assim um constructo que ajuda a contextualizar a relação aluno-ferramenta. A noção de instrumento é aqui baseada nos trabalhos de Verillon e Rabardel (1995) citados por Zbiek, Heid e Blume (2007), que estabelecem diferenças entre artefacto e instrumento, referindo a necessidade de considerar não apenas a capacidade dos artefactos com que alguém trabalha e as tarefas em que essa pessoa está envolvida, mas também a relação entre a pessoa e o artefacto. A noção de instrumento assume assim uma posição psicológica e não uma descrição do artefacto material. O artefacto não assume automaticamente o papel do utilizador, mas antes o utilizador precisa de desenvolver uma compreensão da capacidade do artefacto e ao mesmo tempo desenvolver uma relação com esse artefacto. Surge assim a ideia de que o instrumento não existe por si próprio, mas torna-se um instrumento quando o sujeito é capaz de se apropriar dele por si próprio e o tiver integrado na sua actividade. Quando pretendemos saber de que forma o uso de artefactos como o *software* ou as calculadoras gráficas podem ser encaradas como instrumentos matemáticos que o utilizador pode empregar nos seus propósitos matemáticos, deveremos ter em conta que o indivíduo deve desenvolver a génese instrumental e procedimentos eficientes para manipular o artefacto. Durante o processo de interacção ele adquire conhecimento que pode levar a diferentes usos desses artefactos. Temos assim que a génese instrumental inclui o utilizador modelando a ferramenta para atingir os seus propósitos (instrumentalização) e a compreensão do utilizador que é modelada pela ferramenta (instrumentação) (Zbiek, Heid e Blume, 2007). O papel principal da génese instrumental na educação matemática é compreender a matemática da tecnologia e ser capaz de usá-la para os nossos propósitos. O constructo de génese instrumental torna-se assim uma ferramenta importante para investigar o papel da tecnologia na aprendizagem. Ele mostra que a tecnologia pode não ter o mesmo impacto, de forma automática, em todos os utilizadores e realça também o facto de o seu uso inteligente requerer em simultâneo um conhecimento técnico e conceptual.

Do ponto de vista do investigador ao olhar com mais atenção para o desenvolvimento de um instrumento a partir de um artefacto é necessário examinar com pormenor as capacidades do instrumento que está a ser desenvolvido. Assim, a preocupação com a génese instrumental é naturalmente acompanhada pela preocupação sobre a *técnica*, isto é, a natureza da capacidade técnica que vai além da aplicação rotineira de procedimentos. A verificação desta inter-relação entre os constructos de génese instrumental e técnica resultam numa profunda compreensão de ambos os constructos. Para Zbiek, Heid e Blume (2007) o constructo da génese instrumental pode ser estendido na educação matemática ao desenvolvimento de ferramentas cognitivas. Para além dos desenvolvimentos conhecidos centrados em ferramentas físicas ou electrónicas é igualmente viável pensar em representações como artefactos que funcionam em maior ou menor extensão como instrumentos. Esta abordagem conduz a questões tão pertinentes como saber de que forma é que uma representação pode vir a ser um instrumento ou se há uma trajectória previsível que conduz da representação como artefacto para a representação como instrumento. Torna-se importante perceber como é que o aluno age no seio de múltiplas representações disponíveis por meio da tecnologia, sendo esta acção função da sua génese instrumental e da sua compreensão do artefacto como a representação de algum objecto matemático. A questão fundamental para que o aluno use as representações externas é a extensão com que o artefacto é visto. Ele não deve corresponder à substituição do objecto mas sim servir como a representação do objecto matemático abstracto. É neste sentido que Trouche (1999), citado por Zbiek, Heid e Blume (2007), refere que a diferenciação entre objectos matemáticos e as suas representações é uma questão central no processo de ensino, isto porque os objectos matemáticos não se podem encontrar e manipular no mundo material. Esta abordagem pode ser contextualizada a partir da forma como os alunos usam um ambiente de geometria dinâmica. Ao usar os conceitos de *figura (figure)* e *desenho (drawing)*, podemos considerar que estamos da fazer uma distinção entre a representação vista como a entidade de interesse e a representação vista como uma encriptação que particulariza o objecto matemático acabado. Assim, nos ambientes de geometria dinâmica, os constructos de figura e desenho mostram-nos a diferença entre pensar no referente (o desenho como a encriptação visível no ecrã do computador) e pensar no que está a ser representado (a figura como um objecto teórico).

Desenvolvimento curricular

A investigação centrada numa utilização da tecnologia visando uma aprendizagem complexa dos conhecimentos matemáticos necessita de reflectir sobre os modos como essa aprendizagem se pode efectivar, o que nos conduz à terceira e última vertente desta investigação, a prática do desenvolvimento curricular.

Concebe-se por vezes o desenvolvimento curricular como um processo de tomadas de decisões por instâncias hierarquicamente ordenadas (ver, por exemplo, Roldão, 1999). O currículo iniciar-se-ia assim por uma tomada de decisão política das jurisdições competentes do Ministério da Educação promulgando um Programa que vai gradualmente sendo adaptado até chegar à sala de aula. O papel dos outros actores educativos seria assim o de procurar cumprir as directrizes superiormente decididas. A prática, no entanto, rejeita esta idealização técnica e observa-se antes que frequentemente a inovação curricular tem origem nas instâncias intermédias da cadeia, e que o currículo vai assumindo distintas formas ao ser apropriado pelos distintos intervenientes. É nesse sentido que Gimeno-Sacristán (1998) define seis níveis de decisão curricular: o prescrito (o currículo decidido pela administração central), o apresentado aos professores (através dos mediadores, principalmente dos manuais), o modelado (que é o resultado das representações dos professores sobre os diversos níveis de decisão curricular), o em acção (o que decorre na aula, operacionalizando a percepção dos professores sobre o currículo modelado), o realizado (presenciado por observadores externos) e o avaliado (objecto de apreciação externa).

O desenvolvimento curricular realiza-se assim nos diversos níveis curriculares e as investigações sobre a sua prática mostram-no como um *processo interpessoal* que reúne vários actores com diferentes pontos de vista sobre o ensino e aprendizagem e com poderes, explícitos ou implícitos, de decisão curricular; um *processo político* que se traduz na tomada de decisões a nível nacional, regional e local e que conta com a influência de vários grupos que dispõem de poder de negociação curricular; um *empreendimento social* envolvendo pessoas no desempenho de papéis — com as potencialidades, disponibilidades e obstáculos inerentes — de acordo com diferentes interesses, valores e ideologias; um *processo de colaboração e cooperação* entre os diversos intervenientes que tomam decisões curriculares; e finalmente, como um *sistema desarticulado de tomada de decisões*, que não é puramente racional e cientificamente objectivo nem nitidamente sequenciado e sistemático e que depende de um método prático e simples (as decisões curriculares são tomadas através de movimentos pequenos e progressivos ou sobre problemas específicos e não através de reformas globais) (Pacheco, 2001).

Este projecto realiza uma apreciação de elementos curriculares (CD-ROMs, e-books e outros materiais electrónicos) propostos por mediadores (casas editoras), bem como uma componente de desenvolvimento curricular, através da realização de oficinas de formação de professores.

Conclusão

Esta comunicação vem realçar alguns dos constructos teóricos que deveremos ter em conta quando nos propomos analisar o processo de ensino e aprendizagem, em particular quando este se desenvolve com recurso a tecnologias. A questão das representações apresenta-se como o eixo central onde se joga grande parte da compreensão dos conceitos. A complexidade dos modos de pensamento matemático envolvidos deve ser articulada com alguns constructos que são específicos do uso da tecnologia e não devem ignorar os diferentes processos que estão presentes na implementação do currículo. Por último, o desenvolvimento curricular a ser levado a cabo pelo projecto procurará influenciar diversos níveis de decisão curricular.

Referências

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.

Gimeno-Sacristán, J. (1998). O Currículo: Uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: Artmed.

Pacheco, J. A. (2001). Currículo: Teoria e práxis. Porto: Porto Editora.

Roldão, M. C. (1999). Gestão curricular, fundamentos e práticas. Lisboa: Ministério da Educação.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., e Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education. A perspective of constructs. Em F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169 - 1207). Charlotte: Information Age Publishing Inc.