ANÁLISE DE ERROS: UM RECURSO PARA A APRENDIZAGEM DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Eleni Bisognin, Helena Noronha Cury, Marcio Violante Ferreira,Vanilde Bisognin

UNIFRA, Santa Maria, RS, Brasil

curyhn@via-rs.net

RESUMO: *Uma investigação realizada com alunos de um curso de formação de professores, sobre a construção do conhecimento matemático em atividades investigativas em sala de aula, mostrou que esses futuros professores cometeram erros em resoluções de problemas que podem comprometer sua prática docente. Dessa forma, os pesquisadores aprofundaram estudos sobre análise de erros, com o objetivo de entender as causas das dificuldades e as formas de aproveitar os erros como ferramentas para aprendizagem. Neste trabalho, são analisados os erros e discutidas possibilidades de introduzir a análise de erros como um recurso para fazer descobertas e gerar novas pesquisas.*

ABSTRACT: *An investigation accomplished with students of a teacher education course, about the construction of mathematical knowledge in investigative activities in classroom, showed that those futures teachers committed errors in problem solving that can harm his/her educational practice. In that way, the researchers deepened studies on error analysis, aiming to understand the causes of the difficulties and how to take advantage of the errors as tools for learning. In this work, the mistakes committed by the students are analyzed and possibilities to introduce error analysis as a resource to do discoveries and to generate new researches are discussed.*

INTRODUÇÃO[2]

A análise de erros cometidos por estudantes de Matemática é uma das maneiras de compreender suas dificuldades de aprendizagem e auxiliá-los a superá-las. Em muitas experiências realizadas em sala de aula, não temos por objetivo analisar os erros, mas, ao enfocar as respostas dos alunos a questões propostas, acabamos por explicitar as dificuldades detectadas. Assim, ao coletar dados para uma investigação, temos, às vezes, elementos que nos permitem desenvolver uma nova pesquisa e, conseqüentemente, uma nova proposta de trabalho com os alunos.

Ferreira, Bisognin e Bisognin (2007) realizaram uma experiência durante as aulas da disciplina de Análise Real, em um curso de formação de professores de Matemática, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. As ações são parte de um projeto de pesquisa sobre o uso de atividades de investigação matemática, com o propósito de analisar como os alunos constroem seus conhecimentos a partir de ações desenvolvidas em sala de aula. O trabalho, apoiado em idéias de Polya (1995) e Pozo (1998), constou da solicitação de resolução de um problema de convergência de uma seqüência numérica definida recursivamente. Os investigadores analisaram as tentativas de solução dos alunos no trabalho em grupo, verificando se as fases sugeridas por Polya (1995) - compreensão do problema, esboço de um plano de resolução, execução e reflexão sobre a solução - estavam sendo seguidas. Também procuraram apresentar

---

[2] Este texto é escrito na ortografia brasileira, a qual difere da de outros países de língua portuguesa.

“situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento.” (Pozo, 1998, p. 9).

Durante a realização da tarefa, os professores-investigadores procuraram apenas mediar e conduzir o processo, sem interferir nas descobertas dos alunos. Dessa forma, ao coletar os resultados do trabalho, verificaram a existência de erros que mostraram dificuldades não esperadas, haja vista que os estudantes, futuros professores, cursavam o último ano e deveriam ter conhecimento de resultados trabalhados na disciplina de Cálculo, nos primeiros anos do curso ou mesmo no ensino secundário. Dessa forma, preocupados com tais dificuldades apresentadas, resolveram analisar os erros sob a luz de novas teorias, para ajudar os estudantes na construção do conhecimento sobre conceitos e propriedades dos números reais, fundamentais para a prática de um futuro professor.

A QUESTÃO PROPOSTA E OS PROBLEMAS DETECTADOS

Os 14 alunos da disciplina de Análise Real, do curso de formação de professores de Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), da cidade de Santa Maria, no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil, receberam como proposta de trabalho o seguinte problema:

Seja $a \in \Re^{+}$ *e considere a seqüência* (a_n)*, definida recursivamente por:*

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{a} \\ a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}\ , \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

a) *a seqüência é convergente?*

b) *é possível determinar seu limite?*

Os alunos já haviam trabalhado em aulas anteriores com o caso particular em que a=2 e já haviam concluído que, nesse caso, a seqüência converge para 2. No entanto, ao sobregeneralizar[3] o resultado, concluindo que a seqüência do problema proposto converge para *a*, a totalidade dos alunos cometeram um erro, detectado por eles quando os pesquisadores sugeriram que resolvessem o problema para a=1. Seguindo o mesmo raciocínio do caso particular em que a=2, os estudantes consideraram $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = L$ e, em seguida, escreveram $\sqrt{1+L} = L$, gerando a equação $1+L=L^2$, cujas raízes são $L_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $L_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, mostrando que a seqüência, para a=1, não converge para 1.

Os estudantes, trabalhando em grupos de três componentes, retomaram o trabalho, planejaram novamente os próximos passos, buscaram os teoremas correspondentes e provaram que a seqüência dada, sendo monótona crescente e limitada superiormente, é convergente e seu limite é $L = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Borasi (1985), analisando intuição e rigor na avaliação de expressões infinitas, trabalhou em sua sala de aula com a mesma seqüência proposta aos estudantes da UNIFRA. As dúvidas e perguntas dos alunos levaram-na a aprofundar o estudo e buscar uma prova rigorosa. Segundo ela, “Quando prevenimos nossos calouros de cálculo

[3] O uso do termo “sobregeneralizar” será explicitado a seguir, neste texto.

contra uma confiança demasiada em sua intuição e punimos severamente qualquer falta de rigor em suas provas, podemos estar reagindo demais ao perigo real de fazer erros e subestimando o poder positivo da intuição.”[4] (Borasi, 1985, p.74).

Outro erro, cometido por seis alunos, surgiu quando eles procuraram explicitar os termos da seqüência, escrevendo:

$a_1 = \sqrt{a}$; $a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} = \sqrt{a} + \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a} + \sqrt[4]{a}$; $a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a} + \sqrt[4]{a}} = \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a}$ ... $a_n = \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + ... + \sqrt[2n]{a}$.

Novamente, parece ter havido a sobregeneralização da propriedade distributiva da radiciação em relação à multiplicação, a saber: se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ existem, então $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, para quaisquer a, b reais. Ora, conhecendo esta propriedade, os alunos falsamente a generalizaram para $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Graeber e Johnson (1990) classificam os erros observáveis decorrentes de concepções errôneas e apresentam, entre as categorias, a sobregeneralização e a sobreespecialização.[5] Segundo eles, “se um aluno toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende para outra, então ele está sobregeneralizando”[6] (p. 4-2a) e, “se o estudante impõe a toda a classe uma propriedade de alguma subclasse, então está sobreespecializando.” (p. 4-3a)[7].

O erro representado pela falsa distributividade da radiciação em relação à adição é citado por muitos pesquisadores, tais como Mariotti (1986), Kirshner e Awtry (2004), Schechter (2006), Cury e Motta (2006), entre outros. Em 2005, havia sido desenvolvido um projeto de pesquisa sobre análise de erros em disciplinas matemáticas, com 368 alunos ingressantes em cursos universitários, em oito Universidades do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil (Cury, 2006). Uma das questões propostas envolvia o problema clássico da escada apoiada em um muro, disponível em muitos livros de Cálculo, que solicita o valor de um dos catetos em função do outro e da hipotenusa, cuja resposta correta, na referida questão, era $y = \sqrt{36 - x^2}$. Vinte e cinco por cento dos participantes, ao obter esta resposta, “extraíram” a raiz da diferença, assinalando a alternativa incorreta $y = 6 - x$.

Docentes da UNIFRA participaram do projeto, trabalhando com uma turma de alunos ingressantes do curso de formação de professores de Matemática e, ao realizar a pesquisa em 2007, sobre as atividades de investigação em sala de aula, com estudantes do mesmo curso, novamente se depararam com tal erro. Esse fato preocupou os investigadores, pois era esperado que, após dois anos de estudos, os alunos já tivessem superado dificuldades relacionadas a conteúdos da Matemática básica. Assim, os pesquisadores se propuseram a aprofundar a análise dos erros, à luz de estudos sobre o tema, com o objetivo de auxiliar os estudantes do curso de formação de professores a

[4] “When we warn our freshmen calculus students against relying too much on their intuition, and severely punish any lack of rigor in their proofs, we may be overreacting to the real danger of making mistakes and underestimating the positive power of intuition.”
[5] “Overgeneralization” e “Overspecialization”, respectivamente.
[6] “If a student takes a concept, a principle, or a procedure that is true for one class and extends it to another class, then the student is overgeneralizating.”
[7] “If a student imposes on the whole class a property of some subclass, then the student is overspecializating.”

construir um conhecimento matemático mais sólido para sua futura prática de sala de aula.

A ANÁLISE DOS ERROS

A investigação sobre os erros citados acima, cometidos pelos alunos do curso de formação de professores da UNIFRA ao resolverem um problema sobre convergência de seqüências numéricas, teve como objetivo detectar os tipos de erros e buscar alternativas metodológicas para auxiliar os estudantes a superá-los. A metodologia da pesquisa, apoiada na análise de conteúdo de Bardin (1979), envolveu três etapas básicas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na primeira fase, o material foi organizado, partindo-se da escolha dos documentos (os erros cometidos pelos estudantes), da formulação de hipóteses sobre as possíveis causas, utilizando-se a leitura "flutuante", em que o pesquisador se deixa impregnar pelo material. Na fase de exploração, foram escolhidos os erros que se encaixavam em uma mesma categoria; para este estudo, agrupamos aqueles que mostravam ter havido uma sobregeneralização de um resultado. No tratamento dos resultados, trabalhando apenas com uma turma de 14 alunos, não foi feito um tratamento estatístico dos erros, com distribuição de freqüências; optamos pela análise qualitativa, descrevendo cada erro e tecendo considerações sobre as possibilidades de uso em futuras experiências com os mesmos estudantes ou com outros que apresentem as mesmas dificuldades.

A característica em comum aos dois erros aqui citados é a sobregeneralização de um resultado já obtido anteriormente ou de uma propriedade já conhecida. No caso do primeiro erro, os estudantes parecem usar um raciocínio do seguinte tipo: se o limite da seqüência (a_n) definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, para n > 1, é 2, então o limite de qualquer seqüência do mesmo tipo, com $a_1 = \sqrt{a}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, para n >1, vale *a*.

D´Amore (2007), ao tecer comentários sobre conflitos, concepções errôneas e modelos intuitivos, explica que, às vezes, são propostos aos alunos conceitos que, através de sucessivos exemplos, formam imagens persistentes, que se transformam em modelos intuitivos. No estudo de seqüências, no Cálculo, por exemplo, é comum que o aluno se acostume a certas regras empregadas de forma não rigorosa; ao estudar o mesmo tema em Análise Real, não percebe que o objetivo da questão "a seqüência é convergente?" não é apenas operacional (obter um valor para o limite), mas exige discussões mais aprofundadas sobre a existência de expressões infinitas, sobre o significado de convergência, etc. Assim, ao sobregeneralizar a resposta, a partir do caso particular em que a=2, os estudantes mostraram que não tinham, ainda, compreendido a necessidade de uma prova rigorosa.

Em relação ao segundo tipo de erro aqui analisado, há várias possíveis interpretações. Kirshner e Awtry (2004) apontam a tendência dos alunos de gerarem "padrões de transformações incorretas de expressões" (p. 226), tais como sobregeneralizar para a adição a distributividade da radiciação em relação à multiplicação. Os autores consideram que, ao invés de refletir uma falta de compreensão do significado da raiz da soma, esse erro parece indicar uma falsa concepção da forma da regra correta, visto que há uma "saliência visual" (p. 229) em tal regra,

$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, que se apresenta como um obstáculo à aceitação do fato de que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Mariotti (1986) considera que a propriedade distributiva de uma operação em relação à outra parece gerar uma espécie de "protótipo", que influencia a ocorrência de um grande número de erros. A autora cita, como exemplos, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ e $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

É interessante notar, no segundo erro cometido pelos alunos da UNIFRA, que eles tinham conhecimentos de outra propriedade da radiciação, a saber, que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$, pois, ao "distribuir" a raiz quadrada em relação à soma das demais parcelas, expressaram cada termo da seqüência fazendo uso dessa propriedade. Portanto, mostravam ter conhecimentos de algumas propriedades da radiciação (como é de esperar de estudantes que estão em um último ano de um curso de formação), mas apresentavam o erro resistente que consiste em considerar $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Borasi (1996) discorre sobre o potencial representado por ambientes de aprendizagem em que um determinado erro é utilizado pelo professor para questionar os estudantes sobre a possibilidade de verificação daquele resultado, ao invés de tentar eliminá-lo. A autora apresenta um quadro com a "taxionomia de usos dos erros como trampolins para a investigação" (p. 279), em que são listados objetivos da aprendizagem e níveis de discurso matemático. Segundo Borasi (1996), a análise de um erro pode levar o aluno a desenvolver atividades em diferentes níveis de abstração, a saber: realização de uma tarefa, aprendizagem de uma técnica e compreensão sobre a natureza da Matemática. Em cada um desses níveis, pode-se abordar o erro para remediá-lo, para fazer descobertas a partir dele ou para gerar novas pesquisas.

A experiência com os estudantes do curso de formação de professores da UNIFRA mostrou que a solução de um problema, mesmo que sejam usadas técnicas já conhecidas, sempre aponta um caminho novo, pois cada aluno vai encaminhar a resposta em sua forma característica de se expressar matematicamente. Além disso, em qualquer estratégia utilizada para a resolução, o professor ou o próprio aluno poderá verificar se há algo mais a investigar ou algo novo a descobrir. No caso dos erros aqui analisados, o que se destacou, em especial, foram os erros cuja característica em comum é representada pela sobregeneralização.

No trabalho com estudantes de um curso de formação de professores, que em pouco tempo estarão aptos a lecionar para o ensino básico, é necessário pensar em estratégias para minimizar um possível "efeito cascata", em que as dúvidas não resolvidas desses futuros mestres possam se constituir em obstáculos à aprendizagem de seus alunos. Partindo das idéias de Borasi (1996), temos elaborado intervenções didáticas para desestabilizar as certezas do estudante e levá-lo a questionar suas próprias respostas. Não se trata, em momento algum, de dizer-lhe que sua maneira de resolução está errada e que a resolução correta é de outra forma. Sabemos que tal atitude é ineficaz e gera, em geral, um desestímulo para o trabalho com a Matemática. Temos procurado, como aconteceu durante o episódio da resolução do problema na disciplina de Análise Real, aqui narrado, desafiar o estudante, de forma que a solução não seja encarada como algo difícil ou que exija somente memorização, mas como uma possibilidade de participar e de se envolver na busca da solução do problema proposto, integrando-se e responsabilizando-se pela atividade desenvolvida.

O erro representado pela sobregeneralização pode ser trabalhado, por exemplo, em um ambiente em que os estudantes elaboram hipóteses para a solução de um determinado problema. Os grupos podem discutir suas hipóteses e descartar aquelas que entram em conflito com propriedades já conhecidas. Dessa forma, como afirma Lopes (1990), os erros são aceitos provisoriamente e as certezas (no caso, as falsas generalizações) são desestabilizadas dentro do próprio grupo, sem que o professor precise impor a sua verdade.

Outra sugestão de trabalho com os erros é aceitar uma determinada fórmula ou propriedade incorretamente criada pelos alunos e solicitar uma investigação em que eles vão verificar se há casos em que aquela "nova" regra se aplica. No exemplo citado, da falsa distributividade da radiciação em relação à adição, ao elevar ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, os alunos podem concluir que a igualdade se verifica somente se a ou b são nulos.

Uma última possibilidade de trabalho, que também pode ser aproveitada em cursos de formação de professores como sugestão de elaboração de recursos instrucionais, é a confecção de um jogo que possa auxiliar os estudantes a relembrar propriedades já estudadas e que envolva aquelas nas quais eles mostraram maiores dificuldades.

Acreditamos que as discussões sobre os erros cometidos pelos alunos, em especial em cursos de formação de professores, podem gerar reflexões sobre o próprio processo de aprendizagem, levando os futuros professores e seus mestres a aprofundar a compreensão sobre a natureza da Matemática.

REFERÊNCIAS

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Borasi, R. (1985). Intuition and rigor in the evaluation of infinite expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 7 (3-4), 65-75.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Norwood. NJ: Ablex Publishing Corporation.

Cury, H. N. (2006). Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. Anais do *III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Águas de Lindóia, Brasil: SBEM.

Cury, H. N., & Motta, C. E. M. (2006). Análise de erros e raiz da soma de reais: como superar a sobregeneralização? Anais do *III Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática.* São Paulo, Brasil: PUC-SP.

D´Amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Ed. Livraria da Física.

Ferreira, M. V., Bisognin, E., & Bisognin, V. (2007). Matemática no ensino superior: uma experiência usando a metodologia da resolução de problemas. Anais do *IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Canoas, Brasil: ULBRA.

Graeber, A. O., & Johnson, M. L. (1990). *Insights into secondary school students´understanding of mathematics*. San Diego: San Diego State University.

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (4), 224-257.

Lopes, A. J. (1990). Erros: mentiras que parecem verdades ou verdades que parecem mentiras. *Cadernos CEM*, 2, 41-45.

Mariotti, M. (1986). L`approccio psicologico nella didattica della matematica: considerazioni e proposte. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 9 (2), 71-104.

Polya, G. A. (1995). *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro, Interciência.

Pozo, J. I.(1998). *A Solução de Problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Schechter, E (2006). *The most common errors in undergraduate mathematics*. Recuperado em 17 março, 2006, de http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/commerrs/