

RASTROS DE COMPRENSIÓN EN LA ACCIÓN MATEMÁTICA. LA DIMENSIÓN HERMENÉUTICA DE UN MODELO OPERATIVO PARA LA INTERPRETACIÓN EN MATEMÁTICAS

Jesús Gallardo Romero y José Luis González Marí.
Universidad de Málaga, España

Wenceslao Quispe Yapo
Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú

Resumen. *En este trabajo teórico se expone la extensión hermenéutica experimentada por una aproximación en desarrollo a la interpretación de la comprensión en matemáticas. La dialéctica entre explicar y comprender suscitada por Ricoeur en el marco de la teoría del texto es utilizada aquí para proponer un enfoque específico para la interpretación matemática complementario a las orientaciones cognitiva y semiótica presentes en Educación Matemática. La potencialidad de la propuesta se manifiesta al mediar en el dualismo epistemológico existente entre ambas orientaciones, ofreciendo como alternativa una ampliación metodológica operativa para la gestión de la interpretación de la comprensión matemática en diferentes escenarios básicos de valoración.*

Abstract. *In this theoretical work we expose the hermeneutical extension of an approach for the interpretation of understanding in mathematics. The dialectic of explanation and understanding in Ricoeur's text theory is used to propose a specific approach for the mathematical interpretation, which is complementary to the cognitive and semiotic proposals in Mathematics Education. We show the usefulness of this approach by overcoming the epistemological dualism among both proposals and we present an operative methodological extension to deal with the interpretation of understanding in mathematics in several basic contexts of assessment.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años venimos trabajando sobre una aproximación multifacética para la valoración de la comprensión en matemáticas que ha dado muestras de ser operativa en la gestión de las componentes que intervienen en la interpretación del uso del conocimiento matemático por parte del alumno en diferentes escenarios básicos de valoración (Gallardo & González, 2005, 2006; Gallardo, González & Quispe, 2007). Entre otras contribuciones, de utilidad para la investigación y la práctica docente, esta aproximación proporciona un procedimiento metodológico, basado en el análisis fenómeno-epistemológico del propio conocimiento matemático, para la identificación y organización de situaciones matemáticas eficaces en el diagnóstico y valoración de la comprensión. Continuando en esta línea abierta de reflexión, presentamos en este trabajo la reciente ampliación experimentada por nuestra propuesta como consecuencia de la incorporación de nuevas bases interpretativas que tienen su origen en la teoría hermenéutica del texto elaborada por Ricoeur (2002). Con los aportes hermenéuticos introducidos aspiramos a delimitar una opción metodológica aún más efectiva para afrontar con mayor garantía operativa la interpretación en aquellos escenarios básicos de valoración destacados por su complejidad relacional. Como consecuencia de dicha actualización aspiramos además a dar una respuesta teórica a la dualidad exhibida actualmente en Educación Matemática entre las orientaciones *cognitiva* y *semiótica* de la interpretación de la comprensión en matemáticas.

LAS ORIENTACIONES COGNITIVA Y SEMIÓTICA DE LA INTERPRETACIÓN EN MATEMÁTICAS

La enseñanza y el aprendizaje con comprensión suele reconocerse sin dificultad como un objetivo deseable y prioritario en Educación Matemática. No obstante, la preocupación básica por el *desarrollo* de la comprensión matemática en los estudiantes forma parte de un problema más amplio y complejo en el que también intervienen otras dimensiones del fenómeno. En particular, el estudio de la comprensión encuentra en la *valoración* un condicionante metodológico de primer orden que por su reconocida naturaleza interpretativa sitúa la cuestión de la *interpretación* en la base de la investigación sobre comprensión en matemáticas (Gallardo & González, 2007a).

Desde una perspectiva general y con propósito integrador llegamos a identificar entre la variedad de trabajos que aportan información explícita relativa a la comprensión del conocimiento matemático dos orientaciones básicas en la consideración y el tratamiento de la interpretación que pasamos a describir a continuación.

Orientación cognitiva

Influenciada por la tradición psicológica, esta orientación pone la atención en la subjetividad del alumno y determina como propósito fundamental responder a algunas de sus complejidades internas. Suele aparecer reflejada en aquellas aproximaciones que contemplan la comprensión como su principal objeto de estudio y que deciden abordar el análisis de algunas de sus dimensiones reconocidas: origen y fuentes, naturaleza y funcionamiento, evolución, factores y efectos (Gallardo y González, en prensa). Se caracteriza por concebir la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y por reconocer la posibilidad de su acceso y captación en las mentes ajenas de los escolares. La interpretación se presenta entonces como un traslado hacia la esfera mental del estudiante, a la pertenece su comprensión matemática, tomando como vía las distintas manifestaciones observables generadas durante su quehacer matemático. Así lo reconocen Duffin y Simpson (2000) cuando afirman:

“De repente llegó a ser claro para nosotros que es sólo a través de la interpretación de las manifestaciones físicas del estudiante en el uso de su comprensión que el profesor puede hacer algún tipo de juicio acerca de ella” (p. 419).

En esencia, en esta orientación interpretar supone acceder a realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas. La objetividad de la interpretación se sustenta en la autonomía proporcionada por la fijación y conservación de las producciones externas en registros de distinto tipo, verbales y escritos. Por tratarse la comprensión de una actividad que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observada directamente, su interpretación desde esta perspectiva necesita y suele abordarse al amparo de supuestos teóricos previos sobre la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo visible (Koyama, 1993). El proceso metodológico recurrente implicado en la interpretación cognitiva tiene por objeto estrechar progresivamente la distancia entre estas realidades interna y externa. Un claro exponente de esta orientación lo encontramos en el *enfoque representacional*, que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Romero, 2000; Goldin, 2002). El acceso interpretativo al ámbito mental de la comprensión resulta especialmente directo en este enfoque al plantear la valoración en función de las conexiones mentales que se establecen entre las diversas representaciones internas del conocimiento matemático objeto de comprensión. Las principales dificultades operativas por las que se ve

afectada la orientación cognitiva de la interpretación están relacionadas con la transición entre los ámbitos externo e interno de la comprensión junto con los propios rasgos mentales de la misma.

Orientación semiótica

Las fronteras reconocidas en la interpretación cognitiva sirven de justificación para presentar la orientación semiótica como variante alternativa en la gestión de la interpretación de la comprensión en matemáticas. Esta opción interpretativa emerge de algunas de las aproximaciones semióticas al conocimiento matemático y su cognición que se vienen desarrollando recientemente en Educación Matemática. La orientación semiótica, tal como la derivamos de estos enfoques, asume en primer lugar un claro distanciamiento con el carácter mental de la comprensión:

“[...] en esta visión la interiorización no juega un papel porque el objetivo del aprendizaje no es una construcción mental interna sino una actividad con diagramas externa y observable. [...] De una manera más extrema: la comprensión no es, entonces, la aprehensión de objetos abstractos (basada en otros mentales construidos apropiadamente) sino la experiencia aceptada socialmente con actividades con diagramas” (Dörfler, 2006; p. 109).

En su lugar, se opta por presentar la comprensión como una capacidad esencial o competencia del alumno que se traduce en prácticas sociales interpretables públicamente (Font, Godino & D'Amore, 2007). En esta orientación la interpretación se circunscribe al espacio exclusivo de la actividad matemática visible y del uso que en ella se hace de los sistemas de signos matemáticos. Básicamente, interpretar supone trasladarse a los entornos semióticos generados por estas prácticas y producciones matemáticas observables, suspendiendo incluso cualquier referencia a la realidad externa que circunda a los propios productos semióticos (Otte, 2006). La objetividad descansa en esta orientación en la propia estructura interna de las producciones semióticas a las que se traslada la tarea interpretativa. El método involucrado en esta interpretación se ajusta en lo fundamental a un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística que tiene como objeto captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en las diversas acciones matemáticas observadas y registradas en los alumnos. Ejemplo de ello lo encontramos en el análisis semiótico incluido en el *enfoque ontosemiótico* de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007). Las posibles fronteras de la orientación semiótica de la interpretación las situamos en la suspensión de las referencias externas sobre las que se proyectan los registros semióticos, en la omisión del texto como unidad global de reflexión semiótica y en la problemática relación entre el signo hablado y el signo escrito.

El dualismo cognitivo-semiótico y su dilema

Según se desprende de las caracterizaciones esbozadas, las particularidades de cada orientación quedan reflejadas en aspectos como las áreas de conocimiento por las que se ven influenciadas, el estatus asignado a la comprensión en matemáticas, el espacio de acceso delimitado para la interpretación, el fundamento de su objetividad, el círculo interpretativo involucrado en el método asociado, la terminología específica instaurada o las fronteras de su operatividad. La confrontación de ambas orientaciones en base a estos aspectos nos permite identificar diversas dicotomías con las que pensamos queda suficientemente argumentada la presencia de un dualismo epistemológico en la interpretación de la comprensión en Educación Matemática (Tabla 1).

Tabla 1

Dualidades entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la interpretación en matemáticas

Rasgos dicotómicos	Orientación cognitiva	Orientación semiótica
Estatus de la comprensión	<i>Epistemológico</i> : fenómeno cognitivo, proceso mental, modo de conocer.	<i>Ontológico</i> : cualidad intrínseca, capacidad esencial del individuo.
Espacio de interpretación	Traslado a las realidades cognitivas internas del sujeto.	Traslado a los entornos semióticos generados por la actividad matemática.
Vía de acceso interpretativo	Observación de realizaciones externas objetivadas en registros verbales y escritos.	Práctica matemática visible y uso en ella de los sistemas de signos matemáticos.
Propósito de la interpretación	Estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.	Captar la complejidad de las relaciones semióticas desplegadas en la producción matemática.
Método	Círculo interpretativo en base a modelos de comprensión conjeturados a priori.	Modelo de <i>análisis estructural</i> de inspiración lingüística.
Fuente de objetividad interpretativa	Autonomía de las producciones matemáticas dada por la fijación y conservación en registros.	Propia estructura interna de las producciones semióticas.
Fronteras	Transición entre lo <i>interno</i> y lo <i>externo</i> ; los propios rasgos mentales de la comprensión.	Suspensión de la referencia externa de los registros semióticos; transición <i>hablado-escrito</i> ; omisión del texto como unidad de reflexión semiótica.
Algún ejemplo en la SEIEM	Romero (2000)	Font (2005)

Por otra parte, entendemos que la comprensión en matemáticas genera un campo limitado de interpretaciones potenciales donde siempre resulta posible la confrontación de alternativas y el respaldo justificado de unas opciones en detrimento de otras. Particularizando en las dos orientaciones interpretativas delineadas, al tiempo que reconocemos la legitimidad y potencialidad de cada una de ellas para la investigación ligada a la comprensión, también subrayamos el dilema metodológico fundamental que plantea el *dualismo cognitivo-semiótico* mencionado, que enunciamos en términos interrogativos del siguiente modo:

Al afrontar la interpretación de la comprensión en matemáticas, ¿hay que asumir que las orientaciones cognitiva y semiótica (aún en sus versiones más 'débiles') son los polos de una relación de exclusión que nos impone una necesaria elección entre ambas posiciones? O por el contrario, ¿se pueden establecer vínculos dialécticos entre ellas con los que superar, o al menos reducir, el dualismo exhibido?

COMPRENDER, EXPLICAR E INTERPRETAR EN LA TRADICIÓN HERMENÉUTICA

La dualidad que nos preocupa encuentra una conexión central con el debate, más general y en un plano diferente, sobre la relación entre comprensión, explicación e interpretación acontecido en la filosofía hermenéutica contemporánea durante el siglo XX. Como referencia específica, presentamos en esta sección una breve síntesis de algunas de las contribuciones a esta discusión que influyen en nuestros planteamientos y nos guían en el esclarecimiento del dilema referido.

I. A finales del siglo XIX se recuperan las ciencias del espíritu y en ellas se presenta la comprensión (*verstehen*) como método específico para la interpretación de la conducta humana y de las realidades culturales, en contraposición con la explicación (*erklären*) como método analítico-causal característico de las ciencias de la naturaleza (Abel, 1964). Es así como la comprensión aparece como un traslado hacia el interior del psiquismo ajeno tomando como vía de acceso la interpretación de las configuraciones estables y de los signos objetivados exteriorizados por el individuo. La interpretación, como parte de la comprensión, apunta en esta etapa a la reproducción de las experiencias vividas por otros, promocionando una objetividad sustentada en la fijación y conservación que la escritura confiere a las manifestaciones externas. No obstante, el relativismo y la exigencia de cientificidad no resuelta de esta interpretación terminan precipitando su progresiva despsicologización.

II. A lo largo de la primera mitad del siglo XX, explicación y comprensión reaparecen en una nueva dicotomía, esta vez circunscrita al ámbito concreto del texto. La interpretación ya no busca su norma de inteligibilidad en la comprensión del otro, en *quién se pronuncia* en el texto, sino más bien en el sentido del propio texto y también en su referencia:

- Por una parte, bajo el influjo del análisis estructural que la lingüística aplica con éxito a los sistemas simples de signos, la explicación se revela como un modelo de aprehensión del sentido o significado del texto (*lo que dice*) a partir del estudio de sus relaciones internas, de la identificación de correlaciones estables dentro de los sistemas semióticos que lo componen, sin que haya intención alguna de trascender más allá de la propia esfera del lenguaje.

- Por otra parte, la comprensión, dotada ahora de dimensión histórico-ontológica, desvía su atención hacia la referencia del texto (*aquello sobre lo cual trata*). Las hermenéuticas de Heidegger, primero, y de Gadamer, después, son las principales artífices de este desplazamiento que deslegitima tanto el acceso a la actividad psicológica como el traslado exclusivo al ámbito lingüístico. Como alternativa proponen desvincular la realidad del lenguaje del texto de la experiencia humana que subyace a él para captar únicamente la pretensión de aquello que se transmite. Es el *círculo hermenéutico* el que proporciona la justificación y el procedimiento para ello a través de la interpretación reiterada (Gadamer, 2000).

III. Finalmente, una solución dialéctica sólida para esta última polaridad la encontramos en Ricœur (2002), quien propone contemplar la interpretación del texto como un proceso complejo donde participan la explicación y la comprensión como fases complementarias del mismo arco hermenéutico. En concreto, la explicación aparece como la mediación entre dos etapas de comprensión. Así, el movimiento interpretativo se inicia con una comprensión superficial a modo de *conjetura*, consistente en la captación ingenua del sentido del texto en su totalidad; prosigue con la *validación* de este sentido mediante procedimientos considerados equivalentes en su carácter a la explicación estructural y desemboca en una comprensión crítica compleja que tiene como resultado la apropiación de la semántica profunda del texto, a saber, sus referencias no ostensivas o aquello sobre lo cual trata el texto.

“Comprender un texto es seguir su movimiento del sentido hacia la referencia, de lo que dice a aquello a lo cual se refiere. En este proceso, el papel mediador desempeñado por el análisis estructural constituye a la vez la justificación del enfoque objetivo y la rectificación del enfoque subjetivo” (Ricoeur, 2002; p.192).

Esta propuesta desarrollada en el ámbito del texto tiene para Ricoeur un fuerte carácter paradigmático para el campo de las ciencias humanas de tal forma que las mismas necesidades y soluciones dialécticas resultan pertinentes también en la teoría de la acción.

REFERENTES HERMENÉUTICOS PARA UNA APROXIMACIÓN OPERATIVA A LA INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

Regresando al dualismo cognitivo-semiótico de la interpretación de la comprensión en matemáticas, entendemos que éste se manifiesta como una concreción particular contextualizada en el ámbito de la Educación Matemática de la cuestión hermenéutica trazada a nivel general. Muestra de ello son las afinidades que llegamos a identificar entre (a) la *orientación cognitiva* y la interpretación psicológica característica de la dimensión metodológica de la comprensión y entre (b) la *orientación semiótica* y la explicación estructural.

Por nuestro lado, instruidos en parte en la dialéctica Ricoeuriana, optamos por una actitud integradora frente a tal dualismo introduciendo en nuestro modelo de valoración de la comprensión del conocimiento matemático una visión extendida de la interpretación, donde las dos orientaciones contribuyen a una misma propuesta interpretativa, completándose mutuamente y mostrándose por ello solidarias. De este modo aspiramos a dar una respuesta operativa a algunas de las fronteras señaladas para la interpretación en matemáticas, como las referidas a la problemática transición entre *lo interno* y *lo externo* o entre *lo hablado* y *lo escrito*.

A continuación, delineamos los principales referentes hermenéuticos de nuestra propuesta específica para la interpretación de la comprensión en matemáticas:

1. La comprensión es una actividad intelectual cognitiva experimentada como tal exclusivamente por quien la desarrolla.

Consideramos que toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, una actividad intelectual de carácter mental. Bajo este supuesto entendemos que la comprensión, tanto en su versión epistemológica, como modo de conocimiento, como en su variante ontológica, como capacidad esencial del sujeto, va a demandar unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla. De otro modo no justificamos, por ejemplo, que su estudio resulte una tarea altamente compleja, generadora de múltiples problemas abiertos condicionantes de la investigación en Educación Matemática.

2. La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables.

Asumimos que los fenómenos cognitivos no son radicalmente incommunicables y que la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. En base a esto, el *registro* observable generado durante el quehacer matemático se erige entonces como la principal fuente depositaria de las expresiones o *rastros* visibles derivados de la comprensión, constituyéndose por ello en el centro de interés de nuestra propuesta interpretativa.

3. La circunscripción al registro observable, más que limitación, es una condición necesaria para la interpretación.

Una interpretación dirigida a la faceta mental de la comprensión, como sucede con la orientación cognitiva, induce a que la transición entre lo externo y lo interno resulte inevitablemente problemática desde el principio y suponga una limitación metodológica importante para esta vía. Como alternativa operativa, proponemos una opción interpretativa distanciada del interés por lo mental y restringida al registro observable, lo cual permite justificar la interpretación como un requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la propia comprensión.

4. Abogamos por una interpretación flexible adaptada a la originalidad del escenario básico de valoración y del registro a interpretar en él.

La valoración de la comprensión del conocimiento matemático suele transcurrir en diferentes escenarios básicos que se originan cuando se pretende obtener información sobre la comprensión en fases distintas del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque todos los escenarios comparten elementos comunes, cada uno es específico y diferente a los demás, razón por la cual resulta aconsejable delinear una interpretación que tenga en cuenta las particularidades de cada uno de ellos. Además, la singularidad de aquello que pretendemos interpretar condiciona y determina desde el principio el resultado efectivo de la interpretación, de manera que desatendemos cualquier pretensión metodológica consistente en aplicar procedimientos interpretativos inalterables a los registros particulares.

5. La interpretación demanda la textualización de todo registro observable.

Consideramos que el carácter contingente, temporal y dependiente de las acciones y las manifestaciones verbales constituye un serio obstáculo para la interpretación en sus distintas variantes. Por el contrario, la estabilidad, perdurabilidad e independencia del *registro escrito* lo hacen especialmente idóneo para desplegar en él nuestra propuesta. De este modo, el paso de lo hablado a lo escrito, lejos de ser una limitación metodológica, se presenta como otra de las condiciones necesarias para la tarea interpretativa. En definitiva, la inscripción de lo observable hace patente el progresivo distanciamiento entre lo mental, lo verbal y, finalmente, lo escrito, poniéndose de manifiesto la inaccesibilidad directa de los aspectos internos de la comprensión, la imposibilidad de una relación especular entre lo verbal y lo escrito y la exigencia ineludible de una interpretación dirigida al texto.

6. La interpretación del registro escrito persigue caracterizar los usos del conocimiento matemático como rastros de comprensión.

Bajo la premisa de no poderse aplicar aquello que no se posee, encauzamos la búsqueda de rastros de comprensión en términos de empleo del conocimiento matemático. Específicamente, presumimos que la capacidad para utilizar el conocimiento matemático se deriva de su comprensión y, por tanto, que lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación problemática proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende. La interpretación se dirige entonces a la exteriorización y caracterización de los usos del conocimiento matemático implícitos en los registros matemáticos escritos.

7. La estrategia interpretativa conjuga la componente semiótica del registro escrito con las referencias fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático.

Proponemos una estrategia combinada consistente en (a) captar y validar el significado del texto en su totalidad y, en base a ello, (b) revelar de este significado los usos dados al conocimiento matemático. En la primera etapa consideramos que tienen cabida las modalidades metodológicas consolidadas de la orientación semiótica de la interpretación. En la segunda fase intervienen con eficacia los referentes fenómeno-epistemológicos de nuestro modelo de valoración (Gallardo & González, 2006, 2007b).

CONSIDERACIONES FINALES

Entendemos que la actividad interpretativa ejercida regularmente en el aula de matemáticas y en la investigación de las cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sitúa a la interpretación en el núcleo de la discusión sobre los problemas fundamentales de la Educación Matemática. Posicionados en este nivel de reflexión, hemos argumentado aquí a favor de una visión interpretativa integradora de las orientaciones cognitiva y semiótica, con objeto de extender en lo posible el campo operativo de la interpretación. Como resultado, nuestra aproximación se ha visto fortalecida con una dimensión hermenéutica, complementaria a la fenómeno-epistemológica ya constituida, que nos permite gestionar desde una posición favorable la complejidad inherente a la valoración de la comprensión en matemáticas. En este sentido, unimos lo expuesto a otras contribuciones hermenéuticas (Brown, 2001; Ell, 2006) para responder positivamente desde el contexto específico de la valoración a la cuestión de la potencialidad del conocimiento hermenéutico para la Educación Matemática.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos las sugerencias de mejora recibidas de los revisores anónimos de la versión preliminar de esta comunicación.

REFERENCIAS

- Abel, T. (1964). La operación llamada "Verstehen". En I. L. Horowitz (Coord.) *Historia y elementos de la sociología del conocimiento* (pp. 185-196). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Brown, T. (2001). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dörfler, W. (2006). Inscriptions as objects of mathematical activities. En J. Maasz & W. Schoeglmann (Eds.) *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 97-111). Rotterdam: Sense Publishers.
- Duffin, J. & Simpson, A. (2000). A search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 4, 415-427.
- Ell, F. (2006). Can moderate hermeneutics help us to understand learning and teaching in the mathematics classroom? En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 33-40). Praga: PME.
- Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española*

de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 111-128). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27, 2, 2-9.

Gadamer, H. G. (2003). *El problema de la conciencia histórica*. Madrid: Tecnos.

Gallardo, J. & González, J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.) *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 197-204). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gallardo, J. & González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15.

Gallardo, J. & González, J. L. (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66.

Gallardo, J. & González, J. L. (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro & J. L. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 157-184). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Gallardo, J. & González, J. L. (en prensa). Advances in the research on mathematical understanding: an integrating synthesis. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Gallardo, J., González, J. L. & Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo & M^a. J. González (Eds.) *XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación*. Tenerife: Universidad de La Laguna.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 2/3, 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 1/2, 127-135.

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

Otte, M. (2006). Prof and explanation from a semiotical point of view. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 23-43.

Ricœur, P. (2002). *Del texto a la acción*. México: Fondo de Cultura Económica.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent & M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.