Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el Aula

Pedro Javier Rojas Garzón

Universidad Distrital Francisco José De Caldas

1. Introducción

Son varios los problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar, algunas de cuyas manifestaciones, pueden ser referidas a aspectos generales que, según Kieran (1989), estarían relacionadas con:

- El cambio de convenciones respecto del referente aritmético
- La interpretación de las letras y
- El reconocimiento y uso de estructuras.

Por su parte, el grupo Pretexto (1996), propone:

- ✓ Una caracterización de la noción de variable en la que admite la necesidad de la existencia, desde el punto de vista cognoscitivo, de universos densos de variación para el tratamiento del álgebra escolar.
- ✓ La existencia de un camino natural relacionando la jerarquización de las posibles interpretaciones de las letras en contextos algebraicos y la caracterización de variable.
- ✓ Tres invariantes para la construcción de objetos matemáticos.

La intención en estas notas es adelantar, a partir de algunos conceptos que desde la perspectiva del Grupo Pretexto, son caracterizables como *Problemas Puntuales*,[1] y que

[1] *Problemas Puntuales*. En las matemáticas, existen ciertos conceptos o nociones que están en la base de algunas de sus áreas: aritmética, álgebra, cálculo, y, sin entrar en discusión respecto de su lugar, lógica: las cuales a su vez se fundamentan respectivamente, al tiempo que fundamentan a las matemáticas como totalidad. Además, tales conceptos, por el grado de abstracción que comparten, poseen una dificultad conceptual importante. Estas características, provocan entonces, de manera natural, dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, que se manifiestan en los siguientes aspectos:

Permanencia de la dificultad. Con esto se quiere significar que la dificultad se aprecia en el tiempo en dos sentidos. El primero, que aparece en los estudiantes, generación tras generación. El segundo, que una vez ha sido vivenciada por un estudiante específico, puede permanecer en él prácticamente durante toda su vida, si no se lleva a cabo un trabajo para superarla. En este último sentido, lo hecho puede ser consciente o inconsciente, pero cualquiera sea el caso, no hay memoria explícita y escrita de ello.

Presencia de la dificultad. Los problemas de incomprensión por parte de los alumnos, y las dificultades para el tratamiento por parte de los profesores, se presentan en la gran mayoría de estudiantes y docentes respectivamente.

Determina incomprensión. Cuando no se comprende uno de estos conceptos, se produce algo así como una reacción en cadena que lleva a que cada vez más conceptos sean incomprendidos, lo cual, como especulación plausible, puede ser una de las razones para la actitud displicente de los estudiantes para con las matemáticas.

se ubican justamente en los aspectos anotados, un trabajo orientado en dos direcciones diferenciadas aunque complementarias en el ejercicio docente: la formación disciplinar en los conceptos referidos, abordada a partir de la consideración de las problemáticas asociadas con la enseñanza y el aprendizaje de los mismos.

El curso está dirigido especialmente a profesores de educación básica (de los grados 4^0 a 8^0), y en él se pretende abordar, desde las posibilidades de la acción docente, las siguientes preguntas: (1) ¿Cómo pasar de la aritmética escolar al álgebra escolar?, y (2) ¿Cuál puede ser una "línea" temática para hacerlo? Por lo cual, se presentará de manera general una descripción de las temáticas relacionadas con el álgebra, y las dificultades que encuentran los estudiantes en su trabajo escolar. Además de reportar algunos resultados de investigación asociados con tales temáticas se presentarán algunos elementos para orientar propuestas de trabajo en el aula.

2. Referentes teóricos

Se parte de que el trabajo al interior del aula es principal y fundamentalmente un acto de comunicación, y como tal debe ser entendido y vivenciado, por lo cual la orientación dada debe tener como propósito el entendimiento mutuo respecto de cada una de las situaciones que en el aula surjan, en particular, la orientación que tiene que ver con la comunicación en matemáticas. Así pues, en tanto se busca el entendimiento, se tomará como parámetro orientador de la comunicación la teoría de la *acción comunicativa* de Habermas, y respecto de la matemática se enriquecerá con tres *invariantes*, considerados indispensables –aunque no suficientes–, para alcanzar tal entendimiento (Pretexto, 1997: 64). Tales invariantes son:

- ✓ *El significado del constructo matemático, o más realmente, el objeto matemático mismo es construido a trozos y progresivamente por el sujeto mediante múltiples procedimientos operacionales que lo involucran, en términos de los distintos usos, interpretaciones que de ellos tenga en un momento dado. Usos que tienen sentido, en tanto se correspondan con una estructura, que también es la que el sujeto ha construido en ese momento, a partir de las situaciones ejemplarizantes, con las que se ha encontrado.*
- ✓ *La necesidad de un modelo acorde con los saberes constituidos en el sujeto, para lograr interpretar un constructo más generalizado.*
- ✓ *Para posibilitar la construcción de un objeto matemático que si bien engloba, también rompe lo ya constituido, es necesaria su ubicación como formando parte de una totalidad matemática que le de sentido. Se requiere, pues, de una actitud tematizante que toca los terrenos de la epistemología, y la metamatemática, como prácticas, no como referencia enciclopédica necesaria.*

Estas dos perspectivas teóricas, la habermisiana y los invariantes,[2] se integran en una nueva perspectiva desde la cual es posible orientar la práctica al interior del aula de clase en matemáticas, por supuesto, de un profesor que consciente e intencionalmente se proponga hacer de su actividad docente un espacio de investigación en el que él mismo, sus estudiantes, y la matemática puesta en juego, son objeto de investigación; en otras palabras, es una perspectiva que posibilita al profesor asumir una *actitud vigilante* respecto de lo que ocurre en su cotidianidad de aula. En este sentido, se plantea los siguientes cuatro aspectos generales a tener en cuenta cuando se es profesor de matemáticas, que constituyen un *modelo de observación* en el aula:

(1) *Exploración y explicitación de las concepciones que de las matemáticas se tiene, en particular, las referidas a la aritmética y el álgebra escolares.* Se parte de que en el encuentro de aula, profesores y estudiantes, llevan incorporadas concepciones diversas acerca de:

- ¿Qué es y cómo es aquello que se va a enseñar o a aprender?
- ¿Cómo se es profesor o estudiante, y cómo se debe ser?
- ¿Dónde es que se enseña o se aprende y cuándo es que se debe enseñar o aprender?

Concepciones que pueden rastrearse, a partir de los actos de habla de los actores en el aula, apoyándose en:

- ✓ ¿Qué pretensión le plantea el hablante al oyente y cómo éste la asume o la discute?
- ✓ Instrumentos que requieren elementos teóricos de tipificación de concepciones de número fraccionario, álgebra escolar, de jerarquización e interpretación de la letra en contextos algebraicos e invariantes para la construcción de objetos matemáticos, entre otros.

(2) *Instrumento para rastrear las concepciones acerca de ¿qué es? y ¿cómo es? aquello que se va a enseñar o aprender.*

– *Forma en que se pone en escena la matemática escolar.* La forma de poner la matemática escolar en escena, se puede observar desde dos perspectivas: una relacionada con el compromiso didáctico del profesor, la otra desde la ontología asociada por el profesor a las entidades con las que trabaja en matemáticas. Perspectivas que si bien se aíslan para efectos de análisis, en la labor diaria del profesor ocurren simultáneamente imbricándose una en otra como una totalidad unificada, dependiendo de los hábitos adquiridos, ya sea de manera consciente, como exigencia

[2] Los referentes teóricos que aquí se presentan son los desarrollados por el Grupo Pretexto (1996).

implícita de los medios académicos donde se formó, o, en su quehacer como profesional.

Desde la perspectiva del compromiso didáctico, pueden apreciarse al menos las siguientes concepciones sobre el trabajo de las matemáticas escolares:

- *Algorítmica.* Se presenta a partir de ejemplos, como una colección de algoritmos básicos.
- *Procesualmente problemática.* Se presenta el álgebra a través de problemas (no únicamente ejercicios).
- *Formal.* Se presenta la matemática escolar a través de definiciones y reglas haciendo ejemplos específicos de ella.

Desde la perspectiva ontológica pueden apreciarse al menos las siguientes:

- *Objetos matemáticos construidos culturalmente*. No son dados ni hechos; por el contrario, se reconocen como producciones de una cultura. La interpretación que de ellos se haga, desde distintas culturas, puede ser: *Contingent*e (Para culturas diferentes, por ejemplo, *uno,* no necesariamente es interpretado de la misma manera) ó *Necesaria* (Cualquiera sea la cultura, por ejemplo, *uno,* es interpretado de igual manera).
- *Objetos matemáticos de existencia propia.* Son dados y hechos; ni su existencia ni su interpretación depende de las culturas. Así que ellos gozan de esencialidad. Por ello: *Se descubren* o *Se dan a luz.*

– Uso de la matemática escolar propuesto por el profesor.

- *Como disciplina estructuradora del pensamiento* (objeto de estudio).
- *Como herramienta para abordar problemas o temas en otras áreas del conocimiento* (modelización de teorías).
- *Como instrumento de interpretación de situaciones cotidianas o que tiene que ver con ella* (matematización).

– Consideración que hace el profesor de la relación de la matemática escolar con el saber previo del estudiante.

- *En continuidad con lo aprendido*. Interpretaciones del “nuevo saber” desde el saber previo, o, interpretaciones del saber previo desde el “nuevo saber”.
- *En discontinuidad con lo aprendido*. Imágenes desconectadas, a lo más relacionadas por un tratamiento básicamente sintáctico.

(3) *Para efectos de observar en los actos de habla lo relacionado con ¿cómo se es profesor o estudiante, y cómo se debe ser?* Se pueden tomar como criterios:

- ¿Qué tipos de actos de habla ocurren en el aula?
- ¿Qué pretensiones de validez se critican o no se critican?

(4) ¿Dónde es que se enseña o se aprende y cuál es el momento pertinente en el que se debe enseñar o aprender? Debe observarse en los actos de habla cuáles de ellos tematizan la legitimidad de enseñar matemáticas escolares en un determinado momento y lugar. Desde los planteamientos del grupo Pretexto (1996), en este modelo de observación, es fundamental:

> [C]entrar la mirada en los actos de habla encaminados a potenciar los vínculos entre el contenido proposicional del discurso que refiere el álgebra y el mundo de vida de los estudiantes, de los que se espera a él accedan.

Finalmente, y siguiendo ideas de Pretexto (1997), en lo que resta de esta sección se presenta un breve desarrollo en relación con las manifestaciones de dificultad en la iniciación al álgebra escolar mencionadas en la introducción,

Marco aritmético de referencia. Como lo plantea Kieran (1989), los escolares al comenzar el estudio del álgebra, traen nociones y enfoques de uso en el trabajo aritmético, las cuales no son suficientes para abordar el trabajo algebraico, en tanto éste no es una simple generalización del aritmético. Sin embargo, el hecho de que el álgebra escolar pueda ser vista como la formulación y manipulación de proposiciones generales sobre los números, hace que la experiencia previa que el estudiante ha tenido con la estructura de expresiones numéricas en la escuela tenga efecto sobre la habilidad para asignarle significado, y sentido, al álgebra escolar. Por ejemplo, como lo afirma Pretexto (1997: 21):

> [L]a concatenación de símbolos cambia sustancialmente: mientras en aritmética concatenar símbolos (números) lleva implícita la suma de los valores posicionales (25 = 20+5 ó 25=2decenas+5unidades; también 3½ = 3+½), en álgebra concatenar lleva implícito el producto (*2a* significa 2x*a*). Así, es posible que los estudiantes, por ejemplo, relacionen *2a* y *2+a* como expresiones equivalentes o también que sintácticamente asuman *a+a* como *aa* o como a^2 (en este sentido, consideran que, por ejemplo, $a+a = aa = a^2$). En este sentido, resulta importante destacar un hecho encontrado en la investigación desarrollada por el Grupo Pretexto (1996) sobre la variable en matemáticas: h^2 no se relaciona directamente con el producto *h.h* sino como conteo de *haches* (*hh* ó *h+h*), que aparecen dos veces independientemente de la operación.

En relación con los usos del signo igual, plantean:

> [P]uede mencionarse la dificultad que encuentran los estudiantes para aceptar la falta de cierre, por ejemplo, aceptar como respuesta la expresión *a+b*, prefiriendo *cerrarla* (que es una exigencia presente de manera drástica en aritmética, al menos desde la mirada usual centrada en la aplicación de procedimientos de cómputo), lo cual induce a escribir *a+b=ab* e incluso *2+3a=5a.* Puede generalizarse esta situación, diciendo que el estudiante no acepta que proceso y resultado puedan ser lo mismo, dificultad que ha dado en llamarse *dilema proceso-producto*, la cual podría estar relacionada también con la interpretación del signo igual "=" como una orden de operar (Kieran, 1981) y con la dificultad para aceptar la *relación de igualdad* como una *relación de equivalencia* (Pretexto, 1997: 21-22).

En relación con el trabajo realizado por los estudiantes en el contexto aritmético, los integrantes del Grupo Pretexto resaltan un hecho adicional a tener en cuenta:

> [E]l estudiante, en su trabajo previo, ha *enfrentado* problemas o situaciones en los cuales aparecen expresiones como *3+5* o *2a+3a*, en las que ha podido decidir cuántas unidades de cada "cosa" hay, pues cuenta con una *unidad fija* de medida; luego, sin que haya una tematización sobre el particular, se le presentan expresiones como *2√3, 3+2b, 1+b/3 , √3+√3 ó 3a+5b*, donde ya no hay una unidad a partir de la cual saber cuántas de *esas* hay, hecho sobre el cual puede no haber conciencia. Sobre el

particular, podría ser importante realizar un trabajo previo con operaciones que incluyan fracciones, donde se tematice el hecho de requerir de *unidades variables* (por ejemplo, para sumar 2 con 1/3, se toma como unidad de medida 1/3, aunque también lo serían 1/6, 1/9,...; mientras que, para sumar 2 con ¾, se toma ¼ como unidad de medida, y para sumar 2/3 con ¾ se toma como unidad 1/12). (Pretexto, 1997: 22).

Otro aspecto a considerar es el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión 4x3+2, ante la ausencia de paréntesis, podría tener dos interpretaciones: como (4x3)+2=14 o como 4x(3+2)=20, salvo que se conozca la existencia de una convención según la cual en tales expresiones se asume una jerarquía de la multiplicación (división) sobre la suma (resta).

Interpretación de las letras. Cuando se inicia el trabajo escolar en álgebra, con cierta frecuencia se propone a los estudiantes realizar un *repaso* sobre los conjuntos numéricos (como conjuntos, no como sistemas), privilegiando el trabajo sobre lo operativo en términos de reglas para utilizar ciertos algoritmos sobre sus elementos; iniciando con números naturales, pasando por los enteros y racionales, para concluir con la presentación de algunos números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., aunque induciendo la identificación con sus aproximaciones decimales. Posteriormente, y al hacer su *aparición* las letras, ya no de manera ocasional para representar cierta generalidad (en cuanto a nombrar elementos o expresar propiedades) o en fórmulas donde toman un valor específico dado, sino en el sentido de operacionalidad, tomadas como representantes de números arbitrarios de un cierto sistema numérico (visto como estructura),[3] no se hace referencia explícita, o no se hace énfasis, en qué conjunto se está trabajando, pues se espera que, *vistos* ya los conjuntos numéricos, el estudiante no sólo esté en capacidad de *manejarlos*, sino de asimilar que, en el que se está trabajando es el más amplio posible: el conjunto de los números reales, como posiblemente lo *asume* el profesor, sin verificar si entre las significaciones de los estudiantes *aparece* esta noción. Similarmente, cuando se trabaja con letras, se *asume* también una interpretación adecuada por parte de los estudiantes de lo que ellas significan en el contexto mencionado.

Las letras aparecen, en general, ligadas con expresiones sintácticas que adquieren sentido en estructuras definidas a partir de relaciones como *"igual que", "menor que",* y de acuerdo con las interpretaciones que los muchachos tengan tanto de estas relaciones, como de los símbolos que las

[3] Para reconocer estructura, es necesario conocer *estructuras* variadas que posibiliten “ver” analogías y diferencias. Si el único conjunto numérico que trabajan con relativo dominio, como sistema, es el de los Naturales, como al parecer sucede en los primeros años de la básica secundaria, ¿qué posibilidades tienen de ubicar dichas analogías y diferencias?

> representan. Por ejemplo, para las interpretaciones de las letras, y en general de las *expresiones algebraicas*, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético, así que, desde éste, la mayor posibilidad de contextualizar conceptualmente el uso de la letra, es verla como una generalización de número,[4] para lo cual, además, es indispensable un trabajo consciente e intencionado por parte del profesor. Sin embargo, tal interpretación es insuficiente, puesto que el álgebra, además de corresponder a un hacer explícito aquello que aparece implícito en la aritmética, es decir, su estructura, tiene que ver con la formalización de procedimientos en los que es necesaria, si no la explicitación de las propiedades, sí la conciencia de cuáles legitiman dichos procedimientos (Pretexto, 1997: 25).

Aquí es oportuno resaltar, que de los procedimientos citados anteriormente, los estudiantes tienen la posibilidad de no dar cuenta de ellos en tanto en el trabajo aritmético el resultado es tomado como criterio de corrección (y funciona bien). También en este sentido, es importante señalar que el profesor, conscientemente o no, hace uso de la posibilidad mencionada, con lo cual los métodos intuitivos, y los métodos en general, utilizados por los estudiantes, prácticamente nunca son discutidos. En síntesis, en palabras de Pretexto:

> [R]esulta conveniente resaltar, en particular, la importancia que tiene para el aprendizaje del álgebra, superar la interpretación del signo igual como orden de operar, si se quiere acceder a una interpretación de la letra que, además de ser representación de número, considere su tipo (en este caso el conjunto numérico) al que ella pertenece, es decir, tanto su universo numérico como las relaciones que le dan a él estructura (algebraica, en este caso); y en relación con esto, tanto superar, en palabras de Matz y Davis (1980), el *dilema proceso-producto*, como aceptar lo que Collis (1975) llama *aceptación de la falta de cierre* (1997, p. 25).

Reconocimiento y uso de estructuras. Después del trabajo con letras, particularmente orientado al uso de éstas como representante de números, se empieza a operar con ellas en el contexto de las expresiones algebraicas. Kieran (1989) reporta investigaciones relacionadas con la posibilidad de una aproximación geométrica para dar sentido a dichas expresiones y descubrir obstáculos cognitivos asociados con esta aproximación; tales investigaciones sugieren que la construcción de sentido de las expresiones algebraicas no lleva necesariamente al desarrollo espontáneo de sentido para su simplificación. Sobre el particular, reporta estudios relacionados con el conocimiento estructural que tienen los estudiantes de dichas expresiones, evidenciado a partir de los

[4] En la transición aritmética-álgebra, se pasa de expresiones como $2(2)+1$, la cual puede reducirse a un sólo término, el 5, a otras como $2b+1$, donde ya no es posible tal reducción. Así, los estudiantes se ven abocados a la dificultad conocida como *falta de cierre*, la cual conlleva otra adicional de carácter estructural, pues expresiones como $a^2–b^2$ refieren una gama amplia de situaciones, como por ejemplo: $x^2–y^2$, $(a^3)^2– 9$, $(5w+1)^2–(a^3)^2$,... y su forma de trabajarlas, lo cual exige para su comprensión *ver* lo general en lo particular y lo particular en lo general. Esto, sin embargo, no es tematizado en general en el aula de clase; tampoco en los textos escolares.

procesos que ellos usan para simplificarlas, y plantea que las dificultades de los estudiantes en la asimilación de la estructura de las expresiones algebraicas influye en su trabajo con ecuaciones:[5]

> Se han desarrollado, por una parte, estudios centrados en el reconocimiento por parte del estudiante de la estructura superficial subyacente (es decir, a la forma dada o a la organización de los términos y las operaciones, sujetos a las restricciones que implica el orden de las operaciones), por ejemplo, reconocer el orden de las operaciones en la expresión 2(x+1)+3; por otra, estudios centrados en la posibilidad del estudiante para discriminar las transformaciones correctas, de las incorrectas, es decir, de la estructura sistémica (en el sentido de estar relacionada con el "sistema" del cual hereda las propiedades de las operaciones, tales como la conmutatividad y asociatividad, y las relaciones entre las operaciones como la distributividad), por ejemplo, reconocer que la expresión 3(x+2)+5 equivale a 5+3(x+2) ó a 3x+11.

En el caso de las ecuaciones, en tanto relaciona expresiones, su estructura incorpora las características de la estructura de las expresiones. Así, la estructura superficial de una ecuación comprende tanto los términos dados –y las operaciones de las expresiones a ambos lados de la igualdad–, como la relación de igualdad y sus propiedades; por ejemplo, la propiedad aditiva asociada: *si se adicionan cantidades iguales a cantidades iguales, las sumas son iguales.* Esto requiere además el conocimiento de la relación inversa entre adición y sustracción y entre multiplicación y división, la equivalencia de expresiones a ambos lados de una ecuación, y la equivalencia de ecuaciones en una cadena de resolución de ecuaciones. Por ejemplo, $3(x+2)+5=(4x/2)-7$ se puede expresar como $3x+11=2x-7$, en donde cada expresión es transformada de forma independiente. Por la relación de igualdad inherente a una ecuación, la expresión a mano izquierda sigue siendo equivalente a la expresión de la derecha después de las transformaciones sistémicas de una o de ambas expresiones.

Nuevamente se recalca aquí que gran parte del trabajo en la aritmética ha estado orientado a "encontrar la respuesta", énfasis que ha permitido a los niños arreglárselas con procedimientos informales e intuitivos; sin embargo, en álgebra, se les pide que reconozcan y usen la estructura que antes han tenido la posibilidad de evitar en aritmética, lo cual genera dificultades en la iniciación al álgebra como las referidas por Kieran (1989).

[5] Kieran reporta una investigación de Greeno (1982), según la cual el desempeño de los estudiantes novatos en álgebra parecía ser bastante al azar, por lo menos en un momento. Sus procedimientos contenían múltiples errores, que indicaban una carencia de conocimiento acerca de las características estructurales del álgebra Por ejemplo, podían simplificar 4(6x-3y)+5x como 4(6x-3y+5x) en un intento, pero hacer algo diferente en otra ocasión.

Puntualizando, respecto de la interpretación que puede darse a la letra en contextos algebraicos, los estudios de Küchemann (1981) han mostrado que las interpretaciones dadas por los estudiantes pueden tipificarse así, Pretexto (1997: 30-31):

(1) *Letra evaluada*. A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, al preguntársele: "si $e+f=8$, ¿cuánto es $e+f+g$?", el muchacho responde *12,* en lugar de $8+g$.

(2) *Letra ignorada (o no usada)*. Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin dársele un significado). Por ejemplo, al solicitarle "súmele *2* a $3n$", el muchacho escribe 5 ó $5n$ en vez de $3n+2$.

(3) *Letra como objeto*. La letra es vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho. Por ejemplo, ante expresiones como "$2n+3n$" se piensa en "2 *naranjas* y 3 *naranjas*", o simplemente como "2 enes y 3 enes, lo cual significa 5 enes juntas". Si bien esta manera de operar puede servir para resolver fácilmente algunos ejercicios (por ejemplo en la suma de términos semejantes), puede ser errónea o carecer de significado en otros; como cuando se plantea que una libra es igual a cuatro marcas, en un cierto instrumento para pesar, y se traduce como $l=4m$ (lo cual no se tiene, en este caso, sí l y m son números).

(4) *Letra como incógnita*. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el muchacho se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cerradura del resultado (como en las respuestas $8+g$ y $3n+2$).

(5) *Letra como número generalizado*. La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico, como en "qué puede usted decir de C si $C+D=10$ y C es menor que D".

(6) *Letra como variable*. La letra representa un rango de valores y el muchacho es capaz de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo cual significa establecer al menos una relación de segundo orden). Un ejemplo es "$a=b+3$; ¿qué le pasa a a si b es incrementado en *2*?", donde los muchachos necesitan encontrar una relación como "a es siempre tres más que b", mejor que "este a es tres más que este b", lo cual no dice nada acerca de su relación con los cambios de b.

Los distintos usos de las letras –que en general constituyen la manifestación simbólica de las variables–, aunque parezcan simples para el que sabe deben ser reconocidos por los estudiantes para "dotar de significado" el trabajo algebraico. En general, estas diferencias no son tematizadas en el aula de clase por parte del profesor, quien al parecer asume esto como un hecho irrelevante, o no hace conciencia de dicha diferenciación. En tal sentido, puede resultar ilustrativo el siguiente ejemplo, referenciado por Ursini (1994: 91), donde aparece manifiesta la necesidad de conocer tanto diferentes usos de la letra (*variable* según Ursini), como de interpretarla en correspondencia con las interpretaciones requeridas para lograr resolver el problema:

"Encuentra la ecuación de la línea que pasa por el punto (6,2) y cuya pendiente es 11".

Sobre este problema plantea Ursini:[6]

> Cuando para resolver este problema, se parte de la relación general que existe entre los puntos de la recta y su pendiente, a saber: $y=mx+b$, queda implícito que se espera que el estudiante sea capaz de concebir las variables como números generales. En efecto, esta expresión describe una línea general y las variables involucradas representan números generales que pueden, por lo tanto, asumir cualquier valor. Sin embargo, para una línea particular, m y b no representan números generales, sino constantes. Por ejemplo, en el ejemplo arriba mencionado el valor de la pendiente está dado y tiene que sustituírse a m; b es una incógnita que puede determinarse usando los datos. ***x* y *y* son dos variables** vinculadas por una relación funcional: *x* puede considerarse un argumento al que se le puede asignar cualquier valor mientras que los valores de *y* cambian en correspondencia.

La situación anterior se evidencia la necesidad de trabajar con distintas interpretaciones de las letras, como números generalizados, como incógnitas y como variables (en una relación funcional).

Otra situación que resulta frecuente en las aulas de clase es la siguiente: con cierta frecuencia los estudiantes en el trabajo con expresiones algebraicas plantean que $(a+b)^2=a^2+b^2$; ante tal "error" los profesores manifiestan una y otra vez su desconcierto. Usualmente, de manera casi inmediata, proceden a evaluar las variables, para así encontrar los valores de cada una de las expresiones y comparar los valores obtenidos. Por ejemplo, si a=1 y b=2, se obtiene que $(a+b)^2=(1+2)^2=9$, mientras que $a^2+b^2 =1^2+2^2=1+4=5$, lo cual permite concluir que tal igualdad no es posible. Sin embargo, aunque este argumento puede resultar contundente para el profesor, no parece tener un efecto similar para la mayoría de estudiantes, ¿Por qué?

Siguiendo ideas de Drouhard y otros (1995; citados por Papini, 2003: 52), la anterior "estrategia didáctica" se basa en una creencia generalizada de los profesores, según la cual sus estudiantes reconocen que tal igualdad es válida si ella se cumple para todos los valores posibles de las variables; en este caso, se requiere que para cualquier evaluación de las variables a y b, los valores de las expresiones $(a+b)^2$ y a^2+b^2 sean iguales. Pero, al parecer, muchos profesores desconocen que este criterio no es reconocido por la mayoría de sus estudiantes como condición necesaria para garantizar dicha igualdad; pues usualmente, en el contexto de aula, el trabajo algebraico se enfoca muy rápidamente, y a veces de manera exclusiva, al reconocimiento y aplicación de reglas. Es decir, con frecuencia se enfatiza el uso de

[6] El subrayado no está en el texto original.

reglas que permiten realizar transformaciones en un registro algebraico (es decir, en la sintaxis), pero se descuida el significado de los signos (es decir, la semántica).

En la transición aritmética-álgebra se va generando un cambio de sistema semiótico de representación, que a veces no es suficientemente tematizado; no sólo se empieza a trabajar con otros objetos (expresiones con letras e igualdades) sino también con reglas diferenciadas, además de un cambio semántico del signo "=". En particular, la concatenación de signos obedece reglas diferentes;[7] como e mencionó en párrafos anteriores, mientras en un contexto aritmético ésta se asocia como representación de una suma, en el contexto algebraico la concatenación se asocia como representación de un producto.

En relación con el uso del signo igual se requiere diferenciar su significado en expresiones diferentes, por ejemplo, en la expresión 3+4=7 dicho signo es usado para representar una equivalencia, mientras en la expresión n+4=7 es usado como equivalencia condicionada, en tanto su validez depende del valor de n.[8]

Concepciones sobre álgebra escolar. La complejidad manifiesta en lo que refiere la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, y particularmente, la asociada con la noción de variable en matemáticas mencionada en secciones anteriores, hace indispensable poner en consideración una explicitación, propuesta por Usiskin (1980), de las formas como puede ser entendida el álgebra, y las interpretaciones de la letra que a esas formas se asocian (en tanto interpretaciones "mínimas" requeridas para trabajar con éxito bajo dicha concepción):

CONCEPCIÓN DE ÁLGEBRA	*USO DE LA LETRA*	*DESTREZAS ASOCIADAS*
Aritmética generalizada	Patrones generalizadores (Letra como objeto)	Traducir y generalizar (relaciones entre números)
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros (Letra como número generalizado, o como variable)	Relacionar, tabular, graficar
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

[7] Además, el uso de paréntesis adquiere una importancia mayor.

[8] El signo igual también puede usarse para explicitar una relación funcional, o de dependencia, entre dos parámetros, por ejemplo, para expresar la relación entre el área de un círculo y su radio: $A= \pi r^2$.

Es importante destacar aquí que la imagen de álgebra como aritmética generalizada (implícitamente presentada en algunos textos escolares y trabajada por algunos maestros), no garantiza interpretaciones de la letra como número generalizado, en tanto el uso de las letras como modelos o patrones generalizadores puede asociarse con interpretaciones de éstas como objetos –como una manera de nombrar–, sin que necesariamente se les reconozca su carácter operativo, en tanto representantes de números en un cierto universo; en tal sentido, las posibilidades de interpretación de la letra como número generalizado depende, en gran medida, del tratamiento metodológico dado. Desde la caracterización que aquí se propone de variable, la imagen deseable del álgebra escolar estaría asociada a la de *álgebra como estudio de relaciones.*

El Grupo Azarquiel (1993), entre otros, plantea que la historia del álgebra podría ofrecer elementos para el diseño de secuencias didácticas,[9] no sólo para motivar un tema nuevo, sino como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos (por ejemplo, a nivel de formas de representación); además, plantean que el contexto que sirvió de base en la antigüedad para construir conceptos básicos del álgebra podrían ser utilizados como "contextos" para construirlos en el aula (incluyendo, por ejemplo, el análisis sobre el simbolismo en cada época), además de satisfacer necesidades tales como (p. 37):

- Representar las matemáticas como parte de la cultura humana que evoluciona con ella, preparando así el terreno para llegar a la organización que los conceptos matemáticos tienen actualmente.
- Reconocer la importancia del lenguaje simbólico y de las técnicas, y las insuficiencias y ambigüedades de cada formalismo
- Construir o profundizar los conceptos matemáticos que se han elegido por medio de la diversidad con la cual cada época los presenta.

Algunas consideraciones prácticas. A continuación se presenta, a manera de sugerencia –sin entrar en detalles–, elementos que deben ser abordados desde el trabajo aritmético y que posiblemente permiten un tránsito más "natural" hacia el trabajo algebraico:

---

[9] Por ejemplo, realizar un análisis histórico-epistemológico del desarrollo del álgebra, analizando, por ejemplo, la resolución geométrica de las ecuaciones de segundo grado (Euclides), el surgimiento del simbolismo algebraico (Vietà-Descartes) y, por supuesto, posibilidades y problemas relacionados con la escritura y las formas de validación en diferentes épocas de la historia. Ver, por ejemplo, Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14 (3), 24-35.

- Tomando como base la capacidad desarrollada por los estudiantes en el trabajo aritmético, plantear exigencias en cuanto a explicitar y dar cuenta de los procesos realizados –y en tal sentido, descentrar el interés en la búsqueda de respuestas–, así como tematizar las convenciones de notación.
- Posibilitar trabajo con la igualdad como relación de equivalencia. Un tema propicio para un trabajo en este sentido, lo constituye las fracciones, pues, además de tematizar la igualdad como relación de equivalencia, permite "romper" con la idea de *unidad fija* de medida, en tanto aquí, como ya se mencionó en una sección anterior, la unidad *varía*. Otro tema que permite el trabajo con clases de equivalencia, y que hace uso del algoritmo de Euclides, en los Naturales, ligando bases y sistemas de numeración, es el de clases residuales.
- Propiciar experiencias con procesos de generalización y búsqueda de patrones, en particular, como posibilidad de acercamiento a la noción de variable, además de la necesidad de que "el número generalizado" varíe en diferentes universos numéricos.
- Propiciar actividades a partir del trabajo con los conjuntos numéricos, inicialmente ligadas a la variación –tanto en conjuntos discretos como densos–, que posibiliten interpretaciones de la letra como representación indistinta y simultánea de individuos en estos conjuntos. En particular se propone un trabajo de tipo constructivo para "dar existencia" a los números racionales, basado en el "saber previo" del estudiante, sobre estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales.
- Proponer actividades que favorezcan discusiones en torno a la idea de continuidad de la variable, ligada a la noción de infinito.
- Posibilitar percepciones de la variación a partir del análisis de tablas o del análisis de gráficas, que representen relaciones entre parámetros.
- Proponer actividades que requieran de diversas interpretaciones de la letra (Pretexto, 1997: 73-75)

Ahora bien, es necesario reconocer que lo planteado anteriormente, no garantiza obtener mejores niveles de comprensión de lo tratado en clase; se debe tener en cuenta además que lo realizado corresponde a un acto de comunicación, en el que el profesor, por ser quien orienta el trabajo de aula, debe buscar estar al tanto de las dificultades que pueden surgir en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, muchas de los cuales se refieren a lo largo de este escrito, particularmente lo que tiene que ver con la posibilidad de discusión sobre las pretensiones de validez de los discursos planteados al interior del aula.

3. Estrategia metodológica

Plan de trabajo. Se trata de desarrollar un plan que parta de la necesidad de sensibilización del profesor respecto de las situaciones de aula, vinculándolas con lo que se ha llamado *problemas puntuales* en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este punto de partida será importante en la generación de sentido de la labor que él efectuará durante el curso, para lo cual se tiene dispuestos actividades e instrumentos con los que se busca explicitar concepciones e interpretaciones que se pueden presentar, tanto en estudiantes como en profesores, respecto de: uso de la letra en contextos matemáticos, concepciones de álgebra, operaciones-algoritmos en situaciones aditivas y multiplicativas, todo ello tratado y contrastado en relación con el *saber profesional de los docentes*, y vinculado estrechamente con las prácticas de aula actuales de los profesores, con el ánimo de disponer de información para: primero, poder dirigir los énfasis del curso hacia las necesidades didácticas de los docentes, y segundo, ubicar las actividades puntuales respecto de esas necesidades, que sean más pertinentes.

Los pasos tentativos a seguir para favorecer nuestra intención, y que podrían constituir el flujo del plan de trabajo (sujeto a disponibilidad de tiempo), son:

a) Explicitar concepciones acerca de (letra, álgebra y operación/algoritmo).
b) Contratar las concepciones aparecidas, con evidencias empíricas.
c) Organizar, ordenar o clasificar las concepciones evidenciadas.
d) Con base en el uso de los instrumentos dispuestos y seleccionados, discutir las teorías que los sustentan.
e) Elaborar hipótesis de trabajo.
f) Volver al punto a).

Se trata entonces de pasar de un cierto estado de sensibilización y comprensión de las situaciones de aula, a otros estados, convirtiéndola en un fenómeno posible de estudiarse y transformarse.[10] Se plantea como propósito general que la identificación de un problema específico de aula, ubicada por el estudiante-docente en su labor como profesor de aritmética o de álgebra, sea el origen y motivación en este curso, y la búsqueda de explicación y comprensión del problema visto como fenómeno a ser estudiado se constituya en su sentido; se pretende articular así, formación-investigación-innovación.

Algunas actividades. A continuación se presentan actividades que posibilitarían, de acuerdo a la orientación dada por el profesor, el desarrollo de procesos de generalización y simbolización:

- *Búsqueda de patrones:*

Actividad 1: Con base en el siguiente gráfico responda las preguntas formuladas.

a) Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
b) Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.

c) Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.

[10] Aquí, la terminación “se”, debe ser leída desde su carácter “reflexivo”, y no como impersonal.

d) Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.

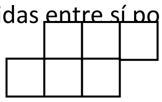
e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

Actividad 2. "Truco con números": Piense un número, añádale 4 y multiplique el resultado por 2. Réstele 6 y luego divídalo por 2. Ahora réstele el número que pensó al principio: ... el resultado es 1.

Lenguaje ordinario (Representacción verbal)	*Lenguaje intermedio (Rep. Visual/Gráfica)*	*Lenguaje algebraico (Rep. algebraica)*
El número que se piensa	□ □ □ □ □ □	*n*
Añada cuatro	□ • • • • □ □	*n+4*
Multiplique por dos	• • • • • • • •	*2(n+4)=2n+8*
Reste seis	• •	*2n+2*
Divida por dos	•	*n+1*
Reste el número inicial		*n*

Es de suponer que el "camino" a la simbolización formal está precedido de un análisis a partir de una variedad de situaciones concretas, propuestas por los estudiantes, con números específicos, así como de los acercamientos a formas de simbolizar "propias" de los estudiantes.

Actividad 3: ¿Se le pueden agregar "baldosas" a la figura, formada por baldosas cuadradas de una unidad de lado, para conseguir una nueva figura cuyo perímetro sea 18 unidades? Se impone como regla que las baldosas deben estar unidas entre sí por, al menos, un lado completo.



En la propuesta de los *Estándares Curriculares* del NCTM (1992: 104), se plantea que los estudiantes pueden descubrir muchos hechos y relaciones de interés al explorar este problema, por ejemplo, que al agregar una baldosa que toque a otra sólo en un lado el perímetro se aumenta en dos unidades, pero si ésta se coloca para cubrir una esquina (es decir, en contacto con otras dos baldosas), el perímetro no se altera; mientras que si ésta se coloca tocando tres de sus lados con las otras baldosas, el perímetro de la nueva figura se disminuye en dos unidades (hecho que puede motivar acercamientos a la simbolización, como p+2, p, p-2).

En relación con esta actividad, sugieren que una vez los grupos de estudiantes hayan encontrado diversas formas de añadir baldosas para encontrar la figura pedida, con un perímetro de 18 unidades, pueden abordar preguntas como ¿cuál es el número *mínimo* de baldosas que habría que añadir?, ¿cuál es el mayor número de baldosas que se pueden usar para obtener dicho perímetro? Sobre la segunda pregunta, y tomando en cuenta que el rectángulo que tenga 4 por 5 es el que más baldosas necesita, plantean una tercera pregunta: ¿qué otros rectángulos tienen perímetro 18 unidades? La obtención y organización de los datos puede dar origen a varias actividades. Por ejemplo, formas de representación (verbal, gráfica, tabular y fórmula) y, en general, trabajo con expresiones lineales.

- *Universos numéricos:*

Actividad 4. El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de la base por la longitud de la altura.

Rectángulo	Medida de la base	Medida de la altura
1º		
2º		
3º		
4º		
5º		

a) Escriba en el cuadro las medidas de la base y la altura de cinco rectángulos distintos cuya área sea 6 centímetros cuadrados.

b) Escriba las medidas de la base y la altura de cinco rectángulos distintos cuya área sea $3\sqrt{2}$ cm^2.

Actividad 5.

a) Encuentre dos números entre ¼ y ½
b) Encuentre números mayores que ⅓ pero menores que ⅔
c) Ordene los siguientes números de menor a mayor: 0,100; 0,15; ⅔; 0,9; 0, 125; $(0,1)^2$ y ½
d) Halle diez números entre 1/9 y 1/10

Actividad 6. Se define *hexa-recto* como el polígono de forma hexagonal, cuyos lados consecutivos siempre forman un ángulo recto (lados perpendiculares).

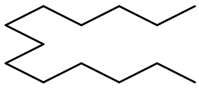
a) En principio, debe plantearse la siguiente pregunta: ¿Existen hexa-rectos?. En caso afirmativo muestre uno (gráficamente), de lo contrario, exponga las razones por las cuales considera que no pueden existir dichos objetos. Pues, en principio, existe la tendencia a suponer que el único hexágono es el regular, en tanto es la primera imagen que "aparece". Una vez se haya encontrado cuál es la forma de los hexa-rectos, se puede plantear actividades como:
b) Construya dos hexa-rectos cuyo perímetro sea 24 unidades.
c) Encuentre el mayor número de hexa-rectos con esta condición.
d) De todos los hexa- rectos encontrados, ¿cuál es el de mayor área?,[11] ¿por qué?

[11] Existe la tendencia a trabajar sólo en el universo de los naturales, la cual puede ponerse en cuestión, a partir de esta actividad, comparando las respuestas dadas por los estudiantes e invitándolos a encontrar una figura con área mayor a las dadas, hasta que, por ejemplo, "aparezcan" los decimales y pueda comprobarse que siempre se puede encontrar una figura de mayor área, con la condición inicial de tener perímetro 24 cm.

- *Otras actividades*

a) ¿Qué puede decir acerca de a, si sabe que a=s+t y que a+s+t=30?

b) El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura:



Aunque la figura no está totalmente dibujada, se sabe que es un polígono, con n lados y que todos son de longitud 2.

c) Si $(x+1)^3$ +x=349 cuando x=6, ¿qué valores de x hacen verdadera la expresión $(5x+1)^3$+5x=349?

Bibliografía

Azarquiel, Grupo (1993)*. Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Collis, K. (1982). La Matemática Escolar y los Estadios de Desarrollo*. Infancia y aprendizaje*. N° 19-20, 39-74.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective; pp. 33-55. In: Wagner, S. and Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. (1981). Algebra; pp. 102-119. In: Hart, K. (Ed.). *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray.

National Council of Teachers of Mathematics (1992). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* 2ª Ed. Sevilla: Thales.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Relime* 6(1), 41-71.

Pretexto, Grupo (1996). *La variable en matemáticas como Problema Puntual. Búsqueda de causas en octavo grado*. Informe final de investigación Cód. 11301004-92 (no publicado). Universidad Distrital-Colciencias, Bogotá.

Rojas, P. et al. (1997). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital-COLCIENCIAS*.*

Ursini (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática, 6*(6), 90-108.

Usiskin (1980). Conceptions of school algebra and uses of variables; pp. 8-19. Coxford, A. (Ed.). *The ideas of algebra, K-12.*Yearbook, 1988. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics.