La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización

Rodolfo Vergel Causado, rvergelc@udistrital.edu.co; rodolfovergel@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Resumen. *En este escrito se presenta la perspectiva de cambio curricular denominada Early-Algebra, como una posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de temprana edad. El desarrollo de la temática plantea, inicialmente, una discusión sobre el pensamiento algebraico en estudiantes de Educación Primaria y unas primeras conexiones con el proceso matemático de generalización. Posteriormente, se abordan algunos desarrollos teóricos e investigaciones desde donde se pretende situar el tema en cuestión. Éstos se describen (no en orden cronológico) a partir de dos frentes: el primero, desde las investigaciones y estudios desarrollados en la perspectiva Early-Algebra; el segundo, presenta los desarrollos teóricos y de investigación sobre el proceso matemático de generalización.*

Palabras clave*: Early-Algebra, generalización, pensamiento algebraico.*

1. Planteamiento del tema

Cada vez crece más la crítica sobre la enseñanza tradicional del álgebra (Agudelo-Valderrama y Vergel, 2009; Booth, 1999; Kaput, 1995, 1998, 2000, Kieran, 2004; Vasco, 2007), crítica basada fundamentalmente en: el fracaso de un gran número de estudiantes y la deserción en el estudio de las matemáticas, la falta de conexión entre el álgebra y las demás sub-áreas de las matemáticas y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes[20]. Algunos estudios en el contexto colombiano en relación con dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado que alumnos de grado 11 asignan al uso de las letras en álgebra (ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama, 2002, 2000; González y Pedrosa, 1999; Perry, Gómez, Castro, Valero y Agudelo, 1998, Bonilla, 1994) sugieren una necesidad imperiosa de profundizar en el

[20] Martin Kindt en 1980 (citado por Molina, 2006) ya había “prendido las alarmas” frente a esta situación cuando destacaba tres grandes problemas de la enseñanza del álgebra, a saber: falta de atención a la generalización y al razonamiento; un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra; y la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra.

estudio del currículo de esta área de las matemáticas. Además, los resultados de estudios internacionales como el TIMMS[21] muestran que los estudiantes colombianos no están desarrollando el pensamiento matemático que se construye a través del aprendizaje del álgebra.

Pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real, requiere trascender la simple identificación de hechos y realización de cálculos con números específicos, la manipulación mecánica de símbolos, según la cual se presenta a los estudiantes una serie de expresiones simbólicas *prefabricadas* (Mason, et al., 1999), bajo el argumento de que en álgebra se trabaja con letras que representan números, y luego se centra el trabajo en la manipulación de dichas expresiones. El estudio del álgebra y consecuentemente el desarrollo del pensamiento algebraico, requiere que, curricularmente, se centre la atención en los aspectos relacionales y en las estructuras matemáticas que subyacen en dichas situaciones contextuales. Luego el inicio del trabajo algebraico escolar en el marco de una enseñanza basada en 'la comprensión y el significado' no se puede centrar en la presentación de las simbolizaciones prefabricadas mencionadas (expresiones algebraicas) sino en la *organización de actividades para el aula que involucren activamente a los estudiantes en procesos matemáticos de trabajo de donde el pensamiento algebraico puede surgir*. De acuerdo con Kieran (2004), el pensamiento algebraico en las primeras etapas del álgebra escolar,

> . . . incluye el desarrollo de formas de pensar [dentro del trabajo en actividades] . . . como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción. (p. 149)

Las caracterizaciones de Kieran relativas al pensamiento algebraico se asemejan a los tipos de pensamiento que según Mason (1999) y Mason, Burton y Stacey (1982) están en el corazón del pensamiento matemático. Esta forma de pensar en matemáticas, caracterizada como algebraica, puede ser desarrollada por niños de temprana edad según lo sugieren resultados de investigación (ver, por ejemplo, Sutherland, 1991, Kaput y Blanton, 2001, Carpenter et al., 2003) y puede ser potenciada a través del trabajo con actividades que posibiliten el involucramiento de los niños en procesos matemáticos como la identificación de estructuras matemáticas que gobiernan las

[21]El estudio TIMSS '*Third International Study in Mathematics and Science*' se llevó a cabo durante el período de 1991-1995, con la participación de 41 países. En este estudio participaron estudiantes colombianos de los Grados 7 y 8 y 11.

relaciones entre las cantidades que operan en los problemas o situaciones contextuales específicas que están siendo exploradas, y la habilidad para generalizar y representar, en formas diferentes, dichas relaciones. La propuesta de cambio curricular de Early-Algebra, tiene que ver, entonces, con la creación de oportunidades (y el ser consciente de la existencia de oportunidades) para integrar y cultivar hábitos de pensamiento que presten atención a las estructuras fundamentales de las matemáticas (Kaput, 1999) en cada lección de matemáticas desde las primeras etapas de la escuela. Existe cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional y nacional en que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la educación primaria (ver, por ejemplo, Blanton y Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Mason, 1999; Molina, 2009; Molina, Castro y Ambrose, 2006, Vasco, 2007), sin embargo, la investigación sobre la integración del álgebra en el currículo escolar está todavía emergiendo, se conoce aún poco y está lejos de ser consolidada. El llamado urgente de Carpenter et al. (2003) en el sentido de crear ambientes de instrucción a través de los cuales lograr explicitar el pensamiento matemático implícito en estudiantes de educación primaria, obliga en las investigaciones a poner el acento no en las dificultades de los estudiantes, que desde luego son importantes, sino en lo que los estudiantes pueden hacer, por ejemplo, como lo señala el mismo autor, centrar la mirada en procesos de *generalización* acerca de las propiedades de los números y las operaciones.

La literatura internacional en lo concerniente a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, enmarcada en la perspectiva de cambio curricular Early-Algebra, señala, entre otras cuestiones, la necesidad de explorar la puesta en práctica y el potencial de esta propuesta y analizar el desarrollo de pensamiento y razonamiento algebraico por estudiantes de Educación Primaria, analizar qué herramientas (notaciones, gráficos, diagramas) pueden conducir con éxito a los alumnos a desarrollar modos algebraicos de pensar, por ejemplo involucrarlos en procesos de generalización (ver, por ejemplo, Arzarello, Bazzinni y Chiappini (1994), MacGregor y Stacey (1993), Sasman, Olivier y Linchevski (1999), citados por Kieran (2006); Galperin (1959, 1969, 1987), citados por Montealegre (2005); Zaporozhets, Zinchenko y Elkonin (1964), y Poddyakov (1977), citados por Talizina (2008)) y estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores (Lins y Kaput, 2004). Ya los trabajos pioneros de Booth (1989) comenzaban a señalar la necesidad de estudiar el reconocimiento y uso de conocimiento sobre estructura de las matemáticas, por parte de los alumnos, y cómo dicho reconocimiento puede evolucionar. La insistencia de Booth en el sentido de otorgar importancia al diseño de nuevas actividades y ambientes de enseñanza para ayudar a los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, enviaba mensajes claros de una perspectiva distinta de trabajo en el aula de matemáticas. En consecuencia, emergen la necesidad y la pertinencia de profundizar en la creación y gestión de tareas en el aula de clase que potencien o fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la educación matemática escolar. Ello debe promover un aprendizaje con comprensión y significado y facilitar el posterior estudio formal del álgebra.

2. Desarrollos teóricos e investigaciones

En este apartado se presentan los estudios e investigaciones desde los cuales se puede situar el problema del pensamiento algebraico en escolares. Esta presentación se hace desde dos frentes, el primero, relacionado con la perspectiva de cambio curricular denominada Early-Algebra, y el segundo, relacionado con el proceso matemático de generalización.

En relación con la propuesta de cambio curricular Early-Algebra. Esta propuesta consiste en la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como lo señalan numerosos autores (Carpenter et al., 2003; Kaput, 1995, 1998, 2000; Blanton y Kaput, 2005; Vasco 2007), como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas.

Esta perspectiva de cambio curricular conmina a los docentes de todos los niveles a posibilitar en el trabajo de aula de matemáticas (Blanton y Kaput, 2004, 2005) la observación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo[22]. Los Estándares del NCTM (NCTM, 2000) comparten esta visión multidimensional al distinguir como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

---

[22] En palabras de Kaput (2005), se trata de una "algebrización del currículo", esto es, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares.

Carpenter y sus colegas (2003) han venido trabajando con un grupo de profesores para estudiar el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes en los grados primarios y la construcción de los enfoques de instrucción de apoyo en el desarrollo[23]. Carpenter señala que aunque los estudiantes tienen a menudo una gran cantidad de conocimiento implícito de las propiedades de las operaciones aritméticas, por lo general, no han examinado las generalizaciones acerca de las propiedades de los números y las operaciones o pensamiento sistemático sobre ellos. La clave para los educadores, dice Carpenter, es encontrar un contexto de instrucción en el que el conocimiento implícito de los estudiantes pueda ser explicitado.

Las dificultades de los estudiantes en álgebra, por lo general han sido asumidas, en gran medida, como dificultades en el aprendizaje de la sintaxis. Vasco (2007) trasciende en el análisis y sostiene que "las dificultades introducidas por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje aritmético-algebraico no aparecen sólo con la introducción del álgebra elemental en los grados octavo y noveno, pues están presentes desde el inicio de la aritmética escolar en los primeros grados de primaria, y hoy día, aún en los últimos de preescolar" (p. 123). Vasco aborda un análisis de las dificultades que presenta la interpretación de enunciados (algebraicos) y señala que esta interpretación no puede resolverse con el análisis sintáctico y semántico. Enfatiza que debe introducirse expresamente la pragmática del lenguaje, es decir, la intención *ilocutiva* o ilocucionaria del enunciador (Austin, 1962, 1975; Searle, 1969, 1979, citados por Vasco, 2007).

Durante la última década, la evidencia de la investigación se ha ido acumulando para indicar que muchos de los estudiantes tienen una comprensión muy pobre de las relaciones y las estructuras matemáticas que son la base de la representación algebraica. Dicha falta de comprensión no es un nuevo fenómeno algebraico: los estudios resumidos por Kieran, coincidentes, de alguna manera, con el análisis de Vasco (2007), demuestran que el problema tiene su origen en la aritmética. De hecho, una parte importante de las dificultades de los estudiantes en álgebra se deriva precisamente de su falta de comprensión de las relaciones aritméticas. Desde luego este tipo de comprensión comporta los aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos ya señalados por Vasco. Por tanto, la capacidad para trabajar de manera significativa en el álgebra, y así manejar las convenciones de notación con

[23] El trabajo de Carpenter, con 100 maestros de escuelas primarias y de sus estudiantes en los grados 1º a 6º, ha proporcionado las siguientes ideas: cuando los estudiantes hacen generalizaciones acerca de las propiedades de los números o las operaciones, hacen explícito su pensamiento matemático, y, las generalizaciones proporcionan a la clase de matemática propuestas fundamentales para el examen, al mismo tiempo, la apertura del pensamiento de los estudiantes para el análisis y discusión.

facilidad, requiere primero que los estudiantes desarrollen una comprensión semántica y pragmática de la aritmética. Una de las tareas de investigación es examinar toda la cuestión del reconocimiento de los estudiantes y el uso de la estructura y cómo este reconocimiento puede desarrollarse. Consecuentemente, una segunda tarea es utilizar esta información para idear nuevas actividades y entornos de aprendizaje para ayudar a los estudiantes en este desarrollo.

Molina (2006), en su tesis doctoral, estudia el uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que estudiantes de tercero de primaria ponen de manifiesto en el contexto del trabajo con igualdades y sentencias numéricas. La investigación persigue ilustrar parte del potencial de la propuesta Early-Algebra[24], al llevarse a cabo una intervención de enseñanza que promueve la algebrización de la aritmética. Como lo señalan Lins y Kaput (2004), la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, durante las décadas de los 80 y 90, ponía el acento en estudiar las errores y dificultades que presentan los estudiantes (lo que los estudiantes no pueden hacer) cuando aprenden álgebra, debidas posiblemente al tipo de enseñanza recibida, razón que justificó posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares. Con la nueva perspectiva de cambio curricular, el énfasis recae en las posibilidades de hacer de los estudiantes y consecuentemente en las maneras de explotar su potencial de desarrollo.

En el Handbook del año 2006, Kieran reporta cómo los temas en relación con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se han movido desde la transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones, solución de ecuaciones y problemas algebraicos de palabras (1977 al 2006), hasta los relacionados con el pensamiento algebraico en estudiantes de escuela primaria (mitad de 1990 al 2006), pasando por los temas relativos al uso de herramientas tecnológicas y un enfoque en múltiples representaciones y la generalización (mitad de 1980 al 2006). En relación con los temas sobre generalización, a continuación se presentan algunos desarrollos teóricos desde donde se sitúa este problema didáctico.

En relación con el proceso de generalización. En el campo de la didáctica de las matemáticas se reconoce un interés por el estudio de los procesos de generalización. No se puede desestimar que el establecimiento de proposiciones, la resolución de problemas, el proceso de definir en

[24]En otro trabajo (Molina, 2009), partiendo del constructo pensamiento relacional, Molina presenta resultados de un experimento de enseñanza, basado en el trabajo con sentencias numéricas, que ejemplifica el potencial de la propuesta de cambio curricular Early-Algebra. Estos resultados permiten evidenciar la capacidad de alumnos de tercer curso de educación primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico

matemáticas, la abstracción, entre otros procesos, requieren con mucha frecuencia de procesos de generalización. Azarquiel (1993) sostiene que la generalización en muchas ocasiones lleva consigo un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad (p.27). Ver y expresar los aspectos generales tiene interés en sí mismo[25], como una potente actividad intelectual que se pone en juego en muchas ocasiones, pero es además una capacidad que puede desarrollarse (Azarquiel, 1993: 27).

Sin embargo generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto. Azarquiel sostiene que también se generaliza cuando se transfieren a una situación propiedades que se cumplen en otra, y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley. Según Calvo (2001), no existen elementos que distingan los procesos involucrados cuando un sujeto está desarrollando actividad matemática, en procesos avanzados y procesos elementales. Abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, generalización, formalización, demostración, son procesos que no están confinados en la etapa avanzada de las matemáticas, lo que varía de una a otra es el peso y la frecuencia de su uso. Calvo justifica la importancia de desplegar un trabajo en procesos como el de generalización, lo cual producirá más adelante, en la etapa secundaria y universitaria, el abordaje comprensivo de ideas matemáticas.

En relación con las diferentes aproximaciones hacia el estudio del problema de la generalización, Talizina (2008) analiza la dependencia de las características particulares sometidas a la generalización, de su lugar en la estructura de la actividad del sujeto. En este estudio se incluyeron dos grupos de niños de 5 años a 6 años 9 meses de edad. El primer grupo estuvo integrado por niños con desarrollo intelectual normal, mientras que el segundo grupo lo integraron niños con retardo del desarrollo intelectual. Los resultados muestran que la generalización se da solamente de acuerdo a aquellas características de los objetos que se incluyen en el contenido de la base orientadora de la acción. Se muestra que la generalización no se determina por los objetos, sino que se mediatiza por la actividad del sujeto con estos objetos[26]. Bruner y Austin (1956), citado por

---

[25] El proceso de generalización, importante en la actividad matemática, se constituye en un proceso matemático complejo. Los procesos de generalización relacionados con el álgebra, permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico. Azarquiel (1993) considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados, a saber: la visión de la regularidad, la diferencia, la relación; su exposición verbal; y su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

[26] Talizina considera las aproximaciones básicas que se utilizan en los estudios sobre la generalización, a saber: *Primera aproximación*: se dirige la atención principalmente a las características de los objetos reales,

Talizina (2008), identifican una serie de condiciones que influyen en la actividad que conduce a la generalización: las particularidades de la comprensión del problema al que se enfrenta el sujeto; el carácter de los ejemplos que encuentra en el proceso de generalización; las consecuencias esperadas de las acciones que realiza; el carácter de las limitaciones que se presentan durante la actividad del sujeto; las particularidades de la valoración de las acciones que se realizan.

Krutestskii (1976), citado por García (1998), señala la habilidad para generalizar algún contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). Como resultado de la investigación se distinguieron cuatro niveles de habilidad para generalizar entre alumnos que poseen diferentes capacidades para las matemáticas.

Nivel 1. No generaliza material respecto de atributos esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos intermedios del mismo tipo.

Nivel 2. Generaliza material respecto de atributos esenciales con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos del mismo tipo, mostrando errores e imprecisiones.

Nivel 3. Generaliza material respecto de atributos esenciales por sí mismo, pero después de varios ejercicios del mismo tipo con errores insignificantes. Es capaz de realizar generalizaciones libres de error por medio de indicaciones y preguntas insignificantes hechas por el investigador.

Nivel 4. Generaliza material correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin ayuda por parte del experimentador y sin una práctica especial en resolver problemas del mismo tipo.

---

de acuerdo a las cuales se da la generalización: desde el punto de vista de su naturaleza física, su significado en la solución de problemas, etc. *Segunda aproximación:* se enfatiza el estudio del papel de diversos factores en el proceso de generalización: el papel de la palabra (Rozengart-Pupko, 1948; Lublinskaya, 1954; Fradkina, 1960), el papel de variaciones en las características irrelevantes (Zikova, 1950; Menchinsklaya, 1966).

Rubinstein (1966), en su obra *“El Proceso del Pensamiento”*, sostiene que la generalización -relacionada con el pensamiento teórico- descubre las conexiones necesarias sujetas a la ley de los fenómenos y faculta explicar las diversas manifestaciones de sus relaciones internas. En su trabajo establece cinco niveles de generalización, a saber:

Primer nivel: la representación singular de lo general, esto se refiere a cuando representamos los componentes de un conjunto de muchos o infinitos elementos mediante una determinada semiótica.

Segundo nivel: la generalización producto de una deducción.

Tercer nivel: la generalización por extensión de un concepto, esto es cuando se pasa de un concepto a otro más general, pero que mantiene los rasgos esenciales del primero.

Cuarto nivel: la generalización se logra mediante un cambio del problema con que se trabaja, aunque manteniéndose en el mismo modelo.

Quinto nivel: la generalización con desarrollo de un nuevo modelo.

En relación con la asimilación de nuevos conocimientos y habilidades, Montealegre (2005), reporta el trabajo de Galperin, Zaporozhets y Elkonin (1987) sobre los problemas en la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. En éste se considera que el método de la “formación por etapas de las acciones mentales” asegura la dirección del proceso de la asimilación, partiendo de las propiedades fijadas de antemano o de la estructuración de la “base orientadora” completa de la acción. Por medio del método se logra: primero, la conversión de la forma “material-objetal”, en “mental-objetal”; y segundo, la abreviación y sistematización. Las reflexiones de estos autores sugieren aceptar que la actividad humana no puede examinarse aparte del sistema de relaciones sociales, de la actividad de la sociedad. En otras palabras, en toda actividad humana se asimila la experiencia socialmente elaborada; los procesos de orientación en el mundo objetal y sus transformaciones; los objetos de la cultura humana (materiales y simbólicos); las diversas esferas del conocimiento, de la ciencia, de la tecnología, etc.

Mason (1996) aborda el problema de la generalización. En su trabajo es central la preocupación por sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y plantearles un juego permanente y dual, entre generalización y especialización (particularización), como aspectos que constituyen el objetivo central de la enseñanza de la matemática. El autor reconoce que hay algo específico de esta disciplina dado por la naturaleza de los objetos sobre los que se generaliza y por la manera en que se justifica la generalización. Mason sostiene que un camino para desarrollar la conciencia de la generalidad es promover la búsqueda de lo particular en lo general y de lo general en lo particular, por lo que propone considerar el papel del ejemplo en las clases de matemáticas. Esta dialéctica entre lo particular y lo general ya encontraba eco en el trabajo *"Tipos de generalización en la enseñanza"* de Davydov (1978). Para este autor el término generalización se emplea para designar múltiples aspectos del proceso asimilativo de los conocimientos por los escolares. Es importante señalar dos grupos esenciales de fenómenos con lo que comúnmente se halla relacionado dicho término. Si se tiene en cuenta el proceso de generalización, por lo común viene a señalarse el tránsito del niño de la descripción de propiedades de un objeto individualizado a su hallazgo y separación en toda una clase de objetos similares (Davydov, 1978: 13). Continúa el autor y señala que al caracterizar el resultado de este proceso se advierte la facultad que tiene el niño de abstraerse de ciertos rasgos particulares y variables del objeto (p.13). En el desarrollo de sus investigaciones, Davydov sostiene que el surgimiento de la jerarquía de las generalizaciones está subordinado a la tarea de identificación de los objetos o fenómenos diversos como pertenecientes a determinado género y especie, y relacionados en virtud de sus propiedades con determinado lugar en la clasificación (p. 27). Señala Davydov que en la literatura psicológico-didáctica suele denominarse como tarea de empleo de los conceptos. Por lo tanto, dominar un concepto supone no ya conocer los rasgos de los objetos y fenómenos que él mismo abarca, sino también saber emplear el concepto en la práctica, saber operar con él. Y eso quiere decir que la asimilación del concepto entraña no sólo el camino de abajo arriba, desde los casos singulares y parciales hasta su generalización, sino también el camino inverso, de arriba abajo, de lo general a lo parcial y singular. Conociendo lo general, sostiene este autor, hay que saber percibirlo en un caso concreto, aislado, con el que tengamos relación en el momento dado (p.27)

Desde la teoría cultural de la objetivación, Radford (2006) aborda también el problema didáctico de la generalización. De una parte señala que "la enseñanza consiste en poner y mantener en movimiento actividades contextuales, situadas en el espacio y el tiempo, que se encaminan hacia un patrón fijo de actividad reflexiva incrustada en la cultura" (p. 115). Para Radford ese movimiento, expresable como el movimiento del proceso al objeto, posee tres características esenciales: en primer lugar, el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo, es un objeto compuesto de laderas de generalidad (p. 115). En segundo lugar, plantea Radford, desde una perspectiva epistemológica, dichas laderas de generalidad serán más o menos generales de acuerdo con las características de los significados culturales del patrón fijo de actividad en cuestión. En tercer lugar, desde una perspectiva cognitiva, esas laderas de generalidad son notadas de manera progresiva por el alumno. Para Radford, en consecuencia, el aprendizaje consistiría en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad (p. 116). En otro trabajo (Radford, 2001), Radford estudia las simbolizaciones algebraicas de estudiantes adolescentes. Particularmente el autor investiga la forma en que los estudiantes usan signos y los dotan de significado en su primer encuentro con la generalización algebraica de patrones. Desde un marco teórico semiótico-cultural en el que el pensamiento algebraico se considera como una praxis cognitiva mediada, Radford aporta elementos importantes en relación con el pensamiento algebraico emergente de los estudiantes. Dentro de este marco teórico, la actividad algebraica de los estudiantes se investiga en la interacción de la subjetividad del individuo y los medios sociales de objetivación semiótica. En el avance de la comprensión sobre la producción de los estudiantes novatos de expresiones simbólicas, Radford (2003) contrasta los procedimientos presimbólicos de los estudiantes con las actividades simbólicas de generalización. Aunque una cantidad importante de investigaciones anteriores sobre el aprendizaje del álgebra se ha ocupado de errores de los estudiantes en el dominio de la sintaxis algebraica, Radford señala que el enfoque teórico de la semiótica cultural centra su atención en el discurso y los signos puestos en juego cuando los alumnos se refieren a objetos matemáticos. En otro trabajo (Radford, 2009), desde el marco teórico sociocultural, se presta atención al proceso discursivo (Bajtín, 2009) y semiótico a través del cual los estudiantes intentan dar sentido a los gráficos. Los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través del constructo teórico de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de alcanzar mayores niveles de conceptualización.

Bibliografía

Agudelo-Valderrama, C. y Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE - *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital.* Informe final del Proyecto PROMICE – Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP: Bogotá. Agudelo-Valderrama, C. (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Azarquiel, Grupo. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Bajtín, M. (2009). Estética de la creación verbal. Calz San Lorenzo: Siglo XXI editores, S.A.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mthematics Education.* Vol. 36, No. 5, 412-446.

Bonilla, S. (1994). Categorías de la interpretación de las letras en álgebra escolar por los estudiantes de noveno grado. Unpublished MA, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, Bershire: NFER-Nelson Publishers Company Ltd.

Booth, L. R. (1999). Children’s difficulties in beginning algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM’s school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp.155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Davydov, V. (1978). Tipos de generalización en la enseñanza. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema,, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kieran , C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. A. Gutiérrez y P. Boero (eds), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Educaction. Past, Present and Future. Pp.11-49.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Kieran, C., Boileau, A., & Garaçon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 257-294). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mason, J. H. (1999). Incitación al Estudiante para que Use su Capacidad Natural de Expresar Generalidad: Las Secuencias de Tunja. *Revista EMA - Investigación e innovación en educación matemática*, *4*(3), 232-246.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Mathematical thinking*. London: Addison-Wesley.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 33-46.

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología histórico-cultural. En: *Avances en Psicología Latinoamericana*, Vol. 23, pp.33-42.

NCTM 'National Council of Teachers of Mathematics' (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Perry, P., Gomez, P., Valero, P., Castro, M. y Agudelo-Valderrama. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: "una empresa docente". Universidad de los Andes.

Radford, L. (2009). ''No! He starts walking backwards!'': interpreting motion graphs

and the question of space, place and distance. *ZDM Mathematics Education*.

-------------- (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número Especial, pp. 103-129.

-------------- (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

-------------- (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies in* Mathematics 42**:** 237–268.

Rubinstein, S.L. (1966): "El proceso del Pensamiento". Editora Nacional de Cuba. La Habana. Cuba.

Sutherland, R. (1991). Some unanswered questions on the teaching and learning of algebra. *For the learning of mathematics*, *11*(3), 40-46.

Talizina, N. (2008). Mecanismos psicológicos de la generalización. *Acta Neurol Colomb* Vol. 24 No. 2 Junio Suplemento (2:1).

Vasco, C. E. (2007). *Análisis semiótico del álgebra elemental*. En: Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas. Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital.