Significados Asociados a la Multiplicación en los elementos de Euclides

Oscar Iván Santafé, s_oscar024@yahoo.es

Estudiante Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional

Jairo Alonso Triana Yaya, jaty5051@yahoo.es

Estudiante Especialización en Educación Matemática, Universidad Distrital

1. Una mirada a los significados de la multiplicación en el libro *Elementos*

En el libro "Elementos" (Euclides, 1991, 1994), podemos reconocer aspectos que nos permiten asumir diferentes significados de la multiplicación. Buscando reconocer e interpretar dichos significados, asumimos una posición pragmática sobre la noción de significado, en la que los significados de un objeto dependen de las formas en que este objeto es empleado, y adoptamos la noción de *sistemas de prácticas* (Godino & Batanero, 1994) como herramienta para reconocer los significados de los objetos matemáticos.

De acuerdo con Godino y Batanero (1994) una práctica es *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"*. Sin embargo, estamos interesados en los conjuntos dinámicos de prácticas, a partir de los cuales sería posible identificar variedad de elementos que permitan inferir por su uso, un significado. Para ello, es necesario reconocer *"tipos de prácticas, esto es, los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas, no las muestras particulares de las mismas"* (Godino & Batanero, 1994).

Lo anterior nos permite caracterizar los *Elementos* como *sistemas de práctica institucional*, ya que en ellos podemos encontrar ciertos sistemas conformados por campos de problemas (teoremas y construcciones), una serie de instrumentos (definiciones, teoremas, algoritmos y construcciones) que construye, generaliza y aplica a lo largo de la obra. Sin embargo, estos campos de problemas no se presentan como hechos aislados e inconexos, sino que están estructurados y organizados de forma constructiva, de modo que a partir de hechos particulares se generalizan objetos geométricos y relaciones entre ellos, tal como sucede con el objeto magnitud, el cual no es definido aunque se trabaje con magnitudes particulares en los 4 primeros libros (Becerra, 2008). Esta forma de hacer operativas las relaciones entre objetos geométricos, permite asumir que en los *Elementos* se propone y construye teoría en relación a las magnitudes y a los números, y que bajo la proporcionalidad, estas dos teorías se relacionan. En este sentido, presentamos apartados de los *Elementos* que constituirán el sistema de prácticas asociado a la multiplicación y, a través de estos, reconoceremos los significados que surgen del sistema.

Para identificar un sistema de prácticas se hace necesario reconocer *"un conjunto de elementos y factores materiales, biológicos y socioculturales que hacen posible, potencian o limitan el desarrollo de la actividad matemática"* (Godino & Font, 2006). En los *Elementos*, reconocemos como factores materiales, la regla y el compás, ya que los atributos de estos inducen formas de actuar propias en el sistema de prácticas que se genera, como ejemplo la traslación de segmentos [I, 3], pues el compás no mantenía la distancia entre el centro y el radio y la regla no tenia medida.

El ideal estético Griego, la influencia de los conocimientos de las culturas babilonias, la clara distinción entre número y razón (Boyer, 1986), la elaboración de textos que antecedieron a los *Elementos* (Euclides 1991, Pág. 20), el uso prolongado que se ha realizado de los *Elementos* hasta nuestro tiempo, tanto para construir a partir de ellos, como para generar conocimientos nuevos a partir de la crítica (Álvarez, 2000), constituyen algunos de los factores socioculturales. En particular, el ideal griego de estética y su clara relación con la proporcionalidad, se hacen evidentes en el estudio de las formas de crecimiento perfectas, especialmente en lo que refiere a la semejanza, el gnomon y la proporción aurea.

El método constructivo, las herramientas empleadas y el contexto en el cual fueron propuestos los *Elementos* se constituyen como aspectos relevantes que caracterizan el sistema de prácticas asociado a la multiplicación. Con el fin de reconocer los invariantes operatorios, que determinan dicho sistema y por ende la posible emergencia de significados, presentamos apartados en los que se muestra el uso que Euclides hace de algunas definiciones, teoremas, construcciones, algoritmos y demostraciones.

2. Sistema de prácticas asociado al objeto matemático multiplicación

El reconocimiento de los invariantes operatorios se enfoca desde: a) los objetos que se operan (magnitudes, o relaciones entre magnitudes), y b) por la forma en que se desarrolla la multiplicación (como una relación entre cosas, de las cuales se ha tomado una magnitud, como una relación y como una relación de relaciones). Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones reconocemos cuatro significados diferentes, a saber:

La multiplicación como junturas de una misma magnitud. Al analizar las primeras dos definiciones del libro V, encontramos que la multiplicación se asocia a una suma repetida en términos de medida de magnitudes conmensurables.

> *"Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor"* [V, Def. 1] *"Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor"* [V, Def. 2]

En estas definiciones, la multiplicación hace referencia a una suma iterada, pues para que una magnitud A sea múltiplo de otra B, homogénea con A, debe ocurrir que la menor, en este caso B, mida a la otra magnitud. Aquí medir corresponde a que B esté un número entero de veces en A y como consecuencia, A se encontrará "adicionando" sucesivamente B, tantas veces como sea necesario. En *los Elementos,* las formas de encontrar magnitudes mayores a partir de una dada, están determinadas por una acción de poner una magnitud junto a la otra, para lo cual Euclides genera diversas formas de proceder, como lo hace en [I,3; I,17; I,47], para el caso de las rectas, los ángulos y las figuras respectivamente.

De este modo se podría interpretar la acción de poner junto o juntar, como poner tantas veces B magnitudes juntas hasta completar A. Posteriormente Euclides hace uso de estas formas de proceder, para construir equivalencias entre áreas, relacionándolas por medio de la adición, como lo muestra en [II,5 a II-10] proposiciones en las que usa palabras y expresiones como "tomadas conjuntamente, poner juntos"; expresiones que denotan un contexto aditivo, en el cual la forma de proceder consiste en poner juntas dos magnitudes, bien sea de forma directa [I,3; I,17] o de forma indirecta, como hábilmente lo hace en la proposición [I,47] y mucho más adelante lo generaliza en el libro 6 [VI,31].

En las definiciones quinta y séptima del libro V, se reconoce el significado anteriormente mencionado, pero esta vez aplicado a las ideas de razón y proporción:

> *"Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente"* [V , Def. 5]. *"Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta."* [V, Def.7]

Al analizar las anteriores definiciones, es posible apreciar que para poder reconocer cuando una razón es igual, mayor o menor a otra, es necesario acudir a los equimúltiplos de las magnitudes que conforman las razones, pues lo que hace que una razón sea mayor que otra, es el orden que debe existir entre los equimúltiplos, por lo cual suponemos un orden que Euclides no hace explícito, pero que debe existir para poder hacer la comparación de los mismos. De lo anterior asumimos que en Euclides está implícito un conjunto de escalares, y de acuerdo con Gardies (2004) Euclides aceptaba la multiplicación o la división de una magnitud por un número, en este caso los números naturales, como aquellos que permiten establecer el orden entre los equimúltiplos

Ahora, los equimúltiplos se consiguen con multiplicaciones entre las magnitudes y un conjunto de escalares, pero éstas se corresponden con una acción iterada de "sumar" cierta magnitud tantas veces como el escalar lo indique, debido a que no se han elaborado herramientas que permitan otro tipo de tratamiento. Una vez más se asocia la multiplicación con la suma repetida como significado inicial, en donde el reconocimiento del conjunto de escalares y la acción multiplicativa de estos sobre las magnitudes permiten considerar una operación diferente a la suma, la multiplicación.

A pesar de que Euclides en la definición 4, propone una forma para establecer la razón entre dos magnitudes, "*se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra"* [V, Def. 4] no muestra explícitamente qué acción se realiza para multiplicar magnitudes; asumimos que ésta consiste en: iterar un número de veces una misma magnitud, digamos A, para encontrar otra magnitud, digamos B, que es homogénea a A, y además B > A. Los hechos que permiten hacer esta asunción, están en la construcción y uso de los múltiplos y equimúltiplos que se realiza en las demostraciones del libro V; debido a que éstos se construyen a través de junturas de magnitudes iguales, las cuales las podemos considerar como "adiciones" iteradas.

En este punto, la multiplicación, no se refiere solamente a relaciones entre las cosas (magnitudes), sino que se está construyendo algunos elementos que posteriormente serán usados para poder comparar y operar razones, que ya no son de la misma naturaleza de las cosas, pues una razón es una relación entre esas cosas y probablemente por ello es que Euclides construye una nueva operatoria para estas "relaciones entre las cosas".

La proporción como una relación multiplicativa. En el libro VII, se hace una construcción análoga a la de las magnitudes, pero se especifica al caso de los números; sin embargo, para el caso de la multiplicación, los números no se operan como una magnitud, es decir, como cosas en sí mismas, sino que se tiene en cuenta la relación de tamaño entre ellos.

> *"se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicando se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número"* [*VII, Def.16*]

Dentro de esta definición, en una lectura a priori, se podría pensar la multiplicación como la iteración de un número determinado, un cierto número de veces; sin embargo hay que destacar la referencia directa al tamaño del número (multiplicador) respecto a la unidad y cómo a partir de esa relación de tamaño, se puede afirmar que para poder hacer el producto entre los números A y B es necesario saber cuántas unidades U hay en B, digamos que B= (C)U donde C es un número entero, entonces debemos añadir C veces A, para obtener el producto AB. Es de este modo que C es el cardinal de la repetición, que en los casos en que U=1, C es igual a B

Bajo este significado, en la multiplicación se trabaja la idea de *"parte: un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor* [Def. VII, 3]*"*. La cual se convierte en una herramienta que permite determinar una gran cantidad de propiedades y relaciones entre los números, como lo demuestra Euclides en las proposiciones relativas al mínimo común múltiplo [VII,34], el máximo común divisor [VII,2 y VII,3].

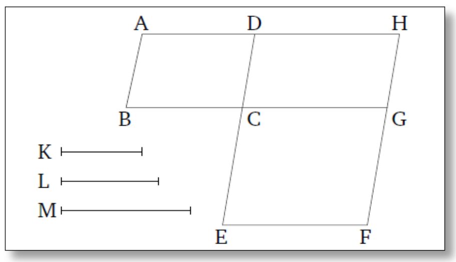
Este significado de la multiplicación posibilita que en Euclides no sea necesario tener una definición particular para el caso de la división, pues la forma de operar le permite, a partir de lo hecho en [VI, 11], [VI, 12], [VI, 13], hallar cualquier término de la proporción. Este es un hecho que permite eliminar la distinción entre multiplicación y división[6], pues un procedimiento genérico y una operatoria específica permiten la solución de las proporciones y, teniendo en cuenta la definición de multiplicación, podría resolver cualquier multiplicación y posteriormente convertirse en una potente instrumentación para hacer magnitudes continuamente proporcionales.

La multiplicación como el producto de los tamaños de dos razones. En el libro VI, se presenta la definición de razón compuesta: *"se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón"* [VI, Def. 5]. Aquí se propone una multiplicación, que no se realiza como una acción sobre magnitudes, ni como una relación entre cuatro magnitudes, sino como una acción entre los tamaños de las razones. Un ejemplo que hace referencia a este significado, lo podemos ver en el uso que se da de la definición de razón compuesta en la proposición:

"los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados" [VI, 23].

Sean AC y CF los paralelogramos equiángulos que tienen en común el ángulo BCD igual al (ángulo) ECG.

Digo que el paralelogramo AC guarda con el paralelogramo CF la razón compuesta (de las razones de) sus lados.



Aquí, Euclides construye una razón entre K y M de manera que esta razón resulta de "*componer*"[7] las razones que hay entre $K:L$, y $L:M$ las cuales son iguales a las razones que existen entre los lados de los paralelogramos, a saber: $BC:CG$ y $DC:CE$ respectivamente. Seguidamente construye una serie de igualdades entre las razones para determinar qué: $K:L::AC:CH$, y que $L:M::CH:CF$, lo cual le permite inferir, junto con la definición de razones por igualdad [V, *Def. 17*], que $K:M::AC:CF$ y por ende que, la razón que existe entre los paralelogramos equiángulos $AC:CF$

[6] Es necesario reconocer que en los elementos inicialmente la división se asocia con particiones en partes iguales (I-9, I-10, I-34) pero esta idea se amplía posteriormente, permitiendo que las particiones se hagan de acuerdo a unas condiciones específicas: *"dividir una recta finita dada en media y extrema razón" VI-30 y "dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta ya dividida" VI-10.* Proposiciones en las que la idea de partición se mantiene pero, está presente una relación de proporcionalidad entre los objetos involucrados.

[7] C*omponer y composición*, se entienden como operación binaria entre dos razones, no en el sentido de la def. 14 libro V: "*la composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente*".

corresponde a la razón compuesta de las razones entre sus lados, (*BC:CG) (DC:CE)*[8].

Asumimos que el *"componer"* razones se puede interpretar como una forma de realizar multiplicación entre razones, ya que si el tamaño de la razón *K:M* es el mismo de la razón compuesta, que resulta de "*componer*" las razones que hay entre *K:L*, y *L:M*, entonces, *"componer*" razones, equivale a multiplicar sus tamaños, esto es: (*K:L)*(L:M)=K:M* . aclarando que la anterior igualdad se da en términos del tamaño de las razones y en consecuencia, lo que tenemos es que: al *componer* dos razones, podemos encontrar una razón que tiene el mismo tamaño de otra razón dada. Aquí lo que se quiere enfatizar es que: por medio de la composición de razones, se puede encontrar una razón igual a otra dada, a través de la multiplicación de sus tamaños.

En la proposición *"los números planos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados"* [VIII, 5], se hace uso de la razón compuesta de manera similar al uso que se ha dado en el libro VI, sino que en este caso, las razones están dadas entre números, y además, desde el inicio de la proposición los números planos ***a, b*** son iguales al producto de los números ***m, p*** y ***n, q,*** respectivamente. Ahora, para que la razón compuesta tenga el mismo tamaño de la razón ***a:b***, se debe multiplicar los tamaños de dichas razones. Una justificación más para asumir que al componer razones se realiza una multiplicación de sus tamaños y que este significado y forma de proceder, difiere del significado inicial de multiplicación como suma reiterada[9].

En este significado, la multiplicación se propone como una relación de relaciones, debido a que la razón *es una relación con respecto al tamaño de dos magnitudes homogéneas*, y haciendo uso de esta relación, se construye una nueva: *la razón compuesta*. En el libro V, las razones dejan de ser relaciones, y pasan a ser cosas; ya que se construye la posibilidad de compararlas [V, def. 7], [V, 13], saber cuando dos a más razones son iguales [V, 11], [V, 14], y poder volverlas operativas. La operatividad de la razón queda explícita en el libro VI y siguientes, en donde la razón y la proporcionalidad de convierten en herramientas que permiten construir relaciones entre diferentes magnitudes. En consecuencia, la multiplicación será una vez más, una relación entre cosas.

Las acciones en términos operativos, que se han definido sobre cada una de estas cosas (magnitudes y razones) son diferentes por la construcción que han tenido. Esta consideración, está en correspondencia con Confrey (1994), que la naturaleza y la construcción de los objetos que se quieren multiplicar, influye en el significado que toma la multiplicación.

---

[8] Haciendo un uso exagerado de nuestra actual notación, asumimos que * nos indica que se deben componer las razones.

[9] Sin embargo, y como resultado de la comparación entre magnitudes, la razón ***a:b*** puede ser generada sin necesidad de la composición de los tamaños de las razones.

La multiplicación como relación entre magnitudes que están en proporción continua. El libro V en la definición 9 y 10, propone un nuevo significado, debido a que se corresponde con lo que hoy conocemos como potenciación y en este sentido, podemos reconocer este significado como parte constitutiva de la multiplicación y no como una aplicación de la misma. En lo sucesivo la denominaremos como la multiplicación asociada a lo exponencial.

> *"cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que guarda con la segunda" [V, Def. 9] "cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que guarda con la segunda, y así siempre sucesivamente sea cual fuere la proporción". [V, Def. 10]*

Cuando Euclides se refiere a la razón duplicada y a la razón triplicada, él se está refiriendo a lo que podemos denominar un producto de una razón por sí misma, esto es: si $\boldsymbol{a: b :: b: c :: c: d}$, entonces $\boldsymbol{(a:b)^2 = (a: c)}$ y también se tendría que $\boldsymbol{(a:b)^3 = (a:d)}$ siendo $\boldsymbol{a, b, c, d,}$ elementos de una colección de magnitudes continuamente proporcionales. Aquí duplicar y triplicar, hace referencia a las veces que es necesario multiplicar o componer una razón por sí misma, para tener una de igual tamaño a una dada. Este significado asociado se tematiza en algunas de las proposiciones del libro VI.

> *"los triángulos semejantes guardan entre sí una razón duplicada de sus lados correspondientes" [VI, 19]* y *"Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente" [VI, 21]*

Aquí se construye una proporción continua entre segmentos[10], con base en ella y junto con la proporcionalidad, se establece la razón duplicada que permite relacionar los lados correspondientes de los polígonos con sus áreas así $A_1{:}A_2{::}(a_1{:}a_2)^2$ siendo A_i el área de los polígonos semejantes y a_j los lados correspondientes de los polígonos. En estas proposiciones, la semejanza se reconoce como un objeto geométrico en el que se presenta la multiplicación asociada a lo exponencial. La idea de magnitudes continuamente proporcionales y la de razón n-plicada es llevada a los números, a partir de éstas se construye un método para determinar cierta cantidad de números que estén en proporción continua [VIII, 2].

Si bien existe una relación entre la razón compuesta y la razón n-plicada, ya que la última se puede ver como un tipo especial de la primera, la principal diferencia que encontramos es que: para la razón compuesta, no es necesaria la existencia de una relación entre magnitudes en proporción continua para realizar la composición, como sí es el caso de la razón n-plicada. De esto se infiere que: en la razón compuesta, la multiplicación sea entendida como una acción sobre los tamaños de las razones, mientras que en la razón n-

[10] En las proposiciones VI, 11 y VI, 1, Euclides presenta una manera de construir rectas proporcionales a cierto número de rectas dadas, la iteración de esta construcción brinda una manera de construir un número indefinido de rectas continuamente proporcionales y así reconocer relaciones multiplicativas entre estas rectas.

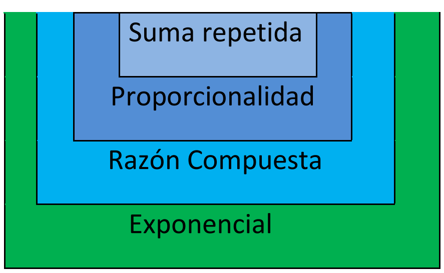
plicada, la multiplicación sea entendida como una acción sobre cierta relación que existe entre magnitudes.

Además, la multiplicación se presenta como una acción sobre una relación entre magnitudes y no es presentada como una acción sobre las magnitudes, como ocurre cuando buscamos equimúltiplos y múltiplos. En consecuencia, reconocemos una vez más, la existencia de un hecho que siendo multiplicativo, no es expresable desde el significado de la multiplicación como adición iterada.

En las proposiciones 11 a 15 y de 18 a 24 del libro VIII, se construyen relaciones entre números que corresponden a la razón compuesta, la razón duplicada y la razón triplicada. En éstas, se presenta una multiplicación como suma repetida para construir equimúltiplos y a partir de ellos, construir proporciones continuas entre números, atendiendo a los dos primeros significados.

3. A modo de conclusión

Atendiendo a lo anterior, podríamos reconocer en la obra de Euclides relaciones, que si bien no son explícitas frente a una noción de multiplicación, nos dan pautas para reconocer componentes que siendo multiplicativos, no son explicables desde [VII, *def.* 16]. Por lo que reconocemos que existen diferentes significados de la multiplicación que, al parecer, son jerárquicos y que cada uno de ellos, al convertirse en instrumento, promueve la construcción de otro.



El significado de suma iterada se instrumentaliza cuando iniciamos la construcción de múltiplos y equimúltiplos, los cuales permiten construir el nuevo significado de multiplicación como proporcionalidad; teniendo la razón y la proporción como objetos y no como relaciones, podemos definir un nuevo significado de la multiplicación, por medio de la razón compuesta, en donde a diferencia de los dos anteriores significados, se operan razones y la forma en que se operan dichas razones, difiere de las formas que se han empleado para operar magnitudes. Para terminar se propone una relación entre magnitudes continuamente proporcionales y sobre dicha relación, se establecen relaciones multiplicativas entre las mismas, que corresponden con el significado de multiplicación que hemos relacionado con lo exponencial.

Bibliografía

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides . En C. Álvarez, R. Martinez, & (Coord.), *Descartes y la ciencia del siglo XXI* (págs. 15-68). Mexico : siglo XXI editores S.A.

Becerra, M. (2008). *Análisis del uno y la unidad en la construcción de la multiplicación, una mirada a los Elementos de Euclides y a los textos escolares.* Informe académico final. Colciencias Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C. Colombia.

Boyer, C. (1986). *Historia De La Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Confrey, J. (1994). Splitting, Similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. Harel B. G., & Confrey J., *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (стр. 293-332). New York.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puertas Castaños, Перев.). V1. libros I-IV. Madrid, España: Gredos.

Euclides. (1994). *Elementos.* (M. L. Puertas Castaños, Перев.) V2. Libros V-IX. Madrid, España: Gredos.

Gardies, J. (2004). De la quoi parlait le géometrè Grec. En Du mode de'existence des objects de la mathématique (pp 9-26). Paris: Librairie Philosophique J. Vrin

D. Godino, J., & Batanero, C. (1994). *Significados institucional y personal de los objetos matemáticos*. En Recherches en Didactique des Mathématiques , 14 (3), 325-355.
D. Godino, J., & Font, V. (2006). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. En http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf