LOS PARÁMETROS ALGEBRAICOS EN EL CONTEXTO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA.

Catalina María Varón Machado
kticava@gmail.com

Sergio Rodolfo Hernández Escobar[111]
Sergiohernandez1@hotmail.es

Fabian Arley Posada Balvin[112]
fapoba@gmail.com

Facultad de Educación - Universidad de Antioquia

1. UNA APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Fruto de un proceso de lectura del contexto educativo que envuelve la Institución Educativa la Paz –académico, administrativo, socio-económico, etc.- en el marco de la práctica pedagógica de nuestra formación como licenciados en educación matemática, de algunos reportes de investigación estudiados, y de un conjunto de discusiones con diferentes personas involucradas en el proceso de práctica pedagógica: docente cooperador de la institución educativa, estudiantes de los diferentes niveles, compañeros del seminario en la Universidad, asesor de la práctica, miembros de grupos de investigación, entre otros, en torno a las problemáticas que envuelven la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se decidió trabajar con estudiantes de grados octavo y noveno en el campo del álgebra escolar.

Cuando iniciamos el proceso de práctica, uno de los profesores cooperadores[113] venía trabajando temáticas como: operaciones con expresiones algebraicas, factorización, sistemas de ecuaciones y funciones lineales y cuadráticas. Fue a partir del desarrollo de estos temas que nos empezaron a surgir inquietudes e intereses acerca del uso de las letras

[111] Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Facultad de Educación Universidad de Antioquia.
[112] Profesor ocasional de la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia; asesor del proceso de práctica pedagógica. Grupo de investigación Matemática Educación y Sociedad –MES-
[113] De acuerdo con el artículo 49 del acuerdo 148 del Consejo de Facultad, Facultad de Educación, el cooperador es un profesor titular de la institución educativa donde se realiza el proceso de práctica que acompaña a los estudiantes. En este caso los cooperadores fueron los profesores Beatriz Bety Duque y Diego Vásquez Marín. Este último fue quien nos acompañó en el proceso investigativo.

en el álgebra escolar, en tanto, de un lado, sentimos que en la escuela al hablar de álgebra se traducía casi que exclusivamente a operar con ellas y de otro porque comenzamos a percibir que los estudiantes las usan sin discriminar las diferencias que pueden tener, de acuerdo con el contexto en el que esté ubicado.

En particular nos comenzaron a inquietar dos aspectos: en primer lugar, el uso indistinto que los estudiantes dan a las letras para resolver ecuaciones, para hallar equivalencias algebraicas y para abordar situaciones de variación. Observamos por ejemplo que, en parte, este uso indiscriminado favorece a que los estudiantes, e incluso los docentes cooperadores, no sean conscientes del significado diferenciado que las mismas letras podrían tener en dichas acciones. En segunda instancia, apreciamos que en general las letras sólo se usaban como variables y/o como incógnitas, dejando de lado los otros usos que pueden tomar en una expresión; pero además notamos como este uso era independiente del contexto en el que se estaba usando. Es decir, usar una letra como variable o como incógnita no representaba ningún cambio en los razonamientos que realizaban.

En esta medida, nos preguntamos por los otros usos que, de acuerdo con diferentes autores (Bloedy, 2000; Ursini & Trigueros, 2004) puede tener las letras en una expresión algebraica. Estos autores plantean que más allá de las incógnitas y las variables, las letras también pueden adquirir el papel de números generalizados y de parámetros algebraicos.

Siguiendo a estos autores, las letras usadas en las expresiones algebraicas pueden tomar el papel de incógnita cuando representan un valor determinado pero desconocido y su uso está en relación con el tratamiento de ecuaciones. De igual manera, pueden ser usadas como variable cuando representan un rango especificado de posibles valores y su uso se enmarca principalmente en el tratamiento de funciones. De otro lado, representan números generalizados, cuando pueden tomar más de un valor y cuya relación que determina generalmente son relaciones de equivalencia. Finalmente la letra como parámetro obliga a pensar en variaciones de funciones o de ecuaciones. Es decir, es usada cuando se requiere estudiar la variación de una función o una ecuación y por ello se constituye en el estudio de familias de funciones o ecuaciones,(Bloedy, 2000).

En este orden de ideas, percibiendo la innegable importancia que se le da al uso de las letras en el pensamiento algebraico y teniendo en cuenta lo planteado por (Ursini &

Trigueros, 2004), quienes afirman que la mayoría de los estudios referidos al uso de letras en el álgebra, han centrado su interés en la forma cómo los estudiantes las usan como variables y como incógnitas, más sólo unos pocos se han enfocado en el uso como parámetros, vimos pertinente dirigir nuestro estudio al papel que estos juegan para los estudiantes en sus razonamientos algebraicos.

Interpretando a (Bloedy, 2000; Posada & otros, 2006), el uso de una letra como parámetro en una determinada expresión algebraica, implica tener en cuenta al menos dos aspectos: en primer lugar, un parámetro en una expresión algebraica (ecuación, función o relación de equivalencia), le imprime un carácter de familia, donde por cada valor tomado por el parámetro deja invariante la forma de co-relación entre las variables, incógnitas o número generalizado de la función, de la ecuación o de la relación de equivalencia a la cual pertenecen dichos parámetros. En otras palabras, una expresión algebraica con un parámetro es otra función pero de orden superior, en tanto la co-varición de ésta última, se define entre la variación de la expresión completa con respecto al campo de variación del parámetro. Así, cuando la letra tiene el carácter de parámetro puede asumirse bajo una dualidad: como una variable –campo de variación- o como una constante cuando se le da un valor particular.

En segundo lugar, el papel de las letras como parámetro no lo da la expresión en sí misma, sino que se encuentra en el contexto donde está ubicada y la aplicación de dicha expresión. En este sentido considera que tal contexto puede ser uno de los siguientes:

1. *Una declaración explícita de cuáles letras son utilizadas como parámetros, cuáles como variables y cuáles como incógnitas.*
2. *El conocimiento de las formas de las ecuaciones o funciones, donde es común el uso de la x* y *y como incógnitas y de la m, n, a, b, c como parámetros.*
3. *La formulación de la pregunta. En este contexto, se deben tener unos criterios para dar uso y significado a los parámetros, en el planteamiento de situaciones donde se puedan identificar éstos.*

De los tres, el tercero merece nuestra mayor atención, en tanto consideramos que en los dos primeros se asume la pre-existencia de un particular uso y significado del parámetro, mientras que el tercero favorece el análisis de las múltiples posibilidades en las cuales puede tener significado para quien los usa. Es decir, dado que estamos interesados en estudiar la forma como los estudiantes dan sentido y significado a las letras como parámetros, nos propusimos pensar en ciertas situaciones en las cuales ni se declara explícitamente cuando una letra se usará como parámetro, ni asumimos el convencionalismo de que algunas letras ostentan su papel.

Para lograr los fines de nuestra investigación, fue necesario involucrar un objeto matemático sobre el cual se enfocarían nuestras observaciones y por las características del grupo donde realizamos el proceso de práctica pedagógica, centramos la atención en la función cuadrática. Esto, al menos por dos razones: en primera instancia porque fue la temática en la cual venían trabajando los estudiantes al momento de realizar el proyecto, y en segundo lugar porque la función cuadrática puede y ha sido interpretada como modelo matemático de procesos de variación cuadrática[114] (Mesa & Ochoa, 2009; Posada & otros, 2006).

Fue así como finalmente, tomamos como pregunta de investigación: ¿Cuáles sentidos y significados construyen los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa La Paz, de las letras cuando son usadas como parámetros algebraicos en el contexto de la modelación matemática de situaciones de variación cuadrática? En consecuencia nos planteamos el siguiente objetivo:

Analizar los sentidos y significados que los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa La Paz, le dan a los parámetros algebraicos, al enfrentarse al contexto de modelación matemática de situaciones de variación cuadrática.

2. ALGUNOS ANÁLISIS

Parte de la interacción que se estableció con los estudiantes al interior del aula de clase, tuvo como elemento mediador un conjunto de situaciones de variación cuadrática, diseñadas con el propósito de estudiar el papel que para ellos jugaba el parámetro algebraico cuando las enfrentaban y producían sus conclusiones.

[114] "se llama función cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente" (Ochoa, 2008)

En este sentido, el proceso de modelación cobró un carácter dirigido en tanto el conjunto de situaciones entregadas a los estudiantes, fueron pre-diseñadas con la intencionalidad de poner la atención en cuatro elementos de particular importancia para nuestros intereses: los procesos de variación cuadrática de primer orden; los procesos de co-relación entre las cantidades de magnitud relevantes para la situación; los procesos de variación de segundo orden y el papel que para los estudiantes jugarían las formas de representación en los tres procesos anteriores. Con base en esto nos propusimos estudiar posibles sentidos y significados del parámetro en el contexto de la situación.

Aunque las situaciones fueron trabajadas con todos los estudiantes del grupo -grado noveno-, la información analizada formó parte de la producción, en diferente niveles, de cuatro estudiantes: María Isabel Córdoba, Tatiana Valencia, Joan Rivera y Rodrigo Zapata[115], quienes aceptaron de forma voluntaria participar del proyecto, contando con la aprobación firmada por sus acudientes y quienes se constituyeron en nuestro caso del estudio.

Diseñamos tres situaciones. Para efectos de este artículo, presentamos algunos análisis emergentes del desarrollo de la primera de ellas:

Se necesita construir un skate park rectangular, en un terreno del municipio de Envigado; para lo que se utilizará una malla metálica de 216 metros de largo.

Esta situación se diseñó para ser desarrollada en tres momentos, que se fueron ajustando de acuerdo con lo que iba aconteciendo. El primer momento estuvo dirigido con la pregunta *¿Con esta cantidad de malla como ayudarías a construir el skate park, para que tenga la mayor área posible de patinaje?* El principal objetivo de este momento era estudiar como los estudiantes enfrentaban la variación de primer orden entre las cantidades de magnitud área y longitud de uno de los lados del rectángulo y la posible co-relación entre ellas.

[115] Estudiantes del grado 9°6 de la Institución educativa la Paz

Al presentarle esta situación a los estudiantes la reacción casi inmediata y de la mayoría de ellos, puede resumirse en la frase "no entiendo, qué hay que hacer?"[116]. Este sentir fue una de las variables que tuvimos que enfrentar durante casi todo el proceso con diferentes grados de intensidad. Esto nos obligó a tratar de entender qué podría significar esa expresión. En un primer momento consideramos que era por desmotivación, pero luego consideramos que quizá se tratara de un obstáculo fruto de la forma como es presentada la situación: un texto escrito en lenguaje natural. Es decir, es enfrentarse al análisis de un texto y de acuerdo a muchos teóricos, esto no es una tarea simple ((Duval, 1999; Obando, 2006). Al respecto Obando afirma, sobre la base de los trabajos de Duval, que

> *"…Un problema fundamental por el que pasa todo estudiante de la educación básica es el paso de problemas en enunciados verbales a otros tipos de representaciones, fundamentalmente las algebraicas… p. 55*"[117]

Después de persuadir un poco a los estudiantes participantes del proyecto para que la enfrentaran y procuran resolverla, todos iniciaron el proceso. Dado que la relación base de la situación, es elegir el rectángulo de mayor área del conjunto posible construidos con un mismo perímetro, consideramos que por ello, el abordaje inicial de la mayoría, fue dibujar una serie de posibles rectángulos de longitudes enteras: Joan -1 rectángulo-, Tatiana -2 rectángulos-, Rodrigo -3 rectángulos- y María Isabel -7 rectángulos-. Para cada uno fue suficiente su respectiva cantidad de posibilidades para obtener la conclusión, que el rectángulo de mayor área es el de 54 unidades de longitud para cada lado. Aquí nos quedó una pregunta abierta sobre la validez de los procesos de generalización, la cual debe ser desarrollada posteriormente y que de acuerdo con los planteamientos de Luis Radford, podría ser más o menos así: ¿Cómo se decide acerca de la validez de un resultado que emerge de un proceso de generalización numérica y/o geométrica? (Radford, 1996).

---

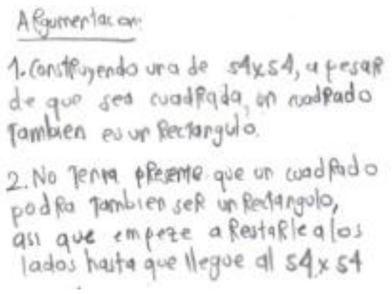
[116] Si bien es cierto la mayoría de las situaciones fueron presentadas de la misma manera, la reacción no siempre fue la misma. El "no entiendo, qué hay que hacer?" fue disminuyendo sobre la base de muchos diálogos tenidos con ellos para motivarlos a que intentaran afrontar la situación.

[117] Este autor plantea que el proceso de conversión de una representación en lenguaje natural a representaciones algebraicas, pasando en la mayoría de las ocasiones por otras representaciones, implica una organización y estructuración de la información de acuerdo con los mecanismos ofrecidos por cada tipo de representación. En particular, la representación en lenguaje natural presenta como principal mecanismo a las palabras, los conceptos matemáticos referidos en ellas, y sobre todo, las relaciones entre dichos conceptos. Estas relaciones, algunas explícitas y otras implícitas, brindan información sobre cómo están organizados los conceptos, esto es, sobre la estructura conceptual de la situación, y la comprensión de la situación pasa precisamente por la identificación, por la toma de conciencia de tales relaciones. (Obando, 2006)

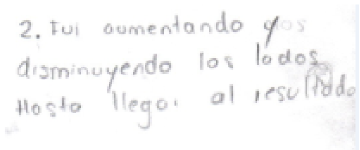
En nuestro caso, ¿Cuál fue el razonamiento lógico utilizado por los estudiantes para llegar a la conclusión con tan pocas opciones? y ¿cómo hacer para que los valores posibles que den los estudiantes a las magnitudes no sean únicamente cantidades enteras, es decir, el paso a la densidad e incluso a la continuidad?

Con respecto a la primer pregunta, la mirada que inicialmente tuvimos de la producción escrita de los estudiantes, la interpretamos como un ejercicio azaroso de ensayo y error sobre la base del poco número de rectángulos construidos, pero cuando expresaron algunos de los razonamientos para obtener el resultado, los estudiantes María Isabel, Rodrigo y Tatiana mostraron un indicio de haber construido sus respuestas sobre la base de la apreciación de la variación entre las cantidades de magnitud pertinentes, ver figura 1. Con la respuesta de Joan fue un poco más complicado determinar el razonamiento producido:

Respuesta de María Isabel



Respuesta de Rodrigo



Respuesta de Tatiana

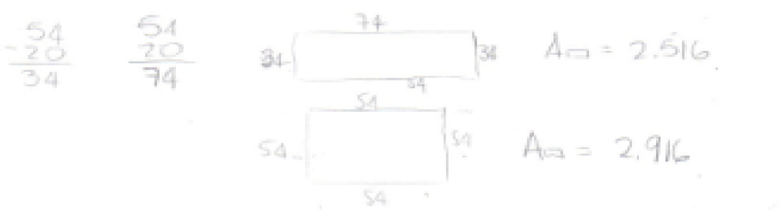


Figura 1: respuesta de los estudiantes en el primer momento

No obstante, con sus respuestas no fue posible apreciar explícitamente las formas como estaban estableciendo las co-relaciones entre las cantidades de magnitud. Es decir, las formas cuantitativas de relación y dependencia entre las longitudes de los lados de los rectángulos y sus respectivas áreas.

Con el objetivo que enfocaran la mirada en las relaciones entre las cantidades de magnitud de interés e identificaran las dependencias cuantitativas entre ellas, se les pide que llenaran una tabla de valores, donde se tiene llenas algunas casillas de las medidas de los lados.

Longitud del Lado 1	Longitud del Lado 2	Cantidad de malla	Área encerrada

Una vez llena la tabla, les solicitamos que expusieran ante el grupo la forma como lo hicieron. Espontáneamente algunos de los estudiantes enunciaron varias conclusiones: en primera instancia, que la cantidad de malla era un dato fijo y constante –esto nos pareció extraño en tanto, de acuerdo con el enunciado era un dato dado, pero al parecer no eran consciente de ello aunque en el momento anterior fue utilizado para obtener la conclusión-. En segundo lugar, que los lados 1 y 2, eran variables, pues estas no eran fijas en la situación y podían tomar valores diferentes cambiando así el área del rectángulo, pero sin cambiar el perímetro.

Para romper con la idea de trabajar únicamente con cantidades enteras y por esta vía obligarlos a pensar en posibles valores racionales, les propusimos diferentes valores para la cantidad de malla con cantidades decimales y aquellos que no fuera múltiplo de cuatro, en tanto el procesos nos llevó sospechar que siempre trabajarían con cantidades enteras y además que la respuesta se reduciría a tomar la cantidad de malla dada dividida por cuatro.

En un segundo momento de la situación, se les plantea a los estudiantes lo siguiente:

Si una empresa del sector privado ofrece financiar una cantidad de malla adicional de la financiada por la alcaldía de Envigado ¿Cuál sería la construcción ideal para que el terreno abarque la mayor área?

¿Si tuvieras cualquier cantidad de malla, ¿Cómo se debería construir el Skate Park para que se tenga la mayor cantidad de área para patinar?

Para la primera pregunta María Isabel manifestó ¿cuál es la cantidad de malla financiada por la alcaldía? Aquí decidimos considerar una cantidad específica -que no fuera múltiplo de cuatro 170 metros-, pues de lo contrario sería una situación para ser pensada con dos parámetros y consideramos esto ofrecería mayor dificultad.

El procedimiento realizado por María Isabel se subdividió en dos partes figura 2 y figura 3, respectivamente.

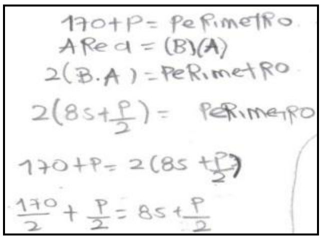


Figura 2

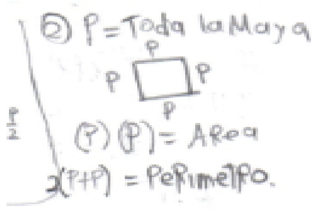


Figura 3

Observando la producción de la estudiante, parece que la letra ***P*** está asociada a la palabra Perímetro. No obstante, como se observa en ambos momentos su uso parece tener tres connotaciones diferentes. En primer lugar, la cantidad de malla financiada por el sector privado, pero en contraste con lo realizado en la segunda parte pareciera que dicha ***P***, tomara el significado de totalidad de la malla y/o la longitud de un lado del rectángulo. Este uso indistinto y quizá inconsciente de la letra ***P*** le generó algunas dificultades para la producción de sus conclusiones.

En este sentido, se le pidió que explicara las características de su razonamiento acorde con lo expresado en el papel. La respuesta dada, se puede resumir en "*es a partir de este (señala el 170+P de la expresión) que se obtiene la ecuación, y P en este caso tiene la connotación, de constante pero que varia, según la cantidad de malla que proporcione la empresa del sector privado"*. Al pedirle que se refiriera al razonamiento de la segunda parte se limitó únicamente a contar lo que aparece escrito sin mayores detalles.

Al respecto de estas respuesta, podríamos interpretar que en el primer procedimiento ***P*** está siendo usada como parámetro, mientras que en la segunda parece que la está usando como un número para calcular el área del rectángulo, en este caso equiparamos su uso con lo sugerido por (Bloedy, 2000), un número generalizado.

Ahora bien, en relación con las preguntas de éste momento de la situación, el conflicto posiblemente estaría en el papel jugado por el término "cualquiera" de la segunda pregunta, pues este es un término muy complejo para interpretar en el contexto matemático. Interpretando a Russell, el término cualquiera implica ubicarse en una dualidad cuando se refiere a un determinado conjunto de valores, pues no indica un elemento particular, pero tampoco la totalidad de los mismos, sino simplemente cualquiera de ellos y por tanto lo considera como la base del significado de la “variable” matemática, (Russell, 1983). En este sentido, teniendo en cuenta que en la situación “cualquiera” se refiere a la variable de segundo orden: el parámetro, y parece que la estudiante la está interpretando como variable de primer orden, siempre y cuando la expresión “*(P)(P)=Area”* figura 3, no se asuma como una fórmula para calcular el área sino como una función de una variable real .

3. CONCLUSIONES:

- Los primeros momentos de las situaciones, estuvieron diseñados para el estudio de las variaciones cuadráticas de primer orden, mientras los momentos finales buscaban realizar algunos análisis de segundo orden. No obstante dado que para los análisis aquí presentados, sólo se ha tenido en cuenta lo acontecido con la primera situación, esto significa que aún es prematuro dar una respuesta medianamente satisfactoria a la pregunta de investigación. Es decir, reconocemos que aún requerimos afinar algunas observaciones con respecto al papel dado al parámetro, por los estudiantes para enfrentar y solucionar la situación. Hasta el momento advertimos que la complejidad que comporta el hacer uso de las variaciones de segundo orden, en los procesos de modelación debe pasar por superar algunas dificultades que se presentan en la interpretación de las variaciones de primer orden. Sin embargo falta analizar las otras dos situaciones y algunas conversaciones que nos pueden dar mayor claridad frente a este aspecto.

- Si bien es cierto, muchos de los textos del álgebra escolar han dirigido la atención únicamente al uso de letras para el razonamiento algebraico, consideramos que esta idea debe ser ampliada, pues los sentidos y significados del parámetro puede estar en relación con el uso de otros tipos de representación no necesariamente escrita: hablada, gestual, icónica, gráfica, entre otros.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bloedy, H.-V. (2000). Beyond unknowns and variables parameters and dummy variables in high school algebra. In *Perspectives on School Algebra*. USA: kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. V. Restrepo, Trans.): Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Obando, G. (2006). El paso de enunciados verbales a ecuaciones. In *Módulo 2: Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*: Secretaría de Educación para la cultura de Antioquia.

Ochoa, J. V. (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. In P. Leston (Ed.), *Actas latinoamericana de Matemática educativa* (Vol. 21). México.

Posada, F., & otros. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. Medellín: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia.

Radford, L. (1996). Algunas reflexiones sobre la enseñanza del álgebra a través de la generalización. In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*.

Russell, B. (1983). *Los principios de la matemática* (J. C. Grimberg, Trans.). España.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? . *Proceeding International PME, volumen 4*, 361-368.