La Enseñanza de la Combinatoria Orientada Bajo la Teoría de Situaciones Didácticas

Lucía Zapata, , luzapata@ayura.udea.edu.co
Universidad de Antioquia-Grupo GECEM
Sandra Quintero, , sandraquinteroco@hotmail.com
Sandra Morales, , smoralesmunera@gmail.com
Universidad de Antioquia

1. Presentación

Existen varias razones que justifican nuestra decisión de emprender una propuesta didáctica para la combinatoria. La primera es porque, en nuestra experiencia como docentes, hemos percibido que la combinatoria es una de las temáticas de la estadística más complejas para los estudiantes de todos los niveles; así lo reporta también la literatura en Educación Estadística (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 1997).

La segunda es que en el currículo colombiano la combinatoria está presente en varios grados del sistema educativo (MEN, 2003; MEN, 1998), pero los alumnos terminan su secundaria sin saber diferenciar una combinación de una permutación y de una variación. Esto en parte tiene que ver con el hecho que muchas veces no se abordan ciertas temáticas, aún estando dentro de los lineamientos curriculares, y cuando se abordan se hace de forma procedimental y no conceptual.

La tercera es que así como los estudiantes tienen dificultades para entender la combinatoria, los profesores tenemos gran dificultad para enseñarla de manera comprensiva y duradera. Esta dificultad está asociada a varios factores, (1) no hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores (Kavousian, 2005), (2) no hay muchos recursos didácticos para apoyar la enseñanza de la combinatoria, (3) los libros de texto que se usan para enseñar estadística dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido (Ortiz, Batanero, & Serrano, 2007).

Esta propuesta es el resultado de la investigación llevada a cabo en el Núcleo de Pensamiento Aleatorio[109] y los objetivos fueron (1) diseñar una unidad didáctica que (a) abordara la enseñanza de la combinatoria con un fuerte énfasis en la comprensión e (b) involucrara a los

[109] El Núcleo de Pensamiento Aleatorio es un grupo académico de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia que estudia la enseñanza y el aprendizaje de la estadística a nivel escolar y a nivel universitario.

estudiantes en la construcción colectiva de los significados mediante el trabajo en grupos colaborativos. (2) contrastar la efectividad de la unidad didáctica en el desempeño de los estudiantes en un test de combinatoria. Para responder a estos objetivos seguimos las recomendaciones de la *Teoría de situaciones didácticas* de Brousseau (1997) y las recomendaciones para el análisis de datos cuantitativos (Hernández- Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista-Lucio, 2008).

2. Marco Teórico

La combinatoria se ha entendido como el estudio de formas de listar, arreglar y organizar elementos de conjuntos discretos de acuerdo a reglas específicas (Cameron, 1997). Autores como Fischbein y Gazit (1988, citado por Batanero, Godino y Navarro, 1996) sugieren que al abordar la combinatoria en las aulas de clase, esta se debe iniciar desde aquellas formas de conteo que son más fáciles para los estudiantes desde el punto de vista epistemológico. Estos autores sugieren por ejemplo que se inicie con las variaciones con repetición porque permiten el uso del diagrama de árbol y su fórmula se puede obtener a partir del diagrama mediante una secuencia de multiplicaciones repetidas. Dichos autores recomiendan el siguiente orden: variaciones con repetición, permutaciones, variaciones ordinarias y por último combinaciones.

Para el diseño de esta propuesta hemos seguido las recomendaciones de estos autores y las hemos articulado con las orientaciones de la *Teoría de situaciones didácticas* (Brousseau, 1997; Sadovsky, 2005). Creemos que esta teoría tiene un gran potencial educativo y es pertinente para nuestra propuesta porque "busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea" (Panizza, 2003, pág. 2).

La *Teoría de situaciones didácticas*

y parte de la premisa que el conocimiento no es transmitido de una persona a otra sino que el individuo construye su propio conocimiento. En esta teoría quien hace el trabajo duro es el estudiante pero el rol del profesor es clave en el diseño riguroso y en la elección juiciosa y apropiada de los problemas. Estos problemas deben provocar la más fructífera interacción en los estudiantes. Las inter*acciones* del estudiante con los problemas propuestos por el profesor se supone que serán suficientemente adecuados para permitirle ganar conocimiento, *formular* estrategias de solución, o *validar* su comprensión.

En la teoría de situaciones didácticas, Brousseau nos habla de la *situación didáctica* (algunos autores la llaman *relación didáctica* [Flores & Barrera, 1999]). Este es un sistema de interacciones constituido por el estudiante (o grupo de estudiantes), el profesor y un saber determinado (los problemas propuestos por el profesor).

Una *situación a-didáctica* (o fase de la situación didáctica) está asociada con un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en el estudiante (Brousseau, 1986 citado por Godino, 2003). El profesor inicia, establece y monitorea la actividad del estudiante (y el aprendizaje asociado) mediante el manejo de la evolución de la situación. Haciendo esto el profesor define el *contrato didáctico* que gobierna la *relación didáctica* y define las condiciones de su existencia. Este *contrato* es un juego de reglas y estrategias de la *situación didáctica*. En otras palabras, es la justificación que el profesor tiene para presentar esta situación. Es el juego de actitudes que el estudiante espera del profesor y que el profesor espera del estudiante (Brousseau, 1997).

En cada *situación a-didáctica* está presente el momento de *validación* que puede ser establecido entre los estudiantes o entre el estudiante y el profesor. Es decir se discute la verdad y la eficacia de la solución. Para la validación de los conocimientos matemáticos generados por el estudiante, se supone que la argumentación se da como condición necesaria. En la *Teoría de situaciones didácticas*, el momento de la *validación* juega un papel crucial debido a que la aceptación de una estrategia de solución está acompañada de una prueba o una demostración (Guerrero, Sánchez, & Lurduy, 2005).

La *institucionalización* es el momento en el cual el profesor ayuda a establecer las relaciones entre la producción libre del estudiante y entre el conocimiento cultural y científico. En otras palabras el profesor ubica la producción del estudiante en contexto.

3. Metodología

Para ser coherentes con el marco teórico que rige nuestra unidad didáctica, el trabajo colaborativo entre estudiantes fue clave en el desarrollo de la propuesta. La colaboración entre individuos es esencial en la construcción del conocimiento y es condición para la organización operativa del pensamiento. Adicionalmente, el trabajo colaborativo permite la estandarización del conocimiento entre los miembros del grupo, promueve la discusión de diferentes estrategias de solución, estimula en los estudiantes la capacidad de comunicar sus ideas matemáticas y la capacidad de argumentación.

Como es recomendado en la *Teoría de situaciones didácticas*, la enseñanza de cualquier conocimiento debe iniciarse con la presentación a los estudiantes de una o varias situaciones en la cual el conocimiento a ser enseñado esté contenido. En nuestro caso presentamos una serie de problemas cuya esencia era la combinatoria. Iniciamos con una prueba diagnóstica, luego desarrollamos la unidad didáctica y cerramos con la prueba final. La prueba diagnóstica fue diseñada para explorar los conocimientos previos en los estudiantes y para identificar los tipos de conteo que les generaban más dificultad. Al final, esta misma prueba, se constituyó en una herramienta de evaluación y contraste con respecto a la efectividad de la unidad. Esta prueba incluyó 10 ítems de selección múltiple pero con requerimiento de justificación (la prueba y la unidad didáctica están descritas en Zapata, Quintero, & Morales, 2010). Los ítems indagaron por aplicación de técnicas de conteo tales como: permutaciones (simples, con restricciones y con elementos repetidos), variaciones (ordinarias y con repetición), combinaciones y principio multiplicativo. La prueba fue diseñada con valores pequeños de tal forma que los estudiantes podían experimentar, simular o usar estrategias sistemáticas de enumeración para encontrar la respuesta correcta.

Con excepción de la prueba diagnóstica y la prueba final, los problemas propuestos a los estudiantes debían ser discutidos en grupos de trabajo colaborativo. Los estudiantes debían *actuar* sobre los problemas, *formular* una solución y argumentar su *validez* ante la clase. Al final, cada grupo debía tener una solución *válida* a cada problema y varias formas de obtener la solución. Una vez llevada a cabo la *validación* de la solución, el profesor resumía los resultados y daba nombres a los conceptos utilizados, cerrando así con la *institucionalización* del conocimiento.

Los problemas propuestos a los grupos de trabajo colaborativo tenían diferentes niveles de dificultad y se referían a diferentes formas de listar, arreglar y ordenar elementos de un conjunto. Iniciamos con situaciones simples en las cuales los estudiantes tenían que recurrir a revisar sus esquemas multiplicativos, sus estrategias de análisis lógico-matemático y sus estrategias de conteo. Además de los conceptos que queríamos enseñar, los problemas promovían la revisión de otros conceptos asociados. A medida que se avanzaba en el desarrollo de la unidad, los problemas se fueron haciendo más complejos. La unidad se desarrolló en un grado 9º con 42 estudiantes en cinco sesiones de 50 minutos cada una. La profesora es una de las autoras de este manuscrito. Para el análisis de las respuestas de los estudiantes se corrió un análisis simple de diferencia de medias.

4. Análisis

La Tabla 1 presenta los porcentajes de respuestas correctas de los estudiantes en la prueba diagnóstica. Se observa que las permutaciones simples y las combinaciones tuvieron el mismo nivel de dificultad para los estudiantes; y las variaciones ordinarias representaron un mayor grado de dificultad. La tabla 1 también revela que los ítems que incluyeron algún tipo de repetición o restricción fueron los ítems de mayor dificultad.

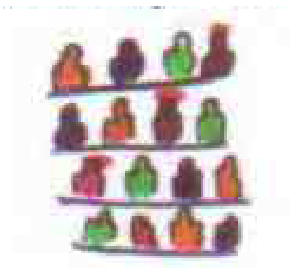
Tabla 1. *Porcentajes de respuestas correctas en la prueba diagnóstica*

Grado	Permutación Simple	Permutación con Restricción	Permutación con Restricción	Combinación	Principio Multiplicativo	Permutación con Repetición	Permutación con Repetición	Variación	Variación con Repetición	Variación con Restricción
9º	23,1	43,6	15,4	23,1	38,5	20,5	12,8	2,56	10,3	15,4

El Ítem 1 indagaba por permutaciones simples. Se pedía responder de cuantas formas distintas se podían sentar cuatro amigos en cuatro sillas previamente dispuestas en una fila. La respuesta es 24, el primer amigo que llegue se puede sentar de cuatro formas, el siguiente que llegue solo tendrá tres formas, el siguiente dos formas y el último solo tendrá una. Solo el 23.1% de los estudiantes solucionaron el problema correctamente y usaron estrategias exploratorias como listas y gráficos; solo un estudiante aplicó la formula de n! para solucionarlo. Es necesario mencionar que el 41 % de los estudiantes encontró que los cuatro amigos podían sentarse de cuatro formas, algunos asociaron esto a las cuatro sillas: "de a cuatro porque si solo hay cuatro sillas los cuatro se pueden sentar en cada puesto" (Justificación de Ángela[110]).

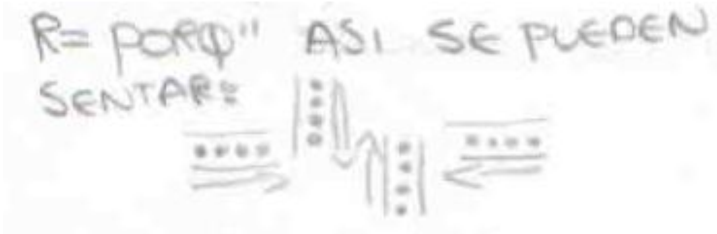
Danilo, otro estudiante, hizo un gráfico para representar las posibles formas en las cuales los cuatro amigos podrían sentarse (Figura 1). Observe en la Figura 1 que una de las condiciones que Danilo puso a su solución es que los amigos no podían sentarse en la misma silla dos veces para encontrar todas las formas posibles.

Figura 1: *Solución de Danilo al problema de permutación*



Otros estudiantes hicieron una interpretación diferente. Por ejemplo, Lorena interpretó que las cuatro sillas podrían acomodarse físicamente en el teatro de forma diferente e hizo dos disposiciones verticales y dos horizontales (Figura 2). Lorena ignoró información previa que la fila del teatro solo tenía cuatro sillas y estaban previamente dispuestas.

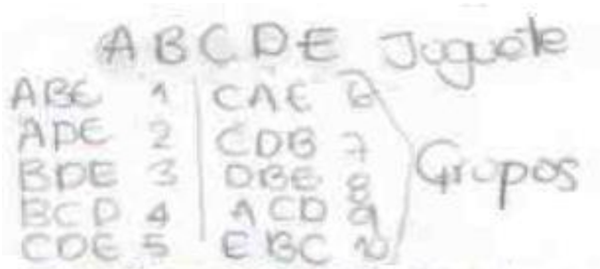
Figura 2: *Interpretación dada por Lorena al problema de permutación*



[110] Los nombres usados en este reporte son seudónimos para proteger la identidad de los participantes.

El ítem 4 indagaba sobre combinaciones. A los estudiantes se les pidió determinar cuántos grupos diferentes de tres juguetes se podía armar con cinco juguetes. Si nombramos a cada juguete con las letras A, B, C, D, y E, diez combinaciones diferentes surgen, a saber: ABC, ABD, ABE, ACD, ADE, ACE, BCD, BCE, BDE y CDE. Solo 23.1 % de los estudiantes fueron exitosos en la respuesta. Algunos estudiantes intentaron hacer listas para encontrar las posibles formas. Infortunadamente no fueron exhaustivos y no tuvieron en cuenta la posible repetición. Marta, una de las estudiantes nombró cada juguete con una letra A, B, C, D y E y luego las combinó encontrando 10 formas (Figura 3). Observe en la Figura 3 que (1) la forma 3 es BDE y la forma 8 es DBE que corresponde a la misma combinación, y (2) la forma 4 es BCD es la misma que la forma 7 CDB. En la lista que Marta presentó repitió dos combinaciones (BDE y BCD) y omitió dos (ABE y ABD). Curiosamente Marta no notó este detalle y esto no afectó su elección de la respuesta.

Figura 3: *Lista hecha por Marta para encontrar el número de combinaciones*



Es necesario mencionar que muchos estudiantes solucionaron el problema simplemente multiplicando 5 por 3 porque eran números que aparecían en el enunciado del problema.

Como lo sugiere la literatura en educación estadística, el ítem de variaciones ordinarias tuvo un alto nivel de dificultad para los estudiantes. Se les pedía a los estudiantes encontrar todas las claves posibles de tres dígitos que se podían formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 sin repetir dígitos. Este ítem se solucionaba razonando que el primer dígito podía ser elegido de 4 formas, el segundo de tres y el tercero de dos formas. Había así 24 formas posibles de formar las claves. Infortunadamente, solo un estudiante eligió la respuesta correcta pero no justificó su razonamiento. Con sorpresa encontramos el 43.6% de los estudiantes eligió que solo 5 claves se podían formar con estos dígitos, y este fue el mayor distractor. Ninguno de ellos justificó su razonamiento.

El 38.5 % de los estudiantes respondió exitosamente el ítem que exploraba el principio multiplicativo. Curiosamente este fue uno de los ítems que más éxitos en la respuesta tuvo y esto podría estar asociado a la presencia de esquemas multiplicativos en los estudiantes de secundaria. La literatura plantea que los esquemas multiplicativos son desarrollados en la escuela primaria (Itzcovich, Ressia de Moreno, Novembre, Becerril, & Gvirtz, 2007).

Una vez se aplicó la prueba diagnóstica e identificamos las mayores dificultades de los estudiantes, procedimos al desarrollo de la unidad didáctica. La implementación de la unidad permitió que los estudiantes se involucraran activamente en la construcción del conocimiento. Fue enriquecedor atestiguar que los estudiantes estuvieron implicados en la solución de los problemas propuestos. Estos problemas fueron dispositivos claves para la *formulación* y *validación* de soluciones. El nivel de la argumentación que surgió en los diferentes grupos de trabajo evidenció que los estudiantes estaban involucrados en la construcción del conocimiento.

Una de las situaciones propuestas en la unidad pretendía que los estudiantes generalizaran la regla de formación de las permutaciones. Se les planteó el siguiente problema: "En una competencia de carreras con dos participantes, ¿de cuántas maneras podrían llegar a la meta?" El siguiente fragmento de discusión entre dos estudiantes ilustra la importancia de la *validación* y argumentación en la clase de matemáticas:

León: Si son dos participantes, cada uno tiene dos formas de llegar a la meta. Cada uno puede llegar de primero o de segundo. Entonces serian cuatro formas diferentes.
Martin: Pero solo es una carrera, serian solo dos formas.
León: Ah, sí.

Por el limitado espacio que se tiene para este manuscrito no presentaremos otros episodios que dan cuenta de la implicación de los estudiantes en la unidad didáctica, del poder del trabajo colaborativo y del nivel de argumentación de los estudiantes. Pero queremos expresar que tenemos un sin número de episodios identificados que dan cuenta de ello.

La Tabla 2 presenta el porcentaje de respuestas correctas en la prueba diagnóstica y en la prueba final. Se observa que una sustancial mejoría en todos los ítems. Sin embargo, es necesario resaltar que aun es evidente la dificultad en los ítems relacionados con permutaciones con repetición, variación con repetición y con restricción, y en variación con restricción.

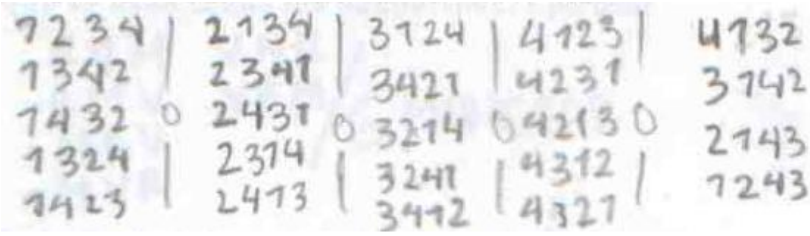
Tabla 2. *Porcentajes de respuestas correctas en la prueba diagnóstica y final*

Prueba	Permutación Simple	Permutación con Restricción	Permutación con Restricción	Combinación	Principio Multiplicativo	Permutación con Repetición	Permutación con Repetición	Variación	Variación con Repetición	Variación con Restricción
Inicial	23,1	43,6	15,4	23,1	38,5	20,5	12,8	2,56	10,3	15,4
Final	67,6	89,2	75,7	67,6	86,5	75,7	48,6	86,5	59,5	48,6

Se corrió una prueba de diferencia de medias para el puntaje total de la prueba y para cada ítem. Se encontró que el desempeño de los estudiantes en el puntaje total de la prueba final fue significativamente superior al de la prueba inicial, con un valor *t* de -9,762, 38 grados de libertad y un valor p de 0,000. La diferencia de medias en cada ítem también fue significativamente superior en favor de la prueba final.

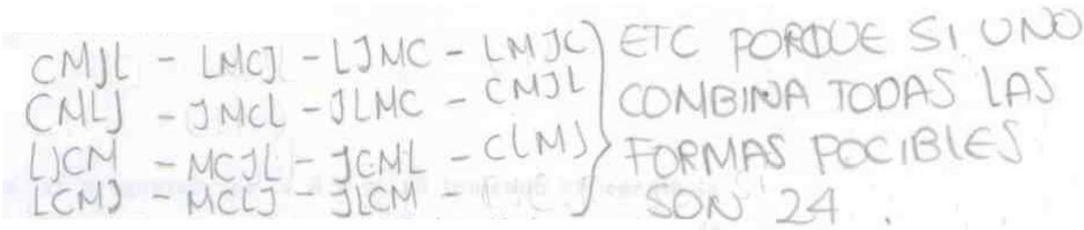
Danilo, el estudiante que en la prueba diagnóstica dibujó los cuatro amigos para ilustrar las diferentes formas en las cuales se podían sentar (Figura 1), esta vez fue sistemático e hizo una lista exhaustiva (Figura 4). Danilo usó estrategias sofisticadas como fijar un amigo y variar los demás.

Figura 4: *Solución dada por Danilo al problema de permutaciones, prueba final*



Lorena quien había dibujado las sillas en el espacio del teatro para explicar cómo se podían acomodar los amigos (Figura 2), esta vez dio a cada amigo una inicial e hizo varios movimientos entre ellos tratando de ser sistemática. Infortunadamente, no logró enumerar todas las posibilidades pero usó su lógica para determinar que en total debían ser 24 formas.

Figura 5: *Solución de Lorena al problema de Permutación simple. Prueba final*



Sin duda alguna los problemas más complejos para los estudiantes fueron aquellos en los cuales se presentaron repeticiones o restricciones. Al ítem sobre variaciones que preguntaba ¿cuántas claves de acceso se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, y 4, si los números deben ser impares y los dígitos no se repiten? Doris, una estudiante, dio el siguiente razonamiento: "En el último caso [tercer dígito del número de tres dígitos] hay dos posibilidades porque solo hay dos números impares de los cuatro números […]. En el primero [dígito] tres posibilidades y en el segundo [dígito] hay dos posibilidades. Así son en total 3*2*2=12 casos".

5. Conclusiones

La presente propuesta didáctica fue diseñada para apoyar la enseñanza de la combinatoria desde un punto de vista conceptual. Encontramos que la propuesta cumplió su propósito y al final los estudiantes que participaron en la unidad tuvieron mayor dominio conceptual de las diferentes formas de arreglos en la teoría combinatoria.

Los resultados de nuestro estudio muestran que los estudiantes tienen mayor facilidad para los problemas que involucran el principio multiplicativo y mucha más dificultad para los problemas que involucran formas de contar, organizar o arreglar elementos de conjuntos en los cuales se repite elementos o hay restricciones. Consideramos que quienes se sientan interesados en esta línea de trabajo tengan en cuenta diseñar problemas que expongan al estudiante a situaciones en las cuales haya repetición de los elementos del conjunto a organizar y que haya ciertas restricciones.

Resaltamos de esta experiencia que los estudiantes se sintieron atraídos por la propuesta metodológica y se involucraron de tal forma en la *acción* sobre los problemas y en la *formulación* de solución de las situaciones que el tipo de discusiones generadas en el momento de *validación* estuvieron mucho más allá de nuestras expectativas.

Bibliografía

Batanero, C., Godino, J., & Navarro - Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics , 32* 199.

Brousseau, G. (1986/1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física (versión Castellana).

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Cameron, P. (1997). *Combinatorics: Topics, techiques, algorithms.* Cambridge: Cambridge University Press.

Castillo, S., Arrieta, L., & Rodriguez, M. (2005). Epistemologia y método en Educación Matemática. *Copernico* 58.

Flores, H., & Barrera, S. (1999). Brousseau in action: Didactical situation for learning how to graph functions. *The Fourth Asian Technology Conference in Mathematics.* Guangzhou, China .

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas.* Recuperado el 25 de Abril de 2010, de Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Guerrero, F., Sánchez, N., & Lurduy, O. (2005). La práctica docente a partir del modelo DECA y la Teoría de las situaciones didácticas. *Enseñanza de las Ciencias. Número Extra. VII Congreso* 5.

Hernández- Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. (2008). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Itzcovich, H., Ressia de Moreno, B., Novembre, A., Becerril, M. M., & Gvirtz, S. (2007). *La matemática escolar: Las prácticas de enseñanza en el aula.* Argentina: Aique.

Kavousian, S. (2005). The development of combinatorial thinking in undergraduate students. *Psychology of Mathematics Education of North America, Annual Meeting* 3). Roanoke, Virginia.

MEN. (2003). *Estándares básicos de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ortiz, J., Batanero, C., & Serrano, L. (2007). Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 129). Huesca, España.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, *Enseñar matématica en el nivel inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: Un marco para pensar y actuar La enseñanza de las matemáticas. En *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: El Zorzal.

Zapata, L., Quintero, S., & Morales, S. (2010). Combinatoria en acción. *11 Encuentro Nacional de Matemática Educativa.* Bogotá : ASOCOLME.