REVISTA EMA
2000, VOL. 5, Nº 3, 252-266

EL DOMINIO DE LA VARIABLE: VARIABLE DIDÁCTICA EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR[1]

En el análisis del discurso matemático manifiesto en un texto de álgebra escolar, hemos encontrado que el ***dominio de la variable*** *es un concepto presente desde la aparición de las expresiones generalizadoras de operaciones, relaciones y propiedades de los números reales, que tan sólo se explicita en el estudio del álgebra de las expresiones algebraicas. Este concepto, junto con el de* ***conjunto de referencia*** *de una expresión y con el de* ***conjunto solución****, juega un papel protagónico en diferentes contextos del álgebra escolar, que le permiten configurarse como una variable didáctica imprescindible en la significación de muchos otros conceptos algebraicos.*

INTRODUCCIÓN

Cuando la actividad docente se convierte en objeto de estudio surgen indagaciones y consideraciones que requieren ser sistematizadas. Este documento intenta exponer algunas de estas consideraciones que se han planteado en el desarrollo de los cursos *Aritmética y funciones*[2]. En esta medida, las reflexiones que se presentan deben tomarse como una forma de suscitar críticas y opiniones acerca de la manera de visualizar una situación de aprendizaje a nivel escolar, y en consecuencia, pretenden contribuir al enriquecimiento de posibilidades de análisis de problemáticas propias de la educación matemática, por parte de maestros e investigadores preocupados por el aprendizaje de las matemáticas en ámbitos escolares.

Las ideas contenidas en estas reflexiones tienen como referencia el análisis del discurso matemático presente en el texto guía (Zill y Dewar, 1992) del curso *Aritmética y funciones*. Este análisis considera categorías tales como: la caracterización de ese discurso —definicional, heurístico, formal—, los tipos de ejemplos y ejercicios propuestos —procedimentales, conceptua-

1. Este artículo es una versión ampliada de un artículo publicado bajo el mismo nombre, en las memorias de las JAEM 9 que se llevaron a cabo en Lugo, España, en septiembre de 1999.
2. Estos cursos se desarrollaron entre 1993 y 1999 como parte del Plan de Nivelación Universitaria de la Universidad del Valle con estudiantes que terminaban su bachillerato y no lograban ingresar a la universidad. Son cursos equivalentes a un curso de álgebra elemental.

les, de comunicación, de razonamiento matemático, de resolución de problemas—, la estructura conceptual de las unidades temáticas, y los aspectos que se enfatizan de los contenidos.

Es precisamente en el análisis de esta última categoría donde reconocemos la importancia de explicitar, a partir de su definición y uso, el *dominio de la variable* como elemento primordial en la comprensión de conceptos fundamentales del álgebra escolar tales como: variable, expresión algebraica, polinomio, ecuación, función, etc.

A continuación, con el ánimo de justificar y argumentar tal importancia, estudiamos la aparición y el papel que juega el dominio de la variable en diferentes contextos algebraicos (el álgebra de los números reales y el álgebra de las expresiones algebraicas). Centramos la atención tanto en sus relaciones con los conceptos de *conjunto de referencia* y *conjunto solución*, como en su múltiple función en la solución de ecuaciones. Finalmente presentamos una reflexión de carácter didáctico y concluimos con una serie de inquietudes a convertirse en objeto de estudio en torno a la problemática.

El dominio de la variable en el álgebra escolar

En un curso de álgebra del bachillerato o de los primeros niveles de educación superior, generalmente se abordan temas en relación con los números reales, las expresiones algebraicas y las funciones. En cada una de estas temáticas se definen los elementos (números reales, expresiones algebraicas, funciones), las operaciones entre estos elementos (adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, radicación, valor absoluto, composición), y se establecen relaciones (de equivalencia y de orden). Desde esta perspectiva consideramos que lo realizado en estos cursos es álgebra de los números reales, álgebra de las expresiones algebraicas y álgebra de las funciones.

El dominio de la variable en el álgebra de los números reales

En el álgebra de los números reales se usan expresiones que son generalizaciones numéricas de operaciones, relaciones y propiedades. Estas expresiones se configuran mediante literales, que junto con los signos de las operaciones y los signos de agrupación permiten enunciar y explicar en forma breve y precisa las definiciones de operaciones o relaciones y sus propiedades.

Entre las tareas más comunes que debe realizar el estudiante con estas expresiones están aquellas en las cuales es necesario evidenciar el valor o valores de la letra, o, hallar el valor algebraico de una expresión; otras, donde se debe transformar la expresión en una más simple, o con determinada característica. Corresponden a este orden de tareas los siguientes ejemplos, seleccionados de los ejercicios propuestos en los capítulos que versan sobre números reales, del texto guía:

1) ¿Para qué valores de a, $a-5$ es un número real?

2) ¿Para qué valores de x, $\sqrt{x}$ es real?

3) ¿Si a pertenece a los números reales, qué valor tiene a^2+1?

4) Simplificar: $\dfrac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$; $\sqrt[4]{16x^5}\cdot\sqrt[4]{2x^3y^4}$

5) ¿Para qué valores de a, $\dfrac{5}{a}$ es positivo?

6) ¿Para qué valores de x, la expresión $\dfrac{x^2}{x}$ es negativa?

7) ¿Para qué valores de x, es verdad que $x \le |x|$?

8) ¿En qué condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, es decir, cuándo es verdad que $|a+b| = |a|+|b|$?

Inicialmente, asumamos como objeto de estudio la situación planteada en el primer ejemplo: ¿Para qué valores de a, $a-5$ es un número real?

Para que $a-5$ represente un número real debemos tener en cuenta *los valores posibles de* a; estos valores posibles de a constituyen el conjunto de referencia de la expresión. Por la manera como está formulada la pregunta, podemos suponer que el conjunto de referencia son los reales, y por tanto, respondemos que para cualquier valor real que tome a, $a-5$ toma valor real. Sin embargo, también podemos suponer otro conjunto de referencia distinto de los reales, por ejemplo, los naturales o los complejos; en el primer caso, la respuesta es que a puede tomar cualquier valor natural para que $a-5$ sea real; en el segundo los valores de a que hacen que $a-5$ represente un número real son los $a = x+yi$, donde $y = 0$. En general, si tomamos como conjunto de referencia un subconjunto de los reales, todos sus elementos se constituyen en respuesta.

Haciendo un análisis similar al anterior, para la pregunta del segundo ejemplo (¿Para qué valores de x, $\sqrt{x}$ es real?) inferimos que los valores de x que hacen que $\sqrt{x}$ sea real dependen también del conjunto de referencia que tomemos.

Si R es el conjunto de referencia, los valores para los que la expresión $\sqrt{x}$ tiene sentido son los reales no negativos, es decir, $\{x \in R | x \ge 0\}$; si Z es el conjunto de referencia, los valores para los que $\sqrt{x}$ tienen sentido son los enteros no negativos, $\{x \in Z | x \ge 0\}$. Además si C es el conjunto de referencia, $\sqrt{x} \in R \Leftrightarrow x = a+bi$ donde $a \ge 0$ y $b = 0$.

Hasta este momento, es evidente que de acuerdo con los conjuntos de referencia que se asuman las preguntas tienen distintas respuesta.

A través de los siguientes grupos de preguntas y respuestas, relacionados con los anteriores ejemplos, prosigamos con nuestra indagación, advirtiendo de antemano que en estos dos grupos de preguntas el conjunto de referencia de cada expresión está explícito (N, Z, Q y R).

Grupo 1	
Pregunta	Respuesta
¿Para cuáles números naturales, $a-5$ es natural?	$\{x \in N \mid x > 5\}$
¿Para cuáles números enteros, $a-5$ es entero?	Z
¿Para cuáles números racionales, $a-5$ es racional?	Q
¿Para cuáles números reales, $a-5$ es real?	R

Grupo 2	
¿Para cuáles números naturales, $\sqrt{x}$ es natural?	$\{x \in N \mid x$ cuadrado perfecto$\}$
¿Para cuáles números enteros, $\sqrt{x}$ es entero?	$\{x \in Z \mid x$ cuadrado perfecto$\}$
¿Para cuáles números racionales, $\sqrt{x}$ es racional?	$\{x \in Q \mid x = \frac{a}{b}\}$, donde a es entero cuadrado perfecto no negativo y b entero cuadrado perfecto positivo.
¿Para cuáles números reales, $\sqrt{x}$ es real?	$\{x \in R \mid x \geq 0\}$

Notemos que para responder cada pregunta es necesario considerar dos conjuntos:

- el *conjunto de referencia*, o conjunto de cuyos elementos se nutre la variable; aquel al cual pertenece la variable, y,
- el *dominio de la variable*, subconjunto del conjunto de referencia, constituido por los elementos que permiten que la expresión represente un elemento del mismo, es decir, que la expresión *tenga sentido* en el conjunto donde ella se define.

Por tanto, la característica de los conjuntos que sirven de respuesta a las preguntas planteadas es que cada uno de ellos constituye el dominio de la variable de la expresión en cuestión.

Así pues, en el tercer ejemplo (¿Si a pertenece a los números reales, qué valor tiene $a^2 + 1$?), es explícito el conjunto de referencia y se corresponde con el dominio de la variable de la expresión. Bajo estas condiciones fácilmente damos respuesta a la pregunta, ya que, si $a > 0$ entonces $a^2 + 1 > 1$, si $a = 0$ entonces $a^2 + 1 = 1$ y si $a < 0$ entonces $a^2 + 1 > 1$. Así, $a^2 + 1$ siempre va a ser mayor o igual a 1 para cualquier a que pertenece a los reales.

Ahora, en aras de ratificar la importancia de precisar un conjunto de valores permisibles para las variables en cada expresión, asumamos como objeto de estudio las situaciones planteadas en el cuarto ejemplo (Simplificar $\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$; $\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4}$).
Para ello observemos sus soluciones típicas:

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6)^3 x^3 (y^2)^3}{x^2y^5} = -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5} = -216x^{3-2}y^{6-5} = -216xy$$

$$\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4} = \sqrt[4]{16 \cdot 2 \cdot x^8y^4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x^8} \cdot \sqrt[4]{y^4} = 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot x^2|y|$$

Notemos que el proceso de simplificar se realiza con base en la aplicación de las propiedades de los números reales, las cuales le dan validez a cada paso del proceso. Por ello, para cada expresión implicada en el proceso es necesario preguntarse ¿para qué valores reales de los literales la expresión tiene sentido?, es decir, ¿para qué valores de los literales la expresión representa un número real?

De esta manera, en la primera situación, el proceso de simplificación llevado a cabo en los tres primeros pasos es válido sólo si $x \neq 0$ y $y \neq 0$. En la segunda situación, el literal x no puede ser negativo, ya que no sería valido el primer paso de la simplificación por no estar definidos los radicales iniciales, en los reales negativos.

Es preciso advertir que los procesos de simplificación se pueden convertir en rutinarios y hasta mecánicos cuando no se tiene en cuenta que los literales de las expresiones son esencialmente representantes de números reales. Además, es importante hacer notar que el sentido de una expresión es relativo al conjunto que surte la variable (i.e. conjunto de referencia).

El dominio de la variable en el álgebra de las expresiones algebraicas

En este punto es ya claro que en el álgebra de los números reales emerge la necesidad de la determinación, en primer lugar, de un conjunto de referencia y, en segundo lugar, del dominio de la variable. Pero solamente, es en el álgebra de las expresiones algebraicas cuando aparece por primera vez, en los textos, una definición de dominio de la variable de una expresión algebraica.

Veamos una muestra de lo afirmado, tomada del texto guía (el resaltado es nuestro):

> Ya hemos encontrado conveniente usar letras tales como x o y para representar números; cada símbolo se llama variable. Una expresión algebraica es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:
>
> $$x - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi \qquad \frac{4xy - x}{x + y} \qquad \sqrt[3]{\frac{7x - 3}{x^5 y^{-2} + z}}$$
>
> A veces una expresión algebraica representa un número real solamente para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables son restringidas **para que la expresión represente un número real.** El conjunto de valores permisibles para la variable se llama el **dominio de la variable**. Así, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $\frac{3}{(x+1)}$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq -1\}$.

Si bien, en el álgebra de las expresiones algebraicas, por una parte se asume como conjunto de referencia explícito al conjunto de los números reales, y por otra, se maneja una definición del dominio de la variable, es preciso hacer algunas consideraciones adicionales:

- En la definición de expresiones algebraicas particularmente de los polinomios, se hace necesario diferenciar los campos de variación de las letras que intervienen en su conformación. Los dominios de variación de los coeficientes a, de las variables x,

y, z y de los exponentes de éstas (representados por n), son diferentes, y todos ellos intervienen en la decisión de cuándo una expresión representa un real.

- En las operaciones con las expresiones algebraicas y/o con los polinomios surgen, a través de las fórmulas de factorización y los productos notables, interrogantes que tienen que ver con el uso de las variables escritas en mayúscula en estas fórmulas. Al respecto, se asumen dichas fórmulas como verdaderos modelos algebraicos, donde las variables, escritas en mayúscula, representan expresiones algebraicas.

El conjunto solución en el álgebra de los números reales

Retomemos ahora las preguntas de los ejemplos 5, 6, 7 y 8. (Ver la tabla siguiente).

Pregunta	**Dominio**	**Solución**
¿Para qué valores de a, $\frac{5}{a}$ es positivo?	$\{a \in R \| a \neq 0\}$	$\{a \in R \| a > 0\}$
¿Para qué valores de x la expresión $\frac{x^2}{x}$, es negativa?	$\{x \in R \| x \neq 0\}$	$\{x \in R \| x < 0\}$
¿Para qué valores de x es verdad que $x \leq \|x\|$?	R	R
¿En que condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, es decir, cuándo es verdad que $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$?	R (a y b reales)	Los a, b tal que a y b tengan el mismo signo algebraico. Es decir, $a > 0$ y $b > 0$ ó $a = 0$ y $b = 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

Tabla Nº 1.

Destacamos que para dar respuesta a cada una de estas preguntas, además de pensar en el conjunto de referencia —el cual asumimos como los números reales— y en el dominio de la variable de cada expresión, hay que determinar un subconjunto del dominio de la variable que permita, respectivamente, que: $\frac{5}{a}$ tome valores reales positivos; $\frac{x^2}{x}$ tome valores reales negativos; x sea menor o igual a $|x|$; y, $|a+b|$ tome los mismos valores de $|a|+|b|$. En otras palabras, hay que *encontrar* un conjunto cuyos elementos satisfagan la relación (de equivalencia o de orden), es decir, el conjunto solución de la relación.

Podría pensarse que para dar respuesta a la pregunta del octavo ejemplo, lo que se ha hecho es encontrar las soluciones de la ecuación $|a+b| = |a|+|b|$, es decir, los elementos a y b de R para los cuales las dos expresiones representan el mismo valor. En forma análoga, podría pensarse que en las preguntas de los ejemplos 5, 6 y 7 se han solucionado respectivamente las inecuaciones $\frac{5}{a}>0$, $\frac{x^2}{x}<0$ y $x \leq |x|$. No obstante, debemos aclarar que estas preguntas aparecen en el contexto del álgebra de los números reales, y no en el álgebra de las expresiones algebraicas —que habitualmente aparece con posterioridad como objeto de estudio—; lo anterior nos permite afirmar que desde el álgebra de los números reales se están considerando implícitamente tanto los conceptos de conjunto de referencia y dominio de la variable, como el concepto de conjunto solución.

Queremos enfatizar que, en el álgebra escolar, la aparición explícita del concepto conjunto solución, sólo se hace cuando se aborda el estudio de las ecuaciones, es decir cuando se define una relación de equivalencia entre dos expresiones algebraicas particulares. Los primeros párrafos de la sección 2.1 *Ecuaciones, identidades y ecuaciones lineales* ejemplifican la anterior afirmación:

> Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones son iguales, mientras que una inecuación plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación, o como inecuación. Comenzamos esta sección con cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.
>
> Cuando dos expresiones se igualan, se obtiene una **ecuación**. Por ejemplo,
>
> $$\sqrt{x+1} = 2\,,\ x^2-1 = (x+1)(x-1)\,,\ y\ |x+1| = 5$$
>
> son ecuaciones con la variable x.
>
> **Una solución**, o **raíz**, de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número *satisface la ecuación* si es una solución de la ecuación. *Resolver una ecuación* significa encontrar sus soluciones.
>
> Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay por lo menos un número en el dominio de la

> variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una **ecuación condicional**.[3]

El dominio de la variable en la solución de ecuaciones

Ahora bien, al estudiar la anterior introducción de las ecuaciones lineales, y prosiguiendo con nuestras indagaciones en torno al dominio de la variable, aparecen nuevos interrogantes:

- En la perspectiva de diferenciar una ecuación condicional de una identidad, nos preguntamos ¿cuál es el dominio de la variable de una ecuación?
- Con relación al proceso de búsqueda de las soluciones, donde se transforma una ecuación dada en una que tiene el mismo conjunto solución de la inicial, emergen preguntas como ¿cuál es la relación entre dominio de la variable y la solución de una ecuación? ¿cómo interviene el dominio de la variable en el proceso de solución de una ecuación? o, ¿cuándo dos ecuaciones son equivalentes?
- Y en la solución de problemas, llamados de aplicación, en los cuales se requiere expresar las relaciones involucradas en el problema en términos algebraicos, aparece la pregunta ¿cuál es la diferencia entre el dominio de la variable de una ecuación y el dominio de la variable de esa ecuación como modelo para solucionar problemas físicos, financieros, geométricos, etc.?

Estos cuestionamientos regularmente no encuentran respuesta directa en los textos escolares, no obstante, el análisis de asuntos implícitos de ese discurso matemático nos permite plantear algunas respuestas. Para ello, trataremos situaciones particulares extraídas del texto guía.

3. También hay que mencionar que en la cita anterior, se insinúa la presencia de una concepción implícita con relación al concepto de ecuación: la incógnita es también variable de la ecuación, en el sentido de que se mueve sobre un conjunto o toma valores sobre este. Nótese que luego de presentar los ejemplos de las tres ecuaciones dice: “son ecuaciones con la variable x”. Esta concepción ya ha sido objeto de discusión por varios autores (ver por ejemplo, Freudenthal (1983), Küchemann (1981), Usiskin (1988) y Socas et al (1989)). El hecho de que en este artículo se hable mas adelante de dominio de la variable en una ecuación pone de manifiesto la necesidad de señalar esta distinción conceptual, además de su relevancia, como tema, a nivel didáctico.

a. El dominio de la variable de una ecuación

Consideremos la siguiente ecuación de variable real $x - 5 = \sqrt{x+7}$ y a través de ésta transitemos hacia la respuesta a la pregunta general ¿cuál es el dominio de la variable en una ecuación?

Inicialmente, optemos por aplicar la definición de dominio de la variable de una expresión algebraica al caso de una ecuación; esto es, el dominio de la variable de una ecuación es el conjunto de valores permisibles para que la ecuación tenga sentido.

Recordemos que una expresión algebraica tiene sentido si representa un elemento del conjunto de referencia, pero en la ecuación tenemos dos expresiones. Encontremos el dominio de la variable de cada una de ellas. Los valores permisibles para que $x - 5$ represente un número real conforman el conjunto R, mientras que los reales mayores o iguales que -7 configuran el dominio de la variable de $\sqrt{x+7}$. Nos preguntamos entonces ¿cuál es el dominio de la variable en la ecuación?, ¿$\{x \in R\}$ ó $\{x \in R | x \geq -7\}$? Para tomar tal decisión es menester tener en cuenta que las expresiones de la ecuación intervienen a la par, por lo tanto, el dominio de la variable de la ecuación son los valores permisibles para que cada una de las expresiones comparadas mediante la relación de equivalencia representen simultáneamente elementos del conjunto de referencia R. Tenemos entonces: $\{x \in R\} \cap \{x \in R | x \geq -7\} = \{x \in R | x \geq -7\}$ como dominio de la variable de la ecuación en mención y entonces 2 es un elemento del dominio de la variable de la ecuación.

Concluimos de esta indagación que el dominio de la variable de una ecuación es el conjunto intersección de los dominios de las dos expresiones que intervienen en la comparación.

Ahora supongamos que 2 es un elemento del dominio de la variable de la ecuación $x - 5 = \sqrt{x+7}$; así al evaluar las expresiones implicadas obtenemos: $2 - 5 = \sqrt{2+7}$, luego $-3 = \sqrt{9}$, y así $-3 = 3$. ¿Indica este absurdo que cuando $x = 2$, la ecuación no tiene sentido y que por tanto, 2 no pertenece al dominio de la variable de la ecuación? En el siguiente apartado consideramos esta cuestión.

b. El papel del dominio de la variable en el proceso de solución de una ecuación

Abordemos ahora la pregunta ¿es la ecuación $x - 5 = \sqrt{x+7}$ una identidad o una ecuación condicional? Para responderla aparece la necesidad de encontrar el conjunto solución (S) de la ecuación y *compararlo* con el dominio de la variable (D_x), ya que, la ecuación es identidad si todos los números del dominio de la variable la satisfacen $(S = D_x)$, pero si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, es una ecuación condicional ($S \neq D_x$).

Veamos que este último caso es el de nuestro ejemplo. Para ello, solucionemos la ecuación $x - 5 = \sqrt{x + 7}$ (donde $x \geq -7$). Elevando al cuadrado ambas expresiones tenemos $x^2 - 10x + 25 = x + 7$ (donde $x \in R$), de donde $x^2 - 11x + 18 = 0$. Factorizando se sigue que $(x - 9)(x - 2) = 0$ (donde $x \in R$). Se concluye así que 9 y 2 son soluciones de la última ecuación. Si sustituimos x por 9 en la ecuación original encontramos $9 - 5 = \sqrt{9 + 7}$, entonces, 9 es una solución de dicha ecuación. Pero si sustituimos x por 2 en la ecuación original encontramos $2 - 5 \neq \sqrt{2 + 7}$, luego 2 no es solución de $x - 5 = \sqrt{x + 7}$.

La primera observación, que salta a la vista, es que el conjunto solución y el dominio de la variable de la ecuación no coinciden, son conjuntos diferentes $\{x \in R | x = 9\} \subset \{x \in R | x \geq -7\}$, y en consecuencia $x - 5 = \sqrt{x + 7}$ es una ecuación condicional. Sin embargo, el conjunto solución de la ecuación es subconjunto del dominio de la variable de la ecuación. En nuestro caso $\{x \in R | x = 9\} \neq \{x \in R | x \geq -7\}$.

Una segunda observación es que en el proceso de solución emergen ecuaciones que no tienen el mismo dominio que el de la ecuación original. Esto se da porque los dos lados de la ecuación se han multiplicado por una expresión que contiene una variable, y en consecuencia, la ecuación resultante puede no tener las mismas soluciones de la ecuación original. Esta aserción se encuentra ejemplificada en la solución de la ecuación que nos ocupa y en el hecho que 2 y 9 son elementos del dominio de la variable de la ecuación original, pero 2 no es solución de la misma. Se afirma entonces que 2 es una *solución externa* de la ecuación original, ya que, se ha ganado en el proceso de transformación de ésta.

Al respecto de las soluciones externas, es necesario señalar que, aunque también emergen en el proceso de transformación al multiplicar por una expresión que contiene una variable, algunas no siempre pertenecen al dominio de la variable de la ecuación original. Por ejemplo, si consideramos la ecuación $2 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$, (donde $x \neq -1$) y su proceso de solución[4], observamos que la solución externa -1 ni es solución de la ecuación original, ni tampoco pertenece al dominio de ésta.

4. Multiplicando los dos lados de la ecuación $2 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$, (donde $x \neq -1$), por $x + 1$ se produce una ecuación lineal $2x + 2 - 1 = x$, y a partir de ésta se obtiene la ecuación $x = -1$, cuya solución evidentemente es el real –1.

Una tercera y última observación, que depende de la segunda, es que las ecuaciones $x - 5 = \sqrt{x + 7}$ y $x^2 - 11x + 18 = 0$ no son equivalentes, pues, tienen diferentes dominios y distintas soluciones.

c. El dominio de la variable en los "problemas de aplicación"

Finalmente, abordemos el estudio de la inquietud manifiesta arriba en torno al dominio de la variable en los problemas de aplicación. Para ello, consideremos la siguiente situación problema y una solución de la misma:

> María tiene un pedazo de cartulina con el largo igual al doble de su ancho. Si recorta un cuadrado de 2 pulgadas de cada esquina y dobla los lados hacia arriba para formar una caja sin tapa, tendrá una caja con un volumen de 140 pulgadas cúbicas. Halle las dimensiones del pedazo de cartulina.
>
> Solución: Sea x la longitud en pulgadas del ancho de la cartulina. Entonces:
> $2x$ representa la longitud en pulgadas del largo de la cartulina
> $x - 4$ representa la longitud en pulgadas del ancho de la caja
> $2x - 4$ representa la longitud en pulgadas del largo de la caja
> 2 es la longitud en pulgadas de la altura de la caja.
>
> De esta manera, la ecuación $(x - 4) \cdot (2x - 4) \cdot 2 = 140$ representa la pregunta y las relaciones implicadas en el problema. Desarrollando los productos de la primera expresión, y restando 140 a ambas expresiones se obtiene la ecuación equivalente $4x^2 - 24x - 108 = 0$; factorizando el polinomio se obtiene la ecuación $4 \cdot (x - 9) \cdot (x + 3) = 0$ cuyo conjunto solución es $\{-3, 9\}$. Debido a las *condiciones del problema*, se deduce que la cartulina mide 18 pulgadas de largo y 9 pulgadas de ancho.

Ya que en el contexto del problema x representa la medida de una longitud, podríamos pensar que el *dominio de la variable del problema* son los números reales positivos, sin embargo, éste es tan sólo el *conjunto de referencia del problema*. El dominio de la variable del problema está definido por el conjunto de números reales positivos para los cuales las expresiones $x - 4$ y $2x - 4$ representan un real positivo; esto es, el conjunto $\{x \in R^+ | x > 4\} \cap \{x \in R^+ | x > -2\}$. Por esto, consideramos $a - 3$ como una solución externa y por tanto no satisface las condiciones del problema.

De otra parte, es innegable que el dominio de la variable de la ecuación $(x - 4) \cdot (2x - 4) \cdot 2 = 140$ es el conjunto R y que por tanto $\{3, -9\}$ es su conjunto solución, pero queremos resaltar que esta consideración desatiende el contexto del problema y conduce frecuentemente a respuestas inexactas del mismo.

De esta manera hemos mostrado que es pertinente tener en cuenta que el dominio de la variable de la ecuación que modela la situación particular, no necesariamente es el mismo dominio de esa ecuación contextualizada.

Una reflexión didáctica desde nuestra experiencia

Cuando en la actividad docente dejamos de considerarnos como meros técnicos que aplican unos determinados métodos asimilados en su periodo de formación o durante su práctica docente, surge una concepción del profesional de la enseñanza como un sujeto reflexivo y racional, que toma decisiones en un entorno complejo e incierto y que va elaborando —como consecuencia de su quehacer— un cuerpo de conocimientos que se construye a partir de su propia experiencia, de la reflexión y análisis de su realidad, así como de la observación del entorno en el que desarrolla su actividad profesional.

Es desde esta concepción de docente, que en el área de matemáticas del PNU hemos convertido en objeto de estudio los elementos implicados en nuestra práctica cotidiana, identificando elementos descriptivos y metodológicos que facilitan la comprensión del contexto docente y, consecuentemente, ayudan a visualizar problemáticas puntuales en torno al aprendizaje de las matemáticas en niveles específicos de escolaridad.

Así, reconocemos *en el discurso matemático de los textos* una fuente importante de indagación pedagógica, ya que su análisis permite identificar —como pretendemos mostrar en este documento— conceptos implícitos que juegan papeles protagónicos en el aprendizaje significativo de las matemáticas escolares. El papel protagónico de estos conceptos implícitos, que no sólo residen en y a través de los textos, permite considerarlos como verdaderas *variables didácticas* (Brousseau, 1986, citado en Artigue, 1995) que tensionan no sólo las relaciones entre conceptos y/o procedimientos, sino que también definen maneras propias de la actividad docente y discente en torno al aprendizaje de las matemáticas.

Particularmente, a través del análisis didáctico del discurso matemático de un texto de álgebra escolar, hemos identificado el dominio de la variable, como una variable didáctica a considerar en un curso de álgebra. Las tensiones que este concepto genera en el aprendizaje del álgebra han sido experimentadas —por estudiantes y maestros— en los cursos *Aritmética y funciones* y se han convertido en objeto de reflexión en los seminarios de Educación Matemática que se desarrollan al interior del área de matemáticas del PNU.

Inquietudes y comentarios

En el proceso de análisis del discurso matemático, que ha evidenciado al dominio de la variable como variable didáctica, hemos podido identificar aspectos que también son objeto de reflexión ya que muestran rasgos que los revelan como potenciales variables didácticas. Estos son:

- En el álgebra de los números reales se usan indiscriminadamente las primeras o últimas letras del alfabeto en las expresiones que generalizan operaciones, relaciones o propiedades de éstos; como aquéllas representan específicamente números reales, no es necesario establecer distinción alguna. Sin embargo, en el álgebra de las expresiones algebraicas y de las funciones, se hace necesario establecer esta diferencia explícitamente; allí, las primeras letras del alfabeto representan parámetros y constantes, y las últimas, variables. El no advertir la aparición de estos cambios semánticos, se perfila como una posible causa del manejo y comprensión del lenguaje algebraico en su aspecto eminentemente sintáctico.
- Los símbolos algebraicos son un recurso que permite, entre otras cosas, denotar y manipular abstracciones; el reconocimiento de su naturaleza y su significado en el contexto de la matemática escolar se hace necesario para comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados.
- En el álgebra de las funciones, donde es ineludible el concepto de dominio de la función, se manifiestan algunos interrogantes importantes ligados al concepto de dominio de la variable; por ejemplo, ¿cuál es la relación entre dominio de la variable y dominio de la función?, ¿qué papel juega el dominio de cada función en la determinación del resultado de operar funciones?, ¿cuál es la relación entre dominio de una función y el rango de su respectiva función inversa?

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá: una empresa docente.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children´s Understanding of Mathematics* (pp. 11-16). Londres: John Murray.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford y A. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston: NCTM.

Zill, D. y Dewar J. (1992). *Algebra y trigonometría*. New York: McGraw-Hill.

Ligia Torres
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia.
Valencia, España
E-mail:litoren@alumni.uv.es

Luis Calderón
Colegio Fe y Alegría Madre Alberta
Santiago de Cali, Colombia
E-mail: lucalde@latinmail.com