

LOS ALUMNOS REDACTAN PROBLEMAS ADITIVOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

En este artículo se presenta una investigación¹, realizada con alumnos de 13-14 años, sobre problemas aditivos de enunciado verbal que involucran números negativos, en la que se siguió una metodología de enseñanza basada en que los alumnos redactaran, clasificaran y resolvieran problemas. La metodología utilizada ha permitido que se manifestaran con claridad ciertas formas que los alumnos tienen de entender estos problemas. Se ha observado el importante papel que juegan los aspectos lingüísticos, especialmente en la clasificación de los problemas, aunque resulta que la comprensión del enunciado del problema no implica una correcta resolución del mismo. Al final del artículo se comenta el ambiente que se crea en el aula cuando se sigue esta metodología de enseñanza.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se refiere a problemas aditivos simples de enunciado verbal que pueden resolverse con números negativos (es decir, problemas de suma o resta de dos números). En general, la resolución de problemas de enunciado verbal constituye parte principal de la enseñanza de la aritmética y su aprendizaje resulta más difícil para los alumnos que el cálculo algorítmico. Hemos de tener en cuenta que la resolución de un problema de ese tipo supone un proceso complejo: pasar de la dimensión contextual, en la que se presenta el problema, a la dimensión abstracta o puramente matemática, a la que se traduce el enunciado y en la que se resuelve mediante el uso de un algoritmo, debiendo trasladar e interpretar ahora la solución en la dimensión contextual.

El conocimiento de las dificultades que la resolución de problemas presenta a los alumnos es fundamental para poder superarlas y diseñar métodos de enseñanza más apropiados. Las investigaciones realizadas sobre problemas aditivos simples de enunciado verbal de números negativos han señalado que esas dificultades están asociadas a variables tales como la estructura, el tipo de números, el contexto y la posición de la incógnita (Vergnaud y Du-

1. Investigación subvencionada por la Universidad de La Laguna (España). Proyecto Pre-competitivo 145/99.

rand, 1976, 1982; Bell, 1986; Marthe, 1979; Bruno y Martínón, 1997b). Introducimos ahora la terminología y la notación que en relación con estos problemas usaremos y que se toma de Bruno y Martínón (1997a).

Diferenciamos entre historias (o situaciones) aditivas simples y problemas aditivos simples, como lo hacen también Rudnitsky et al. (1995). Una historia de este tipo es una situación numérica que se describe con una adición $x + y = z$. Por ejemplo, “Un submarinista estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y a continuación bajó 10 metros. La posición del submarinista después de este movimiento es 15 metros bajo el nivel del mar”. Claramente, de cada historia de este tipo se obtienen tres problemas, según qué dato se convierta en una incógnita.

Distinguimos entre diversos usos de los números: estados (e), que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante (e.g., “debo 2”); variaciones (v), que expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo (e.g., “perdí 2”); y comparaciones (c), que expresan la diferencia entre dos estados (e.g., “tengo 2 más que tú”). La consideración de esos tres usos de los números da lugar a diferentes estructuras de historias y de problemas. A cada una de estas estructuras le asociamos un esquema estructural del tipo $x + y = z$. Consideraremos las siguientes cuatro estructuras, señalando en cada caso, el nombre que se le ha dado en la investigación con los alumnos y entre paréntesis el nombre que se usa en Bruno y Martínón (1997a):

- Todo junto (combinación de estados): $e_1 + e_2 = e_t$ (estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total). “Pedro tiene 8 pesetas y debe 15 pesetas. ¿Cuál es su situación económica total?”
- Algo ocurre (variación de un estado): $e_i + v = e_f$ (estado inicial + variación = estado final). “Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál es la posición del delfín, con respecto al nivel del mar, después de este movimiento?”
- Compara (comparación de estados): $e + c = f$ (estado menor + comparación = estado mayor). “Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto con respecto al cero?”
- Dos cambios (combinación de variaciones sucesivas): $v_1 + v_2 = v_t$ (variación primera + variación segunda = variación total). “La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?”

Cada historia aditiva cuyo esquema estructural es $x + y = z$ da lugar a tres problemas aditivos simples, según cuáles de las tres cantidades anteriores se conviertan en datos y, por tanto, cuál sea la incógnita. Los problemas son de incógnita 1, 2 ó 3 según que la incógnita sea x , y ó z , respectivamente. Los cuatro ejemplos anteriores son de incógnita 3.

Las investigaciones han señalado que tanto la estructura como la posición de la incógnita se muestran especialmente determinantes en la dificultad que los problemas presentan a los alumnos. Una conclusión importante a la que llegó Bell (1986) es que resulta necesario que los alumnos comprendan las diferencias entre las diversas estructuras para que mejoren en la resolución de los problemas. En Bruno y Martínón (1997b) se destaca la posición de la incógnita como el factor que causa mayores dificultades.

Rudnitsky y otros investigadores también manifiestan la importancia de que los alumnos distingan las estructuras de los problemas con el objeto de mejorar la correcta resolución de los mismos (Rudnitsky et al., 1995). En tal artículo, los autores presentan una investigación sobre problemas aditivos simples de números positivos (con las estructuras “Todo junto”, “Algo ocurre” y “Compara”), en la que se siguió una metodología de enseñanza consistente en que los alumnos redactaran los enunciados de las historias y los problemas, los clasificaran según las estructuras y, por último, los resolvieran. La citada metodología produjo mejoras en la resolución de los problemas aditivos de números positivos por parte de los alumnos.

Teniendo presente los resultados de estas investigaciones, nuestro interés se centró en analizar una metodología de enseñanza que pone énfasis en que los alumnos distingan las estructuras y reflexionen sobre el papel que juega la incógnita, con respecto a las operaciones que resuelven los problemas. El objetivo último del trabajo sobre estos dos aspectos era mejorar el éxito en la resolución del tipo de problemas en cuestión.

Diseñamos una investigación similar a la descrita en Rudnitsky et al. (1995), pero en nuestro caso, sobre problemas aditivos de números negativos. Es decir, realizamos una experiencia en el aula en la que se siguió una metodología de enseñanza, que a partir de ahora denominaremos *metodología redactar*, consistente en que los alumnos redactaron historias y problemas con números negativos, los clasificaron, y los resolvieron posteriormente. Las intenciones didácticas de pedir a los alumnos que escribieran historias y sus correspondientes problemas fueron dobles: facilitar la identificación de las estructuras y resaltar cómo cambian los problemas según la incógnita.

Al escribir historias y sus correspondientes problemas los alumnos tienen la oportunidad de percibir los diferentes cálculos que es preciso formular, según la posición de la incógnita. En este artículo, se analizan algunas

cuestiones que surgieron al seguir la metodología redactar, lo mismo que las dificultades de algunos alumnos para clasificar, redactar y transformar las historias en problemas. También se estudia la resolución de problemas y observamos cómo no siempre el entender y clasificar el problema implica una correcta resolución del mismo.

A partir de las redacciones de los alumnos y de sus formas de expresarse descubrimos cómo entienden los problemas y cómo imaginan determinadas estructuras. En la última sección de este artículo se comenta el ambiente en las aulas y algunas dificultades que surgieron en las clases donde se siguió la metodología redactar, según la opinión de los profesores participantes en la experiencia.

LA INVESTIGACIÓN

La metodología redactar se llevó al aula con alumnos de 13-14 años, que ya conocían, por el curso anterior, los números negativos y que habían resuelto algunos problemas aditivos.

Cabe indicar dos diferencias con relación a la experiencia de Rudnitsky et al. En primer lugar, los problemas que se estudian son de números negativos; en segundo lugar, introducimos el estudio de los problemas de “Dos cambios”.

Participaron tres grupos de alumnos de un mismo colegio. Dos de esos grupos fueron dirigidos por su profesora habitual y el tercero lo llevó la autora de este artículo, siguiendo ambas profesoras el siguiente esquema de trabajo durante las diez horas de clase que duró la experiencia:

- 1) Presentar historias de números positivos (primer día). La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números positivos y se debate su clasificación. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten si las clasificaciones son correctas.
- 2) Presentar historias de números negativos (segundo día). La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números negativos y se debate su clasificación. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten si las clasificaciones son correctas.
- 3) Escribir historias (tercer día). Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten si las clasificaciones son correctas.

- 4) Escribir historias y sus problemas (cuarto y quinto día). La profesora presenta una historia y sus correspondientes problemas. Los alumnos escriben los problemas que surgen a partir de una historia creada por ellos, los clasifican, los resuelven y los intercambian con los compañeros. Algunos de los problemas se escogen para ser discutidos con toda la clase.
- 5) Escribir historias y sus problemas según una estructura (sexto a décimo día). Los alumnos escriben y resuelven problemas correspondientes a una historia de una estructura concreta indicada por la profesora, intercambiándolos con los compañeros.

Los alumnos trabajaron por parejas estables, en lo que fue posible. En las sesiones de clase, las profesoras escogían historias o problemas adecuados para discutir con todo el grupo, acerca de cuestiones relativas a la clasificación o a la resolución de los mismos.

Los datos que se analizan en este trabajo son los textos de las historias y los problemas escritos por los alumnos, recogidos al finalizar las sesiones de clase. En el estudio de estos escritos se ha tenido en cuenta, principalmente, cómo han clasificado las historias o los problemas, la resolución de los mismos, y aspectos lingüísticos y formas de expresar situaciones que pueden aportar conocimiento sobre la comprensión de las situaciones por parte de los alumnos. También se han utilizado las observaciones cualitativas realizadas y discutidas por las profesoras que participaron en la experiencia al finalizar las sesiones diarias en sus clases.

Cabe resaltar que por el tipo de análisis realizado, los resultados que se presentan no son generales, deben considerarse como casos particulares que ilustran algunos de los aspectos que hemos considerado relevantes.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS HISTORIAS Y LOS PROBLEMAS

Los ejemplos que se exponen, son historias o problemas escritos por los alumnos. Hemos respetado su redacción, de ahí que, en ocasiones, puedan encontrarse errores gramaticales.

Los problemas que escriben los alumnos

La metodología consistente en que los alumnos redactaran las historias y los problemas resultó ser novedosa para todos los alumnos. Inevitablemente surgieron historias que poco o nada tenían que ver con lo que pretendían inicialmente las profesoras.

Se observó que algunos alumnos empezaban a redactar las historias o los problemas sin saber el final de los mismos y, en ocasiones, escribieron problemas más complicados que los requeridos, e incluso inclasificables. En estos casos no resultó sencillo convencer al alumno de que debía cambiar la redacción del problema para que la estructura fuera la propuesta, especialmente en los casos en los que el enunciado era correcto (ver el ejemplo 1).

Ejemplo 1

Coco y Pepe están pescando con sus barcas. Coco tiene 5 pescados y Pepe 12, más tarde a Pepe se le caen 9 pescados, en total Pepe tiene -2 pescados respecto al otro pescador, en total tiene los dos 7 pescados.

En este ejemplo los alumnos redactan una historia en la que se pueden encontrar tres estructuras de problemas: primero “Algo ocurre”, luego “Compara” y, por último, “Todo junto” (en este caso, el número correcto es 8, y no 7 cómo expresan los alumnos).

Desde luego, todo esto resultó muy interesante para la profesora, porque le condujo a la reflexión sobre las situaciones que interesan a los alumnos y pueden ser usadas para considerar problemas más familiares para ellos. Además, algunas de las cuestiones que surgen en el debate con los alumnos se pueden usar para profundizar en los problemas y sus correspondientes operaciones. Por ejemplo, cuando expresan algún dato de más, o cuando no queda claro lo que se pide.

Orden de los datos

En las historias que escriben los alumnos, normalmente los datos aparecen en cierto orden, según las estructuras:

- Todo junto: $e_1 + e_2 = e_t$. Primero e_1 , en segundo lugar e_2 y por último e_t .
- Algo ocurre: $e_i + v = e_f$. Primero e_i , en segundo lugar v y por último e_f .
- Dos cambios: $v_1 + v_2 = v_t$. Primero v_1 , en segundo lugar v_2 y por último v_t .
- Compara: $e + c = f$. Primero e , en segundo lugar f y por último c .

De trece historias que escribieron los alumnos con la estructura “Compara”, $e + c = f$, once estaban escritas con el orden de los datos mencionado. Este resultado contrasta con el hecho de que en el ejemplo inicial dado por las profesoras y discutido en clase los datos estaban en el orden e , c y f .

Resaltamos este hecho, porque puede ser un indicador de que los alumnos entienden mejor o tienen una imagen más clara de las situaciones de comparación en las que los dos primeros datos son los estados. En cualquier caso, esto no implica que al resolver problemas de esta estructura con incógnita 2 (la comparación c) los resultados sean mejores que los de incógnita 3. Es bien conocido que ante un problema aditivo de números negativos, entender la situación y encontrar la solución no siempre va unido a saber expresar formalmente un cálculo que lo resuelva (Carraher, 1990; Bruno y Martín, 1997b).

Identificación de estructuras

En los textos de los alumnos encontramos que cometen más errores de clasificación en las historias de números negativos que en las de positivos. Por ejemplo, escriben historias de estructura “Algo ocurre”, diciendo que son del tipo “Todo junto” o “Dos cambios”.

A veces se encuentra un problema de lenguaje en la dificultad para clasificar. En concreto, si en el enunciado de la historia o del problema aparece la expresión “En total”, esto lleva a los alumnos a pensar en la estructura “Todo junto”. En el ejemplo 2, los alumnos clasificaron la historia como “Todo junto”, siendo una estructura distinta a las estudiadas aquí, ya que escribieron la suma de dos variaciones, pero no de dos variaciones sucesivas en el tiempo, como son las situaciones que se proponen en este trabajo.

Ejemplo 2

Seedorf y Kluivert estaban jugando a los boliches. Seedorf perdió -20 boliches y Kluivert -19. Cuando acabaron la partida vieron que habían perdido en total -39 boliches.

Pasar de las historias a los problemas

Se exponen ahora algunos ejemplos de las dificultades y errores que encontramos en el paso de las historias a los problemas. Un error cometido fue olvidarse de algún dato importante; por ejemplo, olvidarse de decir si los movimientos son hacia la derecha o hacia la izquierda. Otro error fue pedir alguno de los datos ya dados en el enunciado, como se ve en el ejemplo 3.

Ejemplo 3

Juan le debe 50 yogures a David contando los que le dio a Richard, 7. En total ¿cuántos yogures tiene Richard?

También se ha detectado que a veces, al redactar dos problemas que surgen de la misma historia, uno es correcto y el otro incorrecto, o se escriben con estructuras diferentes, o bien se escriben dos problemas de la misma incógnita con enunciados ligeramente diferentes. Esto último lo encontramos en los ejemplos 4 y 5, correspondientes a una misma historia. El ejemplo 4 corresponde a la estructura “Dos cambios” (aunque no redactaron la variación total de forma correcta), mientras que el ejemplo 5 tiene la estructura “Algo ocurre” con incógnita 3.

Ejemplo 4

En una guagua suben 10 personas en la primera parada, y en la segunda parada bajan 13 personas. ¿Cuántas personas quedan en la guagua?

Respuesta del alumno:

Personas suben - personas bajan = solución total;
 $10 - 13 = -3$ personas.

Ejemplo 5

En la primera parada de una guagua hay 13 personas, y al llegar al final del trayecto se han bajado 3 personas. ¿Cuántas personas quedan en la guagua?

Respuesta del alumno:

Personas hay - Personas bajan = Solución total;
 $13 - 3 = 10$ personas.

La estructura “Dos cambios”

Los problemas de la estructura “Dos cambios” ($v_1 + v_2 = v_t$) poseen una dificultad bien descrita en la literatura (Bruno y Martínón, 1997b), que en nuestra experiencia hemos confirmado: hay alumnos que necesitan tener el soporte de un estado inicial y otro final, de modo que en realidad escriben historias con estructura $e_i + v_1 + v_2 = e_f$, normalmente diciendo que el estado inicial es 0 (ejemplo 6), o bien suponiéndolo implícitamente (ejemplo 7).

Ejemplo 6

Un ascensor está en el piso 0. La gente que está en los pisos de arriba tocan para que suba el ascensor. El ascensor sube y está en el piso +5, la gente vuelve a tocar pero ahora en los pisos del sótano. El ascensor baja 13 pisos. ¿En qué piso se encuentra ahora el ascensor?

Ejemplo 7

Paula está en la puerta del instituto camina hacia la derecha 10 metros y después 13 metros hacia la izquierda ¿en qué posición está?

En nuestra experiencia se puso de manifiesto que las situaciones con estructura “Dos cambios” son, en cierta forma, irreales para muchos alumnos. Para ellos lo lógico es dar la posición inicial, los dos cambios y la posición final. Se observó que pueden entender la historia, pero cuando se les propone escribir otra historia similar, insisten en expresar la situación final. Es cierto que en su vida cotidiana no son frecuentes los problemas de esta estructura. También en la práctica escolar con números positivos no suelen usarse con insistencia, lo cual puede remediarse, porque son problemas que evidentemente tienen sentido tanto con números positivos como con negativos, y su uso con los positivos mejoraría el trabajo con los negativos, que es donde usualmente aparecen.

En el ejemplo 4 esta interpretación llevó a los alumnos a una solución absurda (“quedan -3 personas en la guagua”), porque no interpretan el resultado final como una variación, sino como un estado.

Otra forma de razonar y redactar los problemas del tipo $v_1 + v_2 = v_t$ es entender la variación total como la suma de las dos variaciones parciales, v_1 y v_2 , en “valor absoluto”. Veamos esto en los ejemplos 8 y 9.

Ejemplo 8

En un pequeño pueblo, entraron y salieron en todo el día, 23 coches. Si al acabar el día habían salido 12 coches, ¿cuántos coches entraron al pueblo?

Respuesta del alumno:

Entraron 11 coches.

Ejemplo 9

Jorge fue a la montaña a caminar, al par de horas vio una muralla de +30 metros, Jorge pensó en escalarla, y lo consiguió. Durante todo el día estuvo caminando en toda la montaña, cuando se iba vio un barranco de -25 metros y lo consiguió. Jorge en total escala +55 metros de altura.

Obsérvese en este último ejemplo, cómo las variaciones están “implícitas”; al expresar “lo consiguió” está diciendo “lo escaló”. En otras redacciones de los alumnos también encontramos expresiones que esconden o presuponen una acción o una comparación aunque no están explícitas en el texto.

Variaciones y comparaciones

En Bruno y Martínón (1997a) se ha señalado que las variaciones y las comparaciones pueden expresarse básicamente de dos formas distintas:

- Variación-cambio: “Perdí dos pesetas a lo largo del día”.
- Variación-diferencia: “Por la noche tenía dos pesetas menos que por la mañana”.
- Comparación-cambio: “Tengo que perder dos pesetas para tener lo mismo que tú”.
- Comparación-diferencia: “Tengo dos pesetas menos que tú”.

Las historias iniciales propuestas por las profesoras a los alumnos eran de variación-cambio y comparación-diferencia; sin embargo, en los problemas que ellos redactaron encontramos situaciones de variación-diferencia, sin haber sido instruidos en ello; esto se evidencia en el ejemplo 10.

Ejemplo 10

Juan está jugando a los boliches ha llevado 22 boliches, cuando acaba de jugar tiene 18 boliches menos ¿Cuántos boliches tiene ahora?

Por otro lado, en los problemas de comparación aparece con frecuencia la expresión “¿cuál es la diferencia...”. Por ejemplo, “¿cuál es la diferencia de temperaturas entre las dos ciudades?”. Tal expresión lleva a dar un resultado positivo y requirió, en algunas ocasiones, debatirlo con toda la clase. Incluso

se usó esta expresión de forma más compleja: “En Madrid hay una diferencia de 14° más que en Moscú”.

En el ejemplo 11 podemos ver otra situación que en su base pertenece a la estructura “Algo ocurre”.

Ejemplo 11

Débora se monta en un ascensor en el piso -1 y quiere llegar al piso +2 ¿Cuántos pisos hay entre medio?

Todos estos datos son indicadores de la necesidad de profundizar en estas diferencias semánticas de los problemas, lo que no ha sido tratado en la literatura sobre el tema. Hay cuestiones interesantes en la forma de expresar las variaciones y comparaciones que merecen un estudio especial.

La resolución de los problemas

La metodología utilizada mostró que las mayores dificultades no se encuentran en la redacción de las historias y los problemas, sino en la resolución de los mismos: fue esta la mayor fuente de errores.

Una ventaja que tiene el método redactar, que puede convertirse en desventaja si no se toma el cuidado oportuno, es que consigue que la mayoría de los alumnos entiendan perfectamente la situación y, por lo tanto, que en problemas con números de pequeño tamaño sepan de antemano el resultado del problema, por lo que muchos minimizan la importancia de escribir la operación, y pueden no razonarla. Así, pueden escribir una operación incorrecta para resolver el problema, y sin embargo, dar el resultado correcto. Este hecho, denominado “falsear el resultado de la operación” (Bruno y Martín, 1997b), puede agudizarse con la metodología redactar.

En el ejemplo 12 se puede ver que a partir de un problema bien redactado se escribe una operación incorrecta y un resultado correcto del problema.

Ejemplo 12

En Canarias hay una temperatura de 20° C y en Madrid 28° C menos ¿Qué temperatura hay en Madrid? Es de -8° C.

Respuesta del alumno:
 $20 - (-28) = -8.$

Obsérvese cómo el alumno escribe el resultado antes que la operación. Podría pensarse que el resultado -8 se da por seguir reglas operatorias incorrectas, aunque no hay que descartar el falsear el resultado como causa del error.

En Bruno y Martínón (1997b) se pueden encontrar otras causas de errores que también encontramos en esta investigación, en concreto “seguir el orden de los datos”, es decir, escribir los números en el orden y los signos que se indican en el enunciado; el ejemplo 13 ilustra esta situación.

Ejemplo 13

Si Cristina ha bajado 50 metros y está a 150 metros bajo el mar ¿En qué posición estaba antes de bajar?

Respuesta del alumno:

$$-150 - 50 = -200.$$

Por último, también se observa en este trabajo, cómo la posición de la incógnita es causa de dificultades. Hay alumnos que resuelven correctamente el problema de incógnita 3, y de forma incorrecta los problemas de las otras incógnitas relativos a la misma historia.

Véanse los ejemplos 14 y 15, con estructura “Algo ocurre”, de incógnitas 1 y 2, respectivamente, en los que los alumnos escriben para la misma situación (“quedaban 8 palomas”) -8 en el de incógnita 2 y +8 en el de incógnita 1.

Ejemplo 14

Omar caminaba por el monte y veía volar a 12 palomas. De repente oyó unos disparos y cuando miró de nuevo al cielo, vio que solo quedaban 8 palomas ¿cuántas palomas mataron?

Respuesta del alumno:

$$(+12) + (-8) = -4.$$

Ejemplo 15

Habían matado 4 palomas y quedaban volando 8 ¿Cuántas palomas había volando al principio?

Respuesta del alumno:

$$(+8) - (-4) = +12 \text{ palomas había volando.}$$

Esto muestra cómo la “obligación” de dar una respuesta lleva a incoherencias, de las que puede ser consciente el propio alumno en el momento de presentarlas.

El lenguaje “negativo”

Comentamos ahora aspectos relacionados de manera más directa con el lenguaje que usan los alumnos o con su forma de expresarse.

A los alumnos se les comentó que estábamos interesados en trabajar problemas de números negativos, por eso encontramos en sus redacciones el uso de contextos usuales de los negativos, pero también otros contextos o expresiones que denotan negatividad (morir, quemar, faltar, tirar piedras, vender).

Encontramos también el uso de expresiones “redundantes”, como por ejemplo:

- “Fallecieron -168 personas” para expresar “Fallecieron 168 personas”.
- “Se quemaron -125 hectáreas” para expresar “Se quemaron 125 hectáreas”.
- “Le faltan -2000 pesetas” para expresar “Le faltan 2000 pesetas”.
- “-24 pisos más abajo” para expresar “24 pisos más abajo”.

Este tipo de expresiones pudo llevar a algunos alumnos a resolver de forma incorrecta determinados problemas. Así en el ejemplo 16, podría atribuirse el error al uso de una expresión redundante y a “seguir el orden de los datos” (error explicado en el apartado anterior).

Ejemplo 16

Un minero está a -50 metros bajo tierra. El minero desciende -30 metros más. ¿A cuántos metros bajo tierra se encuentra el minero?

Respuesta del alumno:

$$(-50) - (-30) = -80.$$

LA CLASE SIGUIENDO LA METODOLOGÍA REDACTAR

En este apartado exponemos algunas opiniones de los profesores participantes en la investigación respecto al ambiente del aula en la metodología redactar.

En primer lugar, el ambiente en una clase que sigue la metodología redactar es bien diferente al que existe cuando se utilizan otros métodos más tradicionales, en las que el profesor explica y los alumnos practican a continuación. Aquí los alumnos trabajan por parejas, redactan problemas, los intercambian y alguno de éstos se elige para ser discutido con toda la clase, momento que el profesor utiliza para referirse a las ideas que considera necesarias. Una metodología así implica que en la clase haya “más ruido”. Esto puede provocar dificultades con alumnos que tienden a perder la concentración con facilidad. En uno de los grupos que participaron en la investigación, la profesora manifestó haber tenido dificultades para controlar la clase en algún momento.

Otros aspectos que destacaron los profesores fueron los siguientes: se progresa más lentamente que de la manera habitual, porque además de resolver problemas hay que escribirlos y discutir las estructuras; será útil si finalmente es un tiempo ganado en comprensión. Los alumnos tienen diferentes ritmos cuando redactan los problemas, por lo que el profesor debe tener preparadas algunas tareas para los alumnos que terminan pronto. Los alumnos pueden manifestar cansancio al escribir las historias y los problemas (esto ya fue observado por Rudnitsky et al., 1995); de hecho, en ocasiones, escribieron directamente los problemas sin redactar la historia inicial, o sólo escribieron dos de los tres problemas que surgen de una historia. A los alumnos a los que les gusta sentirse protagonistas les anima que los problemas creados por ellos sean el centro de las discusiones de toda la clase. La evaluación del método es diaria, implica un seguimiento diario por parte del profesor sobre cómo evolucionan los alumnos, no se puede dejar para el final.

CONCLUSIONES

Una de las causas de los errores que cometen los alumnos en la resolución de problemas, que ya ha sido destacada ampliamente en la literatura sobre el tema, es la escasa comprensión del enunciado. A través de esta metodología hemos podido controlar, de alguna manera, parte del nivel de comprensión de los enunciados de los problemas que tienen los estudiantes. Se puede ver que, en los problemas aditivos de números negativos, muchos errores no se producen por ese motivo, ya que hay una redacción correcta en los tres problemas correspondientes a una misma historia y, sin

embargo, fallan al escribir la operación. La principal dificultad estriba en encontrar la suma o la resta adecuada, y en el caso de la resta, el orden de los términos. Es decir, falla la transferencia entre la dimensión contextual y la abstracta, como ya quedó patente con otros métodos de enseñanza en Bruno y Martinón (1996).

La metodología ha sido útil para entender determinadas dificultades de algunos alumnos con estos problemas. La forma de expresarlos nos muestra la idea que tienen de los mismos. Por ejemplo, en los problemas de comparación de estados, o combinación de variaciones sucesivas, la forma en la que escriben nos ha dado pistas de cómo entienden las situaciones. La importancia de los aspectos lingüísticos en la resolución de problemas también se observa cuando el uso de una palabra con connotaciones negativas les lleva, en ocasiones, a escribir una resta.

También han sido provechosas las réplicas de problemas expuestos previamente por las profesoras. El que los adapten “a su manera” es una señal de posibles dificultades de comprensión. Es el caso de cuando en lugar de usar la expresión “¿Cuál es la situación económica total?”, usan la expresión más simple “¿Cuánto debe en total?”, o el caso de expresar las comparaciones como diferencias.

Este trabajo ha servido para comprobar que la clasificación de problemas aditivos en los que se distingue entre los aspectos funcional y semántico, realizada en Bruno y Martinón (1997a), es relevante ya que hemos encontrado problemas de “variación de un estado” (“Algo cambia”) redactados como variación-diferencia, es decir, utilizando las expresiones “menos que” o “más que”. Así, en el ejemplo 10, los alumnos utilizan la expresión “18 boliches menos”, para indicar “perdió 18 boliches”.

Los problemas que escriben los alumnos son una rica fuente de conocimiento sobre su comprensión de los mismos. Los alumnos pueden entender la clasificación de las historias aditivas, aunque hemos visto cómo el lenguaje puede influir en esta clasificación de forma que la entorpezca. En cualquier caso, escribir historias y problemas es más sencillo que resolver estos últimos.

REFERENCIAS

- Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4 (3), 199-208.
- Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Les nombres négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite. *Petit X*, 42, 59-78.

- Bruno, A. y Martínón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.
- Bruno, A. y Martínón, A. (1997b). Procedimientos de resolución de problema aditivos de números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), 249-258.
- Carraher, T.N. (1990). Negative numbers without the minus sign. En G. Booker, P. Cobb y T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the XIV PME*, vol. 3 (pp. 223-229). México.
- Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. En *Proceedings of the III PME* (pp. 153-157). Warwick.
- Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J.M. y Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5), 467-486.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg, (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Alicia Bruno
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
C/Astrofísico Francisco Sánchez, s/n
38271 La Laguna Tenerife
España
E-mail: abruno@ull.es