

Matemáticas Experimentales y Diseño Didáctico: El Caso de los Números Modulares

Ronald Andrés Noreña, roanno@gmail.com
Juan Carlos Vargas, juanca98545@hotmail.com
Denise Zuluaga Duque, denisezuluaga89@yahoo.es
Instituto de Educación y Pedagogía
Universidad del Valle

4. Presentación

La presente comunicación breve tiene como propósito plantear la discusión en torno a la integración en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar, de contenidos temáticos y de procesos; que si bien no hacen parte de las prácticas habituales de los profesores de matemáticas ni figuran regularmente en las propuestas curriculares, podrían ser alternativas viables para superar algunas de las dificultades que los estudiantes presentan comúnmente en la exploración de propiedades de sistemas numéricos y la representación de los mismos.

De manera particular, ofrece ciertos elementos teóricos y metodológicos, desde una perspectiva en didáctica de las matemáticas, del proceso de diseño y puesta en acto de una *secuencia didáctica* relativa a los *números modulares*. La pertinencia de esta tarea radica en que el tratamiento de los *números modulares*, puede conectarse con procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación matemática, particularmente desde una *perspectiva experimental* constituyendo una alternativa innovadora para la formación y el desarrollo del pensamiento matemático.

5. Marco de referencia conceptual

La propuesta se sustenta en tres dimensiones: *Dimensión Matemática*, *Dimensión Didáctica* y *Dimensión Experimental*.

En relación con la *dimensión matemática* es preciso señalar que la aritmética modular, fue estudiada sistemáticamente en primer lugar por Carl Friedrich Gauss y en la actualidad se relaciona con temáticas y procesos matemáticos complejos que van desde la teoría de números, álgebra abstracta, criptografía hasta las artes visuales y musicales.

Se señala que la aritmética modular puede ser construida matemáticamente mediante la *relación de congruencia* entre enteros, que es compatible con las operaciones en el anillo

de enteros: suma, resta, y multiplicación. Para un determinado módulo n , ésta se define de la siguiente manera:

a y b se encuentran en la misma "clase de congruencia" módulo n , si ambos dejan el mismo resto si los dividimos por n , o, equivalentemente, si $a - b$ es un múltiplo de n .

En lo relativo a la *dimensión didáctica*, algunas investigaciones señalan que el estudio de los *números modulares*, podría ser una posibilidad para introducir y trabajar alrededor de la idea de un *sistema matemático* desde los primeros niveles de enseñanza. En esta propuesta entendemos que un *sistema* esta formado por:

- Un conjunto de elementos
- Una o mas operaciones definidas en dichos elementos
- Relaciones para comparar dichos elementos

Así, un sistema matemático se constituye en una gramática formal usada para la modelización de diferentes propósitos, que permite señalar como válida determinadas cadenas, de tal forma que se pueda construir la estructura matemática, este sistema pretende capturar y abstraer la esencia de determinadas características del mundo real, en un modelo conceptual expresado en un determinado lenguaje.

En este orden de ideas, se pueden explorar algunas de las propiedades básicas de los números naturales, a partir del estudio de sistemas numéricos diferentes al de los números naturales. Estos nuevos sistemas numéricos están constituidos por *partes*⁷¹ del conjunto de los números naturales de tal forma que sean finitos.

En consonancia con lo anterior, nos apoyaremos en un proceso de *diseño didáctico*, que en nuestro caso toma como punto de partida el estudio de la naturaleza del saber matemático y la cognición, para la significación de un conocimiento matemático en el ámbito escolar.

Tanto la dimensión matemática como la didáctica hacen posible que el profesor de matemáticas reflexione sobre el quehacer en el aula y sobre los instrumentos a su disposición, para su ejercicio profesional. De esta reflexión surgen nuevos *actos pedagógicos*, que se revelan como piezas claves de un proceso que en la medida en que

⁷¹ La expresión *parte* es entendida como un subconjunto finito extraído de los números naturales.

sean sistematizados y documentados, tendrán un impacto sobre el mismo *diseño curricular*.

Desde la *dimensión experimental*, se puede señalar que lo que está en juego es un tipo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permitan en los estudiantes una participación activa en el desarrollo de formas de pensar que den sentido a su contexto y que estén mediadas por los recursos que tengan a su alcance. A este escenario se le suele denominar *matemáticas experimentales* y se asocia igualmente a la posibilidad de que los estudiantes desarrollen competencias para analizar diversas representaciones, explorar y establecer conjeturas en problemas de distinta naturaleza, y que en general se hagan visibles los procesos de *experimentación, formulación, contrastación y justificación de conjeturas*.

6. Metodología

En la comunicación se plantea una contextualización general, donde se van a destacar los antecedentes e inquietudes que nos han llevado a plantear esta comunicación. Es importante que los asistentes conozcan las preguntas que nos hemos hecho y como se justifica este tipo de propuestas desde la didáctica de las matemáticas. Este es un punto central dado que tal fundamentación apunta básicamente a los criterios didácticos para el diseño de situaciones de aprendizaje relativas a los números modulares. Igualmente se propone la discusión sobre estrategias de sistematización y análisis de las producciones de los estudiantes, a la luz de las investigaciones en didáctica de las matemáticas y un trabajo práctico a los participantes alrededor de un diseño didáctico relativo al diseño y puesta en acto de una *secuencia didáctica* relativa a los *números modulares*. El trabajo se plantea con materiales y recursos manipulativos, en particular con un sistema particular, llamado el *sistema del reloj de 12 horas*. A partir de este sistema definimos operaciones como la suma⁷² y la multiplicación⁷³, (además de la resta); de tal forma que pueda abordarse el proceso de formación en el estudiante de nuevos conceptos relativos a los sistemas numéricos que incluyen entre otros, la congruencia del módulo, criterio de congruencia, sustracción a partir de la adición; y propiedades como la clausurativa, conmutativa, asociativa, elemento identidad y propiedad del inverso.

⁷² Sume desplazando la manecilla de las horas en el sentido de las manecillas del reloj

⁷³ Definida como el proceso de repetición aditiva.

7. Algunos resultados

Esta propuesta ha sido probada en el curso: *resolución de problemas en el contexto de Laboratorio de Matemáticas*, de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle, para animar la discusión sobre las matemáticas recreativas, lúdicas y experimentales. Como resultado de esto se han identificado algunas potencialidades que incluyen entre otras la posibilidad de conectar objetos y dominios matemáticos de naturaleza compleja con estrategias didácticas que hacen posible que tengan sentido a través de sus versiones didácticas, aun en los primeros niveles de escolaridad. En general, es posible señalar que:

1. El desarrollo de la *aritmética modular* constituye es la base para los inicios en la *Teoría elemental de número*, que hoy se trabaja por medio de la matemática discreta debido a que constituye en un potente recurso para ilustrar conceptos y métodos abstractos que son base de generalizaciones en el desarrollo del Álgebra Moderna a través de propuestas de conjeturas.
2. Es posible integrar problemas fáciles de entender que no requieren de un mayor conocimiento previo. De esta manera, en la medida en que se reconozca por los estudiantes su responsabilidad colectiva y se asegure la emergencia de un *conflicto cognitivo* relativo a este aprendizaje, puede configurarse un aprendizaje través de actividades en el aula genuinamente matemáticas.
3. Algunos de los procesos y temáticas involucrados se constituyen en una clara posibilidad para la discusión en torno a la aplicación y utilidad de las matemáticas, pues temáticas como la *aritmética modular* suele asociarse al desarrollo de tecnologías de comunicación, de la criptografía, e incluso el arte y la música.

Bibliografía

- Aguilar, P. (2004, julio). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Oficial del Comité latinoamericano de Matemática Educativa A.C.*, 7, (2), 117-144.
- Canavelli, J.C. (s. f.). Discrete Mathematics and digital technology. Recuperado el día 20 de abril de 2010, del [sitio web de http://www.icme11.org/system/files/DISCRETE%2BMATHEMATICS%2BAND%2BDIGITAL%2BTECHNOLOGY.pdf](http://www.icme11.org/system/files/DISCRETE%2BMATHEMATICS%2BAND%2BDIGITAL%2BTECHNOLOGY.pdf)
- Joshua, S. y Dupin, J. J. (2005). La transposición didáctica (Capt. 4) en *Introducción a la Didáctica de las ciencias y la Matemática*, pp 185-214. Buenos Aires: Colihue.

Vaira, S. (s.f). Matemáticas discretas: Tendencias actuales y aplicaciones. Recuperado el día 20 de abril de 2010, del sitio web de <http://www.unam.edu.ar/2008/educacion/trabajos/Eje%205/491%20-vaira.pdf>
Millar, C., Heeren, V., & Hornsby, J. (1999). Matemática, razonamiento y aplicación. Pearson