REVISTA EMA
1999, VOL. 4, Nº 3, 207-231

IMAGINA QUE ERES...

INDAGACIÓN SOBRE EL USO DE LA LENGUA COMÚN EN

BRUNO D'AMORE Y PATRIZIA SANDRI[2]

Este artículo presenta los resultados de una investigación, realizada en la escuela media, sobre el uso de la lengua natural en contexto matemático, y sobre la producción de modelos externos en torno a las concepciones profundas de algunos conceptos elementales que poseen los alumnos.

Con una técnica que invita a los alumnos a asumir un papel diferente del que usualmente juegan en la clase de matemáticas, se intentaba empujarlos a escribir acerca de asuntos matemáticos elementales en un lenguaje coloquial, sin los aparatos formales que con frecuencia exhiben. No obstante haber acogido bien el juego del cambio de papel que les propusimos y haber respondido a las situaciones problemáticas usando lengua natural, la mayoría de los alumnos presentó la tendencia a completar su respuesta inicial con una respuesta formal, a menudo vacía, que tenía poco que ver con la tarea.

En casos en que los alumnos no usaron aparatos formales para responder se identificaron modelos que resultan interesantes en el plano de verificación de los aprendizajes.

EL PROBLEMA

Desde su entrada en la escuela elemental, al estudiante se le forma de una manera más o menos explícita para que use en las clases de matemáticas un lenguaje que no es el común sino una versión más "técnica" del mismo (Maier, 1989).

El lenguaje matemático impuesto al estudiante es sustancialmente aquel que el profesor desea para él mismo, basado en su propia "imagen de la ma-

1. Traducción realizada por Francisco Vecino, del original "Fa´ finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media". El traductor es profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

2. Los autores agradecen a los profesores Efraim Fischbein y Gèrard Vergnaud por sus sugerencias y observaciones constructivas hechas a la primera versión del artículo. A Giorgio Tomaso Bagni, Laura Giovannoni, Fiorella Giusberti y a los referees anónimos por la lectura crítica y los consejos constructivos. A Patricia Inés Perry, investigadora de "una empresa docente", por la cuidadosa revisión del estilo y de la traducción.

temática", dentro de un sistema lingüístico que tiene como fuentes de inspiración términos como "rigor", "coherencia" y "método". Con frecuencia el enseñante sostiene que sólo el estudiante que es capaz de transferir un significado del lenguaje natural al más pertinente (o quizás, al contrario) ha comprendido el concepto matemático en cuestión. Pero el estudiante, para comprender y acercarse al uso del término técnico, lo reelabora relacionándolo con palabras conocidas o con experiencias y conceptos que posee (por ejemplo, el término "ángulo", usado en la escuela, puede no tener el mismo sentido que el que se le da en un contexto familiar: con frecuencia, en tal caso, "ángulo" se interpreta como "diedro formado por dos paredes consecutivas", u otras cosas).

Con frecuencia, para imitar las palabras del enseñante o de los libros de texto y no por una invitación directa y explícita, el estudiante se adapta no sólo a usar términos pertinentes a la matemática, sino a imitar construcciones semánticas que los enseñantes y los autores consideran más adecuadas que el lenguaje natural para construir el conocimiento matemático. Esto se presenta ya en la escuela elemental (6-11 años), pero es mucho más frecuente en la escuela media (11-14 años) (Laborde, 1982; Laborde, 1995). De ahora en adelante, nos ocuparemos sólo de este último nivel escolar.

El alumno se ve obligado, por una cláusula especial del contrato didáctico[3], a exhibir un aparato formal lo más rico posible en términos matemáticos y operaciones, incluso cuando el problema propuesto no lo exige[4]. Ello conlleva a que la respuesta a una pregunta del enseñante puede indicar poco sobre las competencias *reales* del alumno, dado que éste no sólo debe concebir la respuesta sino que la debe expresar en un lenguaje que no usa espontáneamente en otros contextos (no escolásticos o no relativos a la matemática) (D'Amore, 1995). Se debe añadir además que no está dicho en absoluto que el uso de la terminología técnica sea índice de una comprensión efectiva de los conceptos relacionados con ella.[5]

El enseñante que debe evaluar la respuesta, en ese punto, si es consciente de esta doble dificultad, no sabe si atribuir una incapacidad eventual a la ig-

3. Se trata de la cláusula que hemos llamado e.j.f., *exigencia de justificación formal*, estudiada en (D'Amore y Sandri, 1998). Esencialmente se trata de la difundida exigencia que manifiestan los alumnos, de diversas maneras, de dar en cualquier caso una solución formal (aunque no se pida) o completar una respuesta informal con una formal.
4. Para este punto es útil la lectura de (Boero, 1986) y (Zan, 1992).
5. Valga, como ejemplo para todos, el llamado "protocolo de Belluno", presentado en (D'Amore, 1995). Hace referencia al caso de una alumna de entre 16 y 17 años que encontré en Belluno, pequeña ciudad italiana. Ella tenía que demostrar un teorema muy sencillo y en su protocolo, escrito muy formalmente, cita teoremas, reglas, axiomas, postulados, pero nada de lo que escribe tiene verdadero sentido. A pesar de que utiliza muchos símbolos formales y lo escrito parece una demostración, el texto es vacío de significado.

norancia sobre el objeto matemático en cuestión (por ejemplo, definición, regla, demostración o resolución de un problema) o a una consciencia de lo inadecuado del lenguaje en tal caso: el niño puede incluso "sentir" dentro de sí cuál es la respuesta que le vendría de manera espontánea, pero también ser consciente de que no puede darla en el lenguaje natural y no lograr "traducir" dicha respuesta al tipo de lenguaje que supone espera el enseñante. Debe decirse, naturalmente, que el hecho de "sentir" dentro de sí cuál es la respuesta correcta, intuyéndola, imaginando la situación, no significa en absoluto que se sepa expresar, ni siquiera en lengua natural.

De manera ingenua se podría pensar que un enseñante, consciente de este problema, puede superar el obstáculo simplemente invitando al alumno a expresarse "con sus palabras" (es decir, en la lengua común y, de hecho, a menudo se oye esta invitación explícita por parte del enseñante); pero resulta evidente que, no obstante la invitación, el estudiante piensa que ello no es lícito y considera no pertinente el uso de la lengua natural; por tanto esa invitación no causa efecto positivo alguno. El ambiente escolar, la hora de matemáticas, años de condicionamiento parecen inhibir esa posibilidad.

Se pueden plantear pues las preguntas siguientes:

Pregunta 1. ¿Es posible sortear el obstáculo y lograr que el estudiante no se sienta obligado a usar un lenguaje que él cree obligatorio, si se le empuja a usar la lengua natural? Si ello es posible, ¿de qué forma, si se permanece en el ambiente de la clase?

Pregunta 2. ¿Habrá resistencias, o sea, alumnos que produzcan aparatos formales en cualquier caso, incluso cuando ello no se pida?

Pregunta 3. Si el estudiante acepta el uso de la lengua natural, ¿sobre qué cosa se concentrará su esfuerzo? En cada caso, ¿qué producirá el alumno?

Uno de los objetivos principales de la investigación a la que se refiere este artículo era verificar si, una vez que el estudiante aceptase hablar de asuntos matemáticos en lenguaje natural, este hecho pudiera revelar modelos internos o, para decirlo mejor, proporcionar modelos externos lo más cercanos posible a los modelos internos para algunos argumentos elementales. Se podría parangonar el modelo usualmente propuesto por el enseñante con el *modelo intuitivo* que se crea inconscientemente con respecto a las expectativas de los enseñantes, en el recorrido del nivel escolar (Fischbein, Tirosh y Melamed, 1981; Fischbein, 1985a; Fischbein, 1985b). Es obvio que, ante la explícita exigencia del enseñante, el alumno **no** responde con el modelo intuitivo por alguna de las razones siguientes:

- a veces no se da cuenta explícitamente de la existencia del modelo intuitivo y de la diferencia del mismo con respecto a lo que pide el enseñante,
- piensa que *debe* usar lo que sabe, o supone, que el enseñante espera.

Bien fuera para tratar de responder a las preguntas anteriores o para hacer surgir los modelos externos más cercanos al modelo intuitivo, elaboramos cinco textos de carácter problemático, sin preguntas directas, propicios para que el alumno asumiera una *tarea explicativa* en distintas situaciones, lo más externas posible a la situación de clase canónica, que le invitaran explícitamente a asumir otros papeles en contextos diversos y en épocas diversas. De estos cinco textos, sólo dos se referían a situaciones propiamente escolares en las que, sin embargo, el alumno no actuaba ya como tal, sino como un enseñante que debía explicar dos conceptos elementales: el área de un rectángulo y las alturas de un triángulo (más adelante veremos en detalle los dos textos). El tipo de tarea en que se involucraría a los estudiantes nos llevó a plantear otras dos preguntas:

Pregunta 4. El papel que usualmente desempeña el estudiante supone la necesidad de producir sólo modelos externos esperados. Si se supone un papel distinto para el estudiante, un papel que sugiere no hacer uso del lenguaje escolar sino que empuja a usar la lengua natural, ¿cómo reaccionará el estudiante? ¿Se dejará involucrar el alumno en el "juego de papeles" creando un guión, sintiéndose libre para proponer un modelo intuitivo propio, haciendo uso de la lengua natural?

Pregunta 5. ¿Este empujón a la propuesta de modelos intuitivos revelará la existencia de conocimientos profundos y pertinentes, o errados, o de falsas concepciones? ¿Serán esos conocimientos una copia de los sugeridos en clase por el enseñante o serán reformulaciones autónomas, enteramente personales? En tal caso, ¿en qué medida serán aceptables y plausibles?

HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Para cada una de las preguntas precedentes formulamos la correspondiente hipótesis de respuesta:

Hipótesis 1. Pensábamos que era posible empujar por lo menos a algún estudiante a que tratara cuestiones matemáticas usando la lengua natural, obviamente mediante la creación de condiciones propicias. Según nuestra hipótesis la presencia de investigadores desconocidos para los alumnos y la ausencia del enseñante curricular en el salón de clase serían condiciones suficientes para obtener, al menos por parte de *algún* estudiante, textos en lengua natural y no sólo respuestas formales ligadas a la cláusula e.j.f. Con mayor razón, si se aseguraba a los estudiantes que la prueba no era en modo alguno evaluativa: para garantizar esto podíamos asegurar que los resultados no se mostrarían al enseñante y que además quien quisiese podía identificar su trabajo sólo con el nombre o dejarlo totalmente anónimo. A nuestro modo de ver todo ello sería suficiente para lograr que existiesen, al menos, algunos textos en lengua natural y no sólo respuestas formales a nuestras propuestas de trabajo. Como ya hemos dicho, la idea era empujar implícitamente a los estudiantes a hacer uso de la lengua natural, apoyándonos en que la situación problemática propuesta se insertaba en un contexto inusual e invitando al alumno a no responder a nuestras preguntas en calidad de tal, sino a que se imaginara en otro contexto, más natural, en un tiempo futuro, en situaciones no directamente didácticas para él.

Hipótesis 2. Nuestra hipótesis era que pocos alumnos aceptarían la invitación. En nuestra opinión el ambiente de escuela, el condicionamiento, la praxis escolar (en particular, en las clases de matemáticas) limitarían mucho el número de alumnos dispuestos a usar la lengua común, quizás por temor a no ser precisos. Suponíamos, en efecto, que la invitación a escribir en lengua natural podría contrastar con el contrato didáctico usual, creando quizá en el alumno alguna resistencia. En definitiva, nuestra hipótesis era que habría un gran número de respuestas formales o con tendencia a ello. Para garantizar que una falta de respuesta no se debiera a ignorancia sobre el argumento propuesto, decidimos elegir temas y argumentos extremadamente elementales, al menos conocidos parcialmente por todos los alumnos de segundo grado de enseñanza media.

Hipótesis 3. Con relación al tipo de respuestas en las que el alumno acepta utilizar el lenguaje natural, formulábamos una casuística de producción de los protocolos en cinco clases distintas:

a. Tentativa de convencer al investigador (asimilado, en cualquier caso, a un enseñante) acerca de las competencias propias: el texto que propusimos se interpretaría de alguna manera como un problema para resolver y el estudiante se limitaría a proporcionar una respuesta. Nuestro texto debía ser pues no la propuesta de un ejercicio a resolver sino la descripción de una situación posible, cuyo “fondo” debía ser de naturaleza matemática, por el tema tratado y por la presencia (implícita) de un cálculo.

b. Tentativa de explicar o demostrar, pero sin aceptar el papel establecido por la tarea propuesta, sino intentando convencer al investigador (identificado con un enseñante), imitando lo más posible su lenguaje o el que se le supone, en analogía al del enseñante propio.

c. Respuestas que apelan a un "principio de autoridad", evitando dar explicaciones y aceptar papeles, situación que probablemente sería producida por la falta de explicaciones y de modelos de las situaciones propuestas. Obviamente existiría siempre la duda acerca de si tal actitud se podría justificar como indiferencia e indisponibilidad a la tarea o como explicitación de la imagen personal de la matemática y de su enseñanza.

d. Aceptación parcial del "juego" propuesto, presuponiendo que para la parte restante el estudiante podría mostrar cierto rechazo a aceptar el papel, hablando por tanto más directamente con el investigador que con los protagonistas propuestos en el texto.

e. Aceptación total del "juego de papeles" propuesto, con lenguaje adecuado y surgimiento de modelos intuitivos, sobre todo para los textos segundo y quinto, predispuestos específicamente para ello.

Hipótesis 4. Nuestra hipótesis con respecto a la reacción de los estudiantes si se les propicia una oportunidad de desempeñar un papel distinto al que usualmente asumen como estudiantes (cuarta pregunta) está ligada estrechamente al caso e. de la tercera hipótesis: suponíamos en efecto que pocos alumnos (no ninguno) responderían a nuestra invitación y esperábamos mucho de aquella respuesta: uso seguro y no reticente de la lengua natural, textos propios de verdaderos guiones, adopción de actitudes significativas desde un punto de vista crítico, y emergencia de modelos intuitivos.

Hipótesis 5. Nuestra hipótesis en relación con la quinta pregunta era que, en cualquier caso, la propuesta de modelos intuitivos por parte del estudiante sacaría a la luz concepciones falsas o errores difíciles de detectar en la praxis escolar usual a causa de la "doble dificultad" de que hablamos al inicio de este artículo o, por el contrario, competencia profunda y, por tanto, reinterpretaciones personales reales de conceptos matemáticos. Junto a tales modelos intuitivos, la hipótesis era obviamente la propuesta de modelos que serían nada menos que copias de los que proporciona la escuela (del enseñante o del libro de texto). No logramos hacer hipótesis sobre la mayor significatividad de unos u otros, incluso cuando existía la convicción de que un modelo personal garantizaría mayor profundidad de lo asumido de lo que lo haría un modelo adquirido de manera exclusivamente escolástica.

En este punto es preciso hacer explícita una observación. Muchos alumnos consideran que escribir un texto, aunque sea muy corto, es un fastidio enorme, es un esfuerzo insoportable. Se les obliga a hacerlo en muchas ocasiones, por ejemplo en clase de literatura o después de una excursión. Por tanto, dado que la tarea que proponíamos estaba desvinculada de la práctica didáctica habitual, es obvio que nuestra solicitud de escritura de un texto fuese acogida en forma poco entusiasta por los alumnos y, más precisamente, sólo por aquellos que presumiblemente pertenecían a la categoría que consideran que escribir un texto en palabras no constituye una fatiga inmensa. Cuando demos los resultados, en números, de las respuestas-tipo, se necesitará tener implícitamente en cuenta lo siguiente: nos parece lícito suponer que entre los estudiantes que no dan una respuesta escrita en palabras (es decir, entre aquellos que producen sólo cálculos o incluso nada), se encuentran los muchachos que peor soportan la escritura de un texto en palabras.

METODOLOGÍA

La experiencia se realizó en clases de segundo grado de educación media (alumnos de 12-13 años) del centro, de la periferia cercana de Bologna y de un pueblo vecino, clases en que no se impartían programas particularmente innovativos y cuyos enseñantes no estaban en contacto con grupos de investigación didáctica.

Una primera fase de la investigación, por otra parte usual para nosotros, se utilizó exclusivamente a manera de “ensayo”; los textos elaborados se proporcionaron a algunas clases (de Bologna y un pueblo cercano) sólo para ensayar las respuestas y las actitudes de los alumnos, recoger dudas eventuales o exigencias diversas. Esta práctica como primera fase de control resulta muy útil sobre todo para modificar el texto cuando no es bien comprensible, presenta ambigüedad que se escapa a la percepción de un adulto, etc. Los resultados de estas pruebas no serán analizados y los protocolos, obtenidos a partir de ellos, no serán utilizados en lo que sigue de este artículo.

Presentamos a continuación los textos propuestos a los alumnos; son los definitivos, resultado de las modificaciones hechas después de la prueba de “ensayo”.

Texto 1. Imagina que eres un (o una) comerciante...
Una señora ha comprado cosas y ha gastado 3700 liras; te ha dado 5000 liras y tú le has dado el vuelto justo. Ella, sin embargo, protesta y dice que le tenías que devolver 1700 liras. Tú, con calma, le explicas que tienes razón.

Texto 2. Imagina que eres un maestro (o una maestra) de elemental...
Quieres explicar a tus alumnos de tercero (8 años) que el área del rectángulo se halla haciendo base por altura.

Texto 3. Imagina que eres un arquitecto (o una arquitecta)...
Este es el plano* de un apartamento que has dibujado ahora mismo; pero el comprador no comprende cómo podrá hacer para vivir en un apartamento tan pequeño que cabe en una página. Tú le explicas "a lo bien" que se trata de un dibujo a escala.
[*Se proporciona el plano de un apartamento a escala, sin indicación alguna sobre dicha escala; se dan sin embargo las medidas reales, en metros, pero sin indicación alguna sobre la unidad de medida.]

Texto 4. Imagina que eres un ferroviario (o una ferroviaria)...
Un señor te pregunta cuál es la velocidad media a la que viaja un cierto tren entre las ciudades de Bologna y Milán (220 km.), dado que utiliza una hora y media. Tú le das la respuesta correcta, pero él dice que es imposible y quiere que le expliques como has hecho las cuentas.

Texto 5. Imagina que eres un papá (o una mamá)...
Tu niño de siete años ha oído que todo triángulo tiene tres alturas y te pregunta: "Papá (mamá), ¿qué quiere decir eso?" Nada peor que eludir la pregunta de un niño pequeño; por tanto decide cómo le responderías.

Observaciones

Nótese, en primer lugar, que cada texto presenta una situación problemática, como se ha dicho anteriormente, pero no hay ninguna pregunta explícita para evitar, en lo posible, que los alumnos piensen en un ejercicio para resolver.

Muchos de los textos propuestos han sido abundantemente reelaborados hasta alcanzar una gran simplicidad, con concesiones a un lenguaje difundido entre los adolescentes (nótese en el Texto 1, las expresiones "cosas" y "con calma"; en el Texto 2, "haciendo base por altura"; en el Texto 3, "a lo bien"[6], muy usado en el lenguaje local). Pero hay casos que nos han sorprendido, como el de "eludir" en el Texto 5, que pensábamos inicialmente debía ser modificado y que, en cambio, se aceptó y permaneció hasta el final[7], provocando de hecho sólo una mínima molestia (como se verá en la siguiente sección). Nótese que en los Textos 1 y 4 se hace referencia respectivamente al "vuelto justo" y a la "respuesta correcta", pero sin decir de cuál se trata y

6. Versión libre de un modismo local.
7. Sobre las técnicas de reelaboración de los textos de los problemas véase (D'Amore, Franchini, Gabellini, Mancini, Masi, Matteucci, Pascucci y Sandri, 1995)donde se presenta una técnica muy cercana a la que nosotros aplicamos aquí.

dando por descontado que el alumno la sabe calcular por sí mismo, e invitándolo por tanto (aunque sólo sea de manera implícita) a hacerlo. En el Texto 4, en la fase final, nos dimos cuenta de que el dato "220 km" entre paréntesis, que debía indicar la distancia ferroviaria entre Bologna y Milán (y que como tal se había interpretado en las pruebas de "ensayo") fue interpretado por algunos alumnos en las pruebas finales, como la velocidad del tren. Aparte de las consideraciones obvias (en el lenguaje común se viaja "a 100 km.", sin indicación de la medida temporal, e incluso "a 100"), quien quisiese rehacer la experiencia debería modificar la forma de dar este dato para no crear problemas.

La prueba se llevó a cabo así: grupos de 12-13 alumnos (mitad de la clase, cada vez) se trasladaron a un aula diferente, mientras la otra mitad se quedaba en clase con su enseñante. En el aula de la prueba los muchachos se ubicaron de manera que no quedaran cercanos unos a otros. Aun así, los textos se distribuyeron de forma que alumnos relativamente próximos tuviesen textos distintos. Este alternarse de medias clases se hizo de forma que no hubiese contacto entre aquel que había hecho ya el protocolo y aquel otro que se preparaba para hacerlo. Todo ello, siempre, ante la supervisión de los dos autores de esta investigación. Cada muchacho podía hacer una o dos pruebas a su elección en el tiempo que quisiera (en no más de 20 minutos, en cualquier caso); la consigna era proceder con calma, escribiendo libremente, mejor más sobre una sola prueba que poco sobre dos.

En total, estaban implicadas 14 clases, para un total de 278 alumnos; 25 alumnos quisieron hacer dos pruebas en vez de una, por tanto se recogieron y se han considerado válidos para efectos de la investigación, 303 protocolos distribuidos entre los cinco textos, por tanto cerca de 60 para cada texto.

A cada alumno se le proporcionó una hoja de formato A4 en la que venía escrito a máquina uno solo de los cinco textos, dejando espacio para la formulación de la respuesta. Se cuidó mucho el que las fotocopias fueran perfectas. La hoja podía ser personalizada con la indicación del nombre, apellido y clase. Entre los acuerdos figuraba que la hoja se consignaría directamente a los investigadores y no a los enseñantes, y que por tanto no tendría ningún peso en la evaluación; sobre esto insistimos particularmente ya que en las pruebas de "ensayo" habíamos notado, en muchos casos, un cierto impedimento para escribir libremente, precisamente a causa de aquel temor, casi miedo a dejarse conocer y a ser uno mismo.

RESULTADOS Y COMENTARIOS INICIALES

En esta sección vamos a examinar detalladamente cada una de las cinco pruebas y algunos de sus resultados desde varios puntos de vista. También realizamos un balance específico sobre el problema de los modelos intuitivos y hacemos explícita una reserva obligada sobre la interpretación de los resultados.

Acerca del Texto 1

Este texto fue afrontado por 58 alumnos; cerca del 70% crea o intenta crear un diálogo entre un comerciante (representado por el que escribe) y una cliente; algún estudiante propone un diálogo ingenioso y animado. Sólo 2 estudiantes, de los 58, asumen una actitud "negativa", es decir dan como solución solamente la sustracción $5000 - 3700 = 1300$, sin otros comentarios. Los demás, de una forma u otra, aceptan el papel que se propone en el texto y alguno escribe un verdadero guión.

Debe señalarse que:

• Muchos confirman que el vuelto al que se refiere el guión es correcto y proponen por parte del comerciante la sustracción mencionada antes; pero muchos más prefieren efectuar la verificación aditiva: $1300 + 3700 = 5000$ señal de que han calculado (quizá mentalmente) el resultado (1300) no hecho explícito por nosotros; un alumno propone la siguiente "prueba":

5000-
3700=

1300+
3700=

5000

• Dos alumnos hacen un cálculo erróneo: $5000 - 3700 = 2300$ y por tanto alteran totalmente el sentido del texto.

• Muchos acuden explícitamente a la calculadora ateniéndose a ella, en cuanto comerciantes, para convencer a la señora.

• Identifican como una "señora vieja" a la cliente que no sabe hacer las cuentas.

• En dos casos el futuro comerciante se declara dispuesto a no discutir y a dar a la señora las 400 liras que reclama de más; uno dice expresamente “para no perder la cliente”.

• Cuatro alumnos identifican el error de la señora con su incompetencia matemática, es decir, con no saber *modelar* el problema a través de una sustracción; otros seis alumnos, con no saber *realizar* la operación.

• Las “cosas compradas” se vuelven en algún guión objetos reales. Maurizio, por ejemplo, hace comprar 2 hectogramos de mortadela y uno de jamón y después inventa una divertida escena de diálogo, distinguiendo perfectamente los papeles (el resultado es positivo: al final, la señora no sólo se convence sino que se disculpa).

Acerca del Texto 2

Este texto fue afrontado por 61 alumnos; también en este caso, la gran mayoría de los muchachos acepta el juego, fingiendo una lección verdadera y propia, dramatizando, casi todos con dibujos “en la pizarra” y creando una lección ex cáthedra (hay sobre todo lecciones magistrales, pero también hay dos casos de lecciones dialogadas, aunque se trataba sólo de estímulos apenas sugeridos o de sugerencias no profundizadas).

Debe señalarse que:

• En seis casos el alumno lee “rectángulo” pero entiende “triángulo”; en dos de estos casos se dibuja primero y después se explica el área del triángulo, mientras en los otros cuatro casos se llama triángulo al rectángulo, pero se dibuja un rectángulo y se usa la fórmula: base por altura.

• Muchos recurren a cuadricular el rectángulo utilizando casos particulares; otros no usan la cuadrícula sino la unidad de medida (metros o centímetros) y se limitan a aplicar la bien conocida fórmula; son poquísimas las tentativas de índole “continua” por así decirlo (cantidad de pintura necesaria para cubrir una región), son muchas más las tentativas de índole “discreta”; hay incluso un alumno que habla de “partecitas” (una especie de “indivisibles” como los de Cavalieri) y otro de “ladrillitos”.

• Muchos, después de haber construido un diálogo y de haber realizado un dibujo en la pizarra, tienden a formalizar: b es la “base”, h es la “altura”, $A = b \times h$, y su intervención termina ahí.

• Hay algunas tentativas interesantes de generalización: se hacen uno o como máximo dos casos específicos y luego se sugiere la fórmula general.

• Los alumnos que no aceptan el "juego" justifican simplemente el uso de la fórmula: un alumno llega incluso a reproponer la fórmula con un lacónico y autoritario: "Se hace así y basta"; otro reafirma a sus estudiantes con un: "Lo dijo un gran matemático"; hay algún otro caso análogo, pero no tan lacónico y autoritario.

• Hay varias tentativas de "demostración" muy interesantes; he aquí dos transcritas fielmente:

> El rectángulo está formado por dos triángulos rectángulos.
> Se llaman así porque tienen un ángulo de 90°.
> Dividimos el rectángulo con una diagonal en dos partes iguales.
> Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, para encontrar el área del rectángulo se hace base x altura.

> Ante todo para comenzar esta figura geométrica se llama así porque tiene todos los ángulos de 90°, es decir rectos.
> Sus lados son iguales 2 a 2 AB y CD y AD y BC.
> Por tanto para encontrar el área se hace base x altura.

(No hay figura alguna y el alumno no puede haber utilizado ningún otro papel; probablemente ha hecho un dibujo sobre un banco o tiene en mente una figura estándar proporcionada por la experiencia escolar o por el libro de texto).

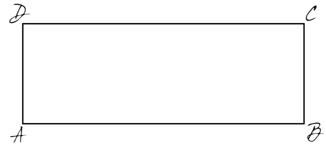
Queda patente no sólo en estos dos ejemplos sino en muchos otros el uso de lo que hemos llamado *lenguaje matematicoide*[8], una especie de lenguaje vacío, definido en (D'Amore, 1995) y en (D'Amore y Sandri, 1998).[9]

La imagen de la matemática que se transparenta es la de una disciplina falta de ideas significativas, con una forma epidérmica de hacer; esto se ha probado en otro protocolo:

---

8. Con esta expresión se ha traducido el término italiano *matematichese*. [N.E.]
9. Se trata sustancialmente de una pareja formada por lengua y actitud. La primera es con frecuencia pertinente y usa una terminología técnica aprendida en las lecciones orales o en los textos escritos, pero no siempre se usa de forma oportuna; la actitud es el intento de imitar al enseñante en su forma de "hacer matemáticas"; con frecuencia falta, sin embargo, la capacidad crítica de comprender el "sentido" de la forma de hacer del enseñante; el estudiante se limita a una actitud imitativa más bien vacía y carente de sentido.

El área del rectángulo se encuentra haciendo base por altura es decir AB por AD

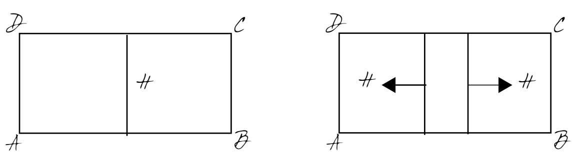


Primero dibujo el rectángulo luego pongo las letras y la hipótesis y después comienzo a explicar la regla es decir el área del rectángulo se encuentra haciendo base por altura es decir AB por AD.

Es evidente que el lenguaje tiene una terminología pertinente que, aun siendo pobre, consta de términos y símbolos. En todo caso, la actitud asumida por distintos alumnos recuerda una tentativa de demostración, señal evidente de que los enseñantes de la clase han intentado asumir un comportamiento deductivo que parece haber sido mal asimilado por los alumnos. Es evidente que en el contrato didáctico se introduce una "cláusula" nueva, que los alumnos intentan respetar, y que concierne a una actitud, la demostrativa, por cierto.

• Hay quien confunde área con perímetro, intentando justificar la fórmula $b \times h$ como la que permite encontrar el perímetro del rectángulo en cuestión.

• Un estudiante se plantea el problema de convencer a sus alumnos de que, mientras en la vida diaria normalmente, la altura de los objetos se mide desde el centro (figura de la izquierda), en la escuela la altura del rectángulo se mide en los lados; pero no hay que preocuparse porque trasladando la altura a los extremos del rectángulo se encuentran justamente los lados (figura de la derecha).



• Son muy pocas las marcas que aparecen para indicar la unidad de medida; hay muchos casos, pero es singular el de Nigel que plantea el ejemplo numérico de un rectángulo de lados 2 y 3 (sin expresar las unidades de medida) y después trata de explicar a sus alumnos que el área se indica como 6^2, justificando el 2 en el exponente porque éste "representa dos medidas, la altura y la longitud"; en cuanto a los otros modos de expresar las unidades de medida de las áreas obtenidas, el más difundido es el de expresar la base y la altura en cm. y el área también en cm.; de los 61 alumnos sólo 3 usan adecuadamente la escritura cm^2.

• Aparece una variedad enorme de términos usados de forma impropia o para facilitar la comprensión a los niños pequeños a los que se refiere el texto: "amplitud" por superficie, "lado mayor" por altura, "parte del centro" por área, "definir" por medir, etc.

El fingirse un maestro de elemental es un papel que ha influido mucho desde el punto de vista lingüístico y en la producción de modelos que podrían considerarse muy cercanos a los modelos intuitivos, en cuanto son obvios[10]. En el caso de uno de tales modelos, el de cuadriculado, los alumnos toman objetos rectangulares y consideran una división interna en cuadraditos; estos objetos pueden ser reales (una barra de chocolate, por ejemplo) o matemáticos (rectángulos). Al producir otro modelo obvio, el de pavimentación, los alumnos consideran el piso de una sala de estar, de un pasillo o de un salón de clase y hablan de los azulejos, de las baldosas, de las losas de forma cuadrada con los que se recubren. Lo que sobresale más es la tentativa, perseguida con gran denuedo, de "bajar el nivel lingüístico", intentando adaptarlo a la edad del alumno. El estudio de esta actitud no parece banal si se quiere explorar realmente la consciencia real de las cuestiones matemáticas básicas. (Sobre este punto específico volveremos en la última parte de esta sección.)

Si es cierto que algunos estudiantes se refugian en expresiones matematicoides, también es cierto que otros, en cambio, intentan la creación de un lenguaje natural elemental, hecho con alusiones a lo concreto, expresando así las problemáticas cognitivas y representativas propias: este "juego" de cambiar el nivel lingüístico se revela enormemente interesante incluso en el plano de las competencias profundas. He aquí un protocolo significativo en ese sentido porque aparece falto de aspectos formales pero rico en evidentes manifestaciones de necesidades pedagógicas:

10. Decimos que tales modelos son obvios puesto que muy probablemente replican los modelos expuestos por los maestros en clase.

> Yo no creo que pueda fingir ser una maestra de elemental, pero puedo intentarlo: hay siempre una primera vez.
> Ante todo, si me viese obligada a hacer de enseñante, sería muy espontánea y simpática, de forma que el diálogo con mis alumnos fuese simple y directo. Me gustaría tener una relación de amistad, divertida, en efecto si tuviese que explicar cómo se encuentra el área del rectángulo, dado que soy golosa si se trata de dulces, imaginaría el rectángulo como una tableta de chocolate.
> Lo he intentado pero no lo he conseguido, no he podido explicar que el área del triángulo se encuentra haciendo base por altura.
> Dejo esta tarea a los enseñantes de verdad.

Acerca del Texto 3

Este texto fue afrontado por 62 alumnos; de éstos, registramos sólo un caso de rechazo. Sin embargo la situación problemática propuesta no parece ser muy motivante desde el punto de vista emotivo. En efecto, los casos de creación de diálogos verdaderos y propios constituyen el porcentaje más bajo de todos los registrados en la presente investigación y muchos salen del asunto afirmando simplemente que se trata de un dibujo a escala. Sin embargo la mitad, aproximadamente, explica al comprador (bautizado de formas distintas: "Señor Rossi" o similares) lo que se entiende por *escala*; de estas explicaciones se deduce que tal concepto, en general, ha sido bien adquirido, incluso si, cuando se trata de dar explicaciones sobre el valor de la escala, se producen... disparates notables. Lorenzo, por ejemplo, formula la hipótesis de que se trata de una escala 1:10.000. Esto podría indicar la falta de un control crítico incluso en las nociones bien adquiridas, desde un punto de vista conceptual. Volveremos sobre ello.

Hay muchos alumnos que sugieren, para hacer comprender al cliente, que los dibujos a escala 1:1 son imposibles de realizar, dando como ejemplo los mapas geográficos y topográficos. Dicho de varias maneras se difunde la idea de que la función del plano no consiste tanto en representar las dimensiones del apartamento como la distribución de los espacios; al respecto, es muy representativo el siguiente protocolo, escrito por Ludovico:

> Debe entender que las medidas del apartamento son a escala, es decir, que se deben multiplicar al construir el apartamento. Y este apartamento se transformará en más grande cuando se construya. No se debe preocupar por la magnitud sino que debe ver sólo si la distribución del apartamento le conviene.

Resulta interesante el uso del término *multiplicar* como sinónimo de "agrandar". Esto evoca algunos estudios de Fischbein sobre modelos intuitivos según los cuales el resultado de la multiplicación es siempre más grande que los factores.

Acerca del Texto 4

Este texto fue afrontado por 60 alumnos; el porcentaje de actitudes negativas fue el más alto (10 casos; los 50 restantes dan todos, aunque de forma diversa, una solución al problema implícito). El alto porcentaje de actitudes negativas es explicable: el problema que implica el texto se ha revelado como demasiado difícil para los alumnos; para ser rigurosos, hay sólo 2 que dan una solución aceptable al cálculo de la velocidad. La siguiente es la solución dada por Cristof:

60 + 30 = 90 (en minutos 1 hora 1/2)
(aproximadamente) 220 : 90 = 2.40

2.4 x 60 =

____

00 +

-

144 =

____

144.0

(Nótese la aproximación de 2.4 a 2.40 a menos que el "40" no sea el resto de la división 220 : 90, como parece evidente en otros protocolos).

La siguiente es la solución dada por Tommaso:

Ferroviario: Por tanto, de aquí a Milán hay 220 km. ¿cierto?
Señor: ¡Cierto!
F: Y el tren los recorre en hora y media, por ello si dividimos 220 entre 1.5 obtenemos el resultado buscado.
S: Mmm... Sí. Pienso que sí.
F: Entonces 220 dividido entre 1.5 es igual a ciento cuarenta y seis km-h y medio, aproximadamente.
S: Gracias. Adiós.
F: Adiós.

En el protocolo de Tommaso faltan los cálculos; presumiblemente los ha hecho manualmente sobre la mesa o con una calculadora, a escondidas; óptima, en cualquier caso, la aproximación de 146.6 a “alrededor de ciento cuarenta y seis km-h y medio”; también resulta óptima si se tiene en cuenta que el protocolo de Tommaso es el único claro, en tal sentido.

Nótese la enorme diferencia de lenguaje y actitud entre los protocolos de Cristof y de Tommaso. El primero asume una actitud totalmente formal y proporciona sólo, como explicación, los cálculos sin comentarios; el segundo, por el contrario, crea un guión en el que él mismo se hace protagonista y los cálculos aparecen sólo al final. En el caso de Cristof, la cláusula e.j.f. del contrato didáctico domina la situación y el estímulo propuesto por nosotros (no obstante todas nuestras cautelas) se interpreta como simple problema a resolver; en el caso de Tommaso, actúa nuestra invitación a situarse fuera del mundo escolar y el lenguaje natural se despliega a toda vela.

Otras consideraciones:

• Los errores de cálculo son muchísimos, así como las estrategias resolutivas sin sentido aparente. Veamos sólo dos ejemplos, el de Michele y el de Marzia. El primero escribe:

220:90=20.44

Con lo hecho, muestra una buena estrategia, pero también un error de cálculo no corregido mediante una valoración a posteriori del resultado obtenido (sobre este punto volveremos a continuación). Marzia escribió:

60=2 km
60+20=1 hora y 20
2 km equivalen a una hora, por tanto 220 km son iguales
a 1 hora y 20 minutos.

Tal protocolo podría ofrecer varios apuntes. Pero sobrevolamos sobre la discusión de los errores y de las concepciones erróneas que afrontaremos quizás en otra ocasión.

• Muchos aseguran al “señor”, en el curso del diálogo, que la velocidad se encuentra dividiendo espacio por tiempo, pero después, en la práctica no saben actuar en consecuencia, quizá debido al hecho de que aparezca una fracción de la hora o porque 220 no es múltiplo de 90.

• Entre las estrategias usadas, aparece 9 veces el cálculo “por medias horas”; es decir, se divide 220 por 3, obteniendo km/media hora. En tal punto bastaría multiplicar por 2 para obtener la velocidad deseada por hora; pero hay sólo 2 (entre los 9) que parece que intentan aplicar (sin conseguirlo) esa parte conclusiva de la estrategia. Los otros 7 se pierden y concluyen ahí.

• Entre los futuros ferroviarios, poco propensos a colaborar con los viajeros, hay quien remite al "tablero de horarios", como si en él figurasen las velocidades de los trenes[11]. La idea de Tommaso (220 : 1.5) se alberga en realidad en la mente de muchos... pero bajo la forma multiplicativa; de hecho, aparece en muchos casos la operación 220 x 1.5 para calcular la velocidad. ¿Cómo se explica esto? ¿Por la naturaleza del número racional 1.5? Pensamos más bien que la responsabilidad sea de una cierta praxis didáctica, que insiste de modo formal en este tipo de cuestiones y cuyo tipo de consecuencia es la de mantener en lo más profundo de los alumnos una aspiración a aplicar las fórmulas de manera no muy consciente. Ello explica también a nuestro modo de ver algunas inútiles y peligrosas "reducciones", por ejemplo de 1 hora y media a 5400 segundos que aparece nada menos que 12 veces, señal evidente de que los alumnos habrán realizado, en el pasado, transformaciones de este tipo, pero evidentemente sin conocimiento de causa. Para una adquisición real y significativa es mucho más "sano" aprender a operar "burdamente" con las medias horas, con los cuartos, con fracciones de hora, etc. Y después reajustar en la forma adecuada. En tales casos, sería totalmente intuitivo proceder al cálculo de la velocidad media del tren cada media hora y después duplicar. Pero tal capacidad, como hemos visto, no se da. De hecho podemos concluir que los problemas sobre velocidad media parecen estar fuera de la capacidad de una gran mayoría de los alumnos. Falta además, como habíamos visto al hablar acerca del Texto 3, la capacidad de un control crítico real[12]. ¡Tuvimos trenes que, después de los cálculos, viajan a 24 km/h y otros que viajan a velocidad de jet!

Acerca del Texto 5

Fueron 62 los alumnos que afrontaron el Texto 5; *ninguno* deja de responder o elude la pregunta, aunque en 4 casos no se dan verdaderas respuestas (una sola frase lacónica o un dibujo poco claro). Se trata pues del texto en

11. Una actividad didáctica de lectura de horarios, de idear itinerarios de viaje, etc., podría ser conveniente; sería más útil para el aprendizaje real que cualquier fórmula del tipo $v = s/t$. Es más, nos ha parecido que querer obstinarse a toda costa en el uso de la conocida pero no interiorizada fórmula, ha inducido incluso a cometer errores: la tentativa de aplicarla se ha revelado más fuerte que la de razonar sobre lo pedido, así sea de una manera burda.

12. Pero este es un discurso general para la escuela italiana.

que ha habido una mayor participación y disponibilidad al uso de la lengua natural. Del análisis, surge con suma claridad la idea de que la altura de un triángulo es algo misterioso que en muchos casos se confunde con otros conceptos; por ejemplo, ángulos internos del triángulo, lados del triángulo, arcos de circunferencia que tienen lados del triángulo como cuerdas, prolongaciones externas de los lados, incentro, circuncentro y baricentro. Estas posiciones no sólo son muy evidentes, sino que se defienden con fuerza y en un porcentaje muy alto: haciendo la suma de los casos obtenidos, el 55% de las respuestas habla de otras cosas y no de alturas, mientras muchos de los protocolos que hablan de las alturas no parecen tender a reconocer tres en un triángulo; hay en tal sentido una consciencia expresada emblemáticamente por un caso en el que el pobre niño que ha hecho la pregunta es reprendido severamente por el padre: “No debes creer todo lo que se te dice”.

Aunque la respuesta esté formulada en lengua natural y quizás precisamente por ello, la más pertinente a nuestra manera de ver es la del siguiente protocolo, escrito por Simona:

> Hijo mío, tú no conoces la geometría, pero quiero explicarte qué quiere decir altura. Como tú, yo y papá tenemos una altura, que se mide de la cabeza a los pies, también los triángulos tienen una, pero se mide desde el vértice que es un puntito fino hasta la base que es como nuestros pies. Pero dado que ellos tienen 3 puntitos (vértices), tienen 3 alturas porque tienen nuestros tres pares de pies. Y como nosotros tenemos una cabeza sola y un solo par de pies, tenemos una sola altura.

Simona se sale totalmente del contrato didáctico habitual, acepta el estímulo por lo que verdaderamente le ofrece, “juega” a ser la mamá competente en geometría, totalmente fuera del ambiente de la clase, buscando el lenguaje correcto (adaptándolo a un niño pequeño), buscando un modelo adaptado, ofreciendo quizá lo usado por ella misma algún año antes para darse una imagen mental de la situación. El lenguaje que usa es la lengua materna común, la descripción que nace de ello es de una eficacia increíble, la ruptura de la cláusula e.j.f. del contrato didáctico es total. Su texto describe una situación que la muestra como actriz protagonista, investida de una carga que en cierto modo siente plausible. Si Simona sintiese también el impulso de responder de esta forma en una situación de evaluación, por ejemplo cuando se le interroga, el contrato didáctico no le permitiría expresarse con tal lenguaje y con tal actitud. Hay que preguntarse además si, a tal nivel escolar, se debe preferir una respuesta de este tipo, tan ingenuamente rica, o una respuesta estereotipada, la esperada por el enseñante o la que el estudiante considera como tal.[13]

Es inútil decir que, como de costumbre, cuando el sujeto intenta una explicación haciendo uso de formalismos o de lenguajes estereotipados en lugar de la lengua natural, el resultado es deletéreo y el formalismo se instaura completamente. Se trata casi siempre de un formalismo vacío e inútil. La preocupación más difundida es la de que la altura se escribe con una *h*, y después es: "La línea equidistante de los lados", por ejemplo, o bien: "La recta que cae perpendicularmente en el centro del lado opuesto partiendo del punto en que se encuentran dos lados consecutivos"; o similares.

Federico es el único que recuerda y describe una construcción concreta, presumiblemente vista en el nivel elemental: se apoya "la base" sobre la mesa y se usa la plomada a partir del vértice "más alto". Pero ello parece haber reforzado, en él, la idea de que la altura del triángulo es única, en lugar de ser tres.

Algún protocolo revela que el objeto de la pregunta (en un triángulo hay tres alturas) ha sido mal entendido, como sigue: hay tres casos posibles para la altura de un triángulo; puede ser interna, externa o coincidente con un lado. Este mal entendimiento se revela sobre todo en el protocolo de Anna Chiara, en el que la autora presenta como respuesta a nuestra pregunta un dibujo (por otra parte, muy bien realizado) con los tres casos mencionados.

Volviendo a lo dicho en las observaciones presentadas al final de la sección titulada "Metodología", relativas a la dificultad de comprender el texto, sólo dos alumnos evidencian este hecho y uno solo de ellos, en particular, denuncia aquel "eludir" sobre el que inicialmente teníamos tantas dudas.

Los modelos intuitivos: balance específico sobre este tema

Nos parece, por un lado, poder confirmar que en muchos casos los modelos propuestos por los alumnos representan verdaderamente sus modelos intuitivos; sin embargo, por otra parte, tenemos que poner límites y reservas obligadas a tal respecto. De algunos de los ejemplos aportados aquí (y de otros no aportados) se extrae un claro esfuerzo de simplificación y una tentativa de adecuar el lenguaje propio al de un posible interlocutor más joven o inexperto. Esta tentativa puede modificar evidentemente la relación de analogía entre el modelo intuitivo y el modelo propuesto por la tarea asignada por nosotros. Es preciso pues, al interpretar los protocolos obtenidos, tomar distancia crítica de la expectativa, fácil pero no del todo lícita:

modelo propuesto por el alumno = modelo intuitivo que posee

13. Consideraciones de este tipo han hecho reflexionar mucho a los enseñantes a los que hemos presentado estos resultados.

A veces ocurren cosas de este tipo en la enseñanza; el enseñante posee un concepto de forma correcta pero, al intentar explicarlo a sus alumnos con el esfuerzo consciente de comunicación que supone que el nivel del que escucha es bajo, no es raro el caso en que el enseñante distorsiona un poco el concepto o algunos de sus elementos, para hacerlo más adecuado a las posibilidades conceptuales y lingüísticas de los mismos alumnos. Así, un modelo correcto se comunica de forma distorsionada no por incompetencia sino para adecuarlo y para adecuar a él el lenguaje expositivo del interlocutor que se encuentra en un nivel de competencia o de capacidad lingüística inferior. De la misma forma todos nuestros tests necesitan comunicar algo a interlocutores que, por un motivo u otro, se encuentran en condiciones de nivel inferior de preparación en lo que respecta al objeto del discurso y, en algún caso, también de capacidad lingüística. Ello comporta, como consecuencia, por un lado la cautela crítica interpretativa de la que se ha hablado y, por otro, la necesidad de indagar ulteriormente sobre temas análogos.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS EN RELACIÓN CON LAS PREGUNTAS Y LAS HIPÓTESIS FORMULADAS

Con base en el análisis de los protocolos y de los resultados que se presentaron en la sección anterior se pueden formular las conclusiones siguientes:

Conclusión 1. Con respecto a nuestra primera hipótesis según la cual sólo pocos alumnos habrían aceptado usar la lengua natural, sobre todo en los casos de los Textos 2 y 5, la respuesta ha sido en cambio mucho más difundida y espontánea en todos los textos. El juego del cambio de papel (estudiante-comerciante, estudiante-maestro, estudiante-arquitecto, estudiante-ferroviario, estudiante-padre) ha sido muy bien acogido; se puede destacar la cantidad no banal de verdaderos guiones en *todos* los casos.

Conclusión 2. Como se ha dicho ya, muchas son las respuestas en lengua natural; pero la calidad de las respuestas y la disponibilidad a hacer uso *sólo* de la lengua natural han sido más bien reducidas. El que responde desde un inicio en lengua natural después tiende a completar el protocolo con una respuesta formal, a menudo vacía y que tiene que ver poco con la tarea. Si se considera el número de los que han dado sólo una respuesta en lengua natural, entonces nuestra hipótesis se confirma. Parece que existiera casi un conflicto: al inicio, por intuición, la respuesta se da en lengua natural, pero después parece funcionar la cláusula e.j.f. y el muchacho "completa" la primera respuesta, haciendo uso de cálculos (no siempre oportunos). Por otra parte, es un comportamiento que ya habíamos señalado en (D'Amore y Sandri, 1998).

Conclusión 3. En relación con el tipo de respuestas que se encontrarían en la producción de protocolos, la casuística es la prevista en la tercera hipótesis, exactamente en los términos en que se planteó. Veamos algún comentario a las distintas posiciones:

a. La tentativa de convencer al investigador acerca de las competencias propias no aparece difundida como habíamos previsto.

b. La tentativa de explicar o demostrar sin aceptar el papel propuesto por la tarea aparece muy difundida aunque quizá se dé una tentativa de uso de la lengua natural por lo que hay una cierta intersección entre los casos b) y d).

c. Hay sólo cuatro casos explícitos; pero en muchos otros protocolos el "principio de autoridad" parece haberse escondido entre los "pliegues" de la respuesta; por ejemplo, en los casos del comerciante y del ferroviario algunas respuestas se refieren a la calculadora como fuente de certeza y al horario ferroviario, en el mismo sentido.

d. La aceptación parcial del "papel" propuesto es el caso más extensamente difundido; en las respuestas la parte formal es *siempre* posterior a la de la lengua natural y parece motivada por la cláusula e.j.f. del contrato didáctico.

e. Suponíamos que la aceptación total del "juego de papeles" era un caso raro pero que de algún modo podía proporcionar protocolos ejemplares. En cambio, como hemos dicho, el caso ha resultado mucho más difundido de lo previsto; el que acepta *totalmente* el "juego" lo hace de forma divertida y ofrece en consecuencia protocolos agradables y simpáticos; es verdad que ello ocurre sobre todo con los Textos 2 y 5 como habíamos conjeturado, pero no exclusivamente ni de forma tan acentuada.

Conclusión 4. Como habíamos dicho ya, los alumnos que responden según la tipología e) hacen uso notable de la lengua natural imaginando guiones con dos personajes o imaginando monólogos (sobre todo en las explicaciones de tipo escolar pedidas en los Textos 2 y 5). La lengua natural se usa con una cierta destreza semántica (no se puede decir lo mismo de la sintaxis), y en cualquier caso de forma expresiva y quizá pintoresca: era lo que establecía nuestra hipótesis. Por otra parte, gracias a los casos en que se da la posibilidad de no usar aparatos formales y gracias al uso de la lengua natural, se revelan modelos interesantes que, en algunos casos y con los límites indicados al final de la sección de resultados, se pueden considerar razonablemente como (o por lo menos cercanos a) modelos intuitivos.

Conclusión 5. Tales modelos son muy interesantes en el plano de verificación de los aprendizajes.

Por ejemplo, modelos aditivos en lugar de sustractivos en relación con el Texto 1, hecho por otra parte ya aparecido en (Hart, 1981).

Otro ejemplo, se refiere a las cuestiones ligadas al significado de la altura de un rectángulo o del área en relación con el Texto 2. En particular, parece ignorarse totalmente por qué el área se expresa en cm^2 y no en cm.; por qué sobre las dos letras A y B se debe poner a veces una rayita, lo que es un hecho ligado exclusivamente a las expectativas y pretensiones del enseñante. Ello nos lleva a una obligada reflexión sobre la actitud didáctica que el enseñante de matemáticas debe tener: formalismos vacíos y un uso acrítico del simbolismo y del lenguaje matemático no son útiles didácticamente ni relevantes educativamente (surge la duda sobre su pertinencia).

Otro ejemplo tiene que ver con el concepto de escala o del valor de una escala con relación al Texto 3.

Un ejemplo en relación con el Texto 4 es la incapacidad muy difundida de usar la fórmula $v = s/t$ cuando es necesario evocarla.

Otro ejemplo, relacionado con el Texto 5, es la ignorancia de la idea de altura de un triángulo no dependiente de la orientación del triángulo dado; más misterioso parece ser el hecho de que un triángulo tenga tres alturas.

Gracias a la interpretación de los modelos propuestos por los alumnos a sus interlocutores se revelan concepciones erróneas o lagunas insospechadas en cuanto a difusión y no evidenciables con los métodos usuales de indagación didáctica.

Se debe decir también que otros modelos proporcionan pruebas decisivas a favor de adquisiciones profundas y por tanto reales. La imagen antropomorfizada de las alturas del triángulo en el protocolo de Simona es ejemplar en tal sentido.

Así, pues, la técnica del “Imagina que eres...” se revela interesante en sentido diagnóstico, para verificar no sólo en negativo, sino en positivo, el nivel de profundidad y de personalización del aprendizaje de un concepto matemático.

Es claro que, incluso el que usa con gusto la lengua natural y que, por tanto, presenta con mayor facilidad modelos cercanos a los intuitivos, con frecuencia se limita a reproponer copias de modelos sugeridos evidentemente por el enseñante o por el libro de texto y no del todo interiorizados.

El análisis de los protocolos parece confirmar que sólo el modelo reinventado personalmente se puede considerar radicado profundamente y hecho propio, tanto como para poder ser usado en situaciones extraescolares con destreza. Pero sobre esto no podemos aportar pruebas verdaderas y significativas, aunque se trate de una sensación nuestra, bastante profunda. Se necesitarían indagaciones ulteriores sobre este punto.

NOTAS FINALES

Algunas breves observaciones didácticas se han diseminado aquí y allá, en el curso de las secciones precedentes, especialmente en la anterior. Concluimos diciendo que, a nuestro modo de ver, las tareas que son usuales en clase tales como test, quiz, interrogatorios orales, difícilmente permiten que las competencias profundas sobre determinados conceptos salgan a flote; la construcción de imágenes mentales oportunas, favorecida por el aislamiento (y por la motivación aumentada) de uno mismo, hacen posible esta indagación. Más allá de nuestra investigación, creemos que una vía similar a la de "Imagina que eres...", es practicable (cambiando muchas de las condiciones del entorno) desde un punto de vista didáctico.

REFERENCIAS

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *9*, 9, 48-93.

D'Amore, B. (1995). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. En B. Jannamorelli (a cura di), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (Sulmona, marzo 1993), Qualevita ed., Sulmona, 209-224. Reeditado en alemán en *Journal für Mathematik-Didaktik*, *17*, 2, 1996, 81-97.

D'Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Matteucci, A., Pascucci, N. y Sandri, P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*, 2, 131-146.

D'Amore, B., Sandri, P. (1998). Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics 12*, 491-512.

Fischbein, E. (1985a). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. En L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 8-19). Bologna: Zanichelli-UM.

Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 122-133). Bologna: Zanichelli-UM.

Hart, K. (Ed.) (1981). *Childrens Understanding of Mathematics* (pp. 11-16). Oxford: J. Murray.

Laborde, C. (1982). Langue naturelle et écriture simbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématique, Thèse, Grenoble: Université J. Fourier.

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? En B. Jannamorelli (a cura di), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica, Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica* (Sulmona, 30 e 31 marzo e 1 aprile 1995), Qualevita ed., Sulmona. Reeditado en *La Matematica e la sua didattica*, *2*, 1995, 121-135.

Maier, H. (1989). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, *3*, 86-118. Reeditado en *La Matematica e la sua didattica*, *3*, 1995, 298-305.

Zan, R. (1992). Il ruolo del contesto e della domanda nel problema espresso in forma verbale. *La Matematica e la sua didattica, 2*, 38-45.

Bruno D'Amore
Patrizia Sandri
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Piazza di Porta San Donato 5, 40126
Bologna, Italia
E-mail: damore@dm.unibo.it