

## INTRODUCCIÓN A LA MEDIDA DEL VOLUMEN

*Este artículo<sup>1</sup> relata la experiencia vivida por el grupo de docentes de matemáticas de la Normal Distrital María Montessori con el fin de encontrar nuevas opciones que permitan a los estudiantes trabajar el concepto de volumen. Los resultados, luego de diseñar e implementar una estrategia con este propósito, muestran que este proceso contribuyó al progreso en el manejo del tema y en otros aspectos, tanto de los estudiantes como de los maestros.*

### INTRODUCCIÓN

En el marco del Proyecto MEN-EMA II, coordinado por “una empresa docente<sup>2</sup>”, los profesores de matemáticas de la Normal Distrital María Montessori, convencidos de la necesidad de encontrar nuevas formas de trabajo que transformen los modelos de enseñanza y aprendizaje, realizaron durante los dos años anteriores un proyecto de aula. Después de analizar diversas problemáticas presentes en el colegio se decidió abordar un problema puntual sobre una temática específica de las matemáticas: el concepto de volumen y su medición. Para esto se planeó, diseñó y llevó a cabo una estrategia que buscaba facilitar y aclarar este tema en los estudiantes.

### JUSTIFICACIÓN

El grupo de profesores de matemáticas de la Normal Montessori, a través de un proceso de reflexión, ha cuestionado las prácticas de enseñanza de la geometría y de la matemática en general, en el colegio. Considera que a pesar de que la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas ha mejorado, su desempeño en el área sigue mostrando grandes deficiencias.

Este proceso de reflexión pedagógica sobre la geometría en nuestro contexto, nos ha permitido ver que las estrategias que se usan para llevar a los estudiantes a la construcción de conceptos como cuerpo, espacio, dimen-

- 
1. Este artículo fue editado por Felipe Fernández y Luisa Andrade, investigadores de “una empresa docente”.
  2. Este proyecto fue realizado en 1996 y 1997 y fue financiado por el Ministerio de Educación Nacional.

sión, longitud, área, volumen, relaciones entre unidades de medida y otros, no son las más adecuadas; no se proponen actividades que ayuden al estudiante a observar, describir, comparar, analizar y a establecer conexiones básicas para lograr un aprendizaje comprensivo de los conceptos; no se propician momentos para que el alumno observe las propiedades y características de los cuerpos (dimensiones, forma, tamaño, material) y establezca relaciones que le ayuden en el proceso de la adquisición de los conceptos de medición.

Si observamos los errores que los estudiantes cometen en el área de geometría se intuyen dificultades en el manejo del espacio. Vemos también que generalmente el alumno realiza mediciones incorrectas, sin las unidades correspondientes a la magnitud; le queda difícil hacer estimaciones de longitudes, áreas, volúmenes y capacidades; tiene dificultades en la identificación de fracciones decimales, la representación gráfica de los objetos y la comprensión del vocabulario y las unidades de medida.

Creemos que el tema de volumen de los cuerpos y su medición se ha trabajado en la institución con metodologías y procedimientos inapropiados, que llevan al estudiante a memorizar una fórmula que para él no tiene ningún significado y que luego usa mecánicamente; que introducen la utilización de términos geométricos, como dimensión, profundidad, altura, espesor, sin que el estudiante pueda asociarlos con los conceptos correspondientes, los cuales pareciera que no comprende; que en fin, no le facilitan acceder al concepto de medición, menos al de volumen, ocasionándole muchas dificultades en su uso.

En este proyecto de aula, una de las motivaciones para la escogencia del tema fue la gran utilidad y conexiones que el concepto de volumen tiene con la realidad. La medición de las propiedades de un objeto concreto es suficientemente reconocida como fuente de información y conocimiento. Muchos de los avances de la tecnología se han realizado con base en la precisión de las mediciones. Por ejemplo los mapas que se obtienen gracias a la medición del campo magnético de la tierra. La importancia de la medida se justifica además por las necesidades de la vida práctica, en la que diariamente realizamos gran cantidad de mediciones y estimaciones.

## **PROBLEMA**

Con base en las observaciones y reflexiones se planteó entonces la problemática ¿cómo lograr que los estudiantes de grado noveno, identifiquen el volumen como una propiedad de los cuerpos y adquieran habilidades para medir y calcular el volumen?

Este tema puede ser tratado con alumnos de grado noveno, de 13 a 15 años de edad, quienes posiblemente tengan ya algunos prerequisites que se pueden aprovechar como base para tratar la temática.

Para iniciar el trabajo el grupo se propuso los siguientes objetivos específicos:

- realizar un análisis del tema a la luz de tres aspectos: el contenido matemático, el proceso de enseñar y el proceso de aprender;
- diseñar una estrategia metodológica que promueva en los estudiantes el desarrollo de habilidades como observar, describir, comparar y analizar, para facilitar la comprensión del concepto de la medida del volumen;
- aplicar y observar el desarrollo de la estrategia.

## MARCO CONCEPTUAL

Consideramos que los estudiantes deben manejar la medición para enfrentar necesidades cotidianas, ya que en ella confluyen aspectos geométricos, aritméticos, de resolución de problemas. Su manejo permite además desarrollar habilidades y destrezas.

El trabajo realizado por Piaget (1948, citado por del Olmo et al., 1989) y sus colaboradores es una importante contribución a la comprensión de conceptos relacionados con la medida, a la vez que plantea una base para el debate y la necesidad de continuar la investigación acerca del tema. Piaget identifica dos operaciones fundamentales, la conservación y la transitividad, de las que depende el proceso de la medida. La conservación tiene que ver con la invarianza de ciertas cualidades de los objetos cuando se ejercen transformaciones sobre ellos. Por ejemplo cuando se cambia la forma o la posición, conservando el volumen. La noción de transitividad se refiere a establecer la igualdad de las medidas de dos objetos, recurriendo a un instrumento de medición. Por ejemplo cuando se mide la altura de una torre y se utiliza esta medida para hacer otra torre, podemos decir que la altura de las dos torres es igual.

Del Olmo et al. (1989) hacen una propuesta para el tratamiento didáctico del proceso de medición de una magnitud. Esta propuesta consiste en una secuencia de pasos que comienza con la percepción de la cualidad que se va a medir, aislándola de las cualidades restantes del objeto. Para lograr la percepción del volumen aparece como necesidad la manipulación de objetos concretos de diferentes formas, tamaños y texturas, que permita identificar

características comunes a todos los cuerpos y destacar propiedades como ocupar un lugar en el espacio, ser tridimensional y tener fronteras.

Luego se comparan objetos respecto a esa cualidad en términos relacionales como “más que”, “menos que”, “tanto como”, que supone la adquisición de la noción de igualdad respecto a esa cualidad y por lo tanto del tamaño de ésta. En el proceso de comparación de objetos se busca establecer la relación de equivalencia entre cuerpos por la cuantificación de sus medidas, independientemente de su forma y posición.

Después se elige una unidad de medición y se itera sobre el objeto a medir, de forma que se obtiene el número de veces de la iteración como la medida; esto tiene gran importancia práctica pues permite valerse de diferentes unidades de medición. Para trabajar las unidades de medida y resaltar las diferencias entre éstas, se propicia la construcción de cuerpos con distintas unidades.

El proceso finaliza con la estimación de la medida de otras cualidades y otros objetos, habilidad que debe ser potenciada. La estimación se promueve a través de llenar cajas con unidades cúbicas y hacer el conteo de estas, para medidas diferentes. Se espera concluir con una construcción lógica del modelo matemático que usamos para calcular el volumen.

En el proceso de adquisición del concepto de medición del volumen es indispensable que el alumno comprenda que todo cuerpo ocupa un lugar en el espacio y que ese espacio puede ser llenado con determinadas unidades cúbicas. Esto se facilita a través de la experimentación con material concreto, el uso de distintas formas de representación, vivencias en la construcción de cuerpos, teselación del espacio con cuerpos geométricos, comparación de capacidades y volúmenes, manipulación de diferentes unidades de medida. Piaget y Brune (1967, citados en Dickson, 1991) y Dienes (1959, *ibíd*) dicen que la manipulación de objetos concretos, constituye la base del conocimiento humano en general, y de las matemáticas en particular.

El volumen es una magnitud que es susceptible de dos tratamientos, uno como magnitud unidimensional, que puede ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., en función de ella misma y otro como magnitud tridimensional, que permite medirla en función de otra magnitud —v.g. la longitud, modelo multiplicativo. (Vergnaud, 1983, citado por del Olmo, 1989).

Por la forma tradicional de presentar el tema, el alumno tiene dificultades para diferenciar el área y volumen. Además no aprovecha sus experiencias con cuerpos reales para construir el concepto ni para comprender el significado de la medición. No puede por tanto resolver racionalmente problemas.

Para abordar el estudio de las magnitudes y de la medida se sugiere un método de trabajo en el cual se construya el concepto, luego se haga su medición resaltando la utilidad de esto y se habilite al estudiante para que pueda realizar estimaciones con el fin de obtener una medida, no con ayuda de instrumentos, sino como un juicio subjetivo sobre la medida de los objetos.

## **DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA**

### **Planificación**

Después de haber elegido como tema la medida del volumen y con base en la teoría consultada, las lecturas hechas, la reflexión sobre estas, el análisis realizado y nuestra experiencia en la enseñanza, se planearon, diseñaron y desarrollaron actividades que buscaban el logro de estos objetivos.

Se decidió realizar dos sesiones de trabajo de 90 minutos cada una, con un grupo de 40 estudiantes de grado noveno, quienes presentaban una deficiente formación en geometría. Para esto se elaboraron dos guías de trabajo para las sesiones, se definieron las pautas de observación y se construyeron materiales de trabajo como cubos que pudieran usarse como unidades de medida, cajas cuadradas y rectangulares de diferente tamaño, algunas de material transparente. Se recolectaron cuerpos ya construidos, como paralelepípedos de distintos tamaños.

### **Ejecución**

El objetivo de la primera sesión era propiciar en los estudiantes la identificación de las propiedades de los cuerpos para llegar al volumen como una de ellas.

Al comienzo los alumnos trabajaron con los cuerpos geométricos y no geométricos solicitados y recogidos previamente. Los estudiantes se organizaron en grupos de cuatro. Cada grupo aportó diferentes cuerpos y trabajó siguiendo las guías elaboradas, que proponían la observación detallada de los objetos y la identificación de características propias de cada uno de estos. Luego se esperaba que compararan las características para destacar las que cumple cualquier cuerpo (ocupar un lugar en el espacio, tridimensional y tener fronteras) y las comunes a los cuerpos observados.

Se llevaron a cabo ejercicios sobre representación bidimensional de cuerpos tridimensionales. Para esto se guió a los estudiantes en la identificación de las dimensiones de la siguiente manera: se les mostraba una de las caras y se suponía que las demás no existían, la dibujaban, le colocaban las dimensiones, para luego realizar el dibujo completo del cuerpo y señalar en él sus dimensiones.

Posteriormente se elaboraron carteleras donde representaron gráficamente los cuerpos trabajados, con el propósito de hacer una puesta en común entre los diferentes grupos.

La segunda sesión tenía como objetivo permitir a los estudiantes hallar el volumen de cuerpos por conteo de unidades cúbicas, promover la estimación del volumen en otros cuerpos y facilitar así una posible deducción del modelo matemático para calcular el volumen.

En un principio retomaron actividades de la sesión anterior para describir los materiales de trabajo en términos de sus propiedades.

Disponían de 24 cubos iguales para construir objetos compuestos por dos, tres y cuatro cubos, para observar formas y posiciones y para comparar el volumen de los cuerpos construidos. Se intentaba que llegaran a establecer los casos en los que cambia la forma o la posición, pero se conserva el volumen. También se construyeron cuerpos macizos, en plastilina y masa, con el propósito de seleccionar el cuerpo de mayor volumen explicando el proceso y justificando las respuestas.

A continuación vino el trabajo con unidades cúbicas, previamente elaboradas en distintos materiales y de diferentes tamaños (1, 2, 5 cm.). Se pedía crear cubos perfectos máximos dado un número cualquiera de unidades cúbicas, indicando el número de cubos empleado y abstraer y establecer sin uso de material concreto, cuantas unidades cúbicas son necesarias para construir el mayor cubo posible.

Posteriormente utilizando cajas de distintas dimensiones, se llevó a cabo la actividad de llenar las cajas de ciertas dimensiones. Para esto tenían que seleccionar las unidades adecuadas para llenarlas, según los tamaños de las cajas y establecer el número preciso de unidades utilizadas a lo largo, ancho y alto de las cajas, y en total.

Luego en las guías se proponía que trabajaran por grupos para identificar las dimensiones y estimar el volumen de varios paralelepípedos.

También en esta sesión se hizo una puesta en común del trabajo desarrollado por los distintos grupos, mediante la exposición de la representación gráfica de los cuerpos trabajados con sus dimensiones señaladas. Para finalizar los estudiantes hicieron propuestas de modelos matemáticos para hallar o calcular el volumen.

## **ANÁLISIS DE RESULTADOS**

Los resultados obtenidos con los estudiantes a través del desarrollo de la experiencia, tienen un interés fundamental para el grupo de docentes participantes en el proyecto, desde el punto de vista de los logros y de las actividades en sí mismas.

En el trabajo con los estudiantes observamos que en sus expresiones verbales y escritas se les dificultó expresar sus percepciones usando los términos apropiados. Le dieron importancia a aspectos circunstanciales y descriptivos de las figuras, como el color, la forma, etc.

En la primera sesión los estudiantes tuvieron dificultades al hacer las descripciones de los materiales y propiedades, por la escasez de vocabulario y por falta de conocimiento y comprensión de algunos términos. Al manipular los cubos también se detectaron dificultades para encontrar la característica esencial del cubo: tener sus 3 dimensiones iguales. Para algunos el hecho de que el resultado numérico al medir el ancho, largo y alto del cubo fuera igual, generó confusión y afirmaron que el cubo tiene una sola dimensión. Así mismo, cuando los alumnos identificaron las caras de los cuerpos descubrimos que confunden área total del cuerpo con el volumen y perímetro con área.

Vimos la necesidad de realizar una sesión posterior antes de continuar con la segunda guía de trabajo planeada, con el objeto de aclarar dudas y reforzar las propiedades inherentes al concepto de volumen como característica de los cuerpos. En esta etapa los estudiantes consultaron el diccionario, actividad que se complementó con explicaciones, por parte de los profesores, de los términos desconocidos, como tridimensional, tener frontera, dimensión.

Como consecuencia de esto, en la segunda sesión, la mayoría de los alumnos ya pudo utilizar correctamente dichos términos. Nos dimos cuenta de esto al revisar el trabajo, tanto oral como escrito, de cada grupo. Vimos que lograron identificar dos y tres dimensiones de los cuerpos dados, pues al pedir que midieran el largo, el ancho y el alto lo hicieron correctamente.

El trabajo con los cubos ya construidos fue motivante, porque el hecho de manipular cuerpos de distintos tamaños, les dio la oportunidad de comparar y establecer diferencias y equivalencias entre los cubos de diferentes tamaños. Al verificar el trabajo de los grupos se vio que varios de ellos, detectaron cuerpos con igual volumen a pesar de tener forma diferente. Justificaron sus conclusiones porque los cuerpos se formaron con los mismos cubos.

Posteriormente la actividad de llenar y trabajar con las cajas, las cuales tenían medidas diferentes, facilitó y aclaró la identificación de las tres dimensiones. En especial al cambiar la posición de las cajas y de los cuerpos, los estudiantes reconocieron y expresaron por escrito y verbalmente, las distintas dimensiones. Los ejercicios de conteo de unidades les permitieron medir el espacio ocupado por cada una de las cajas, al que de una manera muy natural llamaron volumen. También en la estimación del mismo en otros paralelepípedos la hicieron en términos de dichas unidades con bastan-

te certeza. Pudieron hacer comparaciones del volumen entre cuerpos contruidos con igual y con diferente número de unidades cúbicas. Más adelante muchos alumnos identificaron el número de unidades de longitud a lo largo, a lo ancho y a lo alto, en diferentes paralelepípedos y encontraron el número de unidades cúbicas que determinan el volumen de cada uno de ellos. Luego como comprobación cambiaron la forma y posición de algunos cuerpos, y al contar las unidades verificaron la invariabilidad del volumen con respecto a las anteriores. En adición, gran parte de los estudiantes lograron identificar características de los cuerpos trabajados, compararlos y destacar propiedades que cumplen todos los cuerpos. La representación gráfica de forma plana, se alcanzó también en la gran mayoría luego de realizadas las actividades con ese objeto.

Finalmente, varios alumnos fueron capaces de construir cubos perfectos, con cualquier número de unidades. Mostraron una idea clara de la igualdad de las tres dimensiones en un cubo, que los llevó a decidir en cada situación el número exacto de unidades necesarias para construir el cubo pedido y por lo tanto el número de unidades que debían desechar. Sin embargo, muy pocos estudiantes pudieron generalizar y llegar a expresar el modelo matemático para calcular el volumen. Esto se vio en la sustentación del trabajo en forma oral, donde se notó la dificultad para expresar el porque del resultado obtenido.

## CONCLUSIONES

El hecho de plantearse y desarrollar un proyecto de aula, con la asesoría y acompañamiento de “una empresa docente”, contribuyó a la capacitación y actualización de los docentes del área. En el proceso de realización del proyecto, los maestros observaron, compararon, analizaron y discutieron sobre su propio trabajo y el de los demás. Esta experiencia encierra un proceso de reflexión, que definitivamente enriquece la labor del maestro, sobre nuestro desempeño como docentes; sobre la forma en que trabajamos y nuestros errores y aciertos; sobre nuestras visiones de la clase, de la escuela, de las relaciones interpersonales; sobre la necesidad de encontrar soluciones al problema que constituye enseñar bien un tema de matemáticas; sobre las dificultades que tienen los alumnos para llegar a la conceptualización y sobre la influencia de las relaciones sociales que se manejan en la escuela en los procesos de aprendizaje.

Además el grupo de profesores experimentó la necesidad del trabajo colaborativo y en equipo, de leer y consultar distintos temas y varios autores, con el fin de diseñar y preparar una estrategia que permitiera el logro de los objetivos propuestos.

La fundamentación teórica y la asesoría proporcionan elementos valiosos para planear y diseñar la estrategia metodológica.

Los estudiantes tienen una actitud muy positiva cuando se enfrentan a trabajo con material concreto y desarrollan con motivación las actividades propuestas. A pesar de los problemas de comprensión de lectura de algunos estudiantes y de claridad en algunas preguntas, las guías orientaron el trabajo y ayudaron al manejo de las sesiones.

En el trabajo con los estudiantes observamos dificultades que comprueban la necesidad de vincular el desarrollo del lenguaje a la estrategia, para mejorar la comprensión en el área.

Creemos que se necesita más tiempo para atender las dudas presentadas en cada grupo y realizar más actividades con ellos.

Este tipo de trabajo permite detectar más fácilmente las dificultades de los estudiantes en su proceso de aprendizaje y aprovechar los errores para conseguir resultados.

## REFERENCIAS

- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El Aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor S.A.
- Del Olmo, M. A., Moreno, M. y Gil, F. (1989). *Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Editorial Síntesis S.A.

*Amanda Moreno  
Beatriz Bulla  
Nohora Giraldo  
Alix Mantilla  
Margarita Mantilla  
Normal Distrital María Montessori  
Calle 19 Sur N° 13-29  
Tel.: 2803162  
Bogotá, Colombia*