REVISTA EMA
1998, VOL. 3, Nº 3, 193-220

LAS REPRESENTACIONES PLANAS DE CUERPOS 3-DIMENSIONALES EN LA ENSEÑANZA DE LA

citation and similar papers at core.ac.uk

brou

ANGEL GUTIÉRREZ

En este artículo se presentan algunas reflexiones sobre la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales adecuadas a los estudiantes de diferentes edades. Se analizan diversas formas usuales de representación plana de objetos 3-dimensionales y, tomando como base los resultados de algunas investigaciones, se describen varias dificultades observadas cuando los estudiantes dibujan o interpretan representaciones planas de sólidos, incluyéndose algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes. También se hacen sugerencias a los profesores acerca de la capacidad de los estudiantes de diversos grados para utilizar las distintas representaciones y se plantean algunos ejercicios que pueden proponerse para mejorar la habilidad de los estudiantes para dibujar y leer representaciones planas de cuerpos espaciales.

INTRODUCCIÓN

Hasta no hace demasiados años, la geometría de la enseñanza primaria estaba reducida, en casi todos los países de nuestro entorno cultural, a unos pocos conocimientos básicos de figuras planas y espaciales, aprendizaje de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes, y poco más; además, estos contenidos solían estar relegados a las últimas páginas de los libros de texto, por lo que, con frecuencia, los maestros sólo los enseñaban parcialmente. Por su parte, las enseñanzas secundaria y universitaria estaban plenamente bajo el influjo del movimiento de formalización de las matemáticas; una anécdota típica de este contexto, irrelevante pero significativa, es el caso de un famoso matemático que, para destacar la calidad del libro de geometría que acababa de publicar, recalcaba que no contenía ninguna figura. Esta situación, que se ha prolongado durante bastantes años, ha tenido, entre otras consecuencias, la de minimizar el valor de figuras, dibujos, diagramas, etc. como instrumentos de ayuda para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos.

1. Parte de la investigación presentada en este artículo ha sido financiada por la DGICYT/DGES del Ministerio de Educación y Cultura español (PB93-0706).

A partir de los resultados de la investigación actual en didáctica de las matemáticas, está plenamente demostrado que, en todos los campos de las matemáticas escolares, el aprendizaje y la enseñanza resultan más fáciles y profundos cuando evitan la abstracción innecesaria y se apoyan en representaciones o modelizaciones que los estudiantes puedan observar, construir, manipular, transformar, etc. Es fácil reconocer este hecho al observar los libros de texto más recientes o los resultados de los proyectos de investigación dirigidos al diseño curricular de matemáticas, cuyos autores suelen tratar de presentar los conceptos a los estudiantes mediante figuras o construcciones que los representen y describan. Esto es más evidente en la enseñanza primaria, pero también en la secundaria se recurre cada vez con más frecuencia a las representaciones gráficas como modo de hacer más comprensibles los nuevos conceptos matemáticos, a pesar del mayor grado de rigor con que suelen desarrollarse las clases en los cursos superiores.

Al elegir un modelo físico o gráfico que represente un determinado concepto matemático, normalmente se tiene cuidado para seleccionar el que parezca más adecuado en función de variables como la fidelidad con que el modelo representa al concepto o los conocimientos previos de los estudiantes. Pero hay otra variable que tiene una gran influencia en el éxito de un modelo, es decir, en su capacidad para representar y transmitir el concepto representado: la facilidad con que los estudiantes interpretan los objetos o las figuras y les dan el significado conceptual que los autores quieren comunicar. Las representaciones que resultan demasiado complejas a los estudiantes, las que sólo son capaces de transmitirles los conceptos de forma parcial o, lo que es peor, que les sugieren ideas equivocadas, son representaciones inadecuadas y deben evitarse.

Este problema está presente siempre que tenemos que representar estructuras u objetos geométricos tridimensionales mediante figuras planas, cosa inevitable mientras la enseñanza se siga basando, casi exclusivamente, en libros de texto, pizarra y libretas de los estudiantes. Por lo tanto, la elección de un buen modelo de representación plana de sólidos es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial.

EL CASO DE LA GEOMETRÍA ESPACIAL

Al enseñar geometría espacial, el proceso de comprensión del concepto subyacente a una representación plana se complica debido a que hay que recorrer dos pasos: 1) interpretación de la figura plana para convertirla en un objeto tridimensional y 2) interpretación de este objeto (que en muchos casos sólo existe en las mentes de los estudiantes) para convertirlo en el concepto geométrico objeto de estudio. Por lo tanto, siempre que estemos manejando objetos espaciales y nos veamos obligados a representarlos mediante figuras planas, tendremos planteado un problema que tiene que ver con la capacidad de visión espacial de los estudiantes y con su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales o para interpretar correctamente las representaciones hechas por otras personas.

La capacidad de visualización espacial es uno de los elementos clave de este problema, pero no la voy a analizar de forma particular aquí. Son numerosas las publicaciones dedicadas a este tema, parte de las cuales lo analizan desde una perspectiva puramente psicológica, como Denis (1989) y Kosslyn (1980), y otras desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas. Algunos textos que pueden servir para iniciar el estudio de la visualización espacial en relación con la didáctica de las matemáticas son los de Bishop (1983, 1989), Clements (1981, 1982), Gutiérrez (1996b), Krutetskii (1976), Presmeg (1986) y Zimmermann y Cunningham (1991).

La importancia y necesidad de utilizar representaciones planas para la enseñanza en asignaturas de numerosas especialidades, en las que intervienen objetos 3-dimensionales, tienen como consecuencia que las características de dichas representaciones hayan sido objeto de estudio bajo diversas perspectivas (didáctica, psicológica, técnica, artística, etc.) desde hace bastantes años. El objetivo de este artículo es reflexionar sobre algunos aspectos específicos del problema de la utilización por los estudiantes de representaciones planas de cuerpos tridimensionales como parte de su aprendizaje de la geometría espacial. Para ello presentaré diversos resultados de investigaciones y sugerencias a los profesores.

ANTECEDENTES

Hay diversas formas de representación plana de cuerpos tridimensionales usadas frecuentemente en matemáticas y en otras áreas científicas, técnicas o artísticas. La elección de una u otra debe depender del uso que se vaya a hacer de ella. Gaulin y Puchalska (1987) presentan ejemplos de varias formas de representación útiles para la geografía, arquitectura, ingeniería, etc. y también para las matemáticas. Entre las más frecuentes en el contexto de la geometría se encuentran la representación por niveles y las proyecciones en perspectiva, paralela (caballera), isométrica, ortogonal y ortogonal codificada.

En las investigaciones que comento en este artículo, los sólidos utilizados han sido los habituales de la geometría espacial escolar (cubo, prisma, pirámide, cilindro, etc.) y el "módulo multicubo", que es un sólido formado por varios cubos iguales pegados de manera que sus caras se superponen. La Figura Nº 1 muestra las formas mencionadas de representación plana de un módulo multicubo (la proyección ortogonal es igual a la ortogonal codificada sin los números).[2] La ventaja de los módulos multicubo sobre los poliedros o cuerpos redondos habituales es que permiten trabajar fácilmente en diversidad de problemas de construcción a partir de representaciones planas, gracias a la existencia de diversos materiales didácticos formados por cubos encajables (por ejemplo Multilink o Centicubos), cosa que es mucho más difícil en el caso de los cuerpos espaciales (cubos, prismas, pirámides, etc.).

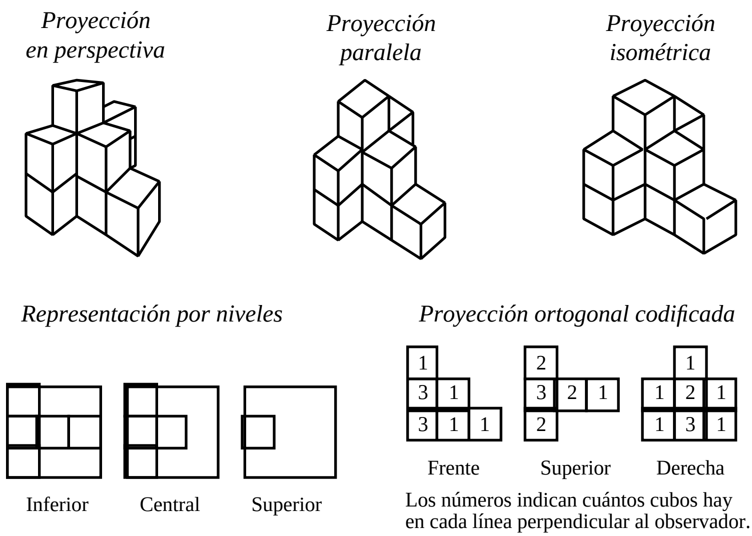


Figura Nº 1. Representaciones planas de un módulo multicubo

En la actualidad disponemos de bastantes resultados de investigaciones sobre la capacidad de uso de representaciones planas por los estudiantes. Al-

2. La proyección en perspectiva representa nuestra visión real de los cubos, en la que las aristas más distantes se ven más pequeñas y las líneas paralelas que se alejan se ven convergentes. La proyección paralela es análoga a la perspectiva excepto en que las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, independientemente de su dirección. Por lo tanto, esta representación distorsiona la visión real de los sólidos. La proyección isométrica es un caso particular de paralela, en la que los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de determinado vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120°. La proyección ortogonal está formada por las tres proyecciones de los sólidos sobre tres planos ortogonales (como el rincón de una habitación). La proyección ortogonal codificada es una proyección ortogonal a la que se le añade algún tipo de código que aporta información adicional (en este caso, la cantidad de cubos de cada fila). Finalmente, la representación por niveles consiste en hacer al sólido diversos cortes paralelos, por puntos significativos (en este caso, por cada plano de cubos).

gunas de ellas han abordado la cuestión del aprendizaje de conceptos matemáticos en contextos en los que la capacidad de visualización desempeña un papel importante. Así, Ben-Chaim, Lappan y Houang (1985) y Battista y Clements (1996) han constatado las dificultades de los estudiantes de primaria para calcular la cantidad de cubos que hay en módulos multicubo con forma de prismas rectangulares representados en proyección isométrica o paralela. Entre las diferentes estrategias encontradas, muchas se muestran ineficaces debido a errores en la interpretación de las representaciones planas. Otras investigaciones han observado que, como consecuencia de esta dificultad, los estudiantes no comprenden la multilinealidad del volumen, lo cual les lleva a aplicar mal las fórmulas de cálculo de volúmenes (Ricco, Vergnaud y Rouchier, 1983).

Numerosas investigaciones han analizado la influencia de diversos tipos de diferencias individuales (inteligencia general, capacidad de imaginación espacial, género, conocimientos matemáticos específicos, etc.). En cuanto a las diferencias de género, las investigaciones son casi unánimes en reportar más desarrollo de la capacidad de visualización en los hombres que en las mujeres, pero capacidades similares en razonamiento lógico (Battista, 1990; Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1985; Clements y Battista, 1992). Por otra parte, se ha observado que la enseñanza específica aumenta la capacidad de los estudiantes para manejar las relaciones entre los cuerpos espaciales y sus representaciones planas, obteniéndose mejores resultados cuando la enseñanza se basa en el uso de materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992). No es de extrañar, por tanto, que haya acuerdo casi unánime entre los diversos autores en la necesidad de desarrollar y experimentar unidades de enseñanza con el objetivo del aprendizaje, desarrollo y transferencia a otros campos de habilidades para la conexión entre los espacios de 2 y 3 dimensiones. En particular, para la enseñanza de la geometría espacial, la habilidad de estudiantes y profesores para producir representaciones planas adecuadas y para interpretarlas es un elemento básico necesario para lograr el éxito en el aprendizaje. Por lo tanto, es importante prestar atención al desarrollo de las destrezas de realización e interpretación de representaciones planas de los estudiantes y potenciarlas desde los primeros cursos de primaria, sin olvidar ninguna de las dos direcciones de paso entre el plano y el espacio: dibujo de representaciones planas de sólidos y construcción de sólidos a partir de sus representaciones planas. Aunque, obviamente, ambas acciones tienen muchos puntos en común, también tienen diferencias importantes en cuanto a su aprendizaje y utilización por los estudiantes de geometría. En este artículo me centraré preferentemente en la que considero más problemática para los estudiantes de primaria y secundaria, la realización de representaciones planas.

DEL ESPACIO AL PLANO

Una representación plana perfecta es la que transmite al observador la misma cantidad de información que el cuerpo tridimensional real al que representa. Desgraciadamente, ninguna forma de representación plana de cuerpos espaciales es perfecta, por lo que es necesario que los estudiantes sean capaces de manejar varias de ellas, para poder seleccionar la más adecuada en cada caso. Parzysz (1988) plantea la existencia de diversos niveles de representación de un sólido geométrico (entendido como el objeto teórico caracterizado por su definición matemática formal), a los cuales corresponden diferentes cantidades de información perdida. El primer nivel corresponde a las formas de representación próximas a los sólidos, representaciones 3-dimensionales como los modelos de madera, papel o varillas. Incluso en estos casos, se pierde información porque, por ejemplo, en los modelos de madera no se pueden ver las diagonales interiores del sólido. El segundo nivel de representación corresponde a las formas de representación más alejadas de los sólidos, representaciones bidimensionales como las mostradas en la Figura Nº 1. Algunas de estas representaciones (por ejemplo la perspectiva) conservan información del aspecto visual de los sólidos, pero pierden la correspondiente a la parte oculta de los sólidos. Otras representaciones (por ejemplo la ortogonal) mantienen la información sobre la estructura de los sólidos (cantidad de elementos, posiciones relativas, etc.), pero pierden la referente a su aspecto visual.

Además, parte de la información que se conserva se debe a que, tanto al hacer la representación plana como al interpretarla, se han compartido determinados códigos y claves, por lo que determinados datos objetivos se interpretan siempre de la misma forma. Esto es lo que Parszyz (1988) llama "restitución del significado". La ignorancia de estos códigos, característicos de cada tipo de representación plana, hace que se produzca una lectura errónea de las representaciones planas. Por ejemplo, el dibujo de la Figura Nº 2 corresponde a un cubo si lo consideramos como una proyección paralela, pero corresponde a un tronco de pirámide si lo consideramos como una proyección en perspectiva. Por lo tanto, una parte central del aprendizaje de los métodos técnicos de representación plana consiste en el aprendizaje explícito de los convenios implícitos y los significados de las claves en que se basa cada método.

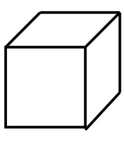


Figura Nº 2

Como en tantas otras áreas de las matemáticas, antes de iniciar el aprendizaje formal de las representaciones planas, los estudiantes ya han adquirido una experiencia extraescolar que los profesores no deben ignorar. Esta experiencia consiste, generalmente, en el desarrollo de la habilidad de dibujo libre que, en su fase final de perfección se convierte en la proyección en perspectiva. No obstante, investigaciones que han observado el comportamiento espontáneo (previo a cualquier instrucción) de estudiantes ante tareas de representación de sólidos han encontrado diversos tipos de representaciones, los cuales tienen, generalmente, una estrecha relación con el contexto planteado en la actividad.

Recientemente hemos realizado investigaciones (Guillén et al., 1992; Gutiérrez et al., 1994) sobre formas de instruir a los estudiantes (de diversos cursos de primaria y secundaria) en el uso de los diferentes métodos de representación de cuerpos espaciales. Los participantes en los experimentos no tenían ninguna experiencia escolar previa en este tipo de actividad. Antes de empezar la instrucción, les propusimos algunas actividades de descripción de módulos multicubo. En cada actividad un estudiante debía dar instrucciones a sus compañeros para que construyeran un módulo que sólo él veía. En la primera actividad un estudiante hacía la descripción dando las instrucciones verbalmente, mientras veía, en un monitor de televisión, lo que hacían sus compañeros, y los niños podían hablar entre sí. La segunda actividad se diferenciaba de la primera en que no había monitor de televisión. En la tercera actividad los estudiantes debían plasmar las instrucciones de construcción de un módulo en una hoja de papel.

Descripciones verbales

La característica principal de las descripciones de las dos primeras actividades es que se basaron en propiedades internas del módulo, es decir en relaciones de posición entre los cubos que lo formaban. Los estudiantes daban instrucciones de tipo constructivo pidiendo, generalmente, añadir cubos a la parte del módulo ya construida. Sólo excepcionalmente los estudiantes recurrieron a instrucciones basadas en la forma de los módulos o de partes de ellos. Otra característica común a las sucesivas descripciones hechas en estas dos actividades fue la aparición de ambigüedades. Así, en la primera actividad eran frecuentes las instrucciones que se referían a “el cubo” de cierto color cuando había varios cubos de ese color. La siguiente transcripción es un ejemplo de esta actividad, realizada por tres estudiantes de 6º de primaria[3]:

3. En las transcripciones se notará con E, E1 y E2 a los estudiantes que participaron en las actividades, y con I al investigador.

E1: Poned 3 cubos uno encima del otro.

Ahora coged otros 2 … aparte. Y ahora otros 3.

Ahora juntadlos y el [grupo] de 2 que esté en medio … que esté acostado.

Ahora le ponéis uno encima del [cubo] verde.

E2: ¡Es que hay 3 verdes!

E1: Colócalo en uno, a ver [E1 mira en el monitor de televisión lo que han hecho sus compañeros] … No, en el otro … Sí.

Ahora poned otro [cubo] encima del negro [E1 mira en el monitor de televisión lo que han hecho sus compañeros] … No; encima de ése no; del otro.

Esta forma de ambigüedad desapareció en la segunda actividad, pues el estudiante que daba las instrucciones ya no veía lo que hacían sus compañeros, pero surgió la ambigüedad de pedir poner un cubo "al lado" de otro cuando éste tenía varias caras disponibles. El siguiente es un ejemplo de la segunda actividad, dirigida por el mismo estudiante, que al no poder ver lo que hacen sus compañeros, sustituye las referencias a colores por referencias a posiciones:

E1: Haced 2 filas de 3 [cubos] y juntadlas … Una la ponéis horizontal y la otra vertical, pero como el otro día [se refiere a la primera actividad], encima de ella.

E2: Las juntamos, pero ¿por qué cubo? ¿por el de en medio o …?

E1: Por el 1 ó el 3.

Haced una fila de 2 … y ponedla como la de antes, pero en el otro [cubo] … o sea, si antes era en el 3, en el 1.

Ahora, en el 3 de antes, en el de arriba del todo, ponéis 2 [cubos], uno a cada lado.

Descripciones sobre papel

Por lo que se refiere a las representaciones en papel, tanto nuestra propia experiencia como las de otros investigadores coinciden en identificar tres tipos básicos de representaciones de sólidos. En la Figura Nº 3 se puede ver un ejemplo de cada tipo de descripción de un módulo multicubo, hechas por un estudiante de 4º (Figura Nº 3-a) y dos de 6º de primaria (Guillén et al., 1992). Estos tipos intuitivos no corresponden a ninguna de las formas técnicas descritas en la Figura Nº 1, aunque a veces puedan parecerse a alguna de ellas. Son los siguientes:

1) Representaciones gráficas (Figura N^{o} 3-a), en las que, si hay algo de texto, éste es irrelevante y no ofrece ninguna información adicional, de manera que podría eliminarse sin que se perdiera información. Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989), como parte de la experimentación de una unidad de enseñanza de habilidades de visualización espacial, dieron a un grupo de más de 50 estudiantes de 6º a 8º grados un módulo multicubo y les dijeron que tenían que "ayudar a un amigo para que supiera cómo era el módulo que ellos estaban viendo". En el test previo a la enseñanza, 30.6% de los estudiantes usó métodos gráficos para describir el módulo, mientras que en el post-test, como consecuencia de la enseñanza, 65.4% de los estudiantes usó estos métodos. En otro estudio, Burton, Cooper y Leder (1986) pidieron a un grupo de 131 futuros profesores que "escribieran una descripción del módulo que tenían delante para que un distribuidor de materiales didácticos pudiera proporcionárselo". El 21% de los participantes hizo descripciones gráficas del sólido.

2) Representaciones verbales (Figura N^{o} 3-b), en las que los dibujos, si aparecen, tienen un valor secundario y pueden omitirse sin que se pierda información. En el experimento de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989) mencionado antes, 32.3% de los estudiantes usó representaciones verbales en el pre-test, mientras que sólo 1.9% las usó en el post-test. En el experimento de Burton, Cooper y Leder (1986), 6% de los sujetos hizo descripciones verbales.

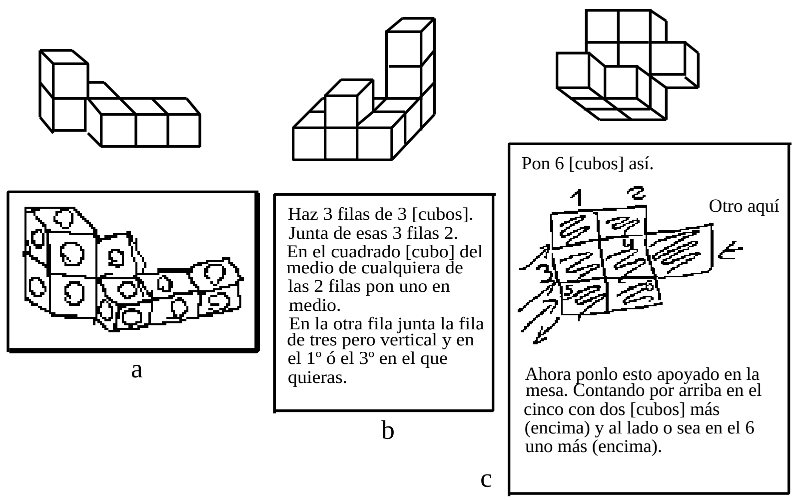


Figura Nº 3. Representaciones de los módulos multicubo de la línea superior

3) Representaciones mixtas (Figura Nº 3-c), formadas por un dibujo y un texto que se complementan. En este caso, tanto el dibujo como el texto aportan información importante, por lo que suprimir uno de los dos supone perder parte de la información contenida en la descripción. En el experimento de Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989), 37.1% de los estudiantes usó representaciones mixtas en el pre-test, y 32.7% las usó en el post-test. En el experimento de Burton, Cooper y Leder (1986), 73% de los sujetos hizo descripciones mixtas.

Tanto en las investigaciones mencionadas antes como en otras, los resultados obtenidos muestran una amplia variedad de formas de representación plana de sólidos que, independientemente de su corrección y calidad, van desde las totalmente gráficas hasta las totalmente verbales, con un variado grupo de representaciones mixtas en las que los dibujos y el texto tienen más o menos peso en la descripción. Además, la diversidad de formas de representación que surjan en un experiencia particular, y la frecuencia de cada una, tiene mucho que ver con la manera como se haya planteado el ejercicio, como lo muestran los dos casos descritos en los párrafos anteriores. Los tests empleados para determinar las habilidades de representación plana de los individuos sugieren algunas reflexiones en relación con el uso de estos tipos de ejercicios en clase:

1) La mayor o menor complejidad de los sólidos empleados puede inducir diferentes tipos de respuestas. Por ejemplo, Burton, Cooper y Leder (1986) utilizaron dos módulos de complejidad diferente (Figura Nº 4) y dividieron a los sujetos en dos grupos, cada uno de los cuales trabajó con uno de los módulos. Al analizar los resultados, se observan diferencias significativas entre las respuestas de los dos grupos.

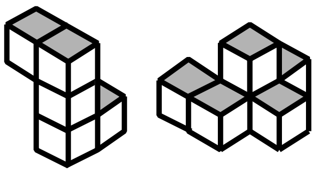


Figura Nº 4

2) La forma de enunciar el problema puede inducir determinado tipo de respuestas. Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989) ponen de relieve la influencia de determinadas palabras clave. Por eso, al escribir el enunciado de su actividad, eligieron cuidadosamente el vocabulario, evitando palabras como “dibujar”, “describir”, “explicar”, “escribir”, etc. Al

mismo tiempo, es necesario tener en cuenta el contexto en que se plantea la actividad: hay diferencia, por ejemplo, entre un enunciado que pida representar una figura para recordar cómo era, otro que pida representarla para que otra persona que no la ha visto pueda construirla, o el muy frecuente enunciado que pide describir la figura hablando por teléfono con otra persona.

3) Cuando se plantean varias actividades seguidas, las primeras actividades pueden influir en la forma de resolver las siguientes, ya que muchos estudiantes tienen la tendencia a usar siempre el mismo método de representación, aunque en los nuevos ejercicios no sea el más adecuado.

4) De las diferentes formas de dibujo de sólidos, la perspectiva es la más natural y frecuente, aunque también es una de las más difíciles de realizar con corrección. De hecho, generalmente los dibujos que se ven en los libros de texto y los que aprenden a hacer los estudiantes son proyecciones paralelas. Es usual, por ejemplo, que los profesores enseñen a sus alumnos a dibujar un cubo a partir de dos cuadrados iguales y uniendo los vértices correspondientes (Figura Nº 5).

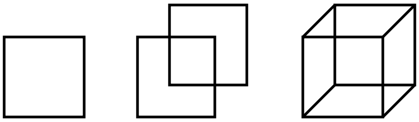


Figura Nº 5

La dificultad que tienen los estudiantes para hacer buenos dibujos en perspectiva o en proyección paralela va emparejada a la dificultad de los investigadores para descubrir las claves del aprendizaje de esta destreza. Hay varias componentes, de muy distinto carácter, que se han analizado: evolutiva, destreza de dibujo y cultural.

Evolución de la habilidad de dibujo en perspectiva

Un trabajo muy interesante que intenta describir el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva es el descrito en Mitchelmore (1976, 1980). Este investigador propone la existencia de cuatro etapas (de tipo piagetiano).

Etapa 1: Esquemática plana. Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente (Figura Nº 6).

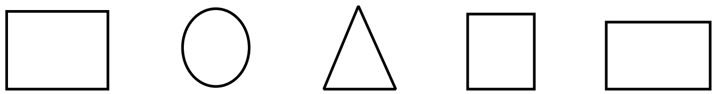


Figura Nº 6

Etapa 2: Esquemática espacial. Las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente y, a veces, incluyendo caras ocultas. Las representaciones siguen sin dar sensación de profundidad (Figura Nº 7).

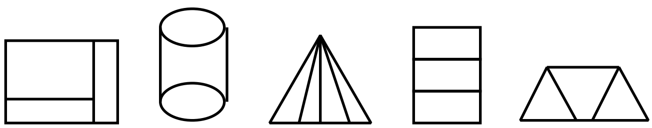


Figura Nº 7

Etapa 3: Pre-realista. Los dibujos muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad, aunque sin conseguirlo plenamente. Esta etapa está dividida en dos subetapas, cuya diferencia está en la perfección de los dibujos en cuanto a su tridimensionalidad (Figura Nº 8).

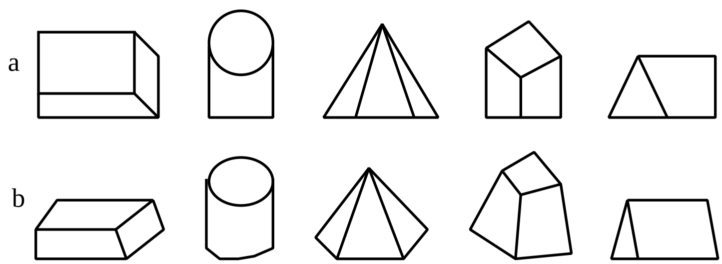


Figura Nº 8

Etapa 4: Realista. Los dibujos son bastante correctos y siguen, aunque sea aproximadamente, las reglas del dibujo en perspectiva, en particular las referentes a las líneas que convergen en un punto del infinito (Figura Nº 9)

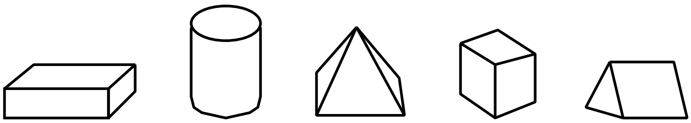


Figura Nº 9

Posteriormente, otras investigaciones y experimentaciones han confirmado los resultados de Mitchelmore. Véanse, por ejemplo, Gaulin (1985); Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989); Woodrow (1991); y Guillén et al. (1992). La Figura Nº 10 muestra ejemplos de representaciones de pirámides de base cuadrada, paralelepípedos, cubos y octaedros regulares hechas por nuestros alumnos en las experimentaciones mencionadas anteriormente.

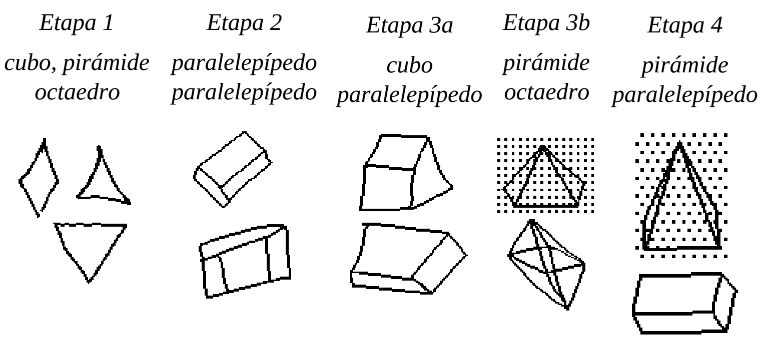


Figura Nº 10

Al encontrar esta diversidad de dibujos, cabe preguntarse si los niños “ven” los sólidos de la manera como los representan o si es que no son capaces de representar lo que ven debido a que carecen de capacidad para coordinar las diferentes direcciones de los segmentos que integran la representación plana de un poliedro, es decir que carecen de habilidades de dibujo. A esta pregunta se puede contestar claramente que se trata de lo segundo. Generalmente, los niños son conscientes de la incorrección de sus dibujos; en ocasiones los borran y los rehacen una y otra vez, pero suelen seguir cometiendo incorrecciones similares, cosa de lo cual son conscientes y que les puede producir una sensación de frustración e incapacidad si no cuentan con la ayuda del profesor. En la Figura Nº 11 vemos representaciones, dibujadas por alumnos de 6º de primaria, de sólidos que estaban situados en la mesa delante de ellos. Las líneas gruesas corresponden al último dibujo, mientras que las finas corresponden a intentos previos que los estudiantes borraron porque se daban cuenta de que no eran correctos. Por ejemplo, la niña que hizo la representación (b) hacía un dibujo y, al compararlo con el modelo 3-dimensional, se daba cuenta de la incorrección en la forma de las caras laterales de izquierda y derecha, por lo que borraba esas partes del dibujo y las repetía. A pesar de su objetivo de hacer un dibujo mejor, volvía a dibujar las aristas casi igual que antes. Tras varios intentos, desistió. Algo similar se aprecia en el caso (c).

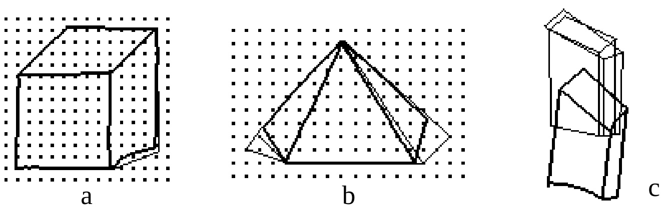


Figura Nº 11

Por lo tanto, parece que el problema está, por lo menos parcialmente, en la poca habilidad de coordinación de los niños. Los dibujos de poliedros están formados por conjuntos de segmentos paralelos, perpendiculares y oblicuos que se tocan o cortan. Tanto al trabajar en geometría espacial como en isometrías o en polígonos, se puede comprobar fácilmente que unos segmentos pueden actuar como distractores de otros y que determinadas direcciones de dibujo (en particular la vertical y la horizontal) son más fáciles que otras. Por lo tanto, la habilidad de dibujo es un factor que afecta realmente a la capacidad para hacer representaciones de sólidos, y los educadores hemos de ser conscientes de que esta habilidad no crece de manera espontánea, o lo hace con mucha más lentitud que si se realizan tareas específicas en las clases. En mis experimentaciones he podido comprobar este hecho, pues los estudiantes manipularon sólidos reales y diferentes tipos de representaciones planas suyas (tanto en papel como en la pantalla de un ordenador) en numerosas actividades diseñadas para mejorar sus habilidades de visualización espacial, pero no recibieron instrucción específica sobre técnicas de dibujo en perspectiva. Al comienzo de las actividades les pedimos que dibujaran algunos de los poliedros que iban a manejar (todos ya conocidos por los estudiantes, excepto por los de 2º curso de primaria). Posteriormente, durante la experimentación y al final de la misma, les pedimos otras dos veces (con un lapso de cuatro y seis semanas respecto de la primera prueba) que dibujaran los mismos poliedros. Al comparar los dibujos de cada niño, se puede comprobar que no hay diferencias significativas entre las distintas pruebas.

Influencia de factores culturales en la habilidad de dibujo en perspectiva

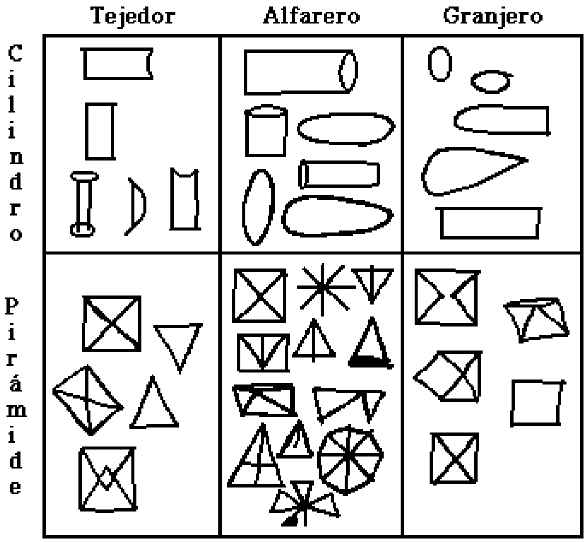


Figura Nº 12. Representaciones de los mismos sólidos por niños de diferentes ocupaciones

En diferentes estudios se ha observado que hay una fuerte influencia del entorno y la tradición cultural en la forma de realizar representaciones planas. En Mitchelmore (1976, 1983) y Hershkowitz (1990) se recopilan investigaciones hechas en diversos países de América, Africa y Asia. Un ejemplo interesante es el de Mukhopadhyay (1987) (citado en Hershkowitz, 1990), que pidió a niños de entre ocho y doce años de edad, de pueblos aislados de India, con muy poca o ninguna escolaridad y sin ninguna influencia de la cultura occidental, que dibujaran un cilindro y una pirámide que les mostró. Se pueden apreciar (Figura Nº 12) diferencias entre los dibujos hechos por niños cuyas familias tenían diferentes ocupaciones: tejedores, alfareros y granjeros. Otro ejemplo lo tenemos en la Figura Nº 13, que representa un fragmento de un dibujo mexicano en el que llama la atención la representación de la mesa y las sillas.

Figura Nº 13. Fragmento de un dibujo tradicional mexicano

La influencia cultural no es específica de la geometría espacial, pues en investigaciones realizadas en otros campos de la geometría se han detectado, por ejemplo, claras diferencias entre estudiantes asiáticos y europeos. Una conclusión importante es que las diferencias principales se deben a la existencia de convenios de origen tradicional sobre la forma de interpretar determinados símbolos o dibujos. Naturalmente, cuando se analizan las representaciones basadas en unos convenios desde la perspectiva de otros convenios, se encuentran "errores" y se producen valoraciones cualitativamente más bajas de lo debido. Reconocer la existencia e influencia de este factor puede ser de gran importancia en la planificación y diseño curricular, pues utilizar ideas o métodos de enseñanza de éxito en otros países culturalmente alejados puede dar lugar a la incomprensión de los estudiantes por el choque entre sus concepciones naturales y las subyacentes en los libros de texto.

Evolución de la habilidad de utilización de representaciones técnicas

Son varios los trabajos que se han publicado en torno a los diferentes tipos de representaciones planas técnicas (por niveles, ortogonales e isométricas). Sin ánimo de ser exhaustivo, se pueden mencionar Clements y Battista (1992) y Hershkowitz (1990), en los que se hacen resúmenes del tema; otras publicaciones presentan los resultados de trabajos en los que se han experimentado conjuntos de actividades para el aprendizaje de las diferentes formas de representación plana mencionadas aquí, como Cooper y Sweller (1989), Gutiérrez (1996a), Izard (1990), Winter et al. (1986) y Young (1982). En ellos se adoptan diferentes enfoques y se plantean diversos tipos de actividades, tanto de dibujo de representaciones como de identificación o construcción de sólidos a partir de ellas.

Al preparar la enseñanza para estudiantes de una determinada edad, hay dos decisiones que tomar, relativas a los tipos de representaciones que se van a utilizar y a los tipos de tareas que se van a proponer a los estudiantes: dibujar o construir sólidos. Cada tipo de representación tiene sus propias características diferenciadoras, que se convierten en la práctica en características de facilidad o dificultad. Las dificultades que encuentran los estudiantes al aprender estos métodos de representación podemos calificarlas como *conceptuales*, cuando tienen que ver con la comprensión de las características de la representación, o *técnicas*, cuando tienen que ver con las estrategias de dibujo o construcción. Como pauta general, podemos decir que las representaciones por niveles son las más fáciles tanto para dibujar como para construir, que construir a partir de representaciones ortogonales es más difícil que a partir de isométricas, y que, por el contrario, dibujar representaciones isométricas es más difícil que dibujar ortogonales.

En las investigaciones que he realizado, con actividades basadas en módulos multicubo, he utilizado representaciones por niveles como la que se muestra en la Figura Nº 1. En esta forma de representación, el marco de referencia (la cuadrícula sobre la que se dibujan los diferentes niveles) es indispensable para poder coordinar los diferentes niveles y permitir una reconstrucción correcta. Por otra parte, dos sólidos diferentes siempre tendrán representaciones por niveles diferentes, cosa que no ocurre en las otras formas de representación, en las que podemos encontrar casos de una representación que corresponde a varios módulos diferentes. Estas experimentaciones nos han mostrado que incluso niños de 2º curso (7-8 años) pueden llegar a dibujar representaciones por niveles y a construir los sólidos representados correctamente. La metáfora de ver los módulos multicubo como bloques de apartamentos y los cubos como habitaciones les ayuda mucho, si bien al principio no entienden la necesidad del marco de referencia debido a que no relacionan unos niveles con otros. La Figura Nº 14 muestra un ejemplo de este comportamiento: cada nivel está dibujado correctamente, pero los marcos no son más que rectángulos que rodean, a distancias aleatorias, los dibujos de los niveles.

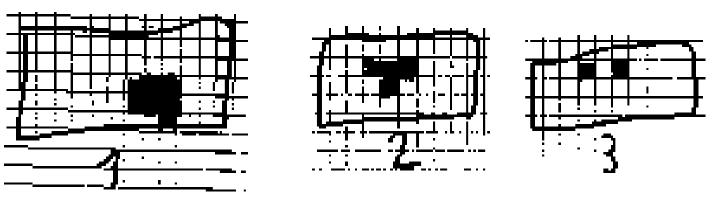


Figura Nº 14

Para tratar de superar esta dificultad, en las siguientes actividades de representación les dábamos a estos niños plantillas, en las que ellos sólo tenían que poner cruces en los cuadrados apropiados (Figura Nº 15), y les planteábamos ejemplos para que entendieran la necesidad del marco.

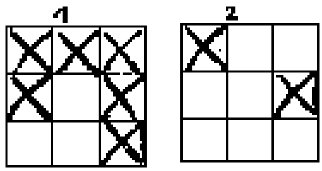


Figura Nº 15

A pesar de que resolvieron correctamente todas estas actividades, cuando volvieron a trabajar con papel en blanco, volvieron a cometer el mismo tipo de errores (Figura Nº 16).

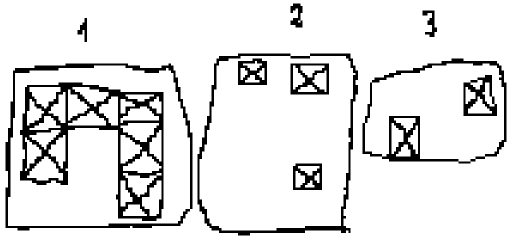


Figura Nº 16

La incapacidad que hemos observado en estos niños de 2º curso de primaria para coordinar las diferentes partes de una representación por niveles (es decir, identificar las posiciones de los niveles y superponerlos correctamente) está también presente cuando utilizan las representaciones isométricas y ortogonales, pero ahora no sólo en los estudiantes de los primeros cursos de primaria, sino en todos los cursos de primaria y primeros cursos de secundaria: para construir un módulo multicubo a partir de sus vistas ortogonales (codificadas o no), es necesario coordinar dos o más vistas para determinar la posición de cada cubito. Para dibujar representaciones isométricas, es necesario diferenciar los tres planos ortogonales en los que se sitúan las caras de los cubos de un módulo y asociar a esos planos las posiciones de los rombos que representan isométricamente las caras de los cubos del módulo, coordinando las elecciones de las tres posiciones de los rombos para evitar incongruencias en la representación (Figura Nº 17).

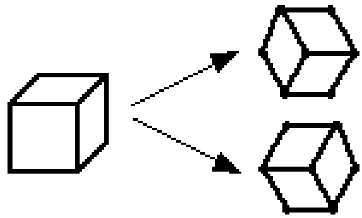


Figura Nº 17. Las dos formas posibles de "ver" isométricamente el cubo de la izquierda

En nuestras actividades siempre dábamos a los estudiantes representaciones ortogonales formadas por tres vistas y representaciones ortogonales codificadas formadas por dos vistas. La incapacidad de muchos estudiantes para coordinar las diferentes proyecciones ortogonales al construir un módulo multicubo se refleja en su forma de trabajo: se fijan en una de las proyecciones dibujadas, generalmente la frontal, y construyen un módulo plano (es decir, con todos los cubos en el mismo plano) que corresponde a dicha proyección. A continuación, se fijan en otra proyección, generalmente la lateral, y añaden al módulo otro plano de cubos, perpendicular al anterior, que corresponda a la segunda proyección. Por último, se fijan en la tercera proyección, generalmente la superior, y tratan de modificar las posiciones de algunos cubos para que el módulo construido se ajuste a esta proyección. En muchos casos, los estudiantes son incapaces de resolver este problema debido a que, cuando cambian o añaden un cubo para ajustar el módulo a una de las proyecciones, no se fijan en las otras dos proyecciones y, por lo tanto, no se dan cuenta de que estropean el ajuste a otra proyección, lo cual se convierte en un círculo vicioso que, en muchos casos, da lugar al abandono del problema.

La utilización de representaciones ortogonales codificadas supone un cambio significativo de estrategias respecto de las no codificadas. Cuando los estudiantes han comprendido el significado de los números que aparecen en las proyecciones, este tipo de representación tiene dos ventajas que lo hacen más fácil que las proyecciones no codificadas para construir los sólidos representados: 1) Los estudiantes saben desde el principio cuántos cubos tienen que utilizar, por lo que los ajustes de las diferentes proyecciones del sólido se hacen sólo moviendo cubos, sin añadir o quitar. 2) Cuando se construye un módulo que se ajusta a una de las proyecciones, es bastante alta la probabilidad de que, con muy pocos cambios, este módulo se ajuste también a la(s) otra(s) proyección(es) representada(s).

A pesar de esto, para la mayoría de los estudiantes de primaria persiste la dificultad de coordinar las distintas proyecciones de una representación ortogonal codificada cuando tratan de construir el sólido representado. Nuestras investigaciones indican que a partir de 4º curso los estudiantes empiezan a ser capaces de coordinar las proyecciones en casos sencillos o con ayuda del profesor, y que es en 8º curso cuando la mayoría de los estudiantes son ya capaces de construir por sí mismos los sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales, si bien todavía se presentan, con carácter general, ciertas dificultades en los casos más difíciles. En los cursos superiores las dificultades desaparecen al poco tiempo de iniciada la enseñanza sistemática de estas formas de representación.

Algunos autores de unidades de enseñanza han utilizado un tipo particular de módulos multicubo, formados por varias columnas de cubos apoyadas todas ellas en el suelo (ver, por ejemplo, Izard, 1990 y Winter et al., 1986). Estos módulos tienen la ventaja de que se pueden representar unívocamente dibujando sólo la proyección ortogonal codificada superior (Figura Nº 18). Por lo tanto, al construir los módulos, sólo se tiene que utilizar una proyección ortogonal y, de esta manera, se evita el problema de los estudiantes que no son capaces de coordinar varias proyecciones. Constituyen un tipo de sólido muy interesante para iniciar el estudio de estos tipos de representaciones planas.

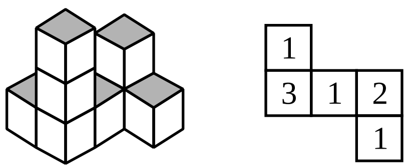


Figura Nº 18

Las representaciones isométricas son el tipo de representación más difícil de dibujar, por lo que es necesario iniciar su enseñanza de manera pausada y planteando ejercicios muy simples. La mayor parte de los estudiantes de primaria y primeros cursos de secundaria tienen dificultades importantes cuando se enfrentan a ellas por primera vez. Las causas de esta dificultad son varias: la obligación de dibujar los vértices del sólido sobre los puntos de la trama isométrica; la necesidad de situar el sólido que se va a dibujar en una posición muy precisa para poder verlo lo más parecido posible a la representación isométrica, pues en caso contrario suele ocurrir que hay que dibujar alguna cara que no vemos o hacer coincidir aristas que vemos separadas; y la imposibilidad de ver el sólido real exactamente igual que su representación isométrica, por la influencia de la perspectiva. Todas estas características deben ser comprendidas y aprendidas por los estudiantes para poder llegar a dominar el dibujo de representaciones isométricas.

La siguiente transcripción corresponde al diálogo mantenido con una estudiante de 6º curso cuando ésta intenta dibujar el módulo multicubo de la Figura Nº 19, que está apoyado en la mesa delante de ella (los números identifican los cubos del módulo durante el diálogo). A lo largo del diálogo queda patente que la estudiante analiza correctamente el módulo pero no es capaz de dibujar las caras de los cubos en la posición correcta. Tras varios intentos, la estudiante no sabe cómo empezar el dibujo, por lo que el profesor le dibuja el cubo nº 1 y le pide que asocie las caras, aristas y vértices del dibujo con las correspondientes del cubo real, cosa que hace correctamente sin dificultad.

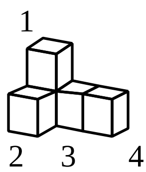


Figura Nº 19

I: Ahí tienes ese cubo [nº 1]. ¿Dónde iría el blanco [nº 2]?

E: Aquí [señala la arista inferior del cubo dibujado y empieza a dibujar]... ¡Ya! [Figura Nº 20-a; después sigue dibujando los otros cubos del módulo (Figura Nº 20-b)].

I: ¿Cuántas caras se ven en el cubo blanco [nº 2]?

E: Dos.

I: ¿Dos? No. Yo veo tres ... ésta, ésta y ésta [señalando cada cara en el módulo real].

E: ¡Ah, sí!

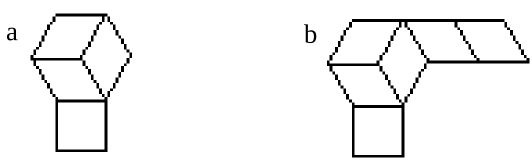


Figura Nº 20

Después de algunas explicaciones, la estudiante ya entiende que las caras de los cubos deben dibujarse siempre como rombos con los vértices en los puntos de la trama. Borra el cuadrado del dibujo que acaba de hacer y lo completa, representando las tres caras visibles del cubo nº 2 (Figura Nº 21). Como se puede observar, el siguiente objetivo de la enseñanza debe ser hacer comprender a los estudiantes la necesaria coordinación entre las caras con aristas comunes.

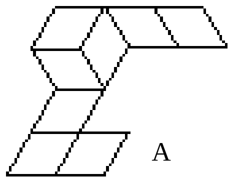


Figura Nº 21

I: Esta cara de aquí [señala la cara de la derecha del cubo nº 2], ¿cuál será?

E: Esta [señala el rombo A de la representación].

I: Pero está pegada a la de arriba … Esta blanca de arriba, [la cara superior del cubo nº 2] ¿cuál es?

[La estudiante borra la cara A y la dibuja como en la Figura Nº 22.]

I: Mira el de arriba [el cubo nº 1]. Mira aquí. Esta cara [señalando la cara derecha del nº 1], ¿está igual que ésta? [señalando la cara derecha del nº 2.]

E: Sí.

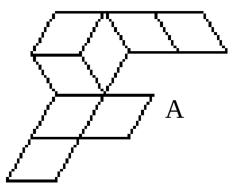


Figura Nº 22

I: Entonces, ahí [en el dibujo] tendrían que estar iguales las dos.

E: Entonces no se puede [hacer el dibujo].

I: Sí. Dibújala como la de arriba.

E: [Mientras empieza a dibujarla] No se puede [pero hace el dibujo de la Figura Nº 23].

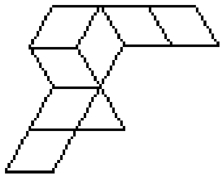


Figura Nº 23.

I: ¿Cómo que no se puede?

E: Yo no sé.

I: ¿Tú no puedes dibujar un rombo como ése [el correspondiente a la cara derecha del cubo nº 1]?

E: Sí [y lo dibuja bien, pero separado de la representación del módulo].

I: Y ahí, ¿qué forma tiene esa cara?

E: Un rombo.

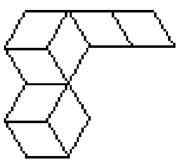
I: ¿Y por qué no lo puedes dibujar igual?

E: Porque no me sale...

I: A ver, intenta dibujar aquí [borrando la cara mal dibujada del cubo nº 2 para ayudarle].

A partir de ahora la estudiante dibuja las dos caras del cubo correctamente (Figura Nº 24-a). Después, apoyándose en la idea de buscar una cara dibujada que estuviera en la misma posición que la que quiere dibujar y copiarla, logró completar correctamente la representación del módulo (Figura Nº 24-b).

a



b

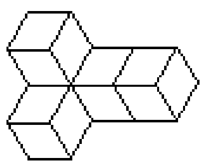
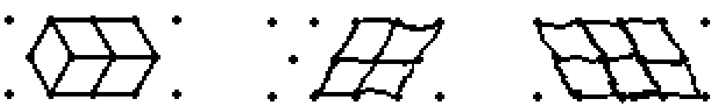


Figura Nº 24

Generalmente llega un momento en que, viendo los resultados de la actividad guiada de los estudiantes, parece que ya hayan superado este tipo de dificultades. No obstante, no es del todo cierto, pues suele ocurrir que los estudiantes no son capaces de dibujar representaciones de manera autónoma o que reaparecen los errores si les pedimos que dibujen un módulo más complejo.

El dibujo de representaciones isométricas está fuera de la capacidad de los niños de los primeros cursos de primaria. Sólo en 5º ó 6º curso empieza la mayoría de los alumnos a poder dibujar estas representaciones requiriendo poca ayuda, y es a partir del 8º curso cuando la mayoría de ellos puede comprender y aprender en poco tiempo a usar correctamente esta forma de representación.

He comentado antes que la necesidad de observar los módulos multicubo desde una posición muy particular es una dificultad importante de las representaciones isométricas. En una de las investigaciones que he realizado con estudiantes de 2º curso, empezamos la enseñanza pidiendo a los niños que, en vez de dibujar teniendo como modelo un módulo real, copiaran un dibujo ya hecho. No obstante, el fracaso fue el mismo, como se observa en la Figura Nº 25, que muestra la representación que los estudiantes tenían que copiar (Figura Nº 25-a), el primer intento de uno de ellos (Figura Nº 25-b) y su segundo intento (Figura Nº 25-c). En el primer intento, comenzó a dibujar a partir de la cara inferior derecha, mientras que en el segundo intento comenzó por la cara superior derecha. Se observa en ambos casos que el estudiante no era capaz de reconocer o representar los cambios de inclinación de las aristas. Esta incapacidad se mantuvo en los siguientes ejercicios. Esto demuestra que la principal dificultad no es sólo de tipo perceptivo, sino también psicológica, relacionada con la carencia de las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales (Del Grande, 1990).



a b c

Figura Nº 25

CONCLUSIONES

En este artículo he planteado la necesidad de que los estudiantes aprendan, mediante instrucción específica, a dibujar y leer algunas de las representaciones planas usuales de cuerpos geométricos 3-dimensionales, como medio para mejorar su capacidad para comprender la geometría espacial y facilitarles el aprendizaje de ésta.

Los profesores (sobre todo los de primaria) deben ser conscientes de cuándo sus alumnos tienen dificultades para dibujar representaciones planas y deben reaccionar de manera adecuada para tratar de evitar que una acumulación de dificultades de origen diverso dé como resultado el bloqueo de los estudiantes ante la geometría. En estos casos se puede llevar a cabo una doble actuación. Por una parte, plantear actividades de aprendizaje para mejorar las capacidades de visión espacial de los estudiantes. Por otra parte, cuando los estudiantes todavía no son capaces de realizar representaciones planas suficientemente correctas, evitar que tengan que basarse en sus propios dibujos para entender y aprender los conceptos y propiedades geométricos, buscando procedimientos alternativos, como el uso de modelos físicos, proporcionarles fotocopias para pegar, trabajar con ordenadores, u otros.

También he hecho en el artículo un recorrido por las diversas formas de representación plana más usuales, analizando las particularidades de cada una, describiendo sus aspectos más conflictivos para los estudiantes y dando algunas sugerencias al respecto. El objetivo final de este artículo es dar un toque de atención a los profesores sobre la necesidad de enseñar geometría espacial y de hacerlo en unas condiciones que favorezcan el éxito de sus alumnos.

REFERENCIAS

Battista, M.T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (1), 47-60.

Battista, M.T. y Clements, D.H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (3), 258-292.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 16* (4), 389-409.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 121-146.

Bishop, A.J. (1980). Spatial abilities and mathematics education - A review. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 257-269.

Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 176-203). New York: Academic Press.

Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 7-16.

Burton, L., Cooper, M. y Leder, G. (1986). Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers-in-training. En University of London, Institute of Education (Ed.), *Proceedings of the 10th PME Conference,* v. 1, (pp. 81-86).

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the Learning of Mathematics, 2* (2), 2-9.

Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the Learning of Mathematics, 2* (3), 33-38.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.

Cooper, M. y Sweller, J. (1989). Secondary school students' representations of solids. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (2), 202-212.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 14-20.

Denis, M. (1989). *Image et cognition.* Paris: Presses Univ. de France.

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th P.M.E Conference,* v. 2, (pp. 53-71).

Gaulin, C. y Puchalska, E. (1987). Coded graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry. En I. Wirszup y R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world. Applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students* (pp. 514-539). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Cáceres, M. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Memoria final de un proyecto de investigación subvencionado por la Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1996a). Children's ability for using different plane representations of space figures. En A.R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1996b). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference,* v. 1, (pp. 3-19).

Gutiérrez, A., Jaime, A., Guillén, G. y García, S. (1994). *Estudio de algunas variables que influyen en la comprensión y aprendizaje de la geometría espacial. Aplicación al diseño curricular de la enseñanza secundaria obligatoria* (proyecto de investigación PB93-0706 subvencionado por la DGICYT/DGES, Madrid, España).

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G. B.: Cambridge U. P.

Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 44-47.

Kosslyn, S.M. (1980). *Image and mind.* Londres: Harvard U. P.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematics abilities in school children.* Chicago: Chicago Univ. Press.

Mitchelmore, M.C. (1976). Cross-cultural research on concepts of space and geometry. En J.L. Martin y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 143-184.

Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education, 11* (2), 83-93.

Mitchelmore, M. (1983). Geometry and spatial learning: Some lessons from a Jamaican experience. *For the Learning of Mathematics, 3* (3), 2-7.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs. “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 79-92.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42-46.

Ricco, G., Vergnaud, G. y Rouchier, A. (1983). Representation du volume et arithmétisation - Entretiens individuelles avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (1), 27-69.

Winter, M.J. et al. (1986). *Spatial visualization* (Middle grades mathematics project). Menlo Park, USA: Addison Wesley

Woodrow, D. (1991). Children drawing cubes. *Mathematics Teaching, 136,* 30-33.

Young, J.L. (1982). Improving spatial abilities with geometric activities. *Arithmetic Teacher 30*, 38-43.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics* (MAA Notes n° 19). Washington: Mathematical Assoc. of America.

Angel Gutiérrez
Departamento de Didáctica de la Matemática
E.U. de Magisterio
Universidad de Valencia
Alcalde Reig 8; Apartado 22045
46071, Valencia, España
Tel.: 34-963864486
E-mail: angel.gutierrez@uv.es