REVISTA EMA
1996, VOL. 1, Nº 3, 207-213

NACE UN PROBLEMA

No es el saber sino el aprender, no el poseer, sino el adquirir, no el ser, sino el llegar a ser, lo que nos depara el mayor placer.

C. F. Gauss

Con base en el enfoque de resolución de problemas, se describe una experiencia vivida por un grupo de maestros en la que se parte de un problema que es resuelto sin mayor dificultad, pero que, al realizar la mirada retrospectiva, da lugar a un nuevo problema que invita a los participantes a un viaje exploratorio lleno de sorpresas, descubrimientos y satisfacciones.

La siguiente experiencia pedagógica tuvo lugar en el taller anual de capacitación, realizado con los maestros del área de matemáticas de diferentes colegios, a comienzos de 1996.

Se describe una experiencia de aula desarrollada según el enfoque de resolución de problemas: se plantea un problema y los alumnos recorren las etapas de comprensión del problema, elaboración de un plan para solucionarlo, ejecución del plan y mirada retrospectiva. En la última fase, un alumno plantea una pregunta que da lugar a un nuevo y verdadero problema. Con la participación activa de todos, se le da también solución al nuevo desafío.

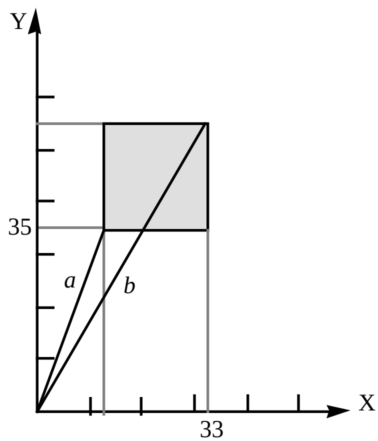

Figura Nº 1

Uno de los temas tratados fue el teorema de Pitágoras y el desarrollo de una serie de problemas que aparecen planteados en diferentes materiales de la bibliografía alemana para la escuela secundaria. Entre estos problemas se encontraba el siguiente:

> *Si el área del cuadrado es 441, hallar las longitudes de las diagonales a y b que se muestran en la Figura Nº 1.*

Como a un cuadrado de área 441 le corresponde un lado de 21, es posible determinar la abscisa y la ordenada que hacen falta. La abscisa es 33 - 21 = 12 y la ordenada 35 + 21 = 56. Con estos datos determinamos las ternas pitagóricas (12, 35, 37) y (33, 56, 65). Así pues, $a = 37$ y $b = 65$.

Al terminar de resolver el problema y cuando echábamos un "mirada retrospectiva" al mismo, como nos lo enseñó G. Polya, uno de los maestros planteó el siguiente problema:

> *¿Es posible hallar el área del cuadrado si solamente se conocen las medidas de a y b y si se sabe además que las coordenadas de sus puntos extremos, diferentes del origen, son números naturales?*

Pues bien, esta pregunta se nos convirtió en un verdadero problema y como ocurre con todo buen problema, comenzamos a andar a tientas entre la niebla de nuestra ignorancia.

Basados en la Figura Nº 2, hicimos un primer intento por resolverlo.

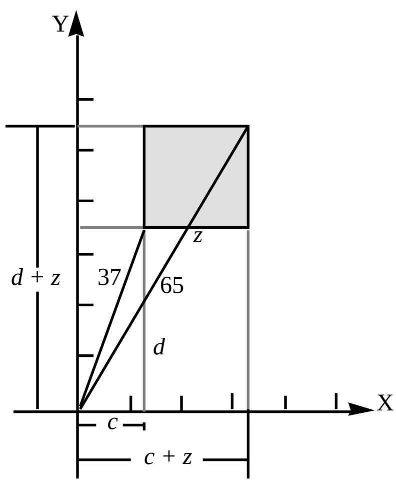

Figura Nº 2

$$c^2 + d^2 = 37^2 = 1.369 \qquad (1)$$

$$(c + z)^2 + (d + z)^2 = 65^2 = 4.225 \qquad (2)$$

al desarrollar (2) y reemplazar (1) en (2), obtenemos:

$$2z(c + d + z) = 2.856$$

$$z(c + d + z) = 1.428 \text{ donde } c, d, z \quad \mathbb{N} \qquad (3)$$

Y hasta aquí pudimos llegar. Prisioneros de nuestra costumbre de resolver problemas basados solamente en ecuaciones, detuvimos la marcha y decidimos abandonar este intento. Pronto surgió otra idea:

> *"Si c y d son naturales, probemos valores para c y d hasta que se cumpla la proposición pitagórica."*

Pero a algunos maestros no les gustó esta idea, pues eso de probar no suena a verdadera matemática. La técnica del ensayo y error no estaba incorporada en su repertorio. Eso era ponerse a adivinar y la adivinación no tiene nada que ver con las matemáticas. La estrategia probar sistemáticamente no representaba para ellos una posibilidad para realizar descubrimientos en matemáticas.

Al día siguiente retornamos al problema y descubrimos que detrás de la última idea se hallaba escondido otro problema interesante:

> *"¿De cuántas maneras diferentes se puede expresar un número cuadrado como la suma de dos números cuadrados?"*

Ya nos habíamos dado cuenta de que, por ejemplo, el número $25 = 5^2$ solamente se puede expresar de una sola manera, $5^2 = 3^2 + 4^2$, el número $36 = 6^2$ no se puede expresar como la suma de dos números cuadrados y el número $625 = 25^2$ se puede expresar exactamente de dos maneras diferentes como la suma de dos números cuadrados, $25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$. Y, ¿qué pasa con 37^2? ¿De cuántas maneras diferentes se puede representar como la suma de dos números cuadrados?

$$c^2 + d^2 = 37^2$$

$$c = \sqrt{37^2 - d^2}$$

Al introducir esta expresión en una calculadora programable, encontramos que 37^2 se puede expresar de una única manera como la suma de dos números cuadrados:

$$37^2 = 12^2 + 35^2$$

Es decir, $c = 12$ y $d = 35$. Por razones de simetría no consideramos la opción $c = 35$ y $d = 12$.

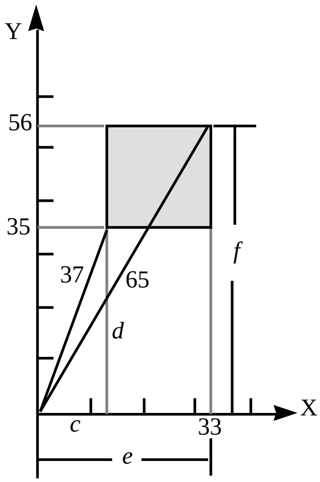

Figura Nº 3

Habiendo hallado c y d, podemos regresar a la expresión (3) y terminar de resolver el problema:

$z\,(12 + 35 + z) = 1.428$ $\quad 47z + z^2 = 1.428$ $\quad z^2 + 47z - 1.428 = 0$

$(z - 21)\,(z + 68) = 0$ $\quad z = 21$ ó $z = -68$

Entonces, el lado del cuadrado es 21.

Pero, también podemos continuar utilizando la misma idea y preguntándonos de cuántas maneras diferentes es posible expresar 65^2 como la suma de dos cuadrados.

Así, obtenemos que 65^2 se puede expresar de cuatro maneras diferentes como la suma de dos números cuadrados, a saber:

$$65^2 = 16^2 + 63^2 = 25^2 + 60^2 = 33^2 + 56^2 = 39^2 + 52^2$$

Este hecho da lugar a las cuatro interpretaciones de la Figura Nº 4.

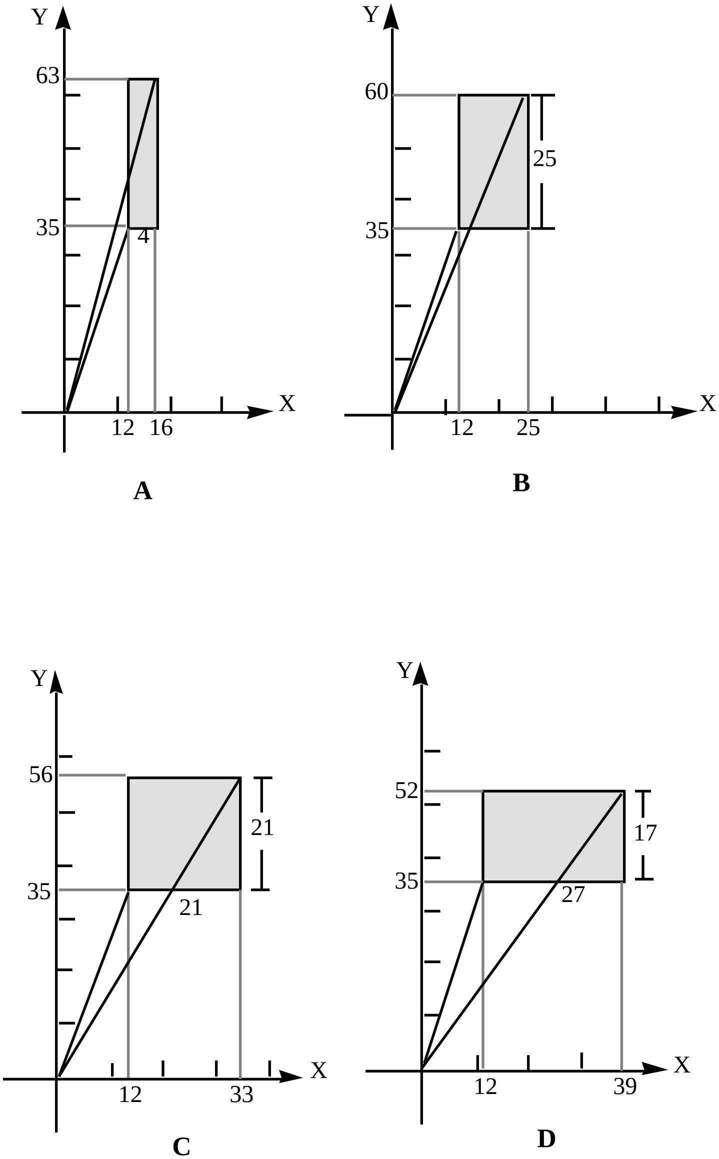
Y
63
35
4
12
16
X
A
Y
60
25
35
12
25
X
B
Y
56
21
35
21
12
33
X
C
Y
52
17
35
27
12
39
X
D

Figura Nº 4

Como se puede observar y comprobar, la única región sombreada que corresponde a un cuadrado es la presentada en la Figura Nº 4 C. El lado de este cuadrado es 21.

Es importante anotar aquí cómo el seguimiento de la segunda idea enriqueció nuestra visión del problema. Obtuvimos un conjunto de rectángulos, entre los que se encontraba un único cuadrado.

Pero nos seguía dando vueltas en la cabeza el camino abandonado. Aunque el problema estaba resuelto sentíamos un vacío, una decepción, tal vez debido al orgullo, al deseo de saber cuál secreto se nos escondía detrás de esta expresión. Así que regresamos al primer camino, para repasarlo y analizarlo. De pronto era posible que se revelara como un camino corto a las Indias.

La expresión (3) presenta a 1.428 como el producto de dos números naturales z y $(c + d + z)$. Entonces, procedimos a expresar 1.428, de todas las formas posibles, como el producto de dos factores. Como la descomposición en factores primos de 1.428 es $2^2\ 3\ 7\ 19$, se tiene que 1.428 posee $3\ 2\ 2\ 2 = 24$ divisores. Entonces 1.428 se puede expresar de 12 maneras diferentes como el producto de dos factores:

$$\begin{aligned} 1.428 = \ & 1 \cdot 1.428 = 2 \cdot 714 = 3 \cdot 476 = 4 \cdot 357 = 6 \cdot 238 = 7 \cdot 204 = \\ & 12 \cdot 119 = 14 \cdot 102 = 17 \cdot 84 = 21 \cdot 68 = 28 \cdot 51 = 34 \cdot 42 \end{aligned}$$

Así se tiene que z puede ser cualquiera de estos 24 factores. Es decir, había que considerar 24 casos para encontrar la solución.

El análisis se reduce a 12 casos pues z no puede ser mayor que 34. Los doce casos restantes quedan reducidos a uno solo por las razones que se exponen a continuación:

- Para $z = 1, 4, 7, 12, 17$ se obtiene una ecuación cuadrática que no posee raíces reales.
- Para $z = 2, 3, 6, 14$ se obtiene que cd no es natural.
- Para $z = 28, 34$ se obtiene que $2ab$ es negativo.

Queda entonces por analizar $z = 21$. En este caso se obtiene la ecuación $(c - 12)(c - 35) = 0$

Si $c = 12$, entonces $d = 35$ y si $c = 35$, entonces $d = 12$. Obtenemos así que el lado del cuadrado es 21 y que si $c = 12$, sus vértices son (12, 35), (33, 35), (33, 56) y (12, 56). Si $c = 35$, se obtiene un cuadrado de lado 21, simétrico al anterior con respecto a la recta $y = x$.

CONCLUSIONES

La experiencia descrita nos muestra cómo, a partir de un problema que interesó a los alumnos —los maestros también somos alumnos—, uno de ellos planteó un nuevo problema que resultó más interesante que el original. Los integrantes del grupo se involucraron en el nuevo problema de modo que fueron aflorando diferentes actitudes frente a la resolución de problemas en matemáticas y a los conocimientos que podían ser utilizados.

Los diferentes caminos emprendidos nos fueron planteando preguntas para las cuales buscamos y encontramos respuestas. Pero es seguramente posible que, al enfrentarnos a otros problemas, queden preguntas sin respuesta. Esto hará que la búsqueda continúe y sea la fuente de originales creaciones en matemáticas.

En todo este proceso viajamos por nuestra red de conocimientos adquiridos y de experiencias vividas, combinándolos y adquiriendo más conocimientos y experiencia. Esto es posible en un ambiente adecuado, sin tensiones negativas, donde no temamos equivocarnos y donde el objetivo no sea la competencia, que niega a los otros, sino la solidaridad que reconoce plenamente a los demás y comparte con ellos. Una actitud abierta, flexible, no egoísta de parte del maestro puede lograr que los alumnos sientan la matemática como algo vivo, como una experiencia en la que podemos hacer descubrimientos y sentirnos satisfechos del trabajo realizado.

Carlos Zuluaga
Gimnasio Moderno
Carrera 9 Nº 74-99
Fax: 2171781
Bogotá, Colombia

Benjamín Sarmiento
Colegio CIEDI
Fax: 6828079
Bogotá, Colombia