

Análisis Histórico y Epistemológico de la Noción de Cuadratura en el Libro II de los Elementos de Euclides y su Incidencia en el Concepto de Área en la Educación Básica.

Oscar Eduardo Maca Cortes, oscarema99@hotmail.com

Universidad del Valle – Sede Cali

Resumen. Este trabajo propone un análisis histórico-epistemológico del concepto de área presente en los Elementos de Euclides, en virtud de caracterizar algunas incidencias en el ámbito escolar respecto al tratamiento didáctico de la medida de superficies de figuras rectilíneas regulares e irregulares. Para tal fin, se apeló a la revisión de textos escolares de grado 7°, para determinar si en efecto hay o no hay, aportes, indicios o rastros que reflejen un tratamiento de la medida en la escuela desde el método de aplicación de áreas consignada en el libro II de los *Elementos*.

Palabras Clave: Área, Congruencia, Cuadratura, Magnitud, Medida, Patrón, Polígonos, Superficie.

1. Presentación del problema

Al parecer, en la escuela el cálculo de la medida de superficies se limita a la aplicación de fórmulas y a la sustitución de magnitudes por números, reduciendo el tratamiento de la medida a la aritmetización de patrones de medida por demás estandarizados. Por consiguiente, la medición de superficies generalmente se hace sobre polígonos regulares ya sea por recubrimiento con un patrón de medida y así por asignación numérica; o bien, mediante la aplicación de fórmulas predeterminadas o usando instrumentos de medida, dejando por fuera aquellas figuras planas donde no es posible la aplicación de una fórmula para calcular su área. De esta forma, se cree que en la escuela, la enseñanza del proceso de medición se está limitando a la mera asignación numérica que, según los lineamientos curriculares para matemáticas, (...) *éste es apenas el último subproceso de un complejo proceso de medición, y uno al que no necesariamente hay que llegar para que se pueda decir que sí hubo medición* (MEN, 1998).

La falta de un sistema numérico en Euclides y sus pretensiones teóricas en los *Elementos* (en donde el cálculo en sí no es un objetivo primordial en relación con la demostración de propiedades de los objetos) no propiciaron la realización de mediciones algorítmicamente como

las que hoy realizamos. Por tal motivo, en los dos primeros libros Euclides apela a la medida relativa⁴⁵ en la construcción con regla y compas en cada una de las proposiciones, con el fin de encontrar un cuadrado igual⁴⁶ a una figura rectilínea dada.

En relación con lo anterior, se considera que un análisis histórico es importante para la educación matemática, puesto que Anacona, M (2003) afirma que *“un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que trasciende los meros procesos algorítmicos”* (p. 42). En ese sentido, al dar cuenta de la génesis del concepto, este puede ser abordado desde distintos frentes evitando ocultar aspectos importantes que puedan servir de entrada o de base para la construcción de conceptos relacionados más complejos; así, comprender que se puede establecer una equivalencia entre áreas de figuras totalmente diferentes y establecer los criterios para esta equivalencia (y cuándo es posible comparar ordenadamente áreas de polígonos), sin tener una asignación numérica, conllevaría a ampliar las nociones que se tiene sobre la medida de superficies.

Luego, hay que reconocer que el trabajo en historia de las matemáticas reúne elementos de reflexión para el trabajo en didáctica de las matemáticas, y es que no se puede negar que la medida de superficies y la noción de área como tal, son objeto de enseñanza en los primeros años de educación secundaria y, de acuerdo a los Lineamientos Curriculares (1998) *“La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica”*(p.41); lo anterior se contrasta de modo apreciable con los parámetros propuestos en los estándares al enfatizar el uso de medidas relativas, especialmente, en el contexto de la resolución de problemas⁴⁷.

⁴⁵ El apelativo de *medida relativa* se debe a la ausencia de una escala numérica referencial que permita asignar a cada magnitud, un número correspondiente a su medida. Se trata fundamentalmente de una teoría de la medida que se establece a partir de razones y equivalencias.

⁴⁶ La igualdad, en este sentido no solo refiere a congruencia, sino a *igual cantidad de superficie*. Claramente, dos polígonos congruentes tiene la misma cantidad de superficie, pero el converso no necesariamente es cierto.

⁴⁷ Esto está contemplado en los estándares básicos para el grado 7° (MEN, 2006).

2. Metodología

Para la realización del trabajo se han considerado dividirlo en tres fases.

Primera fase: se tendrán en cuenta algunos de los referentes históricos que, cronológicamente, permiten dar cuenta de la génesis de la noción de cuadratura y su incidencia en el desarrollo de los procesos de medición; además de caracterizar el tratamiento de la cuadratura de polígonos, presente en el Libro II de los *Elementos* de Euclides. Para tal efecto, se ha apelado, como fuente primaria, a los *Elementos* y, como fuentes secundarias, los análisis de Thomas (1957) y Heath (1921) sobre la cuadratura.

Segunda fase: La segunda fase, de un orden epistemológico recoge los fundamentos teóricos del tratamiento de la medida a lo largo de la historia en la construcción de la cuadratura, su importancia como objeto matemático en virtud de lo que ha permitido solucionar y aquello que ha implicado el hecho de poder encontrar un cuadrado equivalente a cualquier figura rectilínea dada. Para establecer dichos fundamentos se estudió el texto del profesor Luis Recalde, *Número Medida y Magnitud*. Asimismo, a un análisis de las reflexiones realizadas en Chamorro (1991) y Turégano (1991).

Tercera fase: Esta fase del trabajo se ha dividido en 3 partes. En la primera parte se realizará una justificación teórica, caracterización acerca del uso de los textos escolares para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello se tendrá como referente el documento de Arbeláez *et al.* (1999).

En la segunda parte se procederá a efectuar una revisión de textos escolares de los grados 7° para el área de matemáticas teniendo en cuenta en Arbeláez *et al.* (1999). La selección de los textos escolares se realizó bajo el criterios de ser los textos “más usados” por los docentes y escuelas de la educación básica secundaria en el periodo comprendido desde el año 2002 a 2008⁴⁸.

⁴⁸ Para llevar a cabo la revisión de textos se seleccionaron los siguientes textos escolares:

Finalmente, en la tercera parte se realizará un análisis de los resultados extraídos al revisar los textos escolares y compararlos con los análisis histórico y epistemológico realizados en las fases uno y dos respectivamente.

3. Marco de referencia

El marco de referencia está compuesto por tres dimensiones: la histórica, la epistemológica y la didáctica. La dimensión histórica, cronológicamente muestra la génesis y consolidación de la construcción de la noción de cuadratura desde tres frentes. El primero tiene que ver con los trabajos anteriores a Euclides, realizados por quienes fueran los primeros en efectuar construcciones concernientes a la cuadratura del círculo: Hipócrates de Chios, quien construyó la cuadratura de la Lúnula y con ello contribuyó a la primera cuadratura de una figura curvilínea; Hippias de Elis, quien construyó la Cuadratriz, una herramienta que en principio se usó para trisecar un ángulo dado y después para intentar cuadrar el círculo; finalmente, Bryson y Antifonte, quienes fueron los precursores de lo que hoy conocemos, en Arquímedes, como el método exhaustivo, gracias a la construcción que realizaron por medio de aproximaciones por polígonos.

El segundo frente lo constituye la solución al problema de la cuadratura de polígonos en Euclides, la cual radica en la culminación del libro II de los *Elementos*, en la proposición II-14, en la que se logra construir con regla y compás un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. Euclides sustenta dicha proposición haciendo uso del resultado de las últimas diez proposiciones del libro I y gran parte del libro II, en donde se evidencia la transformación de figuras en otras de diferente forma, pero que conserven la misma área; es decir, estableciendo una equivalencia de figuras planas. El tercer y último frente recoge el método exhaustivo, usado por Arquímedes para calcular el área de un círculo, el cual consiste en demostrar que el área de éste se puede agotar al inscribir y circunscribir polígonos, pero siguiendo la condición establecida por Euclides en la proposición X-1 de los *Elementos*.

Conexiones Matemáticas 7 (2006), editorial Norma.
Nuevas Matemáticas 7 (2007), editorial Santillana.
Delta 7 (2009), editorial Norma.

La dimensión epistemológica aborda el tratamiento de la medida desde su etapa relativa y en concordancia con la construcción histórica de la noción de cuadratura se intenta rescatar su conceptualización sin el uso de la métrica, para lo cual se dispondrá de dos frentes que subdividen la etapa de la medida relativa, expuesta en Recalde, (*sf*) desde la teoría de Euclides. El primero hace referencia a la noción de equivalencia geométrica expuesto por Euclides, donde la congruencia de figuras se da en relación a la igualdad de áreas de superficies y no necesariamente a tener la misma forma. También a la relación de orden entre figuras poligonales, donde se puede comparar dos magnitudes y establecer si una es mayor que la otra o si ambas son iguales.

El segundo frente dará cuenta del *método de aplicación de áreas*⁴⁹ expuesto en los *Elementos*, donde a partir de la transformación de las figuras se logra sustraer y adicionar áreas y así establecer una equivalencia entre estas. Este método puede ser argumentado desde una teoría semiótica⁵⁰, ya que la solución de muchas de las proposiciones presentes en los *Elementos* pasa por demás, por los mecanismos de interpretación perceptiva o de visualización que se hace de ellas.

Un referente didáctico muy inmediato para la sustentación de nuestras hipótesis lo constituye la revisión de textos escolares de matemáticas, en tanto que, ellos constituyen una fuente importante en la que se consignan algunas de las prácticas más recurrentes para el tratamiento de los objetos matemáticos. En el caso específico del trabajo que se adelanta, el concepto de área no es ajeno a su tratamiento en la escuela y como tal se constituye en un objeto de enseñanza siempre presente en los textos escolares de matemáticas de los grados 7°. Por tal motivo, se ve la necesidad de caracterizar la importancia del uso de los textos escolares en la práctica docente y los criterios que permitan revisar los contenidos presentes en los textos de los grados mencionados y en relación al concepto de área.

⁴⁹ Método cuyo uso se remonta a los pitagóricos.

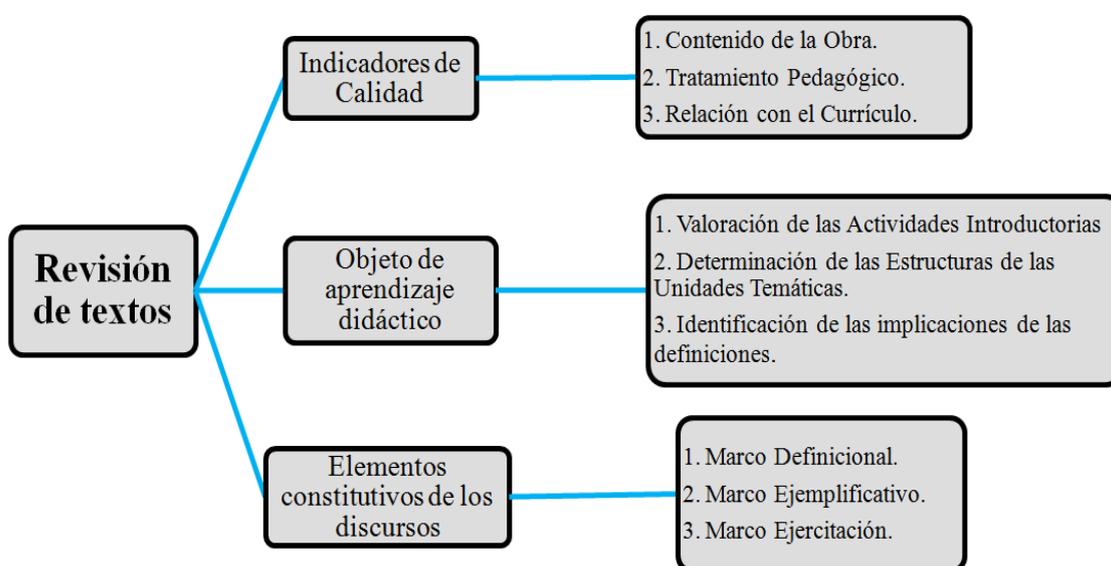
La aplicación de áreas suele recibir en nuestro tiempo a partir de H.G. Zeuthen. 1886 *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* - la denominación de “álgebra geométrica” de los griegos.

En el método de aplicación de áreas, Euclides procede de dos maneras: en primer lugar, cuando efectúa “divisiones” de polígonos para transformarlos en otros o para comparar las partes constitutivas de estos; en segundo lugar, Euclides muestra que ciertos polígonos son *iguales* a otros, pero apelando a un nuevo sentido de la igualdad: ya no es considerada la “igualdad” como una congruencia, sino que se toma como *igualdad de áreas*.

⁵⁰ En Duval (2004. Cap IV), está presente una reflexión acerca de la reconfiguración en donde a través de una serie de operaciones sobre una o varias figuras planas se puede establecer una equivalencia de áreas entre figuras de distinta forma.

Para la revisión de los textos se tuvieron en cuenta los siguientes criterios, extraídos del libro de Análisis de textos en Matemáticas de Arbeláez *et al.* (1999). Es de destacar que aunque el libro presenta otros criterios de análisis, estos no son propios para abordar el concepto de área en los libros de texto.

Criterios para la revisión de los textos



4. Conclusiones

Puesto que en los ejemplos y ejercicios consignados en los textos escolares revisados, se encontró un porcentaje grande de problemas de medidas de superficies donde hallar la respuesta alude directamente al uso de la aritmetización⁵¹, lo cual deja de lado otros procesos y conceptos, en cuanto a la magnitud se refiere, para el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes.

⁵¹ El aritmetizar la medida hace referencia al reemplazo de magnitudes por números, o el sustituir letras en las fórmulas por números para el cálculo de superficies.

Por tanto, se espera que una vez finalizada la ponencia los asistentes consideren la necesidad de considerar el concepto de área a partir de un análisis histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis del concepto, de tal forma que diseñen actividades en donde el estudiante pueda reconocer otros patrones de medida, la equivalencia de polígonos de diferente forma, o aplicar distintas estrategias para comparar superficies.

Bibliografía

- ANACONA, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. En la revista EMA. Vol. 8, Nº 1, págs. 30-46.
- ARBELÁEZ, G; GUACANEME, E; ARCE, J; SANCHEZ, G (1999): *Análisis de Textos Escolares*. Cali, Valle, Colombia: Universidad del Valle.
- BERNAL, Z; VERDUGO, M. (2008). *Secuencia Didáctica: Desarrollo de algunos aspectos del pensamiento métrico a través de la medición de superficies de figuras planas regulares e irregulares*. Instituciones educativas Agroindustriales La Pradera y Francisco Medrano - Duitama, Cudinamarca. Asesor Edgar Guacaneme. Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.
- CHAMORRO, M ; BELMONTE, J. M. (1991). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A.
- CHAMORRO, M. (1996). *El currículum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares*. En revista UNO de didáctica de las matemáticas, No. 10 1996, págs. 43-62.
- EUCLIDES. (1991). *Los Elementos, Libros I – IV*. Primera edición 1991 .Editorial Gredos, S.A. impreso en Madrid, España.
- HEATH, S. T. (1921). *A History Greek Mathematics, Vol No 1: From Thales to Euclid (Vol. 1)*. Oxford: Printed in England, at the Oxford University Press.
- MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. En Documento No. 3 MEN. (Primera ed., pág. 84). Bogotá, Colombia: Revolución Educativa, Colombia Aprende.
- MEN (1998). *Lineamientos Curriculares* (primera ed. pp. 44-45). Bogotá D.C, Colombia.
- RECALDE, Luis (sf). *Numero Medida y Magnitud*. Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas. Cali, Colombia.
- THOMAS, I (1957). *Greek mathematics, vol No 1: From thales to Euclid (Vol. 1)*. London: Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press. First printed 1939. Reprinted 1951, 1957.
- TURÉGANO, P. (1996). *Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida*. En revista UNO de didáctica de las matemáticas, No. 10, 1996, págs. 9-27