REVISTA EMA
1999, VOL. 4, Nº 2, 117-151

REPRESENTACIÓN Y COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL.

ISABEL ROMERO Y LUIS RICO

En el presente artículo estudiaremos el papel que juegan los sistemas de representación y las actividades asociadas a los mismos en la comprensión de un concepto matemático y, en particular, en la comprensión del concepto de número real. Presentaremos una experiencia de investigación-acción basada en este estudio que realizamos con un grupo *de estudiantes de 14-15 años, y analizaremos algunos de los datos que se obtuvieron en la misma. Concluiremos con unas reflexiones e interrogantes didácticos surgidos a partir de nuestro trabajo.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es reflexionar sobre el papel de los sistemas de representación en la comprensión de un concepto matemático y analizar dicho papel en el caso particular del número real. Con base en este análisis, proporcionaremos información obtenida con un grupo de estudiantes españoles de 14-15 años sobre la comprensión del concepto de los números reales en la etapa de la enseñanza secundaria. El trabajo que presentaremos se encuadra dentro de la línea de investigación en didáctica de la matemática denominada Pensamiento Numérico. Esta línea de investigación se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el medio educativo y en el medio social (Castro, 1994). Para ello utiliza una triple orientación: por un lado, se ocupa de las estructuras numéricas específicas; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades numéricas; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y se resuelven mediante la estructura numérica considerada (González Mari, 1995).

El contenido que presentaremos está centrado en la segunda dimensión de las tres mencionadas; es decir, en el aspecto cognitivo. Para ello, comenzaremos analizando la noción de representación y de sistemas de representación y su relación con la cognición humana, según las ideas de varios investigadores en educación matemática, y delimitando una terminología que nos servirá de herramienta para describir y analizar parte de nuestra experiencia didáctica en torno al número real. Pasaremos luego a presentar el contexto en el que tuvo lugar la obtención de datos sobre la comprensión de los números reales por parte de alumnos de 14-15 años. Finalmente interpretaremos dichos datos a la luz del marco teórico expuesto y concluiremos con algunas reflexiones didácticas sobre las implicaciones que podrían derivarse de los mismos.

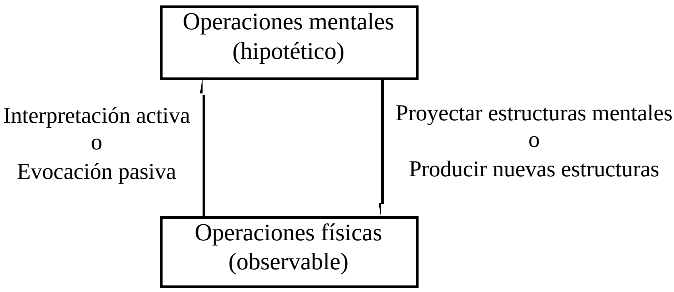
ASPECTOS COGNITIVOS DEL NÚMERO REAL

Cognición y sistemas de representación

Desde la década de los 80, las ideas en torno a las representaciones y a los sistemas de representación han ido ganando terreno a la hora de abordar el estudio de la cognición en matemáticas, y se han ido consolidando como una herramienta útil a tal efecto. Autores como Janvier (1987); Janvier, Girardon y Morand (1993); Douady (1980, 1986); Hiebert y Carpenter (1992); Kaput (1992); y Duval (1993, 1995) han realizado contribuciones importantes dentro de este campo y, en lo que sigue, presentaremos algunos constructos de estos investigadores que nos han servido para organizar nuestro marco teórico y organizar los resultados de nuestra experiencia. Debido a que la terminología que utilizan no está unificada, realizaremos una síntesis particular en la que intentaremos acotar los términos que usaremos a lo largo de nuestro estudio y el significado que atribuimos a los mismos.

De acuerdo con Kaput (1992, p. 522), la efectividad de la mente humana para manejar ideas y procesos extremadamente complicados, tanto concretos como abstractos, parece basarse en la interacción entre dos fuentes de organización de experiencias: (1) las estructuras inherentes al conocimiento de largo plazo de la persona, y (2) su habilidad para explotar medios físicos con el objeto de organizar la experiencia —en el caso de la experiencia matemática, utilizamos sistemas de notación, los cuales incluyen principalmente formas heredadas para exteriorizar estructuras conceptuales, así como signos personales e idiosincrásicos. Kaput postula dos "mundos": (i) un *mundo de operaciones mentales*, que siempre es hipotético, y (ii) *un mundo de operaciones físicas*, que es frecuentemente observable. Estos dos mundos interactúan en direcciones opuestas, tal como se ve en el diagrama de la página siguiente.

La flecha que apunta hacia arriba en la figura corresponde a dos tipos de procesos: por una parte, la interpretación activa (o "lectura") y, por otra parte, los procesos menos activos, menos controlados conscientemente, menos organizados linealmente, que comprenden la evocación de fenómenos mentales a través de los materiales físicos. La flecha que apunta hacia abajo en la figura corresponde también a dos tipos de procesos: por una parte, el acto de proyectar estructuras mentales en el material existente y, por otra parte, el acto de producir nuevas estructuras ("escritura"), lo cual incluye la elaboración física de estructuras. Para resumir, en el caso de la orientación hacia abajo, uno tiene contenidos cognitivos que busca exteriorizar para propósitos de comunicación o de probar su validez; en el caso de la orientación hacia arriba, los procesos se basan en un intento de usar algún material físico existente para ayudar al propio pensamiento.



Kaput delimita el contenido de la parte inferior de la figura, es decir, el de las estructuras físicas y sus operaciones, mediante los sistemas de notación. Por *sistema de notación* entiende un sistema de reglas para i) identificar o crear caracteres, ii) para operar sobre ellos, y iii) para determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia). Los caracteres no tienen por qué ser cadenas de letras o dígitos, sino que pueden incluir gráficos y diagramas, o incluso objetos físicos como bloques, regletas, piezas de cartón de puzzles, etc. Además, los tipos de acción pueden variar según la naturaleza particular del sistema implicado. Por ejemplo, pueden implicar transformaciones en la forma de una expresión algebraica o en combinaciones de diferentes expresiones algebraicas, o de composición de un puzzle agrupando sus piezas, o de manipulaciones con los bloques de Dienes. Más adelante, el autor especifica que la expresión "sistema de representación" puede usarse en lugar de "sistema de notación". Tal uso enfatizaría el hecho de que los sistemas de notación se usan típicamente de forma representacional; es decir, se usan para representar o hacer las veces de otra entidad, o de aspectos de otra entidad.

En este sentido, Duval (1993) distingue entre lo que llama *objetos matemáticos* y sus representaciones, y sostiene que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Mientras que Kaput se centra en las operaciones mentales y las operaciones físicas, u operaciones en los sistemas de representación, sin aludir explícitamente a la existencia de objetos o conceptos matemáticos a los que se refieran nuestras operaciones mentales y físicas, Duval siempre tiene presente que lo importante es la aprehensión del objeto matemático. En nuestro caso, sortearemos el obstáculo que supone la discusión platónica de si existe o no un mundo ideal de conceptos u objetos matemáticos aparte de la realidad física o mental (esta última hipotetizada también, puesto que no es observable directamente), y nos centraremos en exponer algunas consideraciones de Duval sobre los sistemas de representación —a los que él llama *sistemas semióticos*— que nos parecen particularmente interesantes.

En primer lugar, este autor coincide con el anterior en postular la existencia de dos "mundos": el de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas (correspondientes a los sistemas de notación en el lenguaje de Kaput). Nótese que al no postular la existencia de objetos matemáticos que hayan de representarse mentalmente, Kaput sólo se refiere a un tipo de representación, que en este caso coincide con la representación semiótica. En segundo lugar, Duval también coincide con que las representaciones semióticas cumplen varias funciones: de expresión (de estructuras y operaciones mentales, con vistas a la comunicación con otros), de objetivación (con vistas a probar la validez, para uno mismo) y de tratamiento (que el autor define como una transformación de la representación). Si estas funciones correspondieran a la flecha que va hacia abajo en la figura, a la flecha que va hacia arriba correspondería el papel que juega la aprehensión de las representaciones semióticas en la aprehensión del objeto matemático en cuestión.

Pero además, y nos parece importante destacarlo, Duval hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento y es esencial en la actividad matemática, según el autor, poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

También Hiebert y Carpenter (1992) parten del supuesto de que existen dos tipos de representaciones en matemáticas: las representaciones internas y las representaciones externas, que además tienen carácter sistémico y se influyen mutuamente en la actividad de la cognición; si bien estos autores son menos explícitos que los anteriores en cuanto a describir con detalle la naturaleza de ambos tipos de representación y de las relaciones entre ellos.

Llegados a este punto, nos parece interesante tratar de unificar la terminología, con objeto de lograr cierta claridad y coherencia en nuestro uso posterior de estas aportaciones teóricas. En lo sucesivo, nos referiremos a las representaciones como *sistemas de representación* para aludir a su carácter sistémico (tal como se pone de manifiesto en la definición de Kaput) y a su carácter de representaciones de conceptos matemáticos —dejando de lado la discusión de si dichos conceptos existen en un mundo aparte de la actividad cognitiva de los sujetos o si únicamente podemos referirnos a las conceptualizaciones tomadas-como-compartidas por miembros de la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos.

Dentro de los sistemas de representación consideraremos los de representación interna y los de representación externa. En los primeros englobamos el mundo de las estructuras mentales y las conceptualizaciones de los objetos matemáticos a las que se refiere Duval. En los segundos englobaremos el mundo de las estructuras físicas y los sistemas de notación o sistemas semióticos. Sin embargo, dada la frecuencia con que nos referiremos a los sistemas de representación externa (puesto que éstos son los observables y los que nos permitirían en todo caso inferir acerca de los sistemas de representación interna) los denominaremos habitualmente sistemas de representación y cuando queramos aludir a los de representación interna lo indicaremos explícitamente.

Hechas las aclaraciones anteriores y con base en las ideas de ambos autores describimos a continuación las actividades cognitivas (en términos de Duval) o actividades matemáticas (en términos de Kaput) asociadas a los sistemas de representación.

1) La formación de representaciones identificables como representación en un sistema dado. Implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Debe respetar unas reglas cuya función es asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento; se trata de reglas de conformidad y no de reglas de producción efectiva de un sujeto. La enunciación de una frase, la elaboración de un texto, el diseño de una figura geométrica, la escritura de una fórmula son ejemplos de acciones cognitivas o actividades matemáticas asociadas con sistemas dados de representación.

2) La transformación dentro de un sistema de representación. Debe respetar unas determinadas reglas sintácticas, con o sin referencia a significados exteriores.

3) La traducción entre sistemas de representación. Bajo esta acción, es posible conservar la totalidad o sólo parte del contenido, o ampliar el contenido de la representación inicial. De cualquier forma, la traducción supone la coordinación entre distintos sistemas de representación.

4) La cristalización o consolidación de relaciones y/o procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas”. Los cuales pueden ser utilizados en relaciones o procesos en un nivel de organización más elevado.

5) La modelización. Este tipo de actividad incluye la construcción y prueba de modelos matemáticos. Supone una traducción entre aspectos de situaciones y sistemas de representación.

Así pues, nuestra noción de *comprensión* del concepto de número real estará caracterizada por el dominio de sus *sistemas de representación* y de los distintos tipos de actividades asociadas a los mismos, las cuales hemos especificado anteriormente. Al referirnos a sistemas de representación, queremos abarcar tanto los internos como los externos, aunque sólo podemos observar las manifestaciones en el nivel de los sistemas externos y, en todo caso, inferir acerca de los internos.

Duval, entre otros autores cuya opinión suscribimos, denuncia que en la enseñanza, con respecto a los sistemas de representación, sólo se suelen tener en cuenta las dos primeras actividades cognitivas mencionadas anteriormente. Por lo general, una vez que se dominan las actividades de formación y transformación de representaciones en diferentes sistemas, se considera que la traducción entre ellos es evidente. Veremos que esto no es así y que, además, algunos bloqueos y obstáculos para la comprensión surgen de la imposibilidad de representar mediante un cierto sistema aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otro; esto es, de la irreductibilidad entre sistemas de representación. De hecho, para este autor, la comprensión de un concepto matemático está íntimamente relacionada con el dominio de la coordinación entre sus sistemas de representación. ¿Por qué es interesante para el pensamiento humano el dominio y la coordinación entre varios sistemas de representación? Duval propone tres razones:

Economía de tratamiento. Hay facetas de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otros. También hay acciones ligadas a un concepto en cuestión que pueden llevarse a cabo con más facilidad utilizando uno de sus sistemas de representación en detrimento de los otros. Así, la existencia de varios sistemas de representación permite cambiar de registro y, de este modo, trabajar de la manera más económica y potente en cada caso.

Complementariedad de los sistemas. Una vez elegido un sistema de representación para un contenido, se impone una selección de algunos elementos significativos o de información del contenido que se representa; esta selección se hace en función de las posibilidades y limitaciones del sistema elegido. Esto quiere decir que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y, que de un sistema a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan.

Necesidad de coordinación de registros de representación para la conceptualización. Como continuación de la idea anterior, si cada sistema de representación ofrece una consideración parcial para un concepto, el cruce de representaciones relativas a ese concepto mejora la información sobre el mismo; pero esto plantea mayores dificultades para el sujeto que está aprendiendo tales conceptos. La comprensión reposa sobre la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación; esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de traducción.

Además, al referirnos a la comprensión de un concepto tampoco debemos olvidar las actividades de cristalización de operaciones en estructuras conceptuales cada vez más sofisticadas y de modelización.

En nuestro estudio, los aspectos de economía de tratamiento y complementariedad de los distintos sistemas de representación de los números reales salen a la luz cuando se analizan dichos sistemas —tal como ocurre en las subsecciones tituladas “Sistemas de representación simbólica” y “Sistemas de representación gráfica”. El tercer aspecto que Duval considera para justificar el interés de varios sistemas de representación para un mismo concepto matemático —esto es, la necesidad de coordinar los diferentes sistemas de representación para lograr la comprensión— ha constituido una de las claves en el diseño y la implementación de nuestra experiencia didáctica. Tal como anotamos antes en el caso general, las actividades de traducción entre diferentes sistemas de representación y las de cristalización o solidificación son prácticamente inexistentes en el tratamiento curricular estándar de los números reales. En nuestra experiencia de investigación-acción con un curso de alumnos de secundaria hemos intentado atender no sólo a este tipo de actividades sino también a las de formación y transformación de representaciones. Creemos que este trabajo ha dado lugar a fenómenos de comprensión relevantes sobre el número real, así como a la detección de dificultades que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En las secciones tituladas “Hipótesis de trabajo y diseño de la experiencia de investigación” y “Datos sobre la comprensión de los alumnos en torno al concepto de número real” daremos cuenta detallada de todo ello.

Sistemas de representación y comprensión del número real

Dentro de las representaciones externas se suelen distinguir dos grandes familias: las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento, y las representaciones continuas, analógicas, de tipo gráfico o figurativo, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. En matemáticas, estas dos familias se denominan comúnmente *sistemas de representación simbólica* y *sistemas de representación gráfica,* respectivamente (Rico, 1997, pp. 101-102).

En el caso del concepto de número real, los sistemas de representación simbólica y los sistemas de representación gráfica juegan un papel clave puesto que permiten expresar las ideas y las relaciones constitutivas de dicho concepto y tienen un uso aceptado y establecido. Tanto en el ámbito de las representaciones simbólicas como en el de las gráficas poseemos un instrumento integrador fundamental para el número real: el sistema de *notación decimal* y el *modelo de la recta*, respectivamente. El sistema de notación decimal es un sistema integrador en el dominio de las representaciones simbólicas, puesto que toda notación decimal (finita, periódica o no periódica) representa un número real y, recíprocamente, cada número real puede ser expresado mediante una notación decimal. De ahí la potencia del sistema de notación decimal para los números reales. Además, en el dominio de los sistemas de representación simbólica, contamos también con las *notaciones operatorias habituales* (fracciones, raíces cuadradas, etc.), que constituyen un complemento y un apoyo importante para el sistema de notación decimal dentro de este ámbito, tal como se pondrá de manifiesto más adelante.

Por otra parte, el modelo de la recta es un sistema integrador en el dominio de los sistemas de representación gráfica puesto que la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, realizada a través de la *medida de longitudes*, se conceptualiza como una biyección. De aquí la potencia de las representaciones gráficas para los números reales. Además, ambos sistemas de representación tienen un carácter complementario ya que, mientras que las representaciones simbólicas destacan aspectos operacionales y discretos de los reales, las representaciones gráficas ayudan a intuir propiedades de continuidad y medida.

Como indicamos al comienzo del artículo, uno de los objetivos del mismo es presentar algunos aspectos de la comprensión de un grupo de alumnos de 14-15 años sobre el concepto de número real. Nuestra intención es poner de manifiesto algunos avances que lograron estos estudiantes, tal como se refleja en el tipo de actividades que realizaron sobre sus sistemas de representación y también algunas dificultades que tuvieron en esta labor. Pero antes de comentar el objetivo expuesto, describiremos con más detalle los sistemas de representación del número real, teniendo en cuenta que cada sistema se caracteriza mediante las correspondientes condiciones y rasgos sintácticos y semánticos propios.

Sistemas de representación simbólica

Sistema de notación decimal

En el sistema de numeración decimal posicional, los números enteros se expresan en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x, mientras que las fracciones decimales se expresan en términos de potencias de 1/10, de forma análoga a los polinomios en $1/x$.

Es usual en el trabajo escolar hacer el paso de la notación fraccionaria a la decimal. Mediante el algoritmo de la división las fracciones pueden escribirse de forma justificada en notación decimal. En algunos casos obtenemos en un número finito de pasos su expresión decimal, que es igualmente finita. Sin embargo, en otros casos el algoritmo de la división no da lugar a una expresión decimal finita, sino que el cociente obtenido tiene infinitas cifras decimales. En este caso, la equivalencia de ese cociente con la fracción inicial supone una extensión del convenio previo que se estableció para los decimales exactos. La justificación formal de la equivalencia entre una fracción y una expresión decimal ilimitada viene dada por la interpretación de un decimal infinito como una serie de potencias de 1/10: $\sum a_n \left(1/10^n\right)$ (Gardiner, 1982, p. 75). Esta cuestión, desconocida por los alumnos, constituye el ejemplo más sencillo de extensión mediante la cual trascendemos los procesos finitos para tomar contacto con los procesos infinitos, que están en la raíz de las matemáticas de las magnitudes continuas.

Sin tener que descender a las profundidades de la justificación formal, los alumnos de este nivel (enseñanza secundaria) pueden establecer razonadamente que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa o, al menos, eso es lo que da por supuesto la organización curricular para el nivel correspondiente (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994). En efecto, al realizar la división indicada por la expresión fraccionaria, observamos que el número de restos distintos posibles es limitado ya que el resto ha de ser menor que el dividendo, de modo que si la división no es exacta, llegará un momento en que un resto se repita y, una vez que esto suceda, las cifras del divisor y los restos siguientes se repetirán indefinidamente en el mismo orden. Recíprocamente, los alumnos de este nivel pueden razonar las reglas que permiten la conversión de un decimal finito o periódico en una fracción, aunque estas últimas hacen uso implícito de ciertas propiedades de series numéricas al efectuar operaciones aritméticas con números de infinitas cifras.

Una vez claro que a todo número racional corresponde un decimal recurrente y viceversa, cabe preguntar qué ocurre con los decimales infinitos no recurrentes: ¿responden estas expresiones a alguna noción de número?

Si consideramos la interpretación de los decimales infinitos recurrentes como series de potencias e interpretamos el caso de los decimales infinitos no recurrentes de la misma forma, en este segundo caso no disponemos de la recurrencia para sumar la serie. No obstante, aplicando a la sucesión de sumas finitas de la serie de potencias de 1/10 la propiedad fundamental de los números reales: toda sucesión infinita de números reales, creciente y acotada superiormente por cierto número k, tiene como límite un número real $a < k$), entonces *a cada decimal infinito le corresponde un número real. Recíprocamente, cada número real viene dado mediante un decimal infinito* (Ilín y Pozniak, 1991).

Este resultado muestra la potencia y economía del simbolismo de la notación decimal para el número real, debido a su carácter integrador, pero al mismo tiempo pone de manifiesto la complejidad y la sofisticación de algunos resultados que subyacen en la aparentemente sencilla notación decimal para representar los números reales.

Notación operatoria habitual

Aunque los alumnos del nivel en el que se desarrolla el trabajo de investigación se enfrentan por primera vez a los decimales infinitos no periódicos, sin tener la posibilidad de comprender aún las justificaciones formales en las que se fundamentan, la simultaneidad de la notación decimal con la notación habitual constituye un apoyo para el trabajo con este tipo de expresiones decimales y su aceptación por parte de los alumnos. Denominamos *operatoria*[1] a la notación habitual en el sentido de que destaca el carácter operatorio de los números reales, al indicar una operación mediante cuya aplicación algorítmica obtenemos la representación decimal; este es el caso de:

- la notación de fracción, que expresa una división indicada;
- la notación habitual de los irracionales algebraicos, que viene dada a partir del proceso de resolución de una ecuación, de la que son ejemplos sencillos los irracionales cuadráticos;
- la notación habitual de irracionales trascendentes conocidos (π, e, φ), en los que a partir del "nombre" tenemos acceso a métodos para su aproximación decimal.

1. La tipología establecida en este estudio para la notación operatoria, en el caso de los números irracionales, es una tipología didáctica. Hemos optado por ella, en lugar de la tipología que dividiría a los irracionales en algebraicos y trascendentes (conocidos) por lo que respecta a su notación habitual operatoria, debido a que esta última queda fuera por completo del ámbito didáctico en el nivel en que nos movemos.

Sistemas de representación gráfica

Modelo de la recta real

Por recta real se entiende un sistema de imágenes, signos, reglas y convenios mediante los que se realiza una representación gráfica de los números reales y se interpretan sus operaciones sobre una línea recta. Constituye el segundo instrumento integrador fundamental para el estudio de los números reales, que tomamos como referencia para centrar nuestra investigación.

El análisis de la recta real incluye dos niveles. En un primer nivel encontramos:

1) Imágenes específicas:

2) Convenios de carácter general:

a. Una marca en la recta (punto) representa un número, y recíprocamente.

b. Los números 0 y 1 pueden elegirse arbitrariamente entre los puntos de la recta; para establecer la aplicación de $\mathbb{R}$ en la recta hay que fijar esos puntos.

c. El orden izquierda-derecha entre los puntos de la recta corresponde al orden usual entre los números; esto lleva a que los puntos a la izquierda de 0 correspondan a los números negativos y que los puntos a la derecha de 0 correspondan a los números positivos.

3) Reglas para representar los números:

a. Ley de la aplicación de $\mathbb{R}$ en la recta: la medida de longitudes.

b. Criterio para representar el punto que corresponde a la suma de dos números.

c. Criterio para representar el punto que corresponde a un producto.

En un segundo nivel de análisis entra la consideración del continuo lineal, que sustenta la interpretación geométrica del conjunto de los números reales. El sistema axiomático sobre el que se fundamenta dicho continuo lineal impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico, difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas; esta es precisamente una de las claves por las que la recta numérica se convierte en un sistema de representación ineludible para la comprensión del concepto de número real.

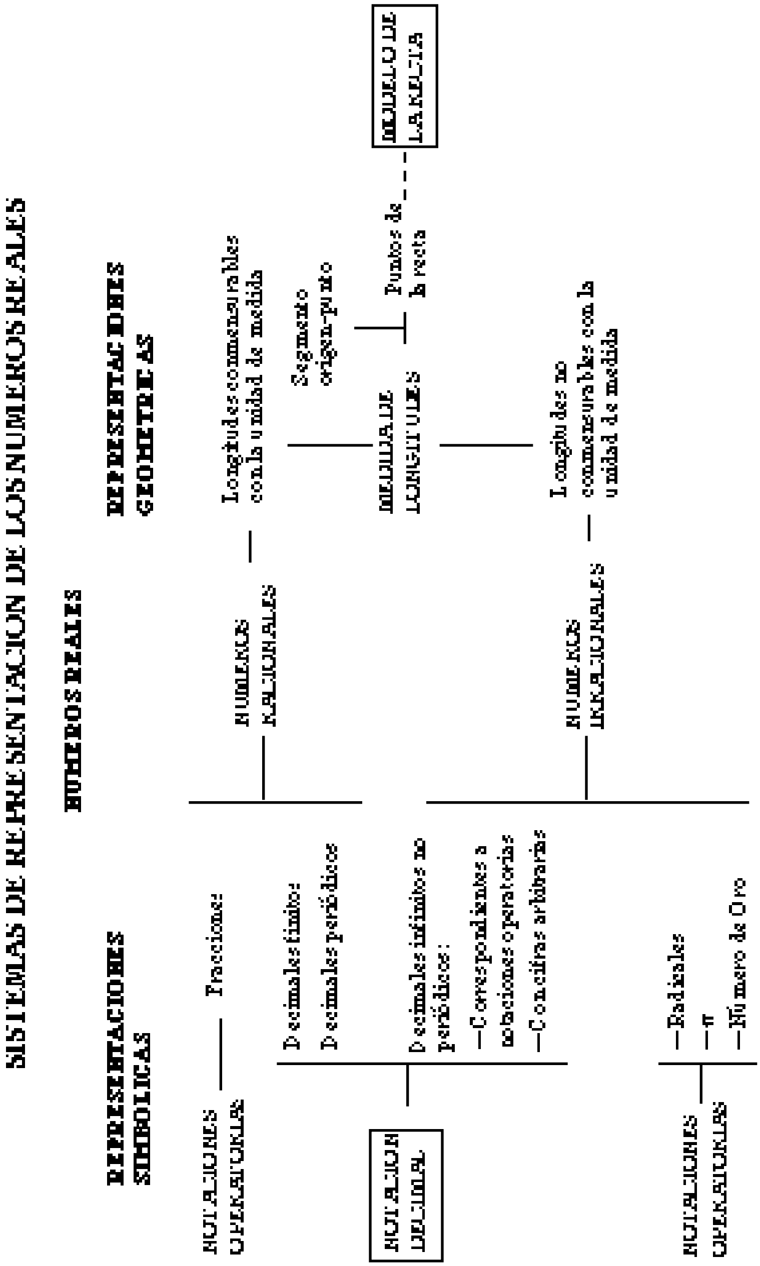
Los alumnos han tenido contacto con el modelo de la recta desde la etapa de educación primaria; han estudiado la representación en la misma de los números naturales, enteros y racionales. El criterio mediante el cual un número, racional o irracional, es asignado a un punto de la recta es el de la medida de longitudes; a un número determinado le corresponde el punto extremo del segmento con origen en 0, tal que la medida de dicho segmento con respecto al segmento unidad (origen 0 y extremo 1) viene dada por el número en cuestión. Este criterio se maneja de forma implícita. Sin embargo, hemos señalado que la clave para considerar a la recta como modelo de los números reales es la consideración de la biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. Si se quiere empezar a trabajar de modo consistente con el modelo de la recta, consideramos que es necesario profundizar en esta cuestión, es decir, en el estudio de la correspondencia números-puntos de la recta y en su carácter biyectivo.

Además, hemos de tener presente que el modelo de la recta, en su aparente simplicidad y economía, encierra una complejidad considerable, y es importante tener en cuenta que $\mathbb{R}$ no es el único conjunto numérico que se representa isomorfamente mediante dicho modelo, sino que también el conjunto de los hiperreales hace uso de gran parte de los signos y convenios considerados (Tall, 1980).

Relaciones en los sistemas de representación

Hemos descrito ya los sistemas de representación de los números reales. Ahora retomamos la idea de la importancia de dominar las relaciones entre los sistemas de representación de un concepto matemático para comprenderlo. Estas relaciones pueden considerarse tanto en su aspecto estático —las relaciones estructurales que reflejan sus sistemas de representación—, como en su aspecto dinámico —las actividades de transformación y traducción. Si nuestro objetivo es favorecer la comprensión en los alumnos, parece claro, a la vista de los presupuestos anteriores, que hemos de prestar atención al establecimiento de conexiones, relaciones y correspondencias entre los elementos de los sistemas de representación del concepto que nos ocupa. En la página siguiente presentamos un mapa que indica algunas de estas relaciones[2]. Este mapa puede servir de apoyo para ubicar los puntos de la comprensión de los escolares que analizaremos en la sección titulada “Datos sobre la comprensión de los alumnos en torno al concepto de número real”.

2. La descripción exhaustiva de estas relaciones y correspondencias se encuentra en Romero (1997, cap. III).


SISTEMAS DE REPRESENTACION DE LOS NUMEROS REALES
NUMEROS REALES
REPRESENTACIONES SIMBOLICAS
REPRESENTACIONES GEOMETRICAS
NUMEROS RACIONALES
NUMEROS IRRACIONALES
NOTACIONES OPERATORIAS
Fracciones
NOTACION DECIMAL
Decimales finitos
Decimales periódicos
Decimales infinitos no periódicos:
—Correspondientes a notaciones operatorias
—Con cifras arbitrarias
NOTACIONES OPERATORIAS
—Radicales
—π
—Número de Oro
Longitudes conmensurables con la unidad de medida
MEDIDA DE LONGITUDES
Longitudes no conmensurables con la unidad de medida
Segmento origen-punto
Puntos de la recta
MODELO DE LA RECTA

HIPÓTESIS DE TRABAJO Y DISEÑO DE LA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN

Acabamos de referirnos en la sección anterior a la importancia que tiene para la comprensión del número real el dominio de las relaciones entre sus sistemas de representación. Partimos de la hipótesis de que el establecimiento de conexiones en los sistemas de representación interna está estrechamente ligado con el establecimiento de conexiones en los sistemas de representación.

Pero además, partimos de otra hipótesis que queremos subrayar. En nuestra opinión, el establecimiento de relaciones en los sistemas de representación interna no se establece por la mera exposición de las conexiones en el nivel de los sistemas de representación externa; es más, esta explicitación por parte del profesor supondría el riesgo de que la información suministrada fuera internalizada en forma de piezas aisladas en lugar de favorecer la construcción de las conexiones pretendidas. Creemos que el establecimiento y enriquecimiento de las conexiones se produce a través del esfuerzo realizado por los alumnos para resolver situaciones problemáticas; de ahí la tercera orientación en nuestra línea de investigación en Pensamiento Numérico, que mencionábamos al comienzo de este artículo. En palabras de Vergnaud (1990, p. 135):

> Es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias.

Estas situaciones problemáticas deben estar dotadas de sentido para los alumnos, pero ser a la vez generadoras de conflictos que favorezcan la aparición, puesta en práctica y discusión de conexiones, tanto de carácter operatorio como de carácter estructural, que constituirán su concepción de número real. Este tipo de situaciones, son consideradas por Laborde (1994, p. 147) como

> (...) un problema que los alumnos no pueden resolver con el conocimiento disponible pero para las que pueden desarrollar nuevos instrumentos de resolución. Estos instrumentos son el punto de partida para nuevo conocimiento.

Es a través de interacciones dialécticas a partir de las situaciones mencionadas, y de la vuelta sobre las mismas, en sucesivas ocasiones, como los alumnos irán incrementando y consolidando su conocimiento matemático.

A partir de los supuestos que se han explicitado, en el curso 1993-1994 llevamos a cabo una experiencia de investigación con una clase de treinta y dos estudiantes de 14-15 años (correspondiente al nivel de 1º de bachillerato) en un instituto de enseñanza media de la ciudad de Granada (España). El objetivo de esta experiencia fue explorar la comprensión de alumnos de dicha edad sobre el concepto de número real cuando éste se introduce a través de una propuesta didáctica caracterizada por:

- tener en cuenta la complejidad del concepto de número real y abrir vías para la presentación, comprensión y solución de problemas fundamentales en la construcción del mismo;
- estar basada, de forma simultánea y complementaria, en los sistemas de representación simbólica y gráfica de los números reales;
- insertarse en el terreno curricular y considerar las limitaciones así como las ventajas que proporciona el aula como escenario natural complejo.

Esta propuesta didáctica fue diseñada por los autores de este trabajo e implementada por la primera firmante, en su calidad de profesora de matemáticas de la clase de alumnos mencionada. La metodología estuvo basada en el trabajo de los alumnos en pequeños grupos sobre situaciones previamente diseñadas por el equipo de investigación, seguidas de una puesta en común en gran grupo[3]. A lo largo del proceso didáctico, se trataron varios aspectos fundamentales para el desarrollo de la comprensión sobre el concepto de número real. Algunos de ellos reflejan conflictos epistemológicos que hubieron de ser superados en el desarrollo histórico del concepto (por ejemplo, las dudas sobre el status de número de las expresiones decimales infinitas no periódicas), y otros responden a necesidades de tipo didáctico y curricular (por ejemplo, la discriminación entre racionales e irracionales). Todos estos aspectos forman parte de un desarrollo sistemático y organizado, aunque no lineal, que se apoya en la red de conexiones entre los sistemas de representación de los números reales. En la sección siguiente analizaremos los procesos de comprensión que los alumnos pusieron de manifiesto sobre algunos de estos aspectos fundamentales, así como las dificultades que surgieron al respecto y se destaca el papel que jugaron para ello los sistemas de representación del número real.

3. La descripción completa del diseño del estudio, el material suministrado a los alumnos, la metodología, el proceso didáctico y la discusión de los resultados puede encontrase en Romero (1997).

DATOS SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS ALUMNOS EN TORNO AL CONCEPTO DE NÚMERO REAL

Para analizar la comprensión de los estudiantes acerca del concepto de número real, es necesario dejar claro que nuestros alumnos parten de un determinado estado de conocimientos sobre dicho concepto y que éste evoluciona a lo largo de los procesos didácticos relacionados con el mismo. Dichos estados de conocimiento vendrían definidos, en nuestro esquema, por el grado de dominio de los sistemas de representación y de las actividades cognitivas asociadas a ellos. Denominaremos *concepciones* a estos estados de conocimiento, los cuales pueden adecuarse en diferentes grados, al menos en aspectos parciales, al concepto matemático en cuestión. (O bien —y seguimos obviando la discusión en torno al tipo de existencia de los conceptos matemáticos— a las concepciones del profesor que, en este caso, actúa como puente con las concepciones tomadas-como-compartidas en la comunidad de matemáticos y de educadores matemáticos sobre los números reales.)

Además de evoluciones en positivo o directas de las concepciones en el proceso de aprender un concepto matemático, aparecen, de modo inevitable, dificultades. Entenderemos *dificultad* en su significado amplio, como “algo que impide ejecutar bien o entender pronto una cosa” (Centeno, 1988); estas dificultades pueden aparecer por diversas causas. Tanto evoluciones positivas de la comprensión de los estudiantes como dificultades salieron a la luz en nuestro proceso didáctico sobre los números reales. En lo que sigue, queremos compartir con el lector algunas de ellas.

Formación de representaciones en el sistema de la recta. Coordinación entre sistemas de representación

A la hora de trabajar en el terreno gráfico, podría parecer que algunos conceptos —como los de punto y segmento de la recta— son elementales y que, de alguna forma, su significado es tan básico que es unívocamente compartido por los miembros de la comunidad de la clase. Sin embargo, cuando se explicitan significados o interpretaciones particulares, podemos encontrarnos con sorpresas en las concepciones de los estudiantes. En el siguiente episodio se pone de manifiesto la confusión entre los aspectos empíricos y teóricos de estos conceptos:

P: ¿Cómo son los puntos de una recta? ¿Tienen anchura o no tienen anchura?

A: No.

A: Sí.

A: Tú puedes hacer un punto más grande que otro.

P: ¿Tú puedes hacer un punto más grande que otro?

A: Sí, aunque sean décimas de milímetro te puede salir un punto más grande que otro.

P: ¿Qué?

A: Que no, porque si tienen anchura cogería más de un número.

A: ¿Cómo?

A: Pero es que aquí, a lo mejor, hay puntos tan pequeños que a lo mejor sí podrían...

P: Si hablamos de una recta ideal, con puntos ideales, los que nos imaginamos. [Pausa] Los puntos ideales, ¿tienen dimensiones?

A: No, no.

A: No, pero pueden tener distinta anchura.

P: Distinta anchura, ¿podrían tener distinta anchura?

A: No, no.

A: No.

A: Si son ideales.

A: Que pueden tener distinta anchura... [Pausa] Puede ocurrir que un punto ocupe toda la pizarra [ruido]

P: ¿Sí?

A: Si el punto ocupa toda la pizarra sería un conjunto de puntos, o sea que no sería uno.

A: Es que mira, del 0 al 1, ¿por qué no puede ser otro más pequeño?

P: Esto es un segmento; del 0 al 1 es un segmento; y éste, otro segmento. [Pausa] Los puntos, si yo los pinto físicamente tienen un segmentillo, pero si me lo imagino...

A: ¡Ah!

P: ¿Entendéis esa diferencia?

A: ¿Cómo?

A: No.

P: Yo pinto un punto, pues depende de lo que sea de gruesa la punta de mi lápiz, tendrá un segmentillo.

A: Claro.

P: Pero si me lo imagino con la cabeza, ¿pueden ser más gruesos o menos gruesos?

A: No.

P: ¿Tienen anchura los puntos? ¿Pueden ser más gruesos o menos gruesos?

A: No.

En este caso particular, la negociación de significados en el terreno de las representaciones gráficas pudo ayudar a los alumnos a avanzar en la comprensión de éstas como algo separado de la realidad física. Este paso adelante, mediante el cual los puntos, líneas y superficies dejan de ser considerados como objetos físicos, es esencial para la comprensión de la inconmensurabilidad, ya que es imposible constatarla en una figura; todo lo contrario, a partir de la experiencia práctica sólo podemos obtener longitudes conmensurables puesto que nuestra percepción y nuestras necesidades prácticas se satisfacen en un número finito de pasos. De hecho, en el trabajo con nuestros alumnos salió a la luz explícitamente que la gran mayoría de ellos admitía la existencia de una parte alícuota para dos longitudes cualesquiera, es decir, admitía que dos longitudes cualesquiera son siempre conmensurables (Romero, 1997), resultado que también había sido obtenido en investigaciones anteriores (Arsac, 1987).

Más adelante ilustraremos cómo la traducción entre distintos sistemas de representación de los números reales y el establecimiento de relaciones entre dichos sistemas puede resultar fructífera para que los estudiantes avancen en su comprensión del modelo de la recta real. En particular, algunos alumnos llegaron a plantear cuestiones realmente sutiles en relación con los aspectos empírico y teórico de la medida, que están íntimamente relacionados con la correspondencia entre los números reales (no los racionales o los irracionales) y la recta:

P: Así que los enteros son útiles para contar, los racionales son útiles para medir..., y ¿éstos [los irracionales] son útiles para algo? [Pausa] Para medir todas las longitudes posibles, ¿son suficientes los racionales?

A: No, no.

P: Porque hay longitudes, como éstas [lados de cuadrados de áreas 2, 3, ...], que no pueden medirse con números racionales...

A: Pero si no lo sabemos... si no sabemos que vienen de un cuadrado, entonces siempre las medimos con racionales.

P: Pero, ¿si sabemos que vienen de un cuadrado?

A: Entonces, sí.

A: Pero, entonces todas las longitudes pueden venir de cuadrados. Y entonces todas las longitudes pueden medirse con... [irracionales]

P: Pero si el cuadrado tiene área 4, entonces el lado mide 2.

A: Sí, eso es verdad.

P: Y, si el cuadrado tiene área 4/9, ¿qué mide el lado?

A: Mide 2/3.

Formación y transformación de representaciones en los sistemas de representación simbólica

Nuestros estudiantes habían llegado al punto en donde tenían que tratar con la notación decimal infinita sin haber tenido ocasión de especificar y, de este modo, clarificar el significado que atribuían a los dígitos en el sistema de notación decimal. La actividad de ordenar distintas expresiones decimales les estimuló a idear sus propios criterios para compararlas; al tratar de explicárselos unos a otros, llegaron a hacer explícito el significado de los dígitos a la derecha del punto decimal atendiendo a su posición. Por ejemplo, uno de los criterios que idearon fue el de prolongar con ceros, cuando era necesario, todas las expresiones decimales de la serie que habían de ordenar hasta que tuvieran el mismo número de dígitos (excepto el caso de los periódicos), y "decir" cuántas décimas, centésimas, milésimas, etc. tenía cada uno. Así, al ordenar la serie "0.1; 0.20; 0.034 (período en el 34); 0.04; 0.008", los números tenían 100, 200, 34, 40 y 8 milésimas respectivamente. De este modo, la transformación de las representaciones en el sistema de notación decimal aclaró el significado de las mismas y solucionó problemas como la duda acerca de si 1.20 era mayor que 1.2 o el error de pensar que sí lo era, atribuyendo a las cifras decimales a la derecha del punto un significado análogo al de las cifras a la derecha del punto (es decir, 20 es mayor que 2, por tanto 1.20 es mayor que 1.2).

En otras ocasiones, sin embargo, los alumnos llegaron a plantear dilemas dentro del sistema de notación decimal cuyo esclarecimiento quedaba fuera del alcance del trabajo dentro de este sistema, e incluso fuera del alcance de los alumnos de este nivel. Así se puso de manifiesto en la siguiente discusión en clase, relativa a la notación decimal del número π:

A: Pero en la enciclopedia dice que no estaba seguro de que fuera irracional, sino que se seguían sacando muchos decimales y no estaban seguros [Referencia al número π].

P: En la enciclopedia, dice E [inicial del nombre del alumno] que se habían sacado muchos decimales, pero no se estaba seguro, se seguían sacando decimales pero no se estaba seguro de que alguna vez fuera a acabar.

A: Eso, eso es lo que yo vi, eso es lo que yo vi, seño.

P: ¿Qué?

A: Que no se sabía si se podía acabar o no.

A: No, aquí dice que sí era un número que nunca acaba. Eso venía, espera.

P: Una cosa es que no se sepa si puede acabar y otra cosa es que se sepa que no acabe.

A: Mira...

A: En el siglo XVII...

A: Y, ¿cómo se sabe, si acaba o no acaba?

A: (...)

A: Dice que nadie sabe su valor exacto, ni lo sabrá nunca.

A: ¿Por qué?

A: Y, sin embargo lo usamos...

A: Pero, ¿cómo se sabe que no va a acabar nunca?

A: Pero, J [inicial del nombre del alumno], ¿cómo sabes que no se va a acabar nunca?

(...)

A: Y, ¿cómo demostraron que no puede salirle un período y no va a acabar nunca?

A: Eso no se puede.

P: ¿Qué cómo lo demostraron? Es muy difícil, se tiraron más de veinte siglos para demostrarlo.

A: Y, ¿no nos lo puede contar, aunque sea más sencillo?

Queremos hacer notar aquí la importancia que tiene para la evolución de la comprensión de los alumnos el interés suscitado por cómo pueden hacerse cierto tipo de demostraciones sobre expresiones infinitas que no pueden conocerse en su totalidad. Por ejemplo, cómo puede saberse a ciencia cierta que algo infinito va a ser, efectivamente, infinito; y cómo sabemos que, aunque no podamos controlar sus cifras hasta el final (puesto que no acaban), nunca tendrán una estructura periódica. La curiosidad mostrada por los estudiantes en torno a este tema se ha manifestado más de una vez en esta experiencia y en otras realizadas por nosotros. Creemos que este es un primer paso muy importante para llegar a comprender las demostraciones por reducción al absurdo: la comprensión, en primera instancia, del tipo de problemas que resuelven. En muchas ocasiones, al abordar el tema del número real, los alumnos son enfrentados a la demostración de que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como una fracción, presentando la "solución de un problema" que para los alumnos no es tal, cuyo interés no llegan a captar (sin duda porque se trata de una problemática sutil y compleja de presentar). De este modo, a la dificultad de una demostración por reducción al absurdo se añade la falta de significatividad de la misma.

Otros interrogantes planteados dentro del sistema de notación decimal sí que fueron susceptibles de ser abordados con estudiantes de este nivel, si bien fue preciso hacer uso de traducciones entre los distintos sistemas de representación de los números reales para ello. Quizás uno de los más interesantes en este sentido fue el de la tipología de expresiones decimales infinitas que los alumnos eran capaces de imaginar y cuáles de estas expresiones tenían, según ellos, status de número. En el siguiente apartado, ilustraremos el tipo de evolución que se produjo en torno a éste y otros temas.

Las traducciones entre los sistemas de representación del número real

El dilema acerca del status de número de los decimales infinitos no periódicos

En primer lugar, plantearemos el dilema que se suscitó en torno al status de número de los decimales infinitos no periódicos en una discusión en clase. En principio, los alumnos habían venido trabajando con números y manejándolos en diversos contextos y situaciones, sin tener necesidad de cuestionarse acerca de la naturaleza del concepto de número o de sus características y atributos. Esto es, por otra parte, muy natural, si tenemos en cuenta que para establecer una discusión significativa acerca de conceptos matemáticos hace falta una considerable cantidad de experiencia en el uso de los mismos y, además, el encuentro de problemas o situaciones que motiven este tipo de discusiones. El caso de los decimales infinitos no periódicos puede resultar interesante para que los alumnos saquen a la luz concepciones acerca de lo que es un número y sobre las diferencias entre un número “propiamente dicho” y el resultado de una operación aritmética o una secuencia arbitraria de dígitos, por ejemplo:

P: ¿Esto es un número [la expresión decimal de $\sqrt{2} = 1.4142$]?

A: Sí.

P: ¿Quién dice que sí?

A: Yo.

P: Que esto, el 1.4142... infinitas cifras...

A: Es una operación.

P: Y, ¿quién dice que no es un número?

A: ¿Por qué es un número?

P: Bueno... los que dicen que sí, ¿por qué eso es un número?

A: Yo. Porque está formado por cifras.

A: ¿¡Un módulo!? [No se sabe qué significado atribuye el alumno a esta palabra].

A: No sé, no se puede contar exactamente porque es infinito... pero es un número.

(...)

A: ¡Pero es que es la respuesta de una raíz cuadrada!

(...)

P: Más razones... ¿Hay más razones?

A: Sí.

A: Nada más que con esas ya es un número.

A: Entre otras cosas, porque cualquier conjunto de cifras es un número. Nadie ha puesto reglas para decir que un número es lo que se puede...

P: Esto es lo que dice aquí. Está formado por cifras.

A: Pero entonces, no tiene sentido decir si es un número. Todo lo que está formado por cifras, lo es.

P: [La profesora escribe en la pizarra 123456789101112... (un entero de infinitas cifras)] ¿Está formado por cifras?

A: Infinito infinito no es un número.

A: No es un número.

A: No. Que no es un número, que no puede haber infinitos si no son decimales.

A través de sucesivos contrastes de puntos de vista y del trabajo con diversas situaciones didácticas en las que la traducción entre sistemas de representación jugó un papel clave para la resolución de las cuestiones planteadas[4], los estudiantes fueron capaces de afinar sus concepciones de número. Un considerable progreso se produjo a través de los reiterados intentos por dotar a los decimales infinitos no periódicos de un status de objeto actual, trascendiendo así su consideración como mero proceso operatorio o como una secuencia de dígitos imposible de controlar; en cualquier caso, como un proceso infinito (en lugar de como un objeto matemático, susceptible de ser utilizado y manipulado). Esta actividad de cristalización de procesos matemáticos en objetos es fundamental en la comprensión de conceptos matemáticos (Sfard, 1991) y, en particular, en la comprensión de los números irracionales (Rosenblatt, 1990/1991).

Los siguientes episodios nos muestran cómo la traducción entre los sistemas de representación decimal, operatoria y gráfica de los números racionales y el empleo de la analogía con los sistemas de representación decimal, operatoria y gráfica de algunos tipos de irracionales fue una herramienta de gran utilidad a este respecto, puesta en juego por los alumnos:

P: ¿Por qué piensas tú que no son números [los decimales infinitos no periódicos]?

A: Porque no puedes operar con ellos.

A: Eso no es verdad. Sí que se puede operar con ellos.

A: Yo lo he visto en el libro.

A: Y, ¿cómo operas con ellos?

A: Yo... en el libro... ayer estaba buscando en el libro y vi cómo se podían sumar y multiplicar radicales.

A: Pero si son números infinitos, ¿cómo vas a poder operar con ellos?

A: En el libro viene cómo ponen común índice en los radicales para operar con ellos. Yo he visto cómo se suman.

(...)

A: No se puede operar con ellos.

A: ¿Cómo se va a poder operar con una raíz cuadrada?

(...)

P: Mira lo que dice T [inicial del nombre de un estudiante].

4. Todas estas situaciones se encuentran en la tesis doctoral Romero (1997). Universidad de Granada.

A: Que con los periódicos puros no se puede operar, se opera con las fracciones; lo mismo pasa con los radicales. No se opera con el número infinito, se opera con el radical.

A: Exactamente, exactamente.

A: Es que la fracción es lo mismo que el decimal infinito. Es lo mism...

A: Y el radical también es lo mismo...

(...)

A: ¡Ah! que la fracción he dicho que es igual que su número decimal. Digo que un radical es igual al número que resulta, aunque sea infinito, pero es igual a eso.

A: Pues, entonces, sí se puede...

[Otro episodio del diálogo en clase]

A: 2 es un número porque se puede representar en la recta.

A: No.

A: Sí, sí.

A: Sí, claro que se puede representar.

A: A menos que sea como $\sqrt{4}$ ...

A: Pero un periódico es infinito y se puede representar en la recta. ¿Por qué un periódico puede representarse y un decimal infinito no periódico no puede representarse, si los dos son infinitos?

P: Vamos a ver, ¿cómo representas un decimal periódico en la recta? [Está implícito en el diálogo que no estamos hablando de representaciones aproximadas].

A: Lo puedes pasar a fracción.

A: Pero, una raíz cuadrada no la puedes pasar a fracción.

[Otro episodio del diálogo en clase]

A: A lo mejor si se pudieran pasar a fracción sí se podría, pero como no se pueden pasar a fracción...

P: Pero los infinitos no periódicos...

A: Por eso. No se pueden pasar a fracción.

(...)

A: ...Esos números tienen que estar en la recta.

A; Claro que sí.

A: No.

A: Pónle un ejemplo y que intente representarlo, y ya verá que no se puede.

A: Que tengo hambre.

A: Pon un ejemplo.

A: ...Si hubiéramos hecho aquello, lo sabríamos. ¿Os acordáis? Estamos en el mismo caso que $\sqrt{2}$.

A: Pero no se puede representar.

A: ¿Se puede representar $\sqrt{2}$ en la recta?

A: Pero es que no se sabe. [No lo saben los alumnos, puesto que esa tarea quedó pendiente].

Después de que los estudiantes hubieron alcanzado este punto, la oportunidad de trabajar en la construcción de cuadrados de cualquier área dada y de discutir sobre la longitud de sus lados y la posibilidad de representar raíces cuadradas en la recta trasladando los lados de los cuadrados, resultaba relevante en el sentido de que servía al propósito de facilitar el establecimiento de las relaciones entre los sistemas de representación simbólica y gráfica que los alumnos estaban necesitando, e incluso demandando, en ese momento del proceso didáctico. Una vez que la representación de medidas correspondientes a raíces cuadradas se llevó a cabo en la recta, un buen número de alumnos estaba dispuesto a considerar como "números" a los decimales infinitos no periódicos correspondientes a las raíces cuadradas.

Ahora bien, también hemos de señalar que en el proceso de hacer traducciones entre distintos sistemas de representación de los números reales, hemos de prestar atención a las dificultades que pueden tener los estudiantes con la legitimidad de dichas traducciones cuando la equivalencia entre los elementos no es total, es decir, cuando unos sistemas de representación permiten realizar acciones o resolver cuestiones imposibles de abordar con otros sistemas:

A: Tienes que seguir dividiendo.

P: ¿Cuál? ¿3.88888...? No, tomo su fracción y entonces puedo representarlo exactamente en la recta.

A: Pero no ese número.

P: Pero este número, tú puedes representarlo por medio de 3.8888... o por medio de su fracción, y es el mismo número.

A: Pero yo no entiendo cómo una fracción va a ser lo mismo que su número decimal, porque tú no puedes representar el decimal en la recta y sí puedes representar su fracción. Ahora yo no entiendo por qué son iguales.

P: ¿No entiendes por qué estos dos son el mismo número?

A: Son el mismo, pero en realidad, tú no puedes representar ese número en la recta y sí puedes representar el otro. Ahora yo no entiendo por qué son iguales.

P: Son *representaciones distintas* del *mismo número*. Y nos permiten hacer cosas diferentes.

Como podemos observar, este tipo de discusiones nos brinda buenas oportunidades para subrayar la diferencia entre el concepto matemático y sus representaciones, y de explicitar la economía y complementariedad de los distintos sistemas de representación. En los primeros episodios de esta sección, puede verse cómo los alumnos recurrieron a distintas representaciones de los números reales según el fin que pretendían; por ejemplo, operar con decimales periódicos mediante su expresión fraccionaria en lugar de con la notación decimal infinita, o transformar la notación decimal infinita en operatoria cuando querían representar en la recta determinados números reales. La coordinación lograda por algunos de ellos se puso de manifiesto en la naturalidad, adecuación y consistencia con la que utilizaron estas traducciones entre distintas representaciones de acuerdo con las necesidades de diferentes situaciones. Muestras de esto pueden encontrarse también a continuación.

La discriminación racional-irracional. El papel de las representaciones gráfica y simbólica

Una de las formas en las que salió a la luz la economía de los sistemas de representación de los números reales en el trabajo con nuestros alumnos fue la relevancia que ellos dieron a las representaciones gráficas a la hora de discriminar entre números racionales e irracionales. En efecto, esta distinción resultó más significativa en los sistemas de representación gráfica que en los simbólicos. En un momento del proceso didáctico, les fue formulada la siguiente pregunta: "¿Qué aportan los números irracionales a los racionales?" Las respuestas mayoritarias se refirieron al hecho de que con los irracionales podíamos medir longitudes y dar cuenta de proporciones que no podían ser expresadas en términos de números racionales; estas respuestas estaban basadas en sus experiencias con actividades acerca de longitudes de los lados y diagonales de cuadrados, π y el número de oro.

Cuando la profesora intentó llamar la atención sobre el hecho de que las notaciones decimales infinitas no periódicas completaban las notaciones decimales finitas y periódicas para formar todas las notaciones decimales posibles, este hecho no pareció resultar en absoluto significativo. Incluso el que los decimales infinitos no periódicos fueran necesarios para resolver ciertas ecuaciones con coeficientes racionales, no era suficiente para que los alumnos concedieran a estas expresiones el status de número ya que, como hemos visto, podían ser consideradas como "el resultado de una operación". El hecho de que los números irracionales pudieran ser representados mediante objetos actuales, finitos y completos —como segmentos— fue un factor clave para que los estudiantes pudieran realizar la actividad de cristalización y reconocer a los irracionales como "números" y como números de una clase diferente a la de los racionales, que ellos ya conocían.

Sin embargo, en el terreno gráfico, el reconocimiento y la comprensión del fenómeno de la inconmensurabilidad no fue una tarea fácil en nuestra clase. Nuestra impresión es que, en realidad, la mayoría de nuestros estudiantes tampoco fue capaz de entender de forma rigurosa la correspondencia entre la existencia de una parte alícuota entre un segmento y la unidad de medida y la expresión fraccionaria o decimal periódica de su medida referida a dicha unidad; en consecuencia, no pudieron establecer una conexión sólida entre la no existencia de una parte alícuota entre un segmento y la unidad de medida y la notación operatoria irracional o decimal infinita no periódica correspondiente a su medida en términos de la unidad. Ahora bien, a pesar de no haber llegado a un nivel de rigor muy avanzado, el trabajo con las razones irracionales y las discusiones sobre ellas y sobre sus representaciones simbólicas fueron, en nuestra opinión, muy productivas y creemos que ayudaron a los alumnos a avanzar en la coordinación entre los sistemas de representación gráfica y simbólica, así como en la comprensión de la irracionalidad:

P: Dice A [inicial del nombre de un estudiante] que si π puede venir de un radical. Una buena pregunta.

A: No, no, no.

A: ¿Por qué se inventó ese número?

A: ¿Qué significa π?

A: El área de la [ruido]

P: ¿De dónde viene π? [Pausa] ¿π de dónde viene? ¿Alguien sabe lo que significa π?

(...)

P: Por orden.Va y luego.

A: La división entre la superficie de la circunferencia...

A: Entre el radio al cuadrado.

A: El cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

P: π es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. ¿De cualquier circunferencia? ¿O de una sola?

A: De cualquiera.

P: ¿De cualquiera? O sea, y, ¿a vosotros no os parece una cosa curiosa que cualquier circunferencia tenga la misma relación entre su longitud y su diámetro, siempre?

(...)

P: Claro, y entonces, esa longitud y ese diámetro son los que están relacionados por esa razón, por π.

A: ¿Puede repetir?

A: Pero, ¿de dónde viene?

A: Y, ¿qué significa π?

P: Y, ¿por qué...? Dice Pablo que por qué de una división no me salen infinitos periódicos. [Pausa] ¿Qué por qué en una división...? ¿Tú cómo mides la longitud de una circunferencia?

A: Con el π.

A: Con el π por R al cuadrado.

A: 2 por π por R.

P: Pero, eso cuando te dan la medida. Pero ¿cuando no te la dan? ¿Si tú tienes una circunferencia y la tienes que medir?

A: Pues mides el radio, lo multiplicas por π.

P: Mides el radio, lo multiplicas por π...

A: Y, por 2.

P: Y por 2. [Pausa] No; pero, vosotros imaginaros que nosotros π no lo sabemos... estamos buscando, estamos buscando π y qué es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. O sea, que tendremos que medir esas dos cosas para hallar π. [Pausa] ¿Sí o no?

A: Pero una circunferencia cualquiera ¿no? ¿Eso cómo se mide? Cada circunferencia tendrá una longitud.

P: ¡Y un radio! Claro, ahí está la cosa.

(...)

P: Bueno... pues... yo, esto os lo voy a dejar propuesto.

A: Vale.

[A partir de este episodio, la profesora y los estudiantes organizaron grupos para trabajar sobre el significado de π, y exponer los resultados de estas indagaciones al resto de la clase. Algunos alumnos decidieron hacer exploraciones sobre otras razones irracionales, como el “número de oro”.]

[Otro episodio del diálogo en clase]

[Un grupo de alumnos estaba presentando su trabajo sobre el número de oro al resto de la clase. En un cierto momento de la presentación, estaban trabajando con rectángulos y pentágonos áureos de distinto tamaño.]

P: Ah, mira lo que pregunta L [inicial del nombre de un alumno] [Pausa] Si los pentágonos son de distinto tamaño... ¿cómo que el número es el mismo?

A: Es el mismo, ¿no?, pero...

A: Tiene las mismas proporciones.

P: Porque ¿qué quiere decir proporción? [Pausa] Dice P [inicial del nombre de un alumno] que si es más pequeño, ¿cómo va a salir el mismo número?

A: Porque es que no es que salga el mismo número, sino que salen las proporciones de ese número, o sea...

A: ¿Números equivalentes a ése?

P: No; números equivalentes, no.

A: Que guardan las mismas proporciones.

P: Fijaros, en el sobre, si yo mido el lado grande con respecto al lado... tomo el lado chico como unidad y mido el grande, me sale eso.

(...)

P: Claro; entonces, ¿qué pasa con los distintos pentágonos, con los distintos rectángulos...?

A: En los distintos rectángulos, si haces lo mismo con esto, sale...

P: ... Figura chica, guarda las proporciones del lado grande al lado chico.

A: ¡Ah!

A: Es como π, o sea, siempre la división de esto siempre sale lo mismo. Pues lo mismo es esto.

P: ¿Os acordáis del tangram, del cuadrado que hicimos, que yo os dejé en la hoja un cuadrado que era más chico?

A: No.

A: Sí.

P: Era igual, pero más pequeño [Pausa] Y, ¿por qué conservaba las medidas? Porque lo que conservaba..., si lo mides en centímetros, no conservaba las medidas, pero si lo mides con respecto a la unidad, como la unidad se ha reducido igual...

A: El número de oro es el número, es el número que sale siempre en todos los rectángulos que tengan esa proporción. [Pausa] ¿Entiendes? Es...

(...)

A: Es un número infinito no periódico.

P: Es otro número infinito no periódico.

A: Igual que π.

A partir de estos debates, varios alumnos (aproximadamente una cuarta parte de la clase) asociaron el término "proporción" a las longitudes inconmensurables con la unidad de medida y, aunque no disponemos de grabaciones para ilustrarlo, en los ejercicios en que se les pidió que clasificaran los decimales infinitos no periódicos, distinguieron entre aquellos que provenían de "radicales", aquellos que provenían de proporciones y los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias. Si bien al dar ejemplos de cada tipo muy pocos alumnos incluyeron las raíces cuadradas también en las "proporciones" —conexión que no se explicitó en la clase—, pensamos que en una primera etapa de la comprensión de los números irracionales, se había dado un paso importante.

Dificultades para aprehender las relaciones estructurales de los números reales ligadas a la forma en que nos referimos a sus sistemas de representación simbólicos

Tal como puede deducirse de la definición de sistemas de representación (sistema de notación) dada en la sección titulada "Relaciones en los sistemas de representación", el dominio de los sistemas de representación de un concepto pasa por la aprehensión de los distintos tipos de relaciones entre sus elementos, entre ellas, las relaciones estructurales. En el caso de los conjuntos numéricos, los sistemas de representación reflejan ciertas relaciones en términos de estructura algebraica; en nuestro caso, esto puede observarse en el mapa de la página 129 en el que quedan recogidos los distintos conjuntos numéricos dentro de los reales y las relaciones de inclusión entre ellos. Una de las dificultades que tuvieron nuestros estudiantes fue en relación a este aspecto. En efecto, resultó complicado para ellos discriminar entre conjunto numérico y notación numérica, y considerar significativa la diferencia entre ambos conceptos. Con frecuencia, solemos hablar de números racionales, números decimales y fracciones, por ejemplo, sin diferenciar explícitamente entre un conjunto numérico y sus sistemas de representación. Para muchos alumnos, todos son "números" (nótese que hablamos de números decimales) y les cuesta trabajo ver a los números racionales como unas entidades que pueden venir representadas bien en forma de fracción o bien en forma de decimal finito o periódico. A esto se añade la dificultad que supone la dicotomía entero-fracción y entero-decimal (incluso por el significado coloquial de estas palabras), que lleva a muchos estudiantes a establecer relaciones confusas e incorrectas entre el concepto de número entero y el de número racional, ya que la dicotomía establecida entre los términos mencionados les impide considerar a los números enteros como un subconjunto de los racionales.

Al trabajar en la enseñanza-aprendizaje de la estructura algebraica de los números reales y las relaciones de inclusión entre los subconjuntos numéricos que incluye el conjunto total, es necesario, pues, tener en cuenta estas consideraciones y prestar atención a otras relacionadas que pudieran surgir. El objetivo sería clarificar la diferencia entre un conjunto numérico y los sistemas de representación simbólica asociados al mismo y, por otra parte, poner de manifiesto cómo los sistemas simbólicos reflejan directamente las relaciones de inclusión y dicotomía existentes entre los subconjuntos numéricos de los reales (por ejemplo, los enteros tienen una expresión fraccionaria: 3 = 3/1, pero los irracionales no pueden ser representados en forma de fracción).

CONCLUSIÓN

En este artículo, hemos reflexionado sobre el papel que juegan los sistemas de representación del número real en la comprensión de este concepto, y hemos intentado llevar nuestra reflexión al terreno de la práctica mediante una experiencia didáctica con un grupo de estudiantes de secundaria, basada en las teorías expuestas. A raíz de dicha experiencia, se ha puesto de manifiesto la enorme complejidad que encierra el concepto de número real y algunas dificultades que tienen los alumnos al ser enfrentados con este tema en las etapas iniciales. No obstante, a través del trabajo con situaciones que pretendían estimular las actividades cognitivas asociadas a los sistemas de representación de los números reales y el establecimiento de relaciones entre sus constituyentes, también se han registrado avances, a nuestro juicio significativos, en la comprensión de los alumnos en torno al tema. Nuestra intención ha sido, en la segunda parte del artículo, ilustrar parte de las dificultades y de los progresos en la comprensión que pudimos observar mediante las discusiones que se establecieron en clase.

Concretamente, hemos discutido aspectos relativos al dominio de los sistemas de representación gráfica y simbólica de los reales: separación de los aspectos empíricos y teóricos en el terreno de las representaciones gráficas, y comprensión del significado de los dígitos en el sistema de notación decimal. Hemos ilustrado cómo nuestros alumnos llegaron a dominar relaciones de complementariedad y economía entre los sistemas de representación de los reales, traduciendo adecuadamente entre ellos cuando la ocasión lo requería. También, cómo algunos de ellos llegaron a alcanzar una cristalización del concepto de número y de numero irracional mediante las traducciones entre notación decimal, notación operatoria y longitudes correspondientes, y mediante el uso de relaciones de analogía con los decimales infinitos periódicos, su notación operatoria y su representación gráfica; insistimos en que este es un paso fundamental en la comprensión de los reales. Pudimos observar avance en las concepciones de número de los estudiantes, desde ser vistos como simples conjuntos de dígitos con los que se puede contar o realizar operaciones aritméticas, hasta ser considerados como entidades con distintas representaciones y distintos usos y características; en este sentido, fue notable la curiosidad que mostraron los alumnos sobre las expresiones decimales infinitas no periódicas y su sensibilidad hacia el problema de como los matemáticos han logrado tener control sobre algunas de sus propiedades (problema clave para una buena conceptualización de los números irracionales). Asimismo, pudimos ver el desarrollo de las concepciones de algunos alumnos acerca de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de ciertas longitudes con respecto a otra tomada como unidad, si bien esta cuestión se reveló ciertamente complicada en este nivel.

Entre las dificultades que salieron a la luz, además de la anterior, encontramos: la resistencia a considerar como equivalentes, representaciones de los números reales que presentaban facetas distintas y exclusivas de cada tipo de representación; las limitaciones de los estudiantes relacionadas con cuestiones demasiado sofisticadas para su nivel, y que requerían el manejo y comprensión de determinados procesos y conceptos matemáticos que quedaban fuera de su alcance (nos referimos al razonamiento para justificar que la expresión decimal de π es infinita no periódica). También algunos problemas se presentaron a la hora de discriminar entre números racionales e irracionales a través de los distintos sistemas de representación. Y, por último, aparecieron dificultades para distinguir los subconjuntos numéricos incluidos en los reales, los sistemas de representación asociados a éstos y las relaciones de inclusión entre ellos. En general, creemos que, aunque sea mediante una pequeña muestra, pueden captarse las múltiples dificultades que se presentan a los alumnos al aventurarlos en el camino de los sistemas de representación de los reales y las relaciones entre ellos, para abordar el estudio de los conceptos de número irracional y de número real.

Queremos concluir señalando que, si bien esta experiencia didáctica y de investigación ha tenido lugar en una sola clase y sus resultados son producto de una dinámica muy particular, varios de nuestros hallazgos conectan con los obtenidos por otros investigadores y por nosotros mismos en experiencias anteriores (Arsac, 1987; Douady, 1986; Monaghan, 1988; Romero, 1993). En cualquier caso, no ha sido nuestro objetivo el llegar a una serie de resultados generalizables, sino que los datos y las reflexiones presentados puedan servir de posible estímulo para que educadores matemáticos que trabajen con el número real en distintos niveles avancen sobre las mismas.

Sería interesante plantearse, por ejemplo, qué cabida tiene el tópico en la enseñanza secundaria obligatoria y postobligatoria, qué aspectos sería conveniente tratar, con qué nivel de profundidad, en cuántas etapas y en qué niveles o cursos. Para ello, se podría atender a los puntos que se han revelado con potencial para promover la comprensión matemática de los estudiantes e intentar optimizar y extender el uso que puede hacerse de ellos, prestar atención a las dificultades que pueden ser subsanables con la ayuda de material didáctico adecuado, y pensar sobre los puentes que es necesario tender para que los alumnos sean capaces de acceder a determinados aspectos que quedan lejos de su alcance en las primeras etapas. Una planificación e implementación curricular cuidada, que tuviera en cuenta estos y otros aspectos, podría resultar útil para ayudar a nuestros alumnos a construir un camino sólido hacia el análisis matemático y para incrementar la calidad de su conocimiento matemático en general.

REFERENCIAS

Arsac, G. (1987). L´origine de la démonstration: Essai d´epistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 8,* 267-312.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: Comares.

Centeno, J. (1988*). Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d´apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11,* 77-110.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7,* 5-31.

Duval, R. (1993). Semiosis y Noesi. *Lecturas en didáctica de la matemática. Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lan.

Gardiner, A. (1982). *Infinite Processes.* New York: Springer-Verlag.

González Mari, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos* (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding.* En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Ilín y Pozniak (1991). *Fundamentos del análisis matemático.* Moscú: Mir.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* London: Lawrence Earlbaum Associated Publishers.

Janvier, C, Girardon, C. y Morand, J. (1993). Mathematics symbols and representations. En P. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics* (pp. 79-102). Reston VA: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation? En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactic of Mathematics as a scientific discipline*. Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Monaghan, J. (1988). Real mathematics. *The Mathematical Gazette*, *72*, 276-281.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rico, L., Coriat, M., Marín, A. y Palomino, G. (1994). *Matemáticas 4º. Opción A. E.S.O. Proyecto 2000.* Sevilla: Algaida.

Romero, I. (1993). *La introducción del número real en educación secundaria* (Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Granada).

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción* (Tesis doctoral). Granada: Comares.

Rosenblatt, J. (1990/91). Infinity and limits. *Mathematical Spectrum, 23*, 70-74.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 271-284.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*, 133-170.

Isabel Romero
Universidad de Almería
España
E-mail: imromero@ualm.es

Luis Rico
Universidad de Granada
España
E-mail: lrico@goliat.ugr.es