ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 21

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 21

Editora:
Patricia Lestón
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Editores Asociados:
Cecilia Crespo Crespo, Carlos Oropeza Legorreta y Hugo Parra

Diseño de portada y CD:
Liliana Álvarez Díaz
Dirección de Educación Continua del Instituto Politécnico Nacional
Janet Ramírez Sandoval
CICATA-IPN, Legaria

Diseño de interiores:
José Francisco Canché Gómez
CICATA-IPN, Legaria

Digitalización:
Juan Gabriel Molina Zavaleta
Christian Pérez Bohorquez
CICATA-IPN, Legaria

Edición:

CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México
www.cmmedu.com
ISBN: 978-970-9971-15-6

Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Consejo Directivo

Gustavo Martínez Sierra
Presidente
presidencia@clame.org.mx

Germán Beitía
Secretario
secretario@clame.org.mx

Joaquín Padovani
Tesorero
tesorero@clame.org.mx

Juan Raúl Delgado Rubí
Vocal Caribe
vocal_caribe@clame.org.mx

Edison de Faria
Vocal Centroamérica
vocal_centroamerica@clame.org.mx

Gisela Montiel Espinosa
Vocal Norteamérica
vocal_norteamerica@clame.org.mx

Cecilia Crespo Crespo
Vocal Sudamérica
vocal_sudamerica@clame.org.mx

2004 - 2008

Consejo Consultivo

Egbert Agard

Ricardo Cantoral

Fernando Cajas

Guadalupe de Castillo

Evarista Matías

Rosa María Farfán

Teresita Peralta

Comisión de Admisión

Sandra Castillo

Eugenio Carlos

Liliana Homilka

Comisión de Promoción Académica

Javier Lezama

Edison de Faria

Yolanda Serres

Leonora Díaz Moreno

Mayra Castillo

Uldarico Malaspina

Comité Internacional de Relme

Leonora Díaz Moreno

Miguel Solís

Gustavo Bermúdez

Olga Pérez

Comité
Científico de Evaluación

Alanís, Juan Antonio
Aparicio, Eddie
Arcos, Ismael
Ardila, Analida
Arrieche Alvarado, Mario
Ávila Godoy, Ramiro
Bermúdez, Gustavo
Blanco, Haydeé
Blanco, Ramón
Buendía Abalos, Gabriela
Cabañas Sánchez, María Guadalupe
Cadoche, Lilian
Camacho, Alberto
Campistrous, Luis
Cantoral, Ricardo
Carlos Rodríguez, Eugenio
Carrasco, Eduardo
Carrillo, Hugo
Castañeda, Apolo
Castillo, Sandra
Cordero Osorio, Francisco
Cortés Zabala, Carlos
Crespo Crespo, Cecilia
Dalcín, Mario
De Faria, Edison
Delgado, Raúl
Delgado, César
Díaz Moreno, Leonora
Dolores, Crisólogo
Engler, Adriana
Espinoza, Lorena
Espinoza, Pedro
Farfán, Rosa María
Gaita Ipaguirre, Rosa Cecilia
García Zatti, Mónica
Grijalva, Agustín
Gutiérrez Alvarez, Milagros
Homilka, Liliana
Ibarra Olmos, Silvia
Lara Galo, Claudia
Lanza, Pierina
Lestón, Patricia
Lezama, Javier
Mántica, Ana María
Marcolini Bernardi, Josefina Marta
Mariscal, Elizabeth
Martínez Sierra, Gustavo
Mingüer Allec, Luz María
Miranda Montoya, Eduardo
Molfino, Verónica
Molina, Juan Gabriel
Montiel Espinsa, Gisela
Muñoz, Germán
Ochoviet, Teresa Cristina
Ojeda Salazar, Ana María
Olave, Mónica
Oropeza Legorreta, Carlos
Ortega del Rincón, Tomás
Osorio Abrego, Héctor
Parra, Hugo
Pérez González, Olga Lidia
Pérez, María del Carmen
Piceno Rivera, Juan Carlos
Ponteville, Christiane
Reséndiz, Evelia
Rey, José Luis
Rizo Cabrera, Celia
Rosas Mendoza, Alejandro
Ruiz, Blanca
Salat, Ramón
Sánchez Aguilar, Mario
Sardella, Oscar
Scaglia, Sara
Serna, Luis Arturo
Serres, Yolanda
Sierra, Modesto
Tejada de Castillo, Guadalupe
Testa Rodríguez, Yacir
Valdivé, Carmen
Valero, Socorro
Velázquez Bustamante, Santiago
Zúñiga, Leopoldo

ELEMENTOS HISTÓRICOS, EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexánder Villa Ochoa
Grupo "Educación Matemática e Historia". Universidad de Antioquia Colombia
yadiramarcelamesa@yahoo.es, javo@une.net.co
Campo de investigación: Historia de la matemática Nivel: Medio

Resumen. *Son muchas las investigaciones que han resaltado la importancia de un conocimiento de la evolución histórica de un concepto matemático en la comprensión de los obstáculos y razonamientos de los estudiantes al interior del aula de clase (Posada & Villa, 2006). Con base en este argumento, se presenta en este documento los resultados de una indagación histórica sobre la evolución del concepto de función cuadrática que ofrece al lector algunas pautas que le sean útiles a la hora de diseñar situaciones didácticas que involucren el concepto objeto de este estudio.*

Palabras clave: ecuación cuadrática, movimiento, función, geometría analítica, álgebra

Introducción

La historia ha evidenciado cómo las matemáticas surgen gracias al interrogante que tiene el hombre frente al universo y de su actividad como miembro de una sociedad. Es entonces la historia quien muestra la construcción del conocimiento como actividad propia del individuo y de él mismo como ser social. Además, Sierpinska (1989, 1992), Cotret (1985, 1989) y Sfard (1991) citados por Posada & Villa (2006, p.11) coinciden en que la historia es una herramienta para la actividad educativa en la medida en que le sirve al educador fuentes de reflexión a la hora de diseñar actividades de aprendizaje de las matemáticas.

En relación con las nociones cuadráticas, la revisión de la literatura permite determinar al menos cuatro momentos claramente diferenciados, a saber: *Las ecuaciones, Las cónicas, La Cinemática y Las Funciones*. De aquí se confirma la idea que, desde el punto de vista histórico, las ecuaciones y las funciones tuvieron una génesis independiente, ya que el descubrimiento de las relaciones funcionales a nivel formal se dio cuando había cierto desarrollo en el lenguaje algebraico, vale la pena profundizar en la investigación de tal manera que se valore dicha separación al interior del aula o que por el contrario se puedan construir ambos conceptos simultáneamente desde la modelación de situaciones de variación.

Génesis histórica de las nociones cuadráticas

Se presentará a continuación una síntesis de los cuatro momentos encontrados con lo cual se pretende generar reflexiones sobre el concepto de *"cuadrado"* y la manera en que históricamente se fue consolidando hasta construir lo que actualmente conocemos como función cuadrática. Estas reflexiones pueden convertirse en propuestas a la hora de diseñar situaciones didácticas para el aula de clase.

1. **Las ecuaciones**: El concepto de ecuación es uno de los más importantes del álgebra actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas ligada en muchos casos a situaciones donde intervienen nociones cuadráticas.

   Los *Babilonios (2000 a.C – 600 a. C)* tal y como se presentó en Mesa y Villa (2007, p.3) *"Generaron estrategias de cálculo diferentes a los geométricos de forma retórica, sin embargo, no se podría inferir necesariamente que no se haya pensado geométricamente, pero no tuvo la trascendencia que le dieron los griegos"*. Esto se puede observar un poco en esta situación presentada por Kline (1992, p. 26).

   "Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado. En la notación moderna se puede escribir que lo que buscaban los babilonios era dos números $x \wedge \overline{x}$ *tales que* $x\overline{x} = 1$ *y* $x + \overline{x} = b$*. Estas dos ecuaciones dan como resultante la ecuación cuadrática:* $x^2 - bx + 1 = 0$*"*

   Este tipo de situaciones muestra que el concepto de *"cuadrado"* era concebido como un producto de una cantidad por sí misma, que se representaba por medio de un "álgebra retórica" que le hacía ver de forma aritmética al no disponer de estrategias o símbolos que les permitiera registrar las generalizaciones, pero es clara la intención de generalidad que hay en ellas.

En la cultura *Griega (300 a.C – 200 d.C)* se evidencia cómo la cuadratura está comprometida en diferentes situaciones, pero que todas remiten a su explicación geométrica, a excepción de Diofanto que después de siete siglos (aproximadamente) se valió de un álgebra sincopada con el fin de expresar potencias. Se rigieron por un razonamiento de carácter puramente geométrico, por ende deductivo; la expresión “al cuadrado” ó “es el cuadrado de…” se describen de forma retórica dentro de un sistema deductivo que es desarrollado con el fin de darle generalidad a sus procedimientos (que precisamente la deducción la que permite generar unas premisas generales para serles útiles a los casos particulares) y son referidas a áreas y superficies.

En lo relacionado con el concepto trabajado y a la luz de una de las grandes obras que representarían en *Los Elementos* de Euclides el término “*cuadrado*” acepta definiciones como: “(…) *entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular*”. Por lo que se puede asociar la idea de cuadrado como la construcción a partir de un segmento (lado) cualesquiera de manera repetida de forma rectangular que termina por limitar una región (área), es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica, siendo x el valor del segmento. Las representaciones para la solución de las proposiciones que se observan en esta obra eran rigurosamente geométricas y su demostración de forma retórica.

Posteriormente los *árabes* iniciaron la creación de un álgebra en la utilizaban representaciones de construcciones geométricas heredadas por los griegos; el “*cuadrado*” se evidencia como una cantidad, pero aún la expresión cuadrado se vale de una representación geométrica, por lo que se puede deducir que “*cuadrado*” es una cantidad que permite representarse geométricamente de acuerdo con la definición euclidiana mencionada anteriormente. Esta idea podría explicar el hecho de no tomar a los números negativos de los cuales se tenían ciertos conocimientos heredados de los hindúes y que fue su falta de representación geométrica la que influyó para no concebirlo como magnitudes. Es importante considerar el enfoque geométrico que tomaban los conceptos, ya que como se ha mostrado hasta aquí pareciese que lo evidente como sinónimo de real era posible representarse por algo que pudiese observarse o percibirse simplemente.

2. **Las Cónicas**: Definitivamente pensar en ellas implica remitirse a Apolonio de Perga (260 a.C), quien realiza un tratado sobre el estudio de las secciones cónicas que fue de gran trascendencia para el posterior desarrollo de la geometría analítica y los estudios del movimiento, según González (Las cónicas de Apolonio, 4) referenciando a Apolonio afirma: «*La Parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa x y el latus rectum l*». de ahí que se pueda inferir que "*cuadrado*" es, sin lugar a dudas, la expresión geométrica a la que Apolonio, por su brillantez, hacia referencia desde la generalidad promoviendo un acercamiento a un "álgebra" de las cónicas. Si bien la parábola no podía construirse con regla y compás, pues como ya lo han mostrado al ser precisamente un lugar descubierto por los problemas típicos de la época, se observa que lo que puede haber es una transformación de áreas o lo que se ha llamado la cuadratura de la parábola.

   Otro acercamiento es el de Hipócrates (s. V a. C) en su intento de hallar la solución a la duplicación del cubo. En este sentido Kline (1992, p.70), anota que surgen ecuaciones cuadráticas a partir del hallazgo de las cantidades que hacían la media proporcional.

   A partir de este momento se puede observar un salto de casi 18 siglos en la historia de las matemáticas con respecto al paso del tratado de las Secciones Cónicas a su estudio en el plano cartesiano, que es el interés de esta investigación. En el siglo XVII con la creación de la geometría analítica, en la que se definen las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y, también se concreta el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones. En la obra "*La Geometría"* de Descartes "*cuadrado*" tomó la acepción euclidiana, su diferencia radicaba en el desprendimiento de x^2 al ser tratado como una cantidad generada por la segunda potencia y no su restricción al ser tratada como un área.

3. **Cinemática:** Se destacan los trabajos sobre el movimiento de Galileo quien muestra que la expresión: "*al cuadrado*" significa una segunda potencia de una cantidad o el producto de un número por sí mismo, su participación en su avance o desarrollo está basado en los procesos de modelización de los fenómenos físicos.

   Galileo es el mayor representante de la transición entre la ecuación cuadrática relacionada con las superficies y su interpretación como modelo matemático de fenomenos físicos. En su obra conceptualiza el incremento de las cantidades a medida que varían, y en el caso de la parábola comenta cómo los incrementos (variación) corresponden a la progresión de los números impares.

   La explicación dada por Galileo Galilei inicia con el establecimiento de relaciones entre dos cantidades que varían, una dependiendo de la otra, así como el tiempo transcurrido y el espacio alcanzado; la representación gráfica y las unidades de medición, que le demandaba un conjunto denso para darle sentido a todas las representaciones, por la naturaleza en sí del movimiento como continuo, sin embargo ésto no impedía su representación gráfica y uno de sus ejercicios consistía en hallar "*(…) el espacio en el instante t*", es decir que se debía cumplir que para cualquier tiempo le correspondía un espacio determinado, por lo que implícitamente existe en su formulación y teoría la existencia de una relación biunívoca y especialmente situaciones cuadráticas, como muestra el siguiente teorema: "*Si un móvil con movimiento uniformemente acelerado desciende desde el reposo, los espacios recorridos por él en tiempos cualesquiera, están entre sí como la razón al cuadrado de los mismos tiempos, es decir como los cuadrados de esos tiempos*". Galilei (1638/2003, p.236) de todo lo anterior se puede inferir que en Galileo el concepto de "*cuadrado*" era aceptado como un número (aritmética) pero también era representado en forma geométrica, sin embargo no se restringe a este aspecto si no que también el "*cuadrado*" era concebido como una segunda potencia lo cual había sido explícito desde Euclides. Adicionalmente el *cuadrado* era generado por la media proporcional entre dos razones por ende su inversa era su raíz, por lo que raíz corresponde a la operación de hallar una media proporcional.

Newton: Retoma los trabajos de Galileo para formalizar la teoría de la gravitación. Introduce conceptos del cálculo gracias a los desarrollos matemáticos con los que se contaba para la época; por ejemplo, la notación algebraica y la geometría analítica. En su obra "*Principia*", relaciona los fenómenos naturales en los que se observa la riqueza de la expresión "*cuadrado*" vinculada a ciertos rasgos funcionales de manera implícita.

En la siguiente cita de Newton (1687/1982) se muestra una estrecha relación con lo planteado por Galileo y en la forma en que trata los incrementos.

"Si un cuerpo es resistido en parte en razón de su velocidad y en parte como el cuadrado de esta misma razón, y se mueve en un medio análogo únicamente por su fuerza innata, y los tiempos son tomados en progresión aritmética, entonces las cantidades inversamente proporcionales a las velocidades, incrementadas en una cierta cantidad dada, estarán en progresión geométrica." (p. 225)

Sin lugar a dudas, el movimiento es tan antiguo como la existencia misma, aunque con Aristóteles y posteriormente con Oresme se observa un primer trabajo del movimiento. Hubo de esperar hasta el siglo XVII para un conocimiento físico – matemático más sólido del comportamiento de éste. Una reflexión importante es el continuo vínculo que ha existido entre las matemáticas y la física en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza. Newton, en el prefacio de su *Principia,* le da un reconocimiento al proceso de modelización y lo asemeja a la mecánica en tanto:

"*(…) el mecánico y la geometría en sí, el primero como el artífice que y conocedor de las leyes que le rige a la mecánica en lo geométrico y el hecho de 'funcionar' la mecánica no la hace por si sola la geometría, si no en el conocimiento que tenga el artífice de ella.*" (p.4)

4. *Las funciones.* Algunos acercamientos a la construcción del concepto se inician con Descartes y Fermat mediante la creación de la geometría analítica al estar más interesados en la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas con dos variables. Como señala Del Rio (1996, p.38) "[Descartes] *encontró métodos para construir geométricamente los valores de una variable fijados los de la otra*" por lo que ya tiene dos características de la noción de función, la primera el considerar dos cantidades variables y la segunda una cierta relación de dependencia. Dirichelt dio la definición de función que es la más empleada ahora: " *y es una función de x cuando el valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y* " Kline (1992, p.1252). Así como dice Cauchy (1821) citado por Kline (1992):

"Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que, estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se considera a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que esta entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esa variable." (p.1254)

La relación de dependencia entre estas variables facilita la relación en el plano cartesiano por medio de la expresión analítica (ecuación), y según Euler toda función es una expresión analítica.

Consideraciones finales

En la revisión de la literatura se evidencian algunos obstáculos presentes en la construcción de la noción de función cuadrática, tales como: la no aceptación de los números negativos, la concepción cuadrática como área, limitar su construcción con regla y compás debido a que ésto ubica al concepto de "*cuadrado"* como polisémico creando confusión. Es posible superar algunas de estos obstáculos el momento en que se pueda establecer un puente entre la concepción aritmética, geométrica y algebraica, permitiendo la reflexión del concepto como tal y cómo éste se convierte en herramienta para modelar el entorno o situaciones aritméticas, de áreas, de variación, en especial del movimiento.

Las reflexiones históricas presentadas en este documento sugieren la necesidad de que los conocimientos matemáticos que se produzcan en el aula lleven al estudiante a la exploración, manipulación, de lo que está en su entorno. En este caso, las situaciones de movimiento ofrecen una la riqueza conceptual para la comprensión de la función cuadrática. Un trabajo didáctico en este sentido, sugiere una visión de las aulas escolares como espacios análogos a los laboratorios, en los cuales se valide el conocimiento y se promueva un ambiente que potencie la creación de alternativas de solución, análogos a los empleados por Galileo en sus experimentos de movimiento.

Referencias bibliográficas

Del Rio, J. (1996). *Lugares geométricos: Las Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Euclides (1999). *Elementos* I- VI. Madrid: Planeta de Agostini.

Galilei, G. (1638/2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Losada.

González, P. *Apolonio ¿262 a.C. - 190 a.C?.* Extraído el 2 enero, 2007 de http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático en la antigüedad a nuestros dias. I y II*. Madrid: Alianza editorial.

Mesa, Y. & Villa, J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. *Revista virtual FUCN, 21,*.Artículo 5. Extraído 25 Agosto, 2007 de http://www.ucn.edu.co/portal/uzine/volumen21/html/articulo5.html

Newton, I. (1687/1982). *Principios matemáticos de la filosofía natural*. Madrid: Editora Nacional.

Posada, F. & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Jaén: Universidad de Jaén.