

ACERCAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO DESDE LA MODELACIÓN

Sandra Milena Londoño Orrego

samydam@gmail.com

Lina María Muñoz Mesa

limamu07@gmail.com

Carlos Mario Jaramillo López

cama@matematicas.udea.edu.co

Universidad de Antioquia

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde nuestra experiencia docente, hemos observado que las actividades involucradas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, develan una desarticulación entre las matemáticas escolares con los contextos sociales propios de los estudiantes. También hemos observado que, la ausencia de sentidos en los procesos algebraicos puede constituirse una de las causas del fracaso escolar. Es común, visualizar dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar centradas en la utilización de pasos algebraicos aislados de una correspondencia conceptual y contextual. Por lo que, la forma de enseñar algunos conceptos, en especial la ecuación de primer grado, tradicionalmente la hemos abordado en forma “mecánica”, es decir, basada en tareas en las que los estudiantes tienen como objetivo, sólo operacionalizar expresiones algebraicas. Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz (2007), afirman que saber resolver un problema no significa comprenderlo. Los estudiantes pueden resolver un sistema de ecuaciones procedimentalmente bien, lo cual no garantiza que las ecuaciones construidas, ni las interpretaciones de los resultados correspondan a la descripción y solución coherente de la situación.

Hemos observado, desde nuestras aulas de clase, la falta de apropiación de las situaciones y problemas matemáticos, puesto que, en ocasiones no posibilitan una conexión con las concepciones, experiencias y prácticas de los estudiantes. Kieran (1995) propone la solución de problemas de tipo interpretativo con respecto a una concepción de

ecuación más estructural que procedimental, como una alternativa a la pérdida del significado cuando se trabaja en forma general con los simbolismos algebraicos correspondientes.

Diversas investigaciones (Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés 2007; Kieran, 1995; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999; Filloy, et al., 2004) confluyen en concebir la construcción del concepto de ecuación de manera más significativa. Sin embargo, estos estudios se han enfocado con mayor prioridad a la solución de la ecuación lineal, más que a su construcción y planteamiento a través de contextos.

En este sentido, el aprendizaje del álgebra en el caso particular de la ecuación lineal, reducido a las actividades mecánicas y operativas independientes de prácticas escolares que incluyan situaciones para favorecer una construcción de los conceptos matemáticos en los estudiantes, evidencia un problema de desarticulación en el proceso de aprendizaje, lo cual constituye un tema valioso para investigar.

Los procesos de aprendizaje en matemáticas requieren de alternativas para lograr objetivos concretos, nuestro estudio plantea una propuesta basada en modelos construidos por los mismos estudiantes, no sólo transmitidos por los profesores o por los libros. Se hace necesario concebir la construcción de modelos de ecuación de primer grado, basada en las situaciones generadas por procesos de modelación, ya que según en MEN (1998) este proceso posibilita la reflexión, discusión, y en general la construcción de conceptos matemáticos en forma significativa. Por tanto, parte de nuestra preocupación se enmarca en estudiar el papel que juega la modelación para producir modelos asociados a contextos particulares de los estudiantes.

Los procesos de modelación implican una concepción de la enseñanza y aprendizaje cuyo centro no son los contenidos temáticos, sino las situaciones que potencian la construcción de conceptos bajo las necesidades e intereses de los estudiantes.

En consecuencia, proponer procesos escolares para que los estudiantes puedan articular las matemáticas en ciertos contextos sociales, escolares o familiares, supone diversas formas de modelar, de construir y de producir diferentes interpretaciones de un mismo concepto. Pero son estas prácticas las que podrían contribuir en una de las funciones sociales de la Educación Matemática en Colombia, la cual radica en la formación de

estudiantes críticos y partícipes en los diferentes modos de leer y pensar el mundo, estableciendo relaciones u asociaciones directas con las matemáticas.

Este estudio lo justificamos, no solo como una necesidad generalizada de detectar las dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de la ecuación de primer grado en un nivel de Educación Básica Secundaria, sino además, es una investigación que pretende caracterizar una manera de construir modelos de la ecuación de primer grado desde procesos de modelación que incluyan contextos reales. Con base en lo anterior, pretendemos con esta investigación ofrecer una respuesta a la siguiente pregunta:

¿De qué manera estudiantes de grado once construyen modelos de la ecuación de primer grado mediante situaciones propias de sus contextos?

2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La modelación matemática se ha constituido desde hace más de 20 años en un dominio de investigación en Educación Matemática, considerándose, entre otras posibilidades, como una alternativa que permite el aprendizaje de modelos matemáticos relacionándolos con situaciones del “mundo real”.

El objetivo escolar de enseñar matemáticas, para que luego los estudiantes las puedan utilizar en otras disciplinas o en situaciones de su vida, debe avanzar hacia la noción de escuela que incluya éstas situaciones como punto de partida para la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) afirman que, abordar las matemáticas escolares teóricamente no implica una *transferencia automática* para matematizar situaciones en contexto extra-escolares.

Optar por la modelación como uno de los procesos para un aprendizaje, no sólo teórico sino práctico, permitiría relacionar las situaciones de la “realidad” con modelos matemáticos que la describen. En consecuencia, el desarrollo del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales, no se obtendría trasladando situaciones cotidianas de forma mecánica o simulada, sino creando así ambientes de resolución de problemas reales de interés al estudiante.

Dado que nuestra investigación pretende estudiar los modelos construidos por los estudiantes, cuando se encuentran en procesos de modelación relacionados con el concepto

de ecuación de primer grado, se hace necesario conceptualizar inicialmente algunos elementos teóricos de modelo, modelación y contextos que fundamenten el papel de los ambientes de enseñanza y de aprendizaje.

MODELO MATEMÁTICO. Una parte del proceso de modelación, se encuentra en la construcción de modelos matemáticos. Esta construcción se realiza partiendo de fenómenos o situaciones particulares de un mundo real o en palabras de Blum, et al., (2007) de un mundo extra-matemático que se encuentra en otro plano al mundo de las matemáticas.

La idea de modelo matemático puede mirarse en dos categorías. Una de ellas, tomando modelo matemático como producto, que describe la situación real en términos de relaciones numéricas y simbólicas. O también podríamos visualizar el modelo como proceso para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Ambas perspectivas requieren de una construcción de relaciones que no son inmediatas, puesto que incluyen la búsqueda de conexiones e interrelaciones de la situación real con los objetos matemáticos acordes a la necesidad del problema en un contexto.

MODELACIÓN COMO PROCESO. En general, la modelación es aquel proceso en el cual se construyen modelos para describir situaciones de contextos reales. Desde los Lineamientos Curriculares el MEN (1998) plantea que: “La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y la matemáticas es la modelación” (p. 97). Desde esta perspectiva, la modelación se puede considerar como todas aquellas relaciones establecidas entre el mundo real y las matemáticas, que influyen en un proceso de matematización para la creación de modelos que describan una situación, y a su vez será punto de partida para la toma de decisiones frente a un determinado problema.

A continuación, describimos algunas consideraciones sobre diferentes acepciones de modelación:

- La *modelación matemática* es un proceso que conduce de una situación problema a un modelo matemático. Sin embargo, también se ha vuelto común usar esta noción para el proceso completo consistente en la estructuración,

matematización, trabajando matemáticamente e interpretando / validando (varias veces alrededor del ciclo) según lo descrito (Blum, et al., 2007).

- [...] *práctica que incluye (re)elaboración e interpretación de modelos ya construidos*. En consecuencia, los *problemas* deben asumirse como *problemas en contextos reales*; entendiendo por *contextos reales* aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución. (Villa-Ochoa, et al, 2009, p. 170)

De acuerdo a lo anterior, resaltamos que la modelación matemática converge a diversas relaciones dinámicas, las cuales se exteriorizan mediante prácticas, actividades y procesos intencionados para la estructuración de conceptos, bajo la necesidad que otorgan los contextos reales de ser interpretados y comprendidos.

CONTEXTOS REALES. Cuando hablamos de contextos reales, hacemos alusión a la expresión “mundo real”, concebida por Blum, et al. (2007) como todo lo que tiene que ver con la naturaleza, sociedad, cultura, incluyendo la vida cotidiana, como también las asignaturas de la escuela y la universidad o las disciplinas científicas diferentes de las matemáticas.

Tomando como base esta consideración sobre el mundo real, abordamos como punto de partida, un subconjunto de dicho mundo real, en el cual ubicaremos las situaciones propias de los estudiantes y que les son familiares a diferentes experiencias cotidianas.

Si bien, los modelos matemáticos no se encuentran explícitos en las situaciones reales, es claro que, algunas veces, hay algo problemático que puede ser abordado y resuelto desde las matemáticas. En este sentido, se ponen en juego procesos generados cuando se resuelven problemas, tales como, la interpretación, la reflexión, la búsqueda de patrones, la comunicación, la representación, entre otros, con el fin de desarrollar conocimientos matemáticos desde la práctica.

Ahora bien, la situación real en la cual subyace un problema requiere de un modelo particular propio de la construcción que haga el estudiante para solucionarlo. Blum, et. al., (2007) utilizan el término problema en un sentido amplio, el cual abarca no sólo los problemas prácticos, sino también problemas de carácter más intelectual cuyo objetivo es

describir, explicar, comprender o incluso interpretar partes del mundo, desde contextos matemáticos.

4. METODOLOGÍA

La investigación se está desarrollando mediante un estudio de casos con estudiantes de once, pertenecientes a una institución pública del Municipio de Medellín, pretendiendo comprender a profundidad el fenómeno en su contexto real. En este estudio, el fenómeno se enfoca en la manera en que los estudiantes de grado once construyen modelos cuando resuelven situaciones en contextos reales relacionadas con el concepto de la ecuación de primer grado.

Enfocamos el estudio en la caracterización en forma particular y no general, de diversos modelos ligados a procesos de modelación de la ecuación de primer grado. Esta caracterización depende de una construcción única de modelos que son develados a partir de las experiencias y prácticas de algunos estudiantes.

5. ANÁLISIS DE DATOS

Algunos datos recogidos a través de entrevistas realizadas con los estudiantes, nos llevan a analizar en principio dos temáticas iniciales, miradas como una base diagnóstica del proceso de investigación que nos encontramos desarrollando.

Los conocimientos matemáticos y su relación con el contexto cotidiano

A lo largo de la historia escolar los estudiantes se preguntan a diario, sobre la relación de muchos conceptos matemáticos enseñados en el aula y la vida cotidiana. La imagen de las matemáticas, como algo difícil y que está fuera de nuestro alcance, que es importante pero abstracta y sin relación con la vida, es una imagen muy habitual (Giménez, Díez-Palomar y Civil, 2007). En este sentido, se puede analizar cómo el estudiante David, asume que la matemática se utiliza para todo, por lo cual, la escuela debe dedicarse a desarrollar el razonamiento lógico, aplicable a los problemas de la vida diaria, que a dictar contenidos rigurosos, carentes de sentido. Al respecto, él expresa:

[...] esto de las ecuaciones, las equis, de los (y), de los números, es como algo complicado, que uno dice Bueno ¿esto para qué me le va a servir a uno en la vida? ¿qué problemas va a solucionar uno en la vida cotidiana con todo esto. [...] Me gustaría que visionaran pues la matemática como más que todo por ese ámbito, no

tanto por ecuaciones, ni números, sino pensando en el futuro de los estudiantes; en que puedan pensar ellos, en que puedan razonar cuando tengan una familia, cuando tengan un trabajo [...]

Relacionar las matemáticas con la vida cotidiana, y en particular con la ecuación de primer grado, nos lleva a pensar en sucesos que pertenezcan a los estudiantes y que a su vez sean representaciones de aplicaciones diversas, en cuanto a conceptos matemáticos abordados en el álgebra escolar.

La noción de ecuación y sus elementos constitutivos:

En la construcción de los procesos algebraicos, intervienen una cantidad de elementos que definen los significados y las relaciones en sí mismo y con otros saberes. Nos remitiremos en particular a la significación que un estudiante le da a la *letra*, como elemento que es incorporado al álgebra desde diversas perspectivas, en este sentido David manifiesta algunos acercamientos a tan importante noción:

[...] las letras se ponen es porque podemos aplicar cualquier valor en vez de esa letra [...] Podría decir que x es una variable, la puedo reemplazar por cualquier número [...] pues las letras, como te digo, puede uno cambiar el alfabético por cualquier número [...] La x es un valor exacto, representado en una letra.

De lo anterior, analizamos que David tiene incorporado en sus significados algunas concepciones de la *letra* en determinada situación. La concibe como una incógnita, al referirse al valor exacto y cuando expresa que la *letra* se puede cambiar por cualquier número, se acerca a la idea de variable. David alcanza a producir expresiones que hacen referencia indistintamente a la *letra*, en su caso la x , como significaciones equivalentes, es decir, parece que no hay una construcción de los procesos de algebrización claros, que posibilite nombrar a la x como variable o como incógnita en una misma situación. En este sentido García (2007), expresa: “La manipulación de las expresiones algebraicas, casi siempre es formal, sin referencia alguna a sistemas matemáticos o extramatemáticos de los que pudiese emanar un “sentido” de dichas manipulaciones”.

El siguiente análisis corresponde al proceso inicial de modelación, el cual presentan varios momentos diferentes para relacionar un contexto real fuera de la matemática con un objeto

conceptual propio de las matemáticas. En nuestro proyecto, uno de los contextos es la situación del transporte del metro de Medellín como punto de partida para una construcción sobre el concepto de ecuación de primer grado.

Los estudiantes, involucrados en nuestra investigación, comenzaron a establecer posibles relaciones matemáticas en forma verbal, utilizando elementos conceptuales como la variable ingresos en relación a la variable egresos, identificaron los ingresos como el dinero recolectado desde las empresas privadas, los impuestos, la venta de libros, el aporte económico de los usuarios de estrato bajo mediante la tarjeta cívica o los diferentes tipos de tiquetes, al igual que reconocieron que con ese dinero se cubren gastos como la nómina de empleados, las construcciones y reformas del metro. Además, los estudiantes asociaron en forma cualitativa, la variable tiempo con relación al retraso en la construcción del metro con la variable deuda del metro, con relación a su incremento. Del mismo modo, relacionaron la magnitud del precio de los tiquetes sobre los microbuses en relación a la distancia o ubicación del usuario y su destino, estableciendo una relación de proporcionalidad directa. Al respecto, el estudiante Santander, supone que “los precios los sacan de los kilómetros recorridos y de las distancias, por ejemplo para ir a Barbosa es mayor el precio porque es más distancia”.

En este proceso inicial de modelación matemática en el contexto del metro de Medellín, comenzamos a establecer posibles características que se evidencian en la identificación de variables que intervienen en la situación particular, y son punto de partida para el estudio de conceptos como la ecuación y la función, dentro de un proceso de formación escolar.

6. CONCLUSIONES

El paso de la aritmética al álgebra, es una etapa fundamental del currículo escolar, en el cual se fundamentan muchos de los procesos de abstracción y generalización, que son base para la solución de diferentes situaciones en la matemática y en contextos diferentes a ella. En este sentido, el álgebra escolar debe proyectarse como las necesidades que surgen de situaciones de la vida real, inicialmente y que posibiliten más adelante, el puente entre lo *real* y lo *abstracto* con significados más claros para el estudiante.

En general, incluir los contextos y en particular las situaciones cercanas al estudiante, puede posibilitar una variedad de elementos en una construcción de modelos matemáticos que describan respuestas y necesidades concretas de los estudiantes inmersos en un mundo real, logrando más adelante producir modelos en situaciones más abstractas.

El trabajo de campo inicial sobre modelación de la ecuación de primer grado, a través del contexto real del transporte metro, el cual ha sido evidenciado mediante la observación, permitió una apropiación del contexto, en cuanto al pago de la deuda del metro y su funcionamiento mediante las discusiones basadas en la predicción, la experiencia, el cuestionamiento y el establecimiento de asociaciones de variables e incógnitas por parte de los participantes. Por lo que, el discutir aspectos del metro permitió empoderar a los estudiantes de esa situación, para comenzar a generar interrogantes que se convierten en una necesidad a resolver.

Con respecto al contexto del metro, verificamos que puede ser una situación auténtica y cotidiana a la realidad de los participantes, puesto que proporciona una riqueza en cuanto a su contenido cultural y social, para los posteriores procesos de matematización. Aunque la construcción de la ecuación de primer grado, aún no ha sido de forma simbólica, se dejaron planteadas algunas asociaciones de variables e incógnitas en forma cualitativa, que podrían ser cuantificables más adelante, en forma de modelo matemático con una interpretación real asociada al contexto del metro.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Fillooy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). *Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, pp. 391–398. Mexico.
- García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 71-90.

- Giménez, J., Díez-Palomar, J., & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En U. D'Ambrosio, P. López, G. Fitzsimons, G. Knijnik, & N. Planas, *Educación Matemática y exclusión* (págs. 9-44). Barcelona: Graó.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (V. M. Mesa, Trad. libre). Reston V.A: National Council of Teachers of Mathematics. Con acceso a través de:
<http://dme.ufro.cl/pmat/images/Documentos/aprendizaje%20del%20en%20el%20liceo.pdf>
- MEN. (2006). *Estándares en Competencias Básicas*. Bogota: Magisterio.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Magisterio.
- Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). Ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de la ciencia*, 17 (3), 453 – 461.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., & Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por Transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), 538-561.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., Berrio, M., Osorio, J. A., & Ocampo, D. A. (2009a). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. ALEXANDRIA. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2 (2), 159-180. Disponible a través de
<http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/>