

Reflexiones acerca de las fracciones

Lucía Martínez de Amaya luciamar1@yahoo.es.
Alvaro Solano Solano alsolano13@gmail.com
Profesores de la Universidad Popular del Cesar.
Grupo de Estudio e Investigación en Educación
Matemática "GEMAT".

Resumen

Cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje se llega al concepto de fracción, suelen surgir preguntas cuyo tratamiento y análisis determinan posibles formas de reestructurar la manera de orientar el proceso, para un máximo logro del conocimiento acerca de ellas. En el desarrollo de la investigación, realizada por el grupo GEMAT, se concluye que el profesor no suele estar preparado para sortear con total éxito tales interrogantes, razón por la cual propone compartir estudios, intercambiar ideas y conocimientos en torno al objeto de aprendizaje en mención. Además, sugiere que los estamentos educativos se responsabilicen de su adecuada formación.

Presentación

En investigación que fue concluida por el grupo GEMAT el año 2006, se trazó como objetivo final estudiar y dimensionar el nivel de conocimiento profesional de los profesores de matemática en los grados 3° a 6° de las instituciones educativas oficiales del departamento del Cesar, referido al concepto de fracción.

El resultado de esta investigación pone al descubierto temas de tanta importancia en el ejercicio académico que se consideró fundamental para proponer a las instituciones responsables de la formación de los profesores, un programa de mejoramiento profesional en cuanto a calidad del conocimiento y sostenibilidad del mismo.

Durante los últimos años, en el país y específicamente en el departamento del Cesar, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que afectan la calidad del desempeño de los estudiantes.

La falla es evidente en los exámenes de estado, en los cuales se manifiesta el bajo nivel de competencia de los estudiantes para interpretar, analizar, argumentar, sintetizar y proponer soluciones para la resolución de situaciones problemáticas.

Esta situación se presenta de igual manera en los estudiantes que ingresan a estudios superiores. Llama poderosamente la atención las falencias detectadas en torno al conocimiento de las fracciones.

Tanto los profesores en ejercicio como lo futuros profesores tienen la tendencia, natural por cierto, de repetir el modelo de enseñanza que practicaron quienes fueron sus profesores.

Esta experiencia no es negativa siempre que las actividades empleadas no reafirmen los algoritmos de cálculo sino que le den significado a esos algoritmos. Que tengan en cuenta los conocimientos generados a partir de los trabajos que se vienen realizando en torno al conocimiento profesional del



ASOCOLME

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

profesor de matemática, referido al concepto de fracción, es decir, a las distintas formas en que se ha concebido la fracción a través de la historia, las formas en que se representa, los significados que adopta en su uso –como operador, como partidor, como medida...-

No es novedoso afirmar que entre el conocimiento que posee el profesor de matemáticas y la forma como orienta su aprendizaje hay una gran relación. En sus clases pone en acción el conocimiento profesional, cuya adquisición ha iniciado en la facultad de educación o en la escuela Normal y enriquece y consolida en los procesos de formación continuada.

Esta realidad y las conclusiones del estudio realizado sobre el Conocimiento Profesional de los Profesores de Matemáticas del Departamento del Cesar, referido al concepto de fracción, ha conducido al grupo "Gemat" a intercambiar experiencias, ideas e interrogantes en torno a este objeto de estudio, el cual, en la matemática escolar se considera básico para la comprensión de los números racionales y la comunidad escolar identifica como fundamental y como motivo de frustraciones y fracaso.

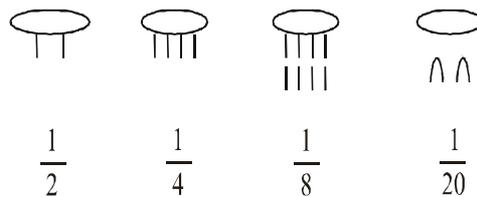
En estudios referentes a fracciones, realizados por Kieren y Streefland, mencionados por Llinares Salvador y Sanchez M. Victoria, en la obra: "FRACCIONES, LA RELACION PARTE-TODO", se afirma que "la aproximación de los niños a las fracciones debe realizarse valiéndose de muchas de las diferentes interpretaciones. Entre otras razones, porque estas no son completamente independientes sino que interactúan unas con otras y además, muy frecuentemente, después de desarrollar experiencias bajo una sola interpretación, los niños no logran trasladarlas a otras".

Referentes teóricos

Origen histórico de las fracciones.

Civilización egipcia: Los monumentos y papiros egipcios han suministrado información acerca del conocimiento de ese pueblo relativo a las fracciones y la manera especial de trabajar con ellas.

Utilizaban las fracciones denominadas unitarias (fracciones con numerador 1) como las que figuran a continuación.



Disponían de un sistema de numeración aditivo de manera que las fracciones de la forma m/n para n impar de 5 a 101 las representaban como suma de fracciones unitarias. El papiro de Rhind presenta una lista de fracciones de ese tipo y su descomposición.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}, \quad \frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}, \quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Además conocían las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Prueba de ello son algunas inscripciones, como el papiro de Ahmes, donde figuran problemas relativos a distribución de pan, a la construcción de pirámides, a medidas agrarias.

Civilización babilónica. La información sobre las fracciones babilónicas se ha obtenido de algunas tablillas encontradas en ciertas excavaciones.

El sistema de numeración babilónica era de base 60, así que el número 60 y cualquier potencia de 60 equivalía a 1.

I	II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7.30
9	6.40
10	6
12	5
15	4
<i>Tabla 1</i>	

I	II
16	3.45
18	3.20
20	3
24	2.30
25	3.24
27	2.13.20
30	2
32	1.52.30
36	1.40
40	1.30
<i>Tabla 2</i>	

I	II
45	1.20
48	1.15
50	1.12
54	1.60.40
1	1
1.4	56.15
1.12	50
1.15	48
1.20	45
1.21	44.26.40
<i>Tabla 3</i>	

En las tablillas se observa que el producto de un número cualquiera de la columna I y su correspondiente en la columna II es 1, por tanto cada uno de ellos es el inverso multiplicativo o recíproco del otro.

Se muestran algunos ejemplos:

En la tabla 1, sexta fila

$$7.30 = 7 \times 60 + 30 = 420 + 30 = 450$$

$$7.30 \times 8 = 450 \times 8 = 3600 = 60^2 = 1$$

$$\frac{7.30}{60^2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{450}{3600} = \frac{1}{8}$$



En la tabla 2, primera fila

$$3.45 = 3 \times 60 + 45 = 180 + 45 = 225$$

$$3.45 \times 16 = (180 + 45)16 = 3600 = 60^2 = 1$$

$$\frac{3.45}{60^2} = \frac{1}{16}; \quad \frac{225}{3600} = \frac{1}{16}$$

Civilización Griega. De las fracciones en Grecia se sabe que eran consideradas como razón o relación entre dos enteros. Además, que se representaban de manera diferente según se tratara de fracciones unitarias o fracciones ordinarias de la forma m/n .

Así, para representar fracciones unitarias eran utilizadas letras numeradas (sistema adoptado por los matemáticos de Alejandría en el siglo III A.C.), afectadas por otro acento.

Ejemplo

Signos empleados: las 24 letras del alfabeto griego clásico, más tres letras antiguas:

F(digamma), ζ (Copa), $\sigma\pi$ (sampi: $\sigma + \pi$)

Todas estas letras van seguidas de acento <<'>> para que no se confundan con las letras que sirven para escribir palabras: Tenemos así:

Unidades	Decenas	Centenas
$\alpha' = 1$	$\tau' = 10$	$\rho' = 100$
$\beta' = 2$	$\nu' = 20$	$\sigma' = 200$
$\gamma' = 3$	$\lambda' = 30$	$\tau' = 300$
$\delta' = 4$	$\mu' = 40$	$u' = 400$
$\varepsilon' = 5$	$\nu' = 50$	$\varphi' = 500$
$F' = 6$	$\xi = 60$	$\chi' = 600$
$\zeta' = 7$	$\sigma' = 70$	$\psi' = 700$
$\eta' = 8$	$\pi' = 80$	$\omega' = 800$
$\theta' = 9$	$\zeta' = 90$	$\sigma\pi' = 900$

Para los millares, se utilizan las letras de las unidades simples situando el acento en la parte inferior izquierda de la letra: $\alpha = 1000$, $\beta = 2000$, etc. hasta $\theta = 9000$

Ejemplos

$$\omega' \xi' F' = 800 + 60 + 6 = 866$$

$\theta \sigma \pi' \zeta' \theta' = 9999$ (el número mayor que se puede escribir con en este sistema).

Para las fracciones ordinarias como $5/7$ se utilizaban **barras** (antepasado de la **raya de fracción** introducida por los árabes). Así: $\frac{5}{7} = \varepsilon^{15}$.

Sin embargo en tiempos de Herón de Alejandría y posteriores a él, se utilizaban la suma de fracciones unitarias, a la manera de los egipcios, para expresar el resultado obtenido al dividir dos números enteros. Así, al dividir 25 entre 13 el cociente era

Civilización Árabe. Fueron los árabes quienes introdujeron el uso de la línea vertical y horizontal al simbolizar fracciones.

Entre sus aportes se menciona el trabajo inicial con las fracciones decimales, evidenciado en el manuscrito supérstite del kitab al-fusul fi al-Hindi obra de Al-Uqlidisi de los 953-53. Al estudiar el libro, su traductor A.S. Saidan afirmó: "la idea más notable de esta obra es la de fracción decimal. Al Uqlidisi usa las fracciones decimales como tales, aprecia la importancia de un signo decimal y sugiere uno bueno".

Civilización India. Los hindúes establecieron reglas para efectuar operaciones con fracciones. Inicialmente Aryabhatase realizó trabajos en ese sentido y después, en el siglo VII, Bramagupta. Pero las reglas que en la actualidad se emplean al operar con fracciones están basadas en las obras de Mahavira del siglo IX y de Bháskara del siglo XII.

Interpretaciones de la fracción





A S O C O L M E

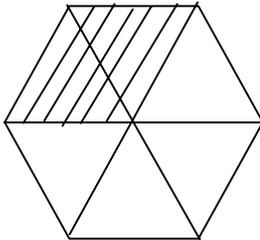
ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

La fracción como parte de un todo, como partidor.

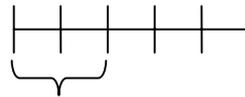
La mayoría de los textos escolares, donde figuran las fracciones y la forma como tradicionalmente se enseñan, presenta este concepto correspondiendo con su origen histórico de dividir objetos en un determinado número de partes iguales y escoger unas tantas partes de estas para repartir entre varias personas.

Este es el significado de fracción como partidor o como parte de un todo: Se divide "un todo" (unidad) discreto o continuo en partes iguales se producen partes congruentes como cantidad de superficie o cantidad de objetos. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes.

Contexto continuo



Subárea de un área unitaria.
De las 6 partes del todo o unidad (hexágono) se han sombreado dos



De las seis partes en que se ha dividido el todo o unidad (segmento) se han tomado dos.

Contexto Discreto

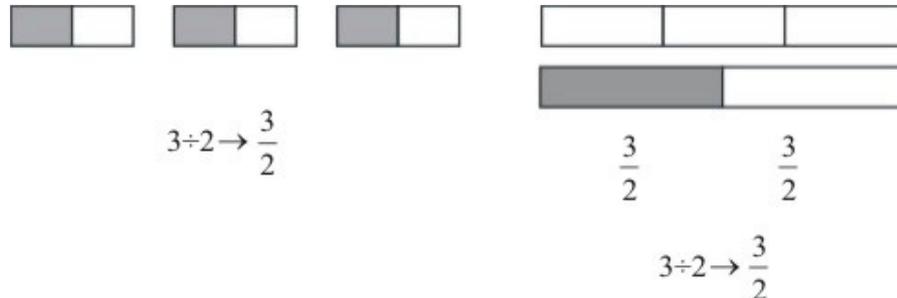
- ○ ○ $\frac{2}{6}$ de los puntos son negros
- ○ ○ Subconjunto de un conjunto discreto

Cuando el todo o unidad es la magnitud longitud, la representación de las fracciones pueden ser puntos de una recta numérica. Así, la fracción es un número cuya magnitud es la longitud del segmento comprendido entre el cero y el punto que la representa.

La fracción como cociente

La fracción así entendida se asocia a la operación división de un número entero entre otro o a la de repartir en varias partes iguales un número determinado de unidades.

Esta forma de concebir la fracción como cociente indicado, constituye la interpretación de la fracción como elemento de un campo o cuerpo conmutativo ordenado y representa la solución de la ecuación $bx = a$, siendo a y b números naturales y $b \neq 0$



La fracción como operador

Con esta interpretación, la fracción aplicada a un estado inicial, medida o número de objetos, produce un estado final, medida o número de objetos, reducido o ampliado, sin cambio. En este caso la fracción actúa como un transformador que modifica una situación o estado simplificándola o agrandándola. Por ejemplo, si se aplica el operador $(\frac{3}{2}) \times$ a 4m, la medida se triplica y luego se reduce a la mitad.

El cero (0_x) es un operador reductor muy fuerte, aplicado a un estado inicial, medida o número de objetos, produce anulación; es el operador nulo.

El uno (1_x) es también un operador especial, pues aplicado a un estado inicial, medida o número de objetos, lo deja intacto; se llama por eso operador nuestro o idéntico.

La fracción como medidor

Aquí las fracciones indican medidas en relación con otras. Bajo este significado las personas sin escolaridad, en su cotidianidad, manejan las fracciones con mucha propiedad, así hablan de "media libra", "tres cuartos de hora", "media vuelta", "llave de un octavo", etc.

La fracción como razón

Bajo esta interpretación la fracción es una relación inversa entre un número que sirve como referencia o total y otro número que indica cuántos de ese total satisfacen una condición dada.

Así las fracciones se usan como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud. A este significado están asociadas las ideas de escala, proporcionalidad, porcentaje, probabilidad.

En cuanto a la interpretación que proporciona mayor comprensión acerca de las fracciones, no hay unidad de criterio. Sin embargo la interpretación PARTE-TODO es la más simple y además el mejor modelo para la comprensión de la suma de fracciones.

Sistemas de Representación de las Fracciones

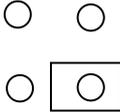
Son sistemas de representación: los símbolos, íconos, dibujos y expresiones utilizadas por el profesor para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos y propiciar en los alumnos su comprensión.

Se resumen en el siguiente cuadro los principales sistemas de representación de las fracciones (Morcote 2001) considerando la figural, la numeral, la literal y sus diferentes formas.



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

FIGURAL		NUMERAL			LITERAL	
CONTINUO		DISCRETO	FRACCIÓN	PORCENTAJE	DECIMAL	Cuatro Un cuarto Uno de cuatro Una cuarta parte Proporción de uno a cuatro
SUPERFICIE	LONGITUD (O LINEAL)					
			1/4	25%	0,25	
de cuatro partes iguales	Señala punto entre 0 y 1	Uno de los 4	Cociente de dos números	Sugiere 100 como la unidad	25 de 100	Cuatro partes iguales

Las actividades realizadas posteriormente a la finalización de la investigación: Conocimiento profesional del profesor de matemática del departamento del Cesar referido al concepto de fracción, condujeron a las siguientes conclusiones:

CONCLUSIONES

- Es responsabilidad de las instituciones encargadas de la formación inicial y permanente de los profesores apoyar y/o promover eventos que conduzcan al análisis y estudio de soluciones a problemas relacionados con el aprendizaje de las matemáticas en conocimientos específicos, tradicionalmente problemáticos como las fracciones.
- Para lograr la comprensión de los conceptos relativos a fracciones, es necesario proporcionar a los aprendices experiencias con el mayor número de interpretaciones y representaciones posibles.
- El desarrollo del concepto de fracción desde lo intuitivo hasta lo simbólico y operativo es un proceso de aprendizaje que requiere un lapso de tiempo mayor del que generalmente se considera.
- La mecanización de procedimientos por encima de la comprensión de conceptos conlleva a desvirtuar los aspectos matemáticos que se deben trabajar con los estudiantes. Esto se convierte en un obstáculo, puesto que impide a los profesores asumir nuevas perspectivas de enseñanza, donde la construcción de lo conceptual y lo significativo sea el propósito de la matemática escolar.
- Se evidencia un gran desconocimiento de los lineamientos y estándares curriculares para la programación y planeación de los objetos matemáticos a trabajar en el aula de clase.

Bibliografía

Agudelo, C; Perry, P; Valero, P; Castro, M; Gómez, P. Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa. Una empresa docente. Bogotá 1998.

Brousseau, Guy. Utilidad e interés de la Didáctica para un Profesor, en Revista Suma 4 y 5 páginas 5-12, 1989- 1990.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la U. del Valle, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Flores Martínez, Pablo. Concepciones y Creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza. Colección Mathema. Editorial Comares. Granada. 1998

Freudenthal, Hans. Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas. Traducción de Luis Puig. CINVESTAV-IPN, México 1984.

García Blanco, M.M. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza y aprendizaje. Kronos-Giem. Sevilla

Gómez, Pedro y Carulla, Cristina. Sistemas de Representación y mapas conceptuales para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas. Grupo editorial Gaia. Bogotá, 2001.

Grupo de matemáticas escolares de la Universidad Distrital. La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor. Editorial Gaia. Bogotá. 1999

Llinares y Sánchez, S. y M. Fracciones: La relación Parte-Todo. Editorial Síntesis. Madrid.

Llinares, Salvador. La Formación de Profesores de Matemática. Cuesta del Rosario. Sevilla, España, 1991.

Llinares, Salvador, 1995. En Revista Uno, Didáctica de la Matemática. "Conocimiento Profesional del Profesor de Matemática y Procesos de Formación". Editorial Grao, España 55p.

Llinares, S. y Sánchez, V. Teoría y Práctica en Educación Matemática.. Alfar. Sevilla, España, 1990.

Morcote Herrera, Oliverio. El conocimiento profesional de estudiantes para profesor en una programación sobre fracciones. Universidad de Granada. Granada .2001

Vasco Uribe, Carlos. El archipiélago fraccionario en Un nuevo enfoque para la didáctica de la matemática. Vol.II MEN, Bogotá, 1988.
