

# PERFIL DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE DE PRECÁLCULO DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Pensar que existen soluciones para cerrar la brecha entre el colegio y la universidad es utópico. Sin embargo, sí tiene sentido el trabajo que se haga con respecto al problema de la brecha para conocer y acercar los ideales y las expectativas que tienen las diferentes instituciones de educación. En la Universidad de los Andes fue evidente que dicho trabajo se podría orientar en diferentes direcciones y haciendo énfasis en la institución o bien en los profesores o bien en los estudiantes. Se podían abordar temas como: diseño curricular, creencias y actitudes de los profesores y de los estudiantes, métodos de enseñanza, concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, dificultades y errores de aprendizaje y otros temas.

Luego de varios traspies en la elección del tema de investigación, elegimos finalmente explorar el tema del aprendizaje y considerar a los primíparos para el estudio por ser ellos los que viven realmente el proceso de transición del colegio a la universidad. Por otra parte, nos restringimos al área de precálculo motivados en parte porque en esta materia había un mayor índice de desaprobación. Concretamente, se propuso como objetivo general describir un perfil de aprendizaje en matemáticas del estudiante de Precálculo en el momento de ingresar a la Universidad. Del objetivo anterior se derivó el problema principal de este proyecto: definir los elementos conceptuales con los cuáles articular la descripción de dicho perfil.

La presentación está dividida en cuatro partes, en la primera se expone un marco conceptual que presenta los elementos con los cuales se describirá el perfil, la segunda y tercera se refieren respectivamente a la metodología de la investigación y a los resultados obtenidos y la última a las conclusiones del trabajo.

## MARCO CONCEPTUAL

### ¿Qué es el precálculo?

El precálculo se entiende en este proyecto como el área del conocimiento matemático que permite articular los conceptos del álgebra con los del cálculo, a través del estudio de las familias de funciones, y de sus características parti-

culares y generales. El concepto de función es entonces trascendental en el estudio del precálculo. El NCTM (1991) dice al respecto:

*La capacidad que tienen las funciones para simplificar situaciones complejas y predecir resultados puede demostrarse observando un fenómeno que implique una relación funcional subyacente entre dos variables, recogiendo y representando los datos de la observación, ajustando una gráfica a los puntos representados, usando la gráfica para formular la relación que se da entre las dos variables y entonces predecir resultados para valores de una de las variables no observados [...] La función constituye una representación matemática de muchas situaciones de entrada-salida que se encuentran en el mundo real.*

### **Aprendizaje del precálculo**

Moschkovich *et al.* (1993) proponen un marco de trabajo que relaciona la noción de representaciones externas de ideas matemáticas tales como representaciones simbólicas, gráficas, tabulares, numéricas, etc., con la noción o dualidad “proceso-objeto”, que se refiere al manejo o nivel de conceptualización que se tiene de una idea matemática. Se hace énfasis de manera especial en el tema de funciones lineales. Moschkovich *et al.* también hacen referencia a los estándares del NCTM, donde se afirma que los estudiantes bachilleres deberían demostrar un buen nivel de competencia en:

- comprensión de los conceptos de variable, expresión y ecuación,
- habilidad para representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficos, etc. y para resolver ecuaciones lineales usando métodos formales e informales,
- uso de tablas y gráficos como herramientas para interpretar expresiones,
- representación y análisis de situaciones usando tablas, reglas expresadas verbalmente, ecuaciones y gráficos,
- habilidad para trasladarse entre diferentes tipos de representación: tabular, simbólica y gráfica,
- análisis de los efectos de cambios en los parámetros, en la representación gráfica de familias de funciones.

La lista anterior nos sugiere considerar algunos elementos para describir un Perfil de aprendizaje de precálculo. Por otra parte, la idea de perfil expresada de una manera más general, a través de la idea de potencia matemática tal como la presenta el NCTM (1991), incluye aspectos fundamentales tales como la capacidad de utilizar, aplicar y comunicar el conocimiento matemático que se posee;

la construcción de un sistema de valores relacionado con las matemáticas y su aprendizaje; y la construcción de un conocimiento matemático.

Si nos atenemos a las recomendaciones que hace el NCTM (1991), la evaluación de la actuación de los estudiantes como medida de la potencia matemática debe examinar cuestiones como: la estrategia global de resolución de problemas que elige el estudiante, cómo aplica la estrategia elegida, qué nivel de argumentación matemática presenta un estudiante, cómo aplica simultáneamente varios conceptos y procedimientos matemáticos, qué convenciones matemáticas conoce y cómo las maneja, qué actitud muestra hacia las matemáticas y hacia el trabajo con ellas y qué técnicas y destrezas conoce y cómo las utiliza. El interés principal al evaluar la potencia matemática no reside en establecer cuánto sabe el estudiante, sino más bien, hasta qué punto ha integrado su conocimiento de las matemáticas y si éste es o no un conocimiento con comprensión. Para el NCTM, los focos sobre los cuales se debe centrar la atención de la enseñanza y la evaluación de las matemáticas son:

*Resolución de problemas.* “[...] formular problemas; [...]; resolver problemas; comprobar e interpretar resultados; generalizar soluciones.”

*Comunicación.* “[...] expresar ideas matemáticas hablando, escribiendo, demostrándolas y representándolas visualmente; [...]; utilizar vocabulario matemático [...]”.

*Razonamiento.* “[...] utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas; [...]”.

*Conceptos matemáticos.* “[...] dar nombre, verbalizar y definir conceptos; identificar y generar ejemplos válidos y no válidos; utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos; pasar de un modo de representación a otro; [...]”.

*Procedimientos matemáticos.* “[...] reconocer cuándo es adecuado un procedimiento; explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento; [...]; verificar el resultado de un procedimiento empíricamente [...]”.

*Actitud matemática.* “[...] confianza que tengan en el uso de las matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar [...]”.

En resumen, la idea de perfil vista de manera general debe evaluar múltiples aspectos. En este proyecto, como se sugirió al comienzo de esta sección, sólo se

propone describir un perfil de aprendizaje de precálculo con base en dos cuestiones: una, la perspectiva “proceso-objeto” de la comprensión de ideas matemáticas y la otra, la utilización de las representaciones externas. En la siguiente sección nos referimos más detalladamente a estas ideas.

### **La naturaleza dual de las concepciones matemáticas y las representaciones externas**

La primera dimensión de análisis consiste en considerar que nociones abstractas tales como los conceptos de número y función pueden ser concebidas de dos maneras claramente diferentes: estructuralmente (como objetos), y operacionalmente (como procesos) (Sfard, 1991). Sfard también dice que aunque estas aproximaciones parecen incompatibles, son en realidad complementarias, que para la mayoría de las personas la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos y que la transición desde una concepción de “proceso” hacia una concepción de “objeto” no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo.

En realidad, el primer estadio del conocimiento del estudiante debe corresponder a un conocimiento algebraico tradicional, esencialmente procedimental. Este conocimiento no es despreciable, pues dada la gran cantidad de procedimientos que existen en el álgebra tradicional, lograr concepciones correctas de este conocimiento dentro del sistema de representaciones simbólicas no es algo fácil.

Podemos mirar la función como procedimiento, distinguiendo dos diferentes niveles de conocimiento: uno, donde el procedimiento es conocido, pero no es comprendido, y otro donde si hay comprensión del procedimiento. Por otra parte, podemos mirar la función desde un punto de vista estructural como concepto, en este nivel de conocimiento el estudiante debe ser capaz de ver la función como un objeto sobre el cual pueden aplicarse procedimientos.

La variedad de conocimientos que se pueden dar tanto a nivel operacional como estructural debe permitir una caracterización del estudiante, por ejemplo, el que conoce un procedimiento pero no lo comprende, solamente es capaz de resolver ejercicios que son similares a los ejemplos con los que generó su conocimiento, mientras que el estudiante que comprende un procedimiento puede ser capaz de modificarlo y adaptarlo a situaciones nuevas; un estudiante que tiene un buen conocimiento del concepto de función, puede ver por ejemplo, las diferencias y similitudes entre la familia de funciones lineales y la familia de funciones cuadráticas.

La segunda dimensión de análisis se tiene al considerar las representaciones externas de funciones lineales y cuadráticas más comunes (gráficas, formas tabulares y expresiones simbólicas). La idea es considerar la perspectiva del análisis “proceso-objeto” con relación al tipo de representaciones utilizadas para la

solución de tareas o problemas específicos, como se muestra en la siguiente tabla:

		Representación		
		Verbal	Gráfica	Simbólica
Perspectiva	Proceso			
	Objeto			

Según Moschkovich *et al.* (1993) la solución a muchos tipos de tareas relacionadas con funciones lineales se ubican en una celda particular de la tabla anterior, o puede moverse dentro de una misma representación a través de la perspectiva “proceso-objeto”, o también en ambas dimensiones.

## METODOLOGÍA

Se utilizó la “Prueba de aprendizaje” ideada por Mesa y Gómez (1995), cuya construcción consideró, entre otros, los siguientes aspectos:

- 1) ¿Qué contenidos o temas matemáticos de precálculo se deben considerar?
- 2) Con relación a los temas anteriores:
  - ¿Cómo se expresa el conocimiento del estudiante dentro de los sistemas de representación externos?
  - ¿Cuál es el conjunto de concepciones que puede tener un estudiante acerca de un concepto o de un procedimiento dado?
- 3) ¿Qué tipo de contextos o situaciones problemáticas son las más convenientes para explorar el aprendizaje?

### Prueba de evaluación

A continuación se presentan, a manera de ejemplo, cuatro de las diez preguntas que contiene la prueba:

---

#### Preguntas

---

1: Los siguientes ítems muestran una gráfica. En cada caso, diga si representa o no una función. En cada una dé una expresión algebraica que describa el comportamiento de la gráfica:  $y = f(x) = x^2 + 1$ ;  $y^2 = x$ ;  $y = f(x) = |2x - 4| - 2$ ;  $y = f(x) = |x|/x$

2: Encuentre la solución de la desigualdad  $|x^3| < 2x$

---

---



---

### Preguntas

---

3: Encuentre la solución de la ecuación  $(x-3)(x-2) = 4$ .

4: ¿En qué valor o valores, la función  $(x-3)(x-2)$  alcanza un mínimo?

---

La prueba se aplicó a 57 estudiantes de primer semestre del curso Precálculo en enero de 1993.

## RESULTADOS

En cuanto al uso de argumentaciones dentro de una misma representación y cambios entre modos de representación la evaluación de las pruebas arrojó los siguientes resultados:

	Gráfica	Simbólica	Tabla	Verbal
Gráfica	5.4%	3.06%	1.9%	0.0%
Simbólica	3.1%	39.5%	0.0%	6.9%
Tabla	0.0%	1.2%	1.2%	0.0%
Verbal	0.0%	10.7%	0.0%	25.29%

De los datos del cuadro anterior, es evidente el énfasis de la argumentación dentro de las representaciones simbólica y verbal. Los resultados también dicen que es más usual que ocurran cambios de una representación verbal a una simbólica (10.7%) que al contrario (6.9%). También reflejan lo poco usual que son los cambios entre otros tipos de representaciones.

En cuanto a la perspectiva operacional estructural, la implementación metodológica que se propuso para cuantificarla fue invalidada debido a que no era calificada consistentemente de la misma forma por dos personas distintas. En varias pruebas no era claro cuando concluir si el estudiante estaba considerando una idea como proceso o como objeto<sup>1</sup>.

## CONCLUSIONES

Aunque el análisis de los cambios entre representaciones dejan claro el gran énfasis en el manejo simbólico, también es cierto que no se estableció un análisis

---

1. Sin embargo en Mesa, V. y Gómez, P. (1995) puede encontrarse un análisis alternativo de la dualidad operacional estructural donde este problema de validez del instrumento se solucionó.

sis previo de lo que se creía que podría suceder. El análisis a priori hubiera enriquecido las posibilidades de interpretación de los resultados.

El planteamiento metodológico inicial no había considerado la forma tabular como otro tipo de representación sobre la cual también trabajan los estudiantes.

Aunque la caracterización del perfil no se pudo describir como se había propuesto inicialmente, los resultados acerca del uso de representaciones insinúan que el aprendizaje de los estudiantes se puede mejorar a través de la implementación de situaciones problemáticas que requieran para su solución un mayor uso de cambios entre representaciones, que impliquen diferentes modos de comunicar resultados matemáticos y, en general, que generen un cambio de actitud en su manera de enfrentar problemas matemáticos.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Mesa, V. y Gómez, P. (1995). Calculadoras gráficas y precálculo: exploración de aspectos relacionados con la comprensión. En Gómez, P. *et al.* (1995). *Aportes de "una empresa docente" a la IX CIAEM*. Bogotá: una empresa docente.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale: LEA.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Reston: NCTM.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.

*Felipe Fernández*  
*"una empresa docente"*  
*Universidad de los Andes*  
*A.A. 4976*  
*Tel. 2849911 ext. 2717. Fax: 2841890*  
*Bogotá, Colombia*  
*E-mail: fefernan@cdcnet.uniandes.edu.co*