

¿Son las perspectivas socioculturales de las matemáticas y de las pedagogías de las matemáticas incompatibles con las perspectivas cognitivas?

Carlos E. Vasco U.

ASOCOLME

Pasto, 8 de octubre de 2009

1

## Preliminares

- ¿La matemática o las matemáticas?
- Hay al menos cinco tipos de pensamiento matemático, sin contar el pensamiento lógico.
- Numérico, espacial, aleatorio, algebraico-analítico, y uno transversal a todos:
- el pensamiento variacional.
- Prefiero el plural “las matemáticas”.

2

## “Mathesis” y “Mathetiké”

- “Ta Mathematika” eran “las cosas que había que aprender”.
- “Mathesis” parece haber sido tanto el contenido como el proceso de aprender.
- La “Didaktiké”, o sea “la didáctica”, que estudia la enseñanza, o “el enseñar”, tiene una contraparte:
- La “Mathetiké”, o sea “la matemática”, que sería la disciplina que estudia el aprendizaje,
- que prefiero llamar “el aprender”.

3

## Otra precisión

- ¿Educación matemática, Matemática educativa, Didáctica de las matemáticas o Pedagogía de las matemáticas?
- La distinción entre formación y educación.
- La distinción entre formar y formarse, educar y educarse, enseñar y aprender.
- Un capítulo en el vol. 29 de la Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, con Alberto Martínez Boom y Eloísa Vasco Montoya.

4

## La referencia completa es

Vasco Uribe, C. E., Martínez Boom, A. y Vasco Montoya, E. (2008). Educación, pedagogía y didáctica. Una perspectiva epistemológica. En G. Hoyos Vásquez (Ed.), *Filosofía de la Educación* (Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, vol. 29, pp. 99-127). Madrid: Editorial Trotta-Consejo Superior de Investigaciones Científicas CSIC.

5

## Propuesta inicial:

- Vasco, C. E. (1990). Algunas reflexiones sobre la pedagogía y la didáctica. En: M. Díaz y J. Muñoz (Eds.), *Pedagogía, discurso y poder* (pp. 107-122). Bogotá: CORPRODIC.

6

## Procesos y disciplinas

- La pedagogía trata sobre el proceso de formación y educación en general (en plural, “las ciencias de la educación”).
- La didáctica trata sobre el proceso de formar, de enseñar (en plural, “las ciencias del enseñar”: “teaching sciences”).
- La matética trata sobre el proceso de formarse, de aprender (en plural, “las ciencias del aprender”: “learning sciences”).

7

## Por lo tanto,

- las pedagogías, las didácticas y las matéticas de las matemáticas son disciplinas antrópicas,
- no son ciencias formales como las matemáticas, la lógica o las lógicas, etc.
- Son ciencias fácticas, pero de complejidad biótica antrópica.
- Por eso hay tanta diversidad de enfoques, modelos, teorías, métodos y técnicas.

8

## Lee Shulman (1985)

- Conocimiento pedagógico CP (Pedagogical Knowledge PK).
- Conocimiento de los contenidos CC (Content Knowledge CK).
- Conocimiento pedagógico de los contenidos CPC (Pedagogical Content Knowledge PCK).

9

## Graeber y Tirosh (2008)

Pedagogical Content Knowledge: Useful concept or elusive notion.

En: P. Sullivan y T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (vol. 1, pp. 117-132). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

10

## Mis expresiones preferidas

- Prefiero “la pedagogía de las matemáticas”
- como la disciplina que estudia la formación y la educación en matemáticas.
- Prefiero “la didáctica de las matemáticas” como la disciplina que estudia el aspecto de formar en matemáticas: el enseñar matemáticas,
- en diálogo con lo que vamos aprendiendo con la práctica de “la matemática de las matemáticas” como la disciplina que estudia el aspecto de formarse en matemáticas: el aprender matemáticas.

11

## Los plurales

- También utilizo los plurales:
- “las pedagogías”,
- “las didácticas” y “las matemáticas”,
- para enfatizar la diversidad de paradigmas, modelos, teorías y programas de investigación sobre la formación y la educación en general
- y sobre la formación y la educación matemática en particular.

12

## Las ciencias de la educación

- Psicología educativa
- Sociología de la educación
- Economía de la educación
- Historia de la educación
- Filosofía de la educación.
- No figuraba la antropología.

13

## Constructivismos

- Desde Piaget y sus colaboradores en los años treinta y cuarenta.
- La génesis de las estructuras lógicas elementales, del espacio, del tiempo, del número, de la lógica en el niño.
- Constructivismo epistemológico, psicológico y didáctico.

14

## Referencias

Las obras de Piaget y sus colaboradores sobre las estructuras lógicas elementales, el espacio, el tiempo y los números, la probabilidad, etc.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Sobre los distintos constructivismos puede verse:

Vasco, C. E. (Ed.). (1999). *Constructivismo en el aula: ¿Ilusiones o realidades?* Bogotá: Centro Editorial Javeriano CEJA.

15

## El constructivismo en matemáticas

- Jeremy Kilpatrick, Leslie Steffe, Ernst von Glasersfeld en el Estado de Georgia, EE. UU.
- Guy Brousseau y Gérard Vergnaud en Francia
- Claude Janvier, Nicolas Herscovics, Carolyn Kieran, Anna Sierpinska, Juan Pascual-Leone, Robbie Case en el Canadá.
- Montserrat Moreno, Genoveva Sastre, Carmen Gómez, César Coll, Eduardo Martí, Mario Carretero, José Ignacio Pozo y muchos otros en España.

16

## Cambio conceptual

- Énfasis en los conceptos, proposiciones, inferencias y teorías.
- Definiciones, axiomas, teoremas, demostraciones, teorías.
- Obstáculos epistemológicos, didácticos, culturales, lingüísticos, etc.
- Concepciones alternativas.
- Distintas comprensiones de la expresión “cambio conceptual”.

17

## Antecedentes del enfoque sociocultural

- La historia de las matemáticas en las distintas culturas.
- Los trabajos de Vigotsky y Luria sobre otras culturas en la antigua URSS.
- El enfoque histórico-cultural.
- En Italia, Paolo Boero, Lucía Grugnetti, Mariolina Bartolini-Bussi, Fulvia Furinghetti,
- En Estados Unidos, Michael Cole, Sylvia Scribner, Barbara Rogoff, James Wertsch.
- Paul Cobb, Erna Yackel, Terry Wood:
- el enfoque sociocultural norteamericano.

18

## La antropología

- Se empezó a trabajar con la etnografía.
- Volver a las escuelas y colegios y a las aulas de clase
- como si fueran culturas lejanas y extrañas.
- La Teoría Antropológica de la Didáctica
- “la TAD”.
- Yves Chevallard y Michèle Artigue en Francia.
- Marianna Bosch, Pilar Bolea y Josep Gascón en Barcelona.

19

## Dicen que...

- “la TAD de Chevallard es la última palabra”.
- Que “los enfoques cognitivistas al estilo de Piaget, Vergnaud, etc.,
- y los enfoques epistemológicos al estilo de Brousseau
- ya quedaron superados”.
- Que “son paradigmas obsoletos”.

20

## Las tres etapas de Comte

- Hacia 1850 Augusto Comte distinguió
- la etapa mítica,
- la etapa filosófica,
- la etapa científica de la Humanidad.
- Ya hemos llegado a la verdadera ciencia social,
- y las otras dos etapas están superadas.

21

## Thomas Kuhn

- Las revoluciones científicas de los años 60.
- Los paradigmas son inconmensurables.
- El cambio de paradigma se hace por motivos irracionales.
- Crítica a la epistemología del Círculo de Viena y a la de Karl Popper.
- Respuestas de Paul Feyerabend y de Imre Lakatos.

22

## Imre Lakatos

- Discípulo de Karl Popper en Londres.
- Se hizo famoso por su estudio sobre pruebas y refutaciones en matemáticas, con el caso del teorema de Euler sobre los poliedros y del llamado “falso teorema” de Cauchy.
- Sus discípulos publicaron dos volúmenes de estudios epistemológicos en donde propuso la idea de los programas de investigación.

23

## Referencias

- Balzer, W., Moulines, C. U., and Sneed, J. D. (1988). *An architectonic for science: The Structuralist Program* (Synthese Library, 186). Dordrecht: Kluwer.
- Díez, J. A. y Moulines, C. A. (2003). *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel.

24

## El pensamiento complejo

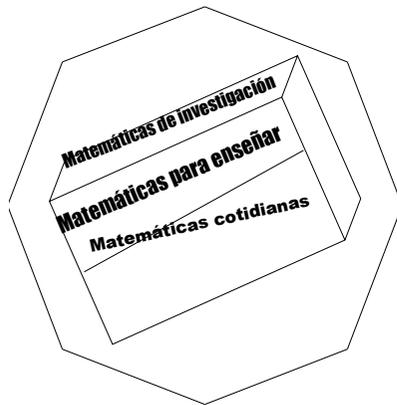
- Edgard Morin
- Nadie piensa que nada humano sea simple.
- No ofrece maneras de atender a la complejidad.
- Pero hace un llamado clave a mantener una vigilancia crítica sobre las simplificaciones de los modelos y de las teorías,
- necesarias pero limitantes.

25

## La complementariedad

- de paradigmas, modelos, teorías, métodos y técnicas:
- La multidisciplinariedad,
- La interdisciplinariedad,
- La transdisciplinariedad.
- El octágono de la investigación en didáctica de las matemáticas.

26

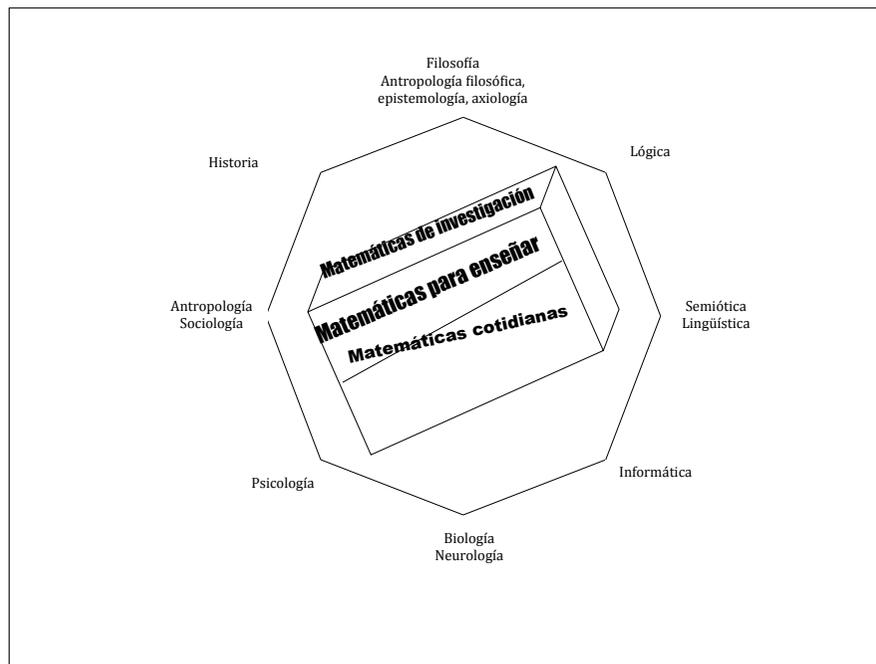


27

## El octágono de puntos de vista

- En la cúspide, la filosofía, con la ontología, la antropología filosófica, la epistemología, la axiología y la ética.
- En la base, la biología y las neurociencias.
- En el lado izquierdo, la psicología, la socio-antropología y la historia.
- En el lado derecho, la informática, la semiótica y la lógica.

28



29

## Las matemáticas

- son disciplinas formales, no fácticas;
- pero la pedagogía y la didáctica de las matemáticas son disciplinas bióticas antrópicas
- (Carlo Federici).
- o ciencias sociales, ciencias humanas o “ciencias del espíritu” (Geisteswissenschaften).
- Por eso hay tanta diversidad de paradigmas.

30

## Los enfoques socioculturales

- histórico-sociales
- socio-antropológicos o
- antropológicos
- aportan una saludable crítica a las pretensiones de la psicología de la persona individual de resolver todos los problemas de la formación y la educación en matemáticas.

31

## El ejemplo de los números “naturales”

- ¿Son universales?
- Los sistemas de numeración no, pero...
- El cero es poco natural...
- Los enteros positivos y negativos  $\mathbb{Z}$
- Los occidentales vs. los chinos:
- Ying y Yang.

32

## La etnomatemática

- Ubiratan D'Ambrosio y Paulus Gerdes.
- Nuevos modelos y nuevas teorías.
- No han resultado tan nuevos...
- Pero sí abren nuevos caminos didácticos.
- El caso de las simetrías de las decoraciones.
- Los grupos de vasijas, frisos y murales.

33

## Los platos y vasijas

- $D_n$
- $C_n$
- $D_3$
- $C_3$
- $I$



34

## Los frisos

- No hay sino
- siete grupos de frisos



35

## Los murales

- Hay sólo
- 17 grupos de murales



36

## Las teselaciones no periódicas



37

## Otros ejemplos

- Los estudiantes que sacan “E” en álgebra en octavo y noveno
- y confiesan no haber entendido nunca nada.
- El método “Kumon”.
- “Los objetos o conceptos son emergentes de las prácticas”.
- ¿Qué significa “emergentes”? ¿Emergentes en dónde? ¿Cómo emergen?
- ¿Por qué surgen objetos diferentes?

38

## Las prácticas rituales

- Ejemplo de participar en la misa del domingo.
- No hay que saber teología para enseñar esa práctica, ni para aprenderla.
- Ver la enseñanza de las matemáticas con el modelo de las prácticas rituales aporta mucho.
- Pero tampoco agota las complejidades del proceso.

39

## Las preguntas son...

- ¿Queremos que nuestros estudiantes aprendan álgebra
- como aprenden a participar en la misa?
- ¿Qué los números reales y las funciones emerjan de las prácticas matemáticas
- como los ángeles y los demonios de las prácticas religiosas?
- ¿En dónde está la diferencia?

40

## La misma TAD

- también ayuda a comprender el uso de artefactos, regla y compás, materiales, calculadoras, ...
- Instrumentación del agente.
- Instrumentalización del artefacto.

41

## La misma TAD reintroduce

- la necesidad de incorporar elementos del enfoque cognitivo, del enfoque epistemológico y del enfoque semiótico.
- A cada componente “X”
- le agrega “-logía”. Por ejemplo,
- la TAD complementa la prácticas y las técnicas con las praxeologías y las tecnologías.

42

## Aporte de la TAD

- a la definición de concepto de Vergnaud:
- La tripla Situaciones-Formas-Invariantes
- (S, F, I).
- La TAD complementa la descripción de las situaciones con los contextos y las prácticas.
- El enfoque noético-semiótico de Duval complementa la descripción de las formas con los registros semióticos y las representaciones.

43

## Aportes de los enfoques socioculturales

- La necesidad de partir de las prácticas sociales, la cultura, la historia y las prácticas en de iniciación en las que se introducen las nuevas generaciones
- refuta las perspectivas exclusivamente cognitivas individualistas y las exclusivamente epistemológicas idealistas.

44

## Pero los niños y niñas

- con discapacidades cognitivas refutan las pretensiones de exclusividad de los enfoques socioculturales.
- Las dificultades diferenciales en un salón de clase con estudiantes de la misma vecindad, cultura, lengua, estrato social y hasta la misma edad refutan las pretensiones de exclusividad.

45

## ¿Cómo organizar...

- los modelos,
- las teorías,
- los enfoques,
- los paradigmas,
- las comunidades científicas
- los programas de investigación?

46

## El neo-estructuralismo modelo-teorético

- Parte de la crítica de Thomas Kuhn a la epistemología de Karl Popper
- y de la respuesta de Imre Lakatos a esa crítica, con su teoría de los programas de investigación científica.

47

## La teoría de Lakatos

- sobre los programas de investigación progresivos o regresivos
- se desarrolla por Balzer, Moulines y Sneed
- con la distinción entre modelos y teorías y las series o sucesiones de ellos que constituyen un programa de investigación.

48

## Programa de investigación

- Una serie de teorías en Lakatos



49

## La teoría de modelos

- En lógica matemática, a partir de 1945, se separan los modelos de las teorías.
- Un modelo es un sistema de componentes con sus operaciones y sus relaciones (S, D, E).
- Una teoría es un subconjunto de proposiciones de un lenguaje articulado, con un morfismo de interpretación triple de los componentes de cada proposición atómica hacia el modelo.

50

## El morfismo de interpretación

- refiere los términos del lenguaje a los componentes del sustrato S del modelo,
- los transductores del lenguaje a las transformaciones de la dinámica D,
- y los predicados del lenguaje a las relaciones de la estructura E del modelo.
- Un modelo como tripla (S, D, E).

51

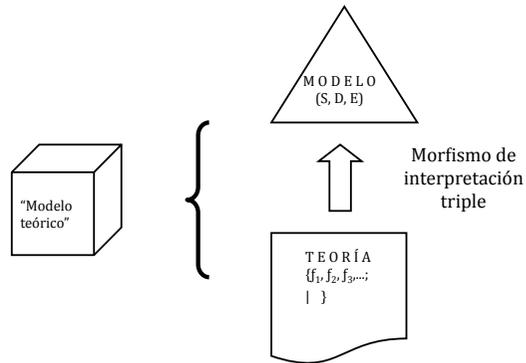
## Modelos y teorías

- Se pasa del aprendizaje de modelos analógicos, por imitación, por esquemas motores, por íconos y recetas sintácticas, a poder dar razón de por qué esas prácticas son así y no de otra manera.
- Se trata de refinar y precisar los modelos a partir de la teoría y refinar y extender las teorías mismas.
- Esa distinción entre lo análogo y lo digital vuelve a hacer visible la distinción entre modelo y teoría y la necesidad de los morfismos de interpretación.

52

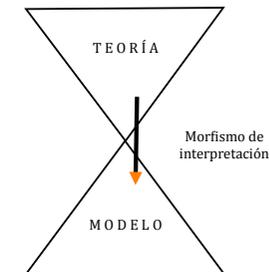
## Modelo-teoría-morfismo

- Se distingue el modelo de la teoría:



53

## Ícono para modelo-teoría



54

## Programa de investigación

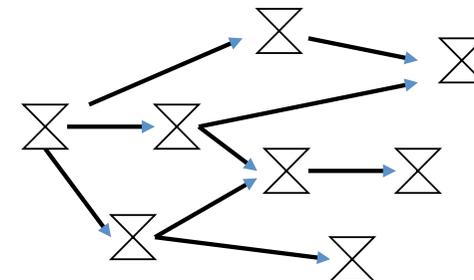
- En Balzer, Moulines y Sneed son series de parejas modelo-teoría:



55

## Los programas de investigación

- no son series de teorías, ni sucesiones de teorías y modelos, sino redes o grafos dirigidos:



56

## Nodos de los programas

- El modelo transmisionista con la teoría de la didáctica prescriptiva clásica (“de recetas”).
- El modelo del aprendizaje conductista con la teoría de la Tecnología Educativa y el Diseño Instruccional.
- El modelo del aprendizaje neo-conductista de Robert Gagné.
- El modelo del aprendizaje post-neo-conductista de Albert Bandura.

57

## El programa constructivista

- El modelo constructivista con la teoría cognitivo-genética piagetiana de Vergnaud.
- El modelo constructivista con la teoría cognitivo-epistemológica de Brousseau.
- Los modelos constructivistas norteamericanos desde Kilpatrick, Steffe y von Glasersfeld hasta los modelos computacionales de la Inteligencia Artificial con sus respectivas teorías.

58

## Otros programas de investigación

- El modelo del aprendizaje como internalización con la teoría de la psicología vigotskiana.
- El modelo del aprendizaje histórico-cultural con la teoría neo-vigotskiana y la teoría de la actividad humana de Leontiev.
- El modelo histórico-social de los italianos.
- El modelo cultural de Luis Radford.

59

## Y otros más...

- El modelo de aprendizaje social con la teoría de las reglas sociales, sociomatemáticas y matemáticas de Paul Cobb, Terry Wood y Erna Yackel.
- El modelo del aprendizaje de prácticas sociales con la TAD de Chevallard, Artigue, Bosch, Bolea y Gascón.
- Debe complementarse al menos con la teoría crítica de Ole Skovmose y Paola Valero.

60

## Hay otros nuevos:

- El modelo onto-semiótico con la teoría de las funciones semióticas de Juan Díaz-Godino.
- El modelo noético-semiótico con la teoría de los registros semióticos de representación de Raymond Duval.
- Y seguirán surgiendo otros nodos más.
- Son puntos de vista sobre un proceso demasiado complejo para que agotarlo desde uno solo de ellos.

61

## Y otros programas de investigación

- como el asociado con el giro lingüístico en las ciencias sociales y las teorías del discurso,
- con nodos en Teun van Dijk, Michel Foucault, la línea bakhtiniana, Rom Harré y Deborah Schiffrin.
- Seguirán surgiendo otros nodos más.
- Son puntos de vista sobre un proceso demasiado complejo para que agotarlo desde uno solo de ellos.

62

## Conclusión

- Cada uno de estos programas, con sus sucesivos o paralelos modelos y teorías
- ha mostrado aspectos que permanecían ocultos para los paradigmas previos,
- y tienen aún mucho que aportar.
- La única manera de saber cuánto aportará cada uno es practicarlos, impulsarlos, revisar y criticar sus resultados y contrastarlos con otros.

63

## ... pero ...

- ninguno puede agotar la complejidad de los procesos de aprender y enseñar matemáticas.
- Ninguno puede reclamar ser el único modelo ni tener la mejor teoría.
- Ninguno puede reclamar que los demás están superados en el sentido de “obsoletos”.
- Solamente en el sentido de “Aufhebung” de los nodos anteriores de su propio paradigma, y de los más cercanos de otros.

64

**FIN**

**Y COMIENZO DE MUCHAS  
INVESTIGACIONES**

**DESDE DIVERSOS PARADIGMAS Y  
PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN**