10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase

Diana Jaramillo
djaramillo.quiceno@gmail.com
Grupo "Matemática, Educación y Sociedad"
Universidad de Antioquia
Gilberto Obando
gobando@ayura.udea.edu.co
Grupo "Matemática, Educación y Sociedad"
Universidad de Antioquia
Yolanda Beltrán
Grupo "Matemática, Educación y Sociedad"
Universidad de Antioquia
ybeltran@ayura.udea.edu.co

Resumen

En este curso pretendemos discutir cómo la actividad matemática se constituye en una mediadora de las interrelaciones en el aula de clase de matemáticas. Esta discusión surge como consecuencia de algunas reflexiones posibilitadas desde dos proyectos de investigación que venimos desarrollando: ***"El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase"[1] y "Sistemas de Prácticas Asociados a las Razones, la Proporción y la Proporcionalidad: el caso de las configuraciones epistémicas en algunos grados de la educación básica"[2]*** *. Este curso se desarrollará en tres momentos: el primero, donde mostraremos una actividad relativa a la covariación, en un curso de tercer grado, procurando encontrar algunos elementos característicos de la actividad; el segundo, donde presentaremos algunos tópico teóricos relativos al conocimiento matemático, a la actividad matemática y a las interrelaciones en el aula de clase de matemáticas; y, en el tercer momento propondremos una actividad, dirigida hacia el concepto de la medida, para que los participantes desarrollen, procurando identificar en ella las distintas interrelaciones en el aula de clase a la hora de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos.*

1. Presentación

En este curso pretendemos discutir cómo la actividad matemática se constituye en una mediadora de las interrelaciones en el aula de clase de matemáticas, a la hora de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos. Esta discusión surge como consecuencia de algunas reflexiones posibilitadas desde dos proyectos de investigación que venimos desarrollando: "El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase" y "Sistemas de Prácticas Asociados a las Razones, la Proporción y la Proporcionalidad: el caso de las configuraciones

1 Coordinado por Diana Jaramillo, Gilberto Obando y Yolanda Beltrán; financiado por Colciencias y la Universidad de Antioquia.
2 Proyecto de doctorado de Gilberto Obando, en el Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad del Valle.

epistémicas en algunos grados de la educación básica". El primer proyecto mencionado pretende dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué relaciones se tejen, a través del conocimiento matemático, entre los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje, al interior del aula de clase de matemáticas? De modo más específico, es el objetivo de esta investigación identificar algunas interrelaciones que se tejen entre los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje, al interior del aula de clase de matemáticas, y la forma cómo el conocimiento matemático determina el desarrollo de dichos procesos. Los fundamentos teóricos para comprender estas interrelaciones, la construcción y producción del conocimiento matemático, y la actividad matemática, al interior de aula, los estamos comprendiendo y abordando desde una perspectiva sociocultural. En ese sentido, nos apoyamos en autores como (Vygostki, Leontiev, & Luria, 1989), (Voloshinov, 1992), (Lerman, 2001), (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2006), (Rabardel, 1995, 1999, 2003, 2005), Bishop (1999), Valero (2006), Moura (2006), ente otros. El método de investigación escogido para el desarrollo de dicha investigación es el propuesto por la "Investigación colaborativa", comprendida como el proceso de indagación donde maestros de instituciones escolares e investigadores de la universidad co-laboran para responder a un interrogante común, cada uno desde el lugar que ocupa (Pinto, 2002; Boavida y Ponte, 2008). En este proyecto están siendo involucradas cinco instituciones de educación básica. Los maestros, protagonistas de este estudio, están convidados a realizar un trabajo sistemático sobre su práctica pedagógica, atendiendo a los objetivos propuestos en este estudio, que involucre un trabajo reflexivo, investigativo y colaborativo sobre ella. Se espera, como consecuencia de este estudio, y entre otros resultados, que el maestro, al comprender las interrelaciones en el aula de clase de matemáticas, consolide, de forma continua, una práctica pedagógica reflexiva e investigativa sobre diferentes asuntos relacionados con el conocimiento matemático, su construcción y producción, bajo una perspectiva sociocultural. Además, esperamos también establecer relaciones otras, menos dicotómicas, entre universidad-escuela, investigador-profesor y teoría-práctica a través de los procesos propios de la investigación colaborativa.

Desarrollaremos este curso en tres momentos: el primero, donde mostraremos una actividad relativa a la covariación, en un curso de grado tercero, procurando encontrar algunos elementos característicos de la actividad; el segundo, donde presentaremos algunos tópico teóricos relativos al conocimiento matemático, a la actividad matemática y a las interrelaciones en el aula de clase de matemáticas; y, en el tercer momento propondremos una actividad, dirigida hacia el concepto de medida, para que los participantes desarrollen, procurando identificar en ella las distintas interrelaciones en el aula de clase a la hora de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos.

2. La actividad del docente y del alumno: un ejemplo

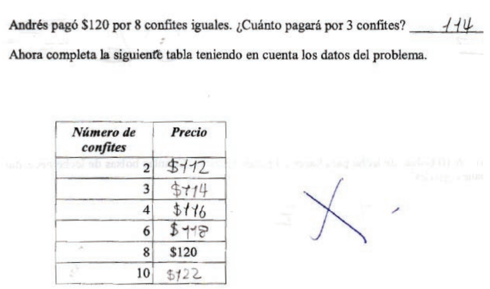
En nuestro sistema educativo, la enseñanza de la multiplicación inicia hacia el grado tercero de la educación básica, bajo un esquema que relaciona la operación multiplicación con la suma: sumas de sumandos iguales se abrevian por medio de la multiplicación. Así, por ejemplo, en un problema como el siguiente: ¿Si una libra de sal cuesta $ 250, cuánto cuestan 4 libras de sal?, para su solución se propone la multiplicación 250x4=1000 o 4x250=1000 la cual se interpreta como 250+250+250+250 =1000 Sin embargo, en esta interpretación se dejan implícitas cuestiones importantes: ¿Qué significan, en relación con la situación planteada, cada uno de los dos factores implicados en la multiplicación? ¿Si el 250, significara pesos, y el 4, libras, cómo es que el producto de ambos (el 1000) tiene como significado pesos? El problema fundamental denotado por las preguntas anteriores es que en el análisis de la situación, no se pone atención al tratamiento dimensional de las cantidades involucradas. En la situación, permanece implícita una relación fundamental: el 250 no significa pesos, sino pesos por cada libra (es decir, se tara de una razón que expresa la relación entre la cantidad de dinero que se debe pagar por cada unidad de producto), y por lo tanto, la multiplicación que se debe realizar no es 250x4 sino $250\,\frac{pesos}{libra} \times 4\ libras$ Por supuesto, esta no es la única forma de análisis de la situación: se puede pensar que efectivamente el $250 de la situación signifique pesos, esto es, la cantidad de dinero que se paga por una libra de sal, y por lo tanto, el precio de 4 libras de sal, será cuatro veces dicha cantidad de dinero (es decir, *si 4 libras es igual a 4 veces una libra* y *como el precio de una libra es $250* entonces, el precio de las 4 libras es 4x250) Nótese entonces como en estas dos formas de proceder, si la relación es ternaria, lo es a través de interpretar el 250 como una razón (precio del producto por cada unidad del mismo), y si el 250 no se interpreta como una razón, entonces, la relación no sería ternaria, sino cuaternaria (*una libra es a $250 como 4 veces una libra, es a 4 veces $250* En cualquiera de los dos casos, se muestra como un problema típico de multiplicación no es otra cosa que un caso particular de proporcionalidad simple directa, y por lo tanto su forma es:

$$\begin{array}{ccc} Libras & \rightarrow & pesos \\ 1 & \rightarrow & 250 \\ 4 & \rightarrow & x \end{array}$$

la cual no solo expresa la relación entre cuatro cantidades particulares (una libra, cuatro libras, $ 250, $ 1000), si no, la relación entre cualquier cantidad de libras de sal y su correspondiente valor. Dicho de otra manera, lo enunciado en la situación del ejemplo es solo un caso particular de una situación, un estado posible de un conjunto infinito de estados posibles: *Por cada cantidad de sal que se tome, hay una cantidad de dinero con el que se puede correlacionar.* Por lo tanto, el modelo de la suma repetida de un sumando, que puede ser importante para producir un significado parcial e inicial de la multiplicación, es insuficiente para dar cuenta de la complejidad subyacente a la multiplicación en relación a su lugar en una estructura: el de las *estructuras multiplicativas.*

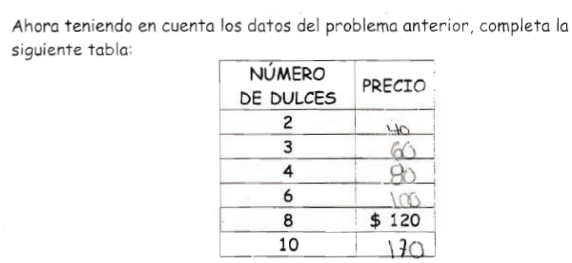
Una situación inicial

Al inicio de su grado tercero, los estudiantes de una institución educativa fueron enfrentados a la a una situación en la que, dado el valor de una cierta cantidad de dulces, debían hallar lo que se debe pagar por otra cantidad, y llenar una tabla. Las siguientes dos figuras muestran las respuestas de dos niños:


Andrés pagó $120 por 8 confites iguales. ¿Cuánto pagará por 3 confites? 114

Ahora completa la siguiente tabla teniendo en cuenta los datos del problema.

Número de confites	Precio
2	$112
3	$114
4	$116
6	$118
8	$120
10	$122


Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla:

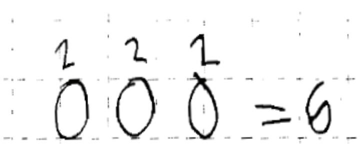
NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	40
3	60
4	80
6	100
8	$ 120
10	170

Si bien los procedimientos de estos dos estudiantes los llevan a respuestas equivocadas, nos muestran elementos importantes de su pensamiento matemático. En primer lugar, la forma natural en que ellos asumen que debe existir alguna relación entre las dos cantidades involucradas (lo cual quizás se deba a su experiencia cotidiana en donde ven que ciertos factores en una situación inciden en el resultado final de la misma). En segundo lugar, como se trata de relaciones entre cantidades, buscan, desde lo que ellos saben hacer (sumar), como se pueden poner a variar las dos cantidades, de tal forma que presenten algún tipo de regularidad en la variación, y que sea coherente con el valor dado (a 8 dulces le deben corresponder $ 120). Así, una variación de 2 en 2, o de 20 en 20, en la segunda columna, es coherente con la forma de variación de los datos en la primera columna. El problema es que en este análisis, de tipo aditivo, los chicos no han tomado en consideración que con el proceso realizado, no todos los dulces tendrían igual valor. Es decir, no es suficiente con que consideren que hay algo que debe variar de forma constante en cada columna, si no que ese proceso de variación debe garantizar que el valor por dulce no cambie de una fila a otra, que al asignar a una cantidad de dulces a su respectivo valor, el valor por unidad sea el mismo.

En suma, los procedimientos nos muestran que los chicos pueden percibir procesos de covariación entre cantidades, logran hacer un estimativo, o mejor aún proponer un modelo de cómo puede ser tal proceso, pero para que el modelo sea acorde con la estructura de la situación, deben aprender a establecer procesos de correlación entre las dos cantidades de tal forma que se garantice la conservación del valor por unidad. Es precisamente en este punto donde se centran las actividades que se les propuso posteriormente a los niños, a partir de las cuales se busca que tomen conciencia de la conservación del valor de la unidad a través de cualquier proceso de asignar el valor correspondiente a un número de unidades cualesquiera dadas.

Una primera actividad: juego de la canasta

El conjunto de situaciones que se les propuso a los niños tenía la siguiente estructura: se trataba de un juego en el que los niños (por parejas) lanzaban 10 fichas a una casta de huevos (en algunas regiones del país se dice panal de huevos), la cual estaba pintada de cuatro colores (azul, rojo, amarillo y verde). Cada ficha tiene un valor según el color en que caiga: 2, 4, 8 y 10 respectivamente. Cada jugador tenía dos rondas, y ganaba el que más punto lograra acumular. Posterior al juego, realizaban actividades en las que se les pedían resolver algunas situaciones hipotéticas, basadas en el juego realizado, en la que debían poner en juego las relaciones numéricas que usaron para realizar los cálculos que el juego les exigió. Finalmente se realizaba una socialización de las estrategias y procedimientos realizados por los niños.

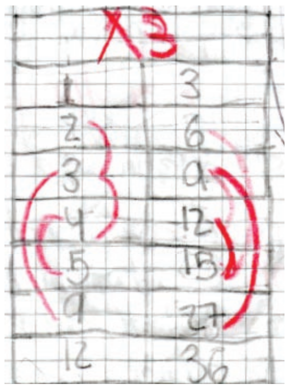


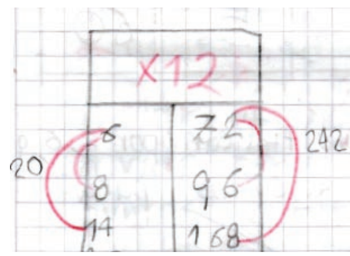
Esta primera actividad fue relativamente fácil para los niños, pues los conteos que debían realizar no les presentaron mayores dificultades. Sin embargo, los niños que no tenían buenas habilidades de cálculo, se apoyaron en representaciones gráficas como la mostrada a la izquierda, o contando en los dedos. En ambas situaciones, nos permitieron ver un elemento clave en el proceso de su comprensión: cómo controlar un doble conteo, de un lado, el de la cantidad de fichas, y de otro, la cantidad total puntos obtenidos según el valor de cada ficha. Para el caso de los niños que contaban en los dedos, en una mano representaban la cantidad de fichas obtenidas, y en la otra, el valor de cada ficha, y luego, este último valor lo contaban una vez por cada ficha representada en la otra mano. De forma similar es el procedimiento mostrado en la gráfica anterior, solo que en este caso, el control de ambos conteos es de modo gráfico.

Posterior a este juego se realizaron otras actividades grupales para que los niños desarrollaran nuevas y mejores técnicas de cálculo con las repeticiones del 2, 4 y 8. Sin embargo, cuando se les propuso situaciones en donde debían cuantificar repeticiones de otros valores, salieron a la luz nuevos hechos.

Un segundo juego: el tiro al blanco

Cómo en el caso anterior, el punto de partida era un juego, solo que en este caso se trató del tiro al blanco, donde los valores de los círculos era: 3, 6, 9 y 12. La estructura del conjunto de actividades era similar a la del juego de la canasta. Los siguientes gráficos muestran algunos de los procedimientos realizados por los niños:



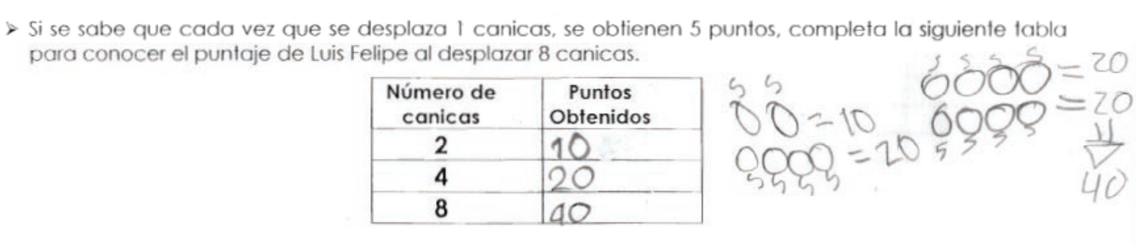


Nótese cómo en esta ocasión, donde los conteos propuestos son más complejos, y donde las estrategias de contar en los dedos, realizar gráficas, o incluso, contar mentalmente (como lo hicieron en el juego anterior), no son suficientes, se exige el desarrollo de técnicas más sofisticadas: en el caso de la figura de la izquierda, las rayas en rojo, que unen, por ejemplo, el tres con el nueve, y el 9 con el 27 indican que como que de 3 a 9, es tres veces, entonces, de 9 a 27, también hay tres veces (dicho en términos más generales, la razón de 3 a 9, es la misma que de 9 a 27, y claro está, quien hizo este procedimiento no es consciente de este grado de generalidad, pero empíricamente está haciendo uso de un procedimiento, que, posteriormente, podrá generalizarlo como una ley). La gráfica de la derecha muestra otro procedimiento interesante: las rayas rojas ahora indican que como 6 y 8 dan 14, entonces, la cantidad de puntos que corresponde a 14 es la suma de los que le corresponden a 6 y a 8 (dicho de otra manera, como $6+8=14, entonces\ f(14)=f(6+8)=f(6)+f(8)$ donde como en el caso anterior, se trata de un procedimiento validado empíricamente a través del juego inicial).

Estos dos procedimientos están en la base conceptual de la relación funcional que gobierna el procesos de covariación entre las cantidades involucradas en el juego: se trata de una covariación lineal.

Un tercer juego: las canicas

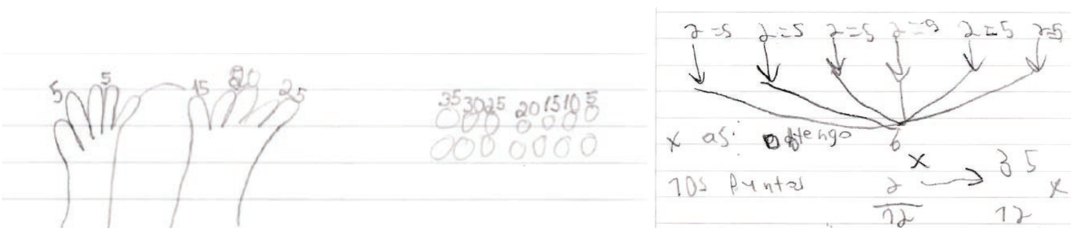
De manera similar al anterior, pero ahora se trató de sacar canicas localizadas al interior de cuadrado (dibujado en el piso), lanzándoles otra canica. En una primera variante del juego, cada canica sacada del cuadro daba 5 puntos. En una segunda variante del juego, cada dos canicas sacadas del cuadro daba 5 puntos. En el primer caso, como se evidencia en la siguiente figura, los procedimientos usados fueron similares a los ya presentados.

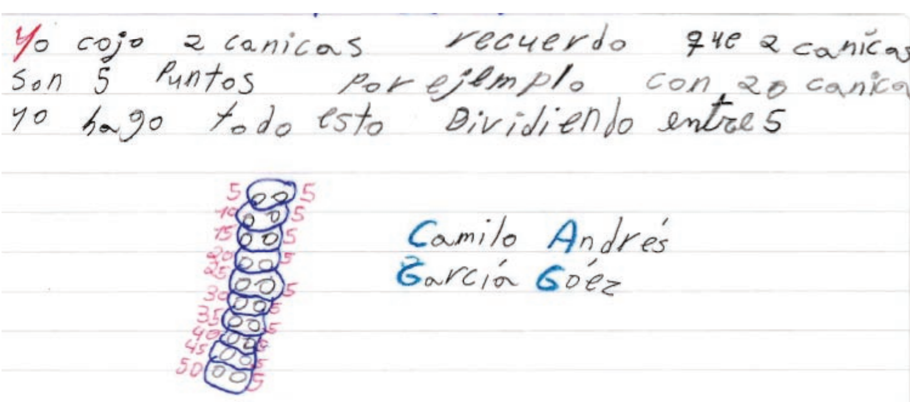


➢ Si se sabe que cada vez que se desplaza 1 canicas, se obtienen 5 puntos, completa la siguiente tabla para conocer el puntaje de Luis Felipe al desplazar 8 canicas.

Número de canicas	Puntos Obtenidos
2	10
4	20
8	40

el caso de la segunda variante, de nuevo las representaciones gráficas fueron fundamentales:





Cómo se puede observar, ahora que el conteo es complejo, las diferentes representaciones vuelven a mostrar la necesidad de tener mecanismos que permitan controlar el doble conteo: ahora, en uno de los espacios de medida (el de las canicas), la unidad de conteo es 2, mientras que en el otro (el del puntaje total), la unidad de conteo es 5. Establecer la correlación entre ambos espacios de medida pasa como coordinar la repetición de unidades de conteo en ambos espacios de medida.

La conceptualización detrás de las actividades realizadas

El inicio del proceso de aprendizaje de la multiplicación por el que hemos conducido a los niños y niñas que se vieron enfrentados a las situaciones antes descritas, tiene como base la idea de que las situaciones de multiplicación son los casos más simples de la proporcionalidad simple directa. A su vez, la proporcionalidad simple directa es estudiada como una relación funcional entre dos espacios de medida. Dicho de otra forma, entre dos magnitudes variables, se dice que hay proporcionalidad, cuando entre ellas se puede definir una función lineal (función de la forma $f(x) = kx$ donde k es una constante, y por lo general, un número real). Este tipo de funciones, por ser transformaciones lineales, cumplen con las siguientes dos propiedades: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ Es por esta razón que este tipo de situaciones se identifican como de isomorfismo de medida (Vergnaud, 1988, 1991, 1993a, 1993b, 1994). Lo que buscaron las situaciones era favorecer contextos donde empíricamente los chicos y chicas se aproximaran a ambas propiedades de la linealidad, y a través de diferentes contextos, fueron tomando conciencia del grado de generalidad de los mismos (por supuesto, queda pendiente mostrar que este tipo de procedimientos tienen sus límites de validez, para lo cual debe enfrentarse a situaciones en las que tales procedimientos no permitan modelar la situación propuesta).

De otra parte, como el punto de partida, por lo menos para los niños y niñas, no era la existencia de la ley funcional que correlaciona los dos espacios de medida (fichas y cantidad de puntos, por ejemplo), entonces el recurso a la coordinación de la repetición de las unidades de conteo en cada espacio de medida es la forma de controlar la covariación, y reconocer la linealidad de la misma. Esto generaba un mecanismo a través del cual garantizar que el valor de la unidad no cambia, sin importar la cantidad de unidades que se deban contar. Igualmente es un recurso empírico (contar) que se hace cada vez más sofisticado (coordinación de conteos iterados), permitiendo ahora el tratamiento de situaciones en donde se deben controlar, y coordinar, la covariación de dos variables (en simultáneo). Este proceso de coordinación es un factor fundamental para el paso de los razonamientos aditivos a los multiplicativos, y por la forma como se presentó, pone el aprendizaje de la multiplicación en el camino del aprendizaje de la proporcionalidad directa, la cual es a su vez, es el inicio del estudio de las funciones.

Finalmente, se debe resaltar que en los procedimientos presentados, los chicos y chicas, favorecieron los análisis tipo escalar, es decir los presentes en las dos propiedades descritas líneas atrás. Pero para que el camino quede completo, es necesario que ellos aprendan los procedimientos funcionales, es decir, aquellos que tienen como punto de partida el reconocimiento de que dado cualquier valor de uno de los espacios de medida, existe un factor, único para el tipo de situación que se describe, por el cual, al multiplicar el valor dado, se puede encontrar con que valor se correlaciona en el otro espacio de medida. Esto quiere decir que las situaciones presentadas, al parecer, no son suficientes para pensar que los niños y niños ya saben multiplicar. Así pues, si bien lo que está en el fondo es una conceptualización de la multiplicación, no solo como una simple adición de sumandos iguales, sino en relación a los procesos de modelación de situaciones de covariación, en donde la correlación entre las magnitudes variables es lineal, esta conceptualización no está completa aun. Es más, si bien el tratamiento de la multiplicación en relación con los isomorfismos de medida es uno de los núcleos fundamentales para su conceptualización, es necesario reconocer que el otro es el de la multiplicación como producto entre espacios de medida, y de eso no hemos hablada nada hasta el momento, pero esa será otra historia.

3. Consideraciones sobre una perspectiva Sociocultural en Educación Matemática y Relaciones con una teoría de la actividad

En una perspectiva sociocultural de la educación, el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural, histórico y político. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo. Bajo esta perspectiva sociocultural, la educación matemática asume el conocimiento matemático como una actividad social, cuya producción y legitimación es resultado de la explicación de diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, a partir de los sentidos y significados compartidos, respetando, así, los diferentes saberes constituidos por los diversos grupos socioculturales al interior de los mismos. De esta manera toman fuerza nociones como intersubjetividad, lo cual implica el reconocimiento de la subjetividad como construcción a través de las prácticas sociales; cognición situada en los sistemas de prácticas (técnicas e instrumentos) y distribuida en las distintas subjetividades y artefactos propios de toda actividad; mediación (semiótica e instrumental) que permite comprender cómo la cultura juega un papel fundamental en el desarrollo de la cognición misma; y el conocimiento como práctica cultural, que permite explicar las relaciones entre la acción humana y las situaciones institucionales, culturales e históricas en donde tienen lugar tales acciones, y que permiten la emergencia del conocimiento.

Lo anterior implica, en lo fundamental, comprender e interpretar el papel mediador de la cultura en los procesos de aprendizaje, a través de las actividades de las personas en contextos específicos, y por tanto, comprender el conocimiento como emergente de la actividad de las personas en contextos socio-históricos específicos. En palabras de (Cobb, 2006), se trata de investigar la persona-individual-en-la-práctica-cultural. Así pues, en general, el conocimiento se asume como emergente de la actividad de las personas en contextos institucionales específicos […] Conocer en matemáticas quiere decir conocer los "sistemas de prácticas" (operativas y discursivas), pero ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los subsistemas de prácticas, y las relaciones entre dichos objetos. (Godino et al., 2006).

Ahora bien, al proponer una mirada tal sobre los objetos de conocimiento, lo que se está mostrando es que éstos son partícipes, no de una polaridad institución - individuo[3], sino de una dualidad que en simultáneo participa de dos dimensiones: la individual y la social. De esta manera, de lo que se trata es de ver el conocimiento en el marco de una relación dialéctica entre individuos e instituciones, relación que existe en tanto los unos y los otros comparten un escenario común: el de las prácticas, con sus respectivas configuraciones epistémicas, y organizadas en procesos de estudio (ver figura 1.1). De esta manera, del lado de la dimensión institucional, aprender una ciencia (y en general cualquier proceso de aprendizaje), es algo más que apropiarse de (internalizar) formas de enunciar o de razonar: es hacerse hábil en el conjunto de prácticas científicas institucionalmente situadas a través del conjunto de valores que las adscriben a una comunidad en particular (Nemirovsky, 2009). Pero a su vez, desde el lado de la institución, es apropiarse de las transformaciones, modificaciones que los individuos realizan, en el marco del desarrollo de su actividad, a los sistemas de prácticas, y por ende, a las configuraciones epistémicas de base, y de esa manera, hacerlas objetivas, disponibles a otros individuos, y a otras instituciones.

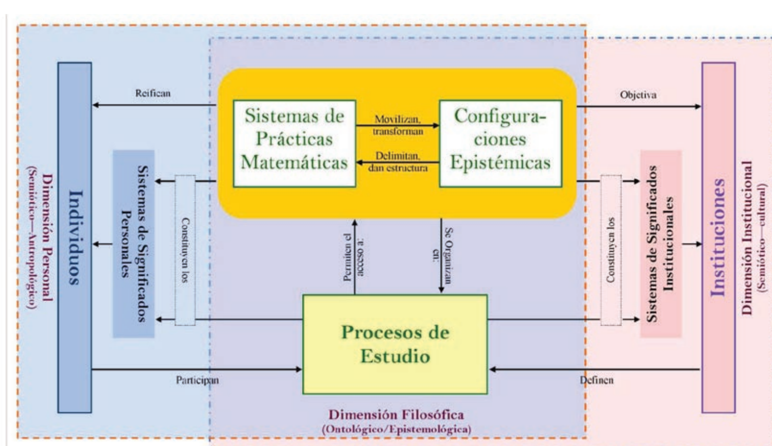


FIGURA 1.1. Dialéctica entre las dimensiones individual e institucional para la construcción los objetos de conocimiento.

3 Polaridad que plantea el aprender, o bien como el proceso de internalizar lo construido externamente por la sociedad, o bien, como el hacer explícito a otros lo que el individuo ha construido internamente.

Actividad y mediación en la construcción del conocimiento

Para (Vygotski, 1995), el concepto de actividad, es un principio explicativo a partir del cual dar cuenta del cómo la cultura es mediadora en el proceso de constitución de la conciencia humana. Así, esta se refiere a las formas de conducta que determinan patrones específicos de comportamiento (de hacer y de pensar). Esto significa que para Vygotski, el desarrollo y la mente humana se deben considerar como resultado de las acciones culturalmente significativas y no como un fenómeno puramente biológico. Vygotski plantea que el lugar central de la actividad en la constitución de la conciencia humana está en que toda actividad es instrumentalmente mediada, y en particular, el signo es el instrumento psicológico por excelencia para dicha construcción.

Así pues, la acción del hombre a través de instrumentos — la actividad — comporta la posesión, por ese hombre, de la experiencia de la práctica social. Este conocimiento, adquirido en la actividad instrumental, hecho conciencia en el hombre, se constituye en verdadero conocimiento. La actividad es, ante todo, un proceso colectivo en el cual la inter-acción es la base fundamental para la construcción de sentidos y significados, es decir, de la construcción de una conciencia individual en el marco de los procesos sociales subyacentes. Esta interacción implica entonces sujetos que inter-actúan en constante oposición unos a otros: la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros. Los instrumentos construidos para la acción, sintetizan socialmente estos procesos de interacción pero, a la vez, son mediadores en la manera como los individuos se apropian de estas construcciones sociales.

En suma, se puede entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los seres humanos, en contextos particulares de práctica[4] (praxis), socialmente orientada a un fin (intencional), y que se cristaliza en obras (Ricoeur, 2001). Es la actividad la fuente primaria de toda percepción fenomenológica. La actividad se reconoce en las acciones de las personas[5].

Configuración epistémica. Ahora bien, toda práctica, desde el punto de vista institucional, descansa sobre un conjunto de valores, normas, visiones, técnicas, tópicos de investigación, orientaciones heurísticas, etc., propias o características de una comunidad en el momento particular en el que desarrolla su actividad matemática. Este conjunto de recursos institucionales constituyen lo que Moritz Epple (2004) denomina una configuración epistémica, esto es, la episteme que hace posible la existencia de prácticas matemáticas determinadas. Prácticas que reconocen su campo de problemas de una determinada manera, o que reconocen ciertas técnicas o formas de heurísticas y no otras, que reconocen formas de razonar o enunciar específicas, etc. Debido a estas diferencias naturales de una comunidad a otra es que se pueden dar aproximaciones diferentes, y por ende, soluciones diferentes a problemas similares.

De otra parte, prácticas matemáticas y configuraciones epistémicas, sino que cambian a lo largo del tiempo. El carácter institucional de la práctica se evidencia en los tipos de restricciones sobre el lenguaje, sobre las técnicas, sobre los objetos de conocimiento, etc., que se impone a los individuos en el seno la comunidad (es el caso, por ejemplo, de los intuicionistas frente a los formalistas en los albores del siglo XX). El cambio de las prácticas se ve en la medida que, o bien nuevas técnicas sustituyen parcial o totalmente las anteriores, o bien nuevos objetos emergen para brindar una mejor comprensión de las técnicas utilizadas, y por ende, una mejor justificación de las mismas[6] (proceso de rigorización de la actividad matemática, en términos de Philip Kitcher (1981; 1984)

4 Una práctica es “... la actividad considerada junto con su contexto complejo y en particular las condiciones sociales que le dan significado en un mundo efectivamente vivido...” (Ricoeur, 2001, p. 101, citando G.G. Granger).

5 Para Ricoeur, ampliando la noción husserliana, las acciones humanas se caracterizan por: (1) ser exteriores, es decir, se fijan en algo externo (la intención de la acción); (2) se libera del agente que la produce, gana autonomía con respecto al autor de la acción; al ser autónoma, (3) permite la reinscripción de su sentido en nuevos contextos; y, como consecuencia de lo anterior, (4) es una obra abierta dirigida a los demás, y como tal, (5) susceptible de nuevas interpretaciones y significaciones (su significado está en suspenso) a partir de prácticas (praxis) particulares (Ricoeur, 2001). Esto nos muestra el carácter intersubjetivo de la actividad humana, en función del carácter eminentemente cultural de las acciones humanas.

6 Es el caso, por ejemplo, de las transformaciones en las prácticas matemáticas propias de Newton y Leibniz con respecto al cálculo infinitesimal, hasta llegar a las técnicas modernas que conocemos hoy en día: no sólo se transformaron las técnicas, sino que nuevos objetos matemáticos emergieron en el desarrollo de tales transformaciones

La actividad matemática. En este marco de ideas, la actividad matemática, o mejor aún, toda práctica matemática, atendiendo al carácter necesariamente contextual e histórico de toda actividad, debe ser entendida entonces como el conjunto de acciones orientadas a un fin, la solución de problemas (demostrar un proposición es solucionar un problema). Ahora bien, siguiendo Kitcher (1984), un problema es en esencia la toma de conciencia de que un momento determinado la práctica matemática se desarrolla sobre la base de principios, técnicas, procedimientos, conceptos, etc., que no están plenamente justificados en el marco sobre el cual se desarrolla (el caso del desarrollo del cálculo infinitesimal, por ejemplo, desde Newton y Leibniz hasta Cauchy y Weierstrass), entonces, en el proceso de brindar una total justificación a tales elementos de la práctica matemática, se cambia las relaciones de estos principios con la totalidad de conocimiento existente (con las técnicas, los enunciados, los lenguajes, ...). Así, estos principios entran a formar parte de lo aceptado como conocimiento válido y, por tanto, dan sentido a una nueva organización de lo aceptado, en el momento, como conocimiento matemático válido. De esta manera, el conocimiento matemático no se edifica a partir de los aprioris universales (en el sentido Kantiano), de los cuales se desprenden deductivamente el resto de los enunciados matemáticos. Se trata de re-organizaciones constantes de la actividad matemática humana sobre la base de las organizaciones previas.

Sistemas de práctica matemática. Como se ha expresado en las secciones anteriores, los objetos de conocimiento matemático son emergentes de la actividad de las personas en contextos institucionales específicos, es decir, en praxis particulares determinadas. Es por tanto necesario referir con más precisión cómo se entiende ahora, de manera precisa, la noción de práctica matemática, y su relación con la dimensión institucional e individual.

En nuestra perspectiva, entonces, proponemos que una práctica matemática estará constituida por los siguientes elementos: conceptos y objetos matemáticos institucionalizados, formas de argumentación y enunciación, instrumentos semióticos de mediación (que incluyen los lenguajes disponibles), las técnicas y procedimientos disponibles como construcciones culturales, y finalmente, por el conjunto de problematizaciones que se abordan en relación con la práctica misma.

Tipos de situaciones. En general, al interior de una práctica matemática, los tipos de situaciones aluden a los problemas fundamentales que deben, o se consideran, como campos válidos de investigación. La historia de la matemática ha mostrado como cambios en los problemas considerados como susceptibles de ser investigados en un momento dado, han generado nuevas perspectivas o formas de organización en el conocimiento matemático. Pero igualmente, estas situaciones históricas muestran que el desarrollo del conocimiento matemático está estrechamente ligado a los tipos de problemas que intenta resolver, por supuesto, conjuntamente con las técnicas e instrumentos disponibles para su investigación. Guardando los cuidados y reservas necesarias, para el caso de una práctica matemática, como ya se dijo, los problemas por resolver serían los fines, las metas a las cuales se orienta la acción.

En particular, y pensando en los procesos escolares, se puede entender por tipo de situación un conjunto de tareas (se asume que las tareas están organizadas en función de un problema por investigar, por resolver) que comparten una misma estructura, y por ende, permiten abordajes a partir de técnicas, o un conjunto de técnicas comunes. Los tipos de técnicas estarán disponibles en función de los instrumentos disponibles para realizar la actividad. Los instrumentos pueden ser tanto físicos (un ábaco, una calculadora), como simbólicos (registros de representación semiótica). La importancia de la pareja tipo de situación - técnica de solución se puede ver en la medida que se comprenda que detrás de cada técnica existe un cuerpo teórico que la justifica, y que estos elementos teóricos constituyen el saber institucional que debe ser, o se pretende que aprendan los alumnos.

Formas de razonamiento y Enunciados aceptados. Como se indicó páginas anteriores, las obras matemáticas se han edificado sobre formas específicas de organización del conocimiento matemático. En particular, diferentes obras se pueden caracterizar por los tipos de razonamientos que se aceptan como válidos. Por ejemplo, es el caso de los formalistas vs los intuicionistas de comienzos del siglo XX. Para los primeros razonamientos por reducción al absurdo eran razonamientos válidos, mientras que para los segundos no.

Pero estas obras matemáticas pueden diferir no solo por las formas de razonamiento que se aceptan como válidas, sino también, por los tipos de enunciados que se aceptan como válidos. Esta situación se hace más evidente, por ejemplo, para el caso de los axiomas, base de toda teoría matemática: negar el quinto postulado en la geometría euclidiana, produjo como resultado otras geometrías, que por negación, se llamaron geometrías no euclidianas.

Los dos elementos antes mencionados son determinantes en una práctica matemática pues, de ellos dependen, de un lado, las formas de delimitación (conceptual) de los problemas por resolver, pero de otro, el conjunto de técnicas disponibles para el desarrollo de la actividad.

Instrumentos Psicológicos. Los instrumentos psicológicos, o mejor aun, los medios semióticos de objetivación, son el conjunto de elementos que permiten a los individuos, a través de la actividad, reconstruir para si, lo que la humanidad a construido en su cultura. En este marco, es la cultura la que genera formas específicas de actividad, pero a su vez, es la actividad de los individuos, mediada culturalmente por los instrumentos psicológicos, el mecanismo general para producir sus propias modificaciones en su desarrollo cognitivo:

> ".. .la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo... El el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales." (Vygostki, 1995, p. 34)

Los signos son los medios por excelencia para dominar la conducta propia y la de los demás. Para Vygotski, los signos son "estímulos-medios artificiales introducidos por el hombre en la situación psicológica, que cumplen la función de autoestimulación... todo estímulo condicional creado por el hombre artificialmente y que se utiliza como medio para dominar la conducta -propia y ajena- es un signo..." (Vygostki, 1995, p. 83). Dos elementos son centrales en el papel del signo como principio mediador, a partir de la actividad humana, de la conciencia: es el hombre el que crea y usa sus propios signos *significación,* pero a su vez, este proceso permite crear conexiones cognitivas a través de las cuales dirige y orienta, domina su propio cuerpo. Así, el concepto de instrumento psicológico se da en analogía con el de instrumento físico[7], en tanto son construcciones culturales orientadas al dominio de ciertos procesos, solo que a diferencia de los físicos, los psicológicos no están orientados al dominio de la naturaleza, sino de los procesos cognitivos, de la conducta, de los hombres (a sí mismos y hacia los demás). Es en este sentido que Vygotski refiere la función instrumental de signo, en tanto el papel que juega como medio, o mejor, como estímulo medio para la adaptación de la conducta. Esto es, en relación con algún tipo de operación psicológica (memorizar, recordar, informar, elegir, etc), los signos son instrumentos de la actividad humana (es este caso, actividad psicológica), es decir, medios para la ejecución de las acciones cognitivas necesarias en los procesos de constitución de la conciencia como fenómeno cultural.

Kozulin (2000), en el marco de la teoría vygotskiana, retoma la noción de *instrumento psicológico,* y lo redefine al rededor conceptos más amplios: signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos. En sus palabras, "Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos que ayudan

7 Aunque para él es claro que la analogía no implica identidad, sino un principio de homogeneidad en las relaciones lógicas de los conceptos con respecto a la actividad humana: mientras que los instrumentos físicos, las herramientas, están orientadas al dominio de algo externo, el objeto de la actividad, los signos están orientados "son medios del hombre para influir psicológicamente, bien en su propia conducta, bien en la de los demás. Dirigido a dominar el propio ser humano: el signo está orientado hacia adentro". (Vygostki, 1995, p. 94)

a los individuos a dominar sus propias funciones psicológicas "naturales". ..". Estos recursos simbólicos son construcciones culturales, elaboraciones de la humanidad en las que se cristalizan el conocimiento acumulado de una generación a otra, y que no es transmisible genéticamente de un individuo a otro.

Para Pierre Rabardel (1995; 1999; 2003; 2005), un instrumento es algo más que un simple artefacto con el que realizamos una tarea. "El instrumento es una entidad mixta que comprende, por un lado, el artefacto material o simbólico y, por otra parte, los esquemas de utilización, las representaciones que hacen parte de las competencias del usuario y que son necesarias para la utilización del artefacto." (Rabardel, 1999, p 8).

El instrumento es una construcción gradual que hace el individuo, en relación con el tipo de actividad que debe realizar, los medios a su alcance para realizarla, y las formas uso de los medios culturalmente aceptados. La construcción del instrumento es lo que Rabardel ha denominado la *"génesis instrumental"*. Desde su perspectiva, la génesis instrumental atiende a dos dimensiones: *la instrumentalización y la instrumentación.*

> ...los esquemas de utilización del artefacto se enriquecen y se diversifican en relación con la evolución del campo funcional del instrumento. Ellos evolucionan en función de la multiplicidad de artefactos a los cuales están asociados para formar un instrumento,..., y a la diversidad de status que pueden tomar en esta asociación. La actividad constructiva juega un papel importante sobre la transformación, el desarrollo y la puesta a punto de esos organizadores de la actividad que son los esquemas. Este movimiento, dirigido por el sujeto hacia sí mismo, es lo que nosotros llamamos instrumentación. (Rabardel, 2005, p. 16).
>
> El segundo movimiento, de instrumentalización, es aquel por el cual un sujeto pone a punto, podría decirse conforme a su persona, lo que le es dado externamente para hacerlo su propio instrumento. Esta inserción a sí mismo supone, de una parte, una inserción del sujeto en las formas del artefacto tales como ellas le son dadas o propuestas pero, de otra parte, una subversión de esas formas o de sus sentidos. Este segundo aspecto se traduce en un cambio en las funciones, el desarrollo de nuevas funciones o, al contrario, el abandono de las funciones previstas. Puede llegar a presentarse una transformación de la estructura,... (Rabardel, 2005, p. 16).

Así pues, la acción del hombre a través de instrumentos -la actividad- comporta la posesión, por ese hombre, de la experiencia de la práctica social. Este conocimiento, adquirido en la actividad instrumental, hecho conciencia en el hombre, se constituye en verdadero conocimiento. La actividad es, ante todo, un proceso colectivo en el cual la *inter-acción* es la base fundamental para la construcción de sentidos y significados, es decir, de la construcción de una conciencia individual en el marco de los procesos sociales subyacentes. Esta interacción implica entonces sujetos que *inter-actúan* en constante oposición unos a otros: la acción de cada sujeto siempre constituye una *réplica* a las acciones de los otros. Los instrumentos construidos para la acción, sintetizan socialmente estos procesos de interacción pero, a la vez, son mediadores en la manera como los individuos se apropian de estas construcciones sociales.

Objetos y conceptos. Las discusiones sobre la naturaleza de los objetos de conocimiento matemático ha estado durante muchos siglos como tema de primer orden en relación con las preocupaciones filosóficas sobre conocimiento. En esta sección no se pretende, ni hacer un recorrido por los laberintos de tales discusiones, ni mucho menos zanjar las brechas que la historia misma ha mantenido abiertas. Tan solo se esbozarán un conjunto de ideas sobre los objetos matemáticos tomando como base algunos planteamientos de la fenomenología, en tanto se ven como coherentes con los supuestos de orden sociocultural del conocimiento esbozado anteriormente.

Así pues, se puede tomar como punto de partida el planteamiento de Husserl sobre los objetos matemáticos: objeto es "todo sujeto de posibles predicaciones verdaderas" (Husserl, 1986, p. 22). Esta noción, por demás de carácter lógico, en si misma no afirma que es un objeto matemático, sino que expresa condiciones de existencia para los mismos: un objeto existe en tanto existe un sujeto que lo puede pensar[8]. Esto es, el objeto lo es en tanto, puede ser percibido, pensado, referido por un sujeto, en relación con su experiencia directa.

Más adelante, Husserl afirma que objeto es un término que designa muchas clases de entidades que f...] no son equivalentes unas a otras, sino que en cada caso remiten a una forma de objetividad...” (Husserl, 1986, p. 32). Aquí, objetividad, puede ser entendida como el acto de percepción que posiciona el objeto - conciencia del objeto[9] - ante un campo estructural de experiencias, esto es, la percepción de un conjunto de operaciones y relaciones que dan estructura a los objetos intencionales, que se sintetizan a partir de la experiencia vivida. De esta manera, el objeto, como entidad fenomenológica es el invariante estructural[10] que sintetiza una campo complejo de experiencias.

Se trata pues de una apuesta fenomenológica que encuentra las posibilidades de existencia de los objetos matemáticos, de un lado, en su constitución como objetos lógicos, y de otro, en la tematización de la experiencia de los sujetos a partir de las sucesivas aprehensiones perceptuales del objeto.

La tematización, en el sentido propuesto por Jean-Louis Gardies, es el proceso mediante el cual organizamos y estructuramos el mundo de nuestra percepción (inmediata, cuando se trata de las relaciones con el mundo natural que nos rodea — si se quiere, la actitud natural husserliana, o ideal, cuando se trata percepciones sobre objetos estructurados en campos que escapan la dicha naturalidad) para dar paso al surgimiento de objetos pertenecientes a otro orden de realidad, de un nivel lógico de existencia superior[11] (Gardies, 2001, 2004).

La tematización es así entonces una forma de organización de la experiencia matemática que permite la construcción de objetividades de un cierto orden, sobre la base de las objetividades de los órdenes precedentes. De otro lado, Para Husserl, todo objeto se nos presenta delante en un cierto horizonte, situado entre otros, y abriendo nuevos horizontes. En el marco de esa red, es que tomamos conciencia del objeto. Para que esa red aparezca, es necesario tematizar el objeto, pues el objeto nunca nos es dado en todas sus formas de aparecer. Tematizar es pues, tomar conciencia para sí de un objeto que se nos presenta delante, una forma de fijar la atención. Así pues, la construcción de las objetividades, o como diría Luis Radford, la objetivación, permite al individuo reconstruir para si los sentidos y significados propios de las matemáticas construidos históricamente por la humanidad. Estos sentidos y significados descansan no solo en el cuerpo de conocimientos estructurados formalmente (conceptos, objetos, axiomas, teoremas, etc.), sino también, en las acciones (gestos, técnicas, modos de hacer) y en los medios para efectuar dichas acciones (signos, instrumentos, etc.); en las formas de razonamiento y formas de enunciación (géneros discursivos, si se quiere en términos Bajtinianos) aceptadas como válidas, y que fijan las prácticas en el lenguaje; y, en general, en el conjunto de ideologías[12] que permiten ciertas formas de significación en relación con los objetos de conocimiento. Esta superestructura simbólica, como dice Radford (2006), conforma los *medios*

8 Nótese como la fenomenología, al no proponerse la dualidad sujeto-objeto, no se ve enfrentada al problema de decir que son los objetos ni que son los sujetos, sino que su búsqueda filosófica se centra en las condiciones de ser, si se quiere, las modalidades de existencia de los objetos de conocimiento. De esa manera da un paso al lado en el eterno problema del huevo y la gallina: ¿quién fue primero, el sujeto o el objeto?. La fenomenología da por sentado que los objetos existen, en tanto hay sujetos que los piensen, y que al contrario, el sujeto existe, en tanto hay otras entidades que se le oponen, los objetos (y por supuesto, otros sujetos)

9 Este proceso de toma de conciencia de objeto, es definida por Radford (2006) como la objetivación.

La objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del eidos homérico, esto es, de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido. Es ese notar que se desvela en el gesto que cuenta o que señala, notar que se descubre en la intención que se plasma en el signo o en el movimiento kinestésico que mediatiza el artefacto en el curso de la actividad práctica sensorial, algo susceptible de convertirse en acción reproducible, cuyo significado apunta hacia ese patrón eidético fijo de acciones incrustadas en la cultura que es el objeto mismo, (p. 116)

10 Esta forma de comprender los objetos, es muy cercana a lo propuesto por Duval en donde se asume que una acepción aceptable para la noción de objeto matemático es aquella en la que éstos son asumidos como los invariantes sintetizados a partir de todas las posibles representaciones del mismo en los diversos registros disponibles. Esta perspectiva de Duval con respecto a los objetos matemáticos es restrictiva pues la complejidad de la actividad de los individuos no es capturada totalmente por los registros de representación (Radford, 2008). Pero esto no quiere decir que su análisis semiótico con respecto a los objetos matemáticos deba dejarse de lado, sino que, por el contrario, debe ser complementado con aportes desde otros campos teóricos.

11 Superior debe ser entendido como un nivel de existencia en otro nivel, en otro mundo, sino nivel superior en relación con las estructura lógicas previas

12 Para Bajtín, la ideología es conciencia social constituida por la interiorización del signo, es decir, la ideología es un “sistema de ideas socialmente determinado, como sistema de valores y puntos de vista.” (Silvestri & Blanck, 1993, p. 56). Desde esta perspectiva, una ideología expresa el punto de vista de un grupo social y orienta de manera explícita o implícita las praxis de los individuos, y no se refiere a su forma negativa de una forma de pensamiento distorsionado que encubre las contradicciones sociales. En este documento se asume esta forma de comprensión Bajtiniana sobre el concepto de ideología.

semióticas de objetivación, y como tal, constituyen el paquete de instrumentos (físicos y simbólicos), y por ende, de significación, que la cultura pone a disposición de los individuos para su posicionamiento ante el mundo, para la constitución de su experiencia, en particular, de su experiencia matemática, a partir de la inserción del individuo en *sistemas de actividad específicos.*

Los medios semióticos de objetivación serían entonces todo ese conjunto de recursos (instrumentos) culturales, que en el marco de actuaciones específicas, permite a los individuos la toma de conciencia de los objetos, fijar la atención, realizar sus actos intencionales, orientar sus acciones hacia el objeto de la misma (es decir, realizar la actividad). El carácter cultural de los mismos se evidencia en que: (1) sintetizan, encapsulan, procesos socialmente construidos y los hacen comunicables a generaciones posteriores; (2) a través de su uso, los individuos aprenden el conocimiento contenido, cristalizado, en ellos; y (3) constituyen formas culturales de significación que determinan formas específicas de ver, y de hacer, las matemáticas.

4. Una actividad final

Alan Bishop en su libro Enculturación Matemática demuestra y confirma el significado de la matemática como producto cultural y explora a fondo el proceso de la enculturación matemática. Es así como en la relación permanente que tenemos con el mundo que nos rodea (desde las diferentes cosmovisiones culturales), el asunto específico de la medida nos compete a todos, por lo tanto, pensar en actividades que desarrollen los procesos de medición en la escuela hace que re-signifiquemos los conceptos allí involucrados. Relacionar la cualidad que se mide con lo cuantificable requiere de habilidades y procesos que son necesarios desarrollar para poder construir un pensamiento métrico desde interacciones con la realidad, al crear unidades para medir que impliquen movimientos cuantitativos a la hora de resolver problemas de la cotidianidad, de las mismas matemáticas y de otras ciencias.

Proponemos entonces, para terminar este curso realizar una actividad relacionada con la medición, que nos lleve a reflexionar sobre las concepciones que se tienen en torno a la medida, sobre el lenguaje propio y su relación con otras ciencias, para generar desde aquí inquietudes alrededor de la dialéctica entre el conocimiento matemático, la actividad y las interrelaciones en la perspectiva sociocultural.

Una actividad: el concepto de medida[13]

Observe las siguientes representaciones de los objetos en mención:

Arbol

Agua

Tierra

Vacas

Edad

Amor

13 Esta actividad fue adaptada de Lanner, de M.A.R. (1995). A medida e a crianca pre-escolar. Tesis de doctorado. Campinas: Editora Unicamp.

Nostalgia

Sonido

Chocolate

Desde dichos objetos sugeridos responda a las siguientes preguntas

1. ¿Qué desea medir del objeto?
2. ¿Por qué o para qué desea medir eso?
3. ¿Cómo medirlo?
4. ¿Con qué medirlo?

Escriba sus respuestas en el siguiente cuadro:

Objeto/Pregunta	¿Qué?	¿Por qué o para qué?	¿Cómo?	¿Con qué?
Árbol				
Agua				
Tierra				
Vacas				
Edad				
Amor				
Nostalgia				
Sonido				
Chocolates				

Desde las relaciones establecidas entre la “cualidad y la cantidad” y lo “continuo y lo discreto”, discutiremos, posteriormente, en torno a los aspectos esenciales matemáticos involucrados en el concepto de medida:

- La selección de la unidad de medida
- La comparación de la unidad con la grandeza/magnitud a ser medida
- La expresión numérica de la comparación

5. Referencias

- Cobb, P. (2006). Supporting a Discourse About Incommensurable Theoretical Perspectives in Mathematics Education [Electronic Version]. Philosophy of Mathematics Education Journal Consultado en febrero de 2007 desde http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome19/index.htm.
- Epple, M. (2004). Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic Configurations of Mathematical Research. Science in Context, 17, 131-164.
- Gardies, J.-L. (2001). Qu’est-ce que et Pourquoi L’analyse? (1 ed.). París: Libraire Philosophisque J. Vrin.
- Gardies, J.-L. (2004). Du Mode d’existence des Objets de La Mathématique (1 ed.). París: Libraire Philosophisque J. Vrin.

- Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., et al. (2006). Una Visión de la Didáctica Francesa desde el Enfoque de Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., 9(1), 117-150.
- Husserl, E. (1986). Ideas relativas a una fenomenolgia pura y una filosofía fenomenologica (3 ed.). México: Fondo de Cultura Económica.
- Kitcher, P. (1981). Mathematical rigor – who needs it? Noûs, 15(4), 469-493.
- Kitcher, P. (1984). The Nature of Mathematical Knowledge (1 ed.). New York: Oxford University Press.
- Kozulim, A. (2000). Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural. Barcelona: Ediciones Paidos.
- Lerman, S. (2001). Cultural discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 46(1-3), 87-113.
- Nemirovsky, R. (2009). A Reading of the Volume from the Perspective of Symbol-Use. In C. Andersen, N. Scheuer, M. d. P. Pérez Echeverría & E. V. Teubal (Eds.), Representational Systems and Practices as Learning Tools, (pp. 281-296). Rotterdam: Sense Publishers.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Documento presentado en Dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques.
- Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. Interacting with Computers, 15, 641-645.
- Rabardel, P. (2005). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. In P. Rabardel & P. Pastré (Eds.), Modèles du sujet pour la conception: Dialectiques activités développement (1 ed., pp. 9-29). Toulouse, France: OCTARÈS Éditions.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., Numero especial, 103-120.
- Radford, L. (2008). The etics of being an knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), Semiotics in Mathemathics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture (pp. 00-00). Rotherdam: Sense Publishers.
- Ricoeur, P. (2001). Del texto a la Acción. Ensayos de Hermenéutica II (P. Corona, Trad. 1 ed.). Angentina: Fondo de Cultura Económica.
- Silvestri, A., & Blanck, G. (1993). Bajtín y Vigotski: la organización semiótica de la conciencia (Primera edición ed.). Barcelona: Anthropos.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141-161). Virginia (USA): National Council of Teacher of Mathematics. Lawrence Erlbaum associates.
- Vergnaud, G. (1991). El Niño, las Matemáticas y la Realidad. México, D.F.: Trillas.
- Vergnaud, G. (1993a). La teoría de los campos conceptuales. In E. Sánchez & G. Zubieta (Eds.), Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. México D.F.
- Vergnaud, G. (1993b). Le Moniteur de Mathematique: Fichier pedagogique. París: Editions Nathan.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why? In H. Guershon & J. Con-

frey (Eds.), The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (1 ed., pp. 41-60). New York: State University of New York Press.

- Voloshinov, V. N. (1992). El marxismo y la filosofía del lenguaje. (T. Bubnova, Trad.). Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Vygostki, L. S., Leontiev, A. N., & Luria, A. R. (1989). El proceso de formacion de la psicologia marxista. Moscú: Progreso.
- Vygotski, L. S. (1995). Obras escogidas (Vol. 3). Madrid: Visor.