10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Una Experiencia Didáctica en la Enseñanza del Teorema de Bayes

Lucia Zapata-Cardona, Profesora Universidad de Antioquia,
Grupo de Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemáticas - GECEM
luzapata@ayura.udea.edu.co
Sandra Quintero, Profesora Universidad de Antioquia
sandraquinteroco@hotmail.com

Introducción

Muchas investigaciones en el campo de la sicología y la educación estadística muestran que el razonamiento bayesiano es complejo para los alumnos, especialmente cuando se aborda desde el punto de vista conceptual (Diaz & De la Fuente, 2005). Pero, se ha encontrado también que el razonamiento bayesiano puede ser facilitado si se usan las estrategias adecuadas tales como representaciones visuales. El presente trabajo presenta una experiencia didáctica en la enseñanza del teorema de Bayes en un curso de estadística introductoria para el programa de Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia.

Esta propuesta de intervención surge de la necesidad de explorar experiencias didácticas que favorezcan el razonamiento bayesiano de los estudiantes que toman el curso de estadística introductoria. Las autoras son miembros del Núcleo de Pensamiento Aleatorio, el cual es un equipo académico que convoca todos los profesores de estadística de la Facultad de Educación y en el que se abordan aspectos relacionados con la enseñanza, el currículo y la evaluación en estadística desde una perspectiva de investigación acción como la descrita por Carr y Kemmis (1988). Como parte del trabajo de este equipo, nos preguntamos acerca de formas eficientes de enseñar la estadística.

Decidimos entonces enfocarnos en el teorema de Bayes y explorar algunas formas de favorecer la enseñanza que beneficien el desempeño de los estudiantes en el razonamiento bayesiano. Este teorema además de ser uno de los temas más complejos en los cursos de estadística introductoria, su comprensión involucra el dominio de otros conceptos asociados como: probabilidad simple, probabilidad conjunta, probabilidad condicional, independencia, complementario, axioma del producto, error tipo I y tipo II, y probabilidad total. Esta lista de prerrequisitos podría ser la causa de la dificultad.

Planteamiento del problema

La resolución de problemas bayesianos ha sido ampliamente estudiada por sicólogos, estadísticos y educadores estadísticos (Díaz, C., Ortiz, J. & Serrano, L., 2008; Falk, 1986; Tversky & Kahneman, 1982) quienes han llegado a conclusiones similares: estos problemas son difíciles y contraintuitivos para los estudiantes. Por otro lado, otros investigadores (Gigerenzer, & Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 1999) han concluido que las dificultades en la solución de problemas bayesianos pueden ser reducidas si los problemas se presentan en términos de frecuencias absolutas en vez de en términos de porcentajes o probabilidades. En nuestra propia experiencia como profesoras de estadística hemos encontrado que la enseñanza del teorema de Bayes es compleja y que aun después de la instrucción, los estudiantes continúan teniendo dificultades en el razonamiento bayesiano. Hemos diseñado una estrategia didáctica para la enseñanza del teorema de Bayes y queremos en este trabajo dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cuál es la efectividad de una experiencia didáctica para la enseñanza del teorema de Bayes cuando este se aborda desde la simulación y las representaciones gráficas?

Marco Teórico

Esta propuesta se fundamentó en varios intentos de establecer un marco conceptual para analizar la enseñanza de la estadística. Más de una década atrás Garfield (1995) hizo una detallada revisión de literatura relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y propuso 10 principios para el aprendizaje de la estadística. Estos principios fueron útiles para orientar el desarrollo del currículo de estadística en los últimos niveles del bachillerato en los Estados Unidos (Advance Placement Statistics o AP Stat), pero fueron planteadas desde una concepción muy general del aprendizaje. Más tarde Shaughnessy (2003) sugirió una lista de recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad la cual fue inspirada en los bajos resultados de los estudiantes en la Evaluación Nacional de Progreso Educativo 1996 (NAEP por sus siglas en inglés). Las recomendaciones de Shaughnessy enfatizaban hacer explicitas las conexiones entre probabilidad y estadística pero seguían siendo tan generales como las propuestas por Garfield. Más recientemente Franklin y Garfield (2006) con un multidisciplinario y extenso equipo de trabajo (profesionales en múltiples áreas: Estadística, Matemáticas, Educación Matemática, Educación Estadística, Cognición y otras) diseñaron la Guía para Evaluación e Instrucción en Educación Estadística (GAISE por sus siglas en inglés) que incluye una lista de recomendaciones y ejemplos para la enseñanza de la estadística. La ventaja que tiene este marco teórico con respecto a los propuestos por Garfield y Shaughnessy es que es contextualizado para cada nivel educativo desde pre-escolar hasta nivel universitario. Este permite evidenciar por ejemplo como el estándar de las medidas de tendencia central abordadas en el nivel de la básica primaria tienen un enfoque y profundidad diferente cuando es abordado desde el nivel secundario o universitario. Algunas de las recomendaciones del proyecto GAISE son: (1)

Enfatizar la cultura estadística y desarrollar pensamiento estadístico, (2) Usar datos reales, (3) Hacer hincapié en la comprensión conceptual más que en el mero aprendizaje de procedimientos, (4) Promover el aprendizaje activo en el salón de clase, (5) Usar tecnología para desarrollar conceptos y analizar datos, (6) Usar la evaluación para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Nuestra experiencia didáctica fue diseñada y ejecutada teniendo en cuenta las recomendaciones de la GAISE.

Metodología

Esta propuesta se enmarcó en un estudio de tipo cuasi experimental con pre-prueba y post-prueba. Los participantes fueron 12 estudiantes de sexto semestre de la licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia que aceptaron la invitación de participar en este estudio. Se aplicó una prueba diagnóstica antes de la intervención y una prueba una semana después para verificar el impacto de la intervención. La intervención fue llevada a cabo en una clase de tres horas y video grabada para asegurar la precisión de la descripción y del análisis. Una de las investigadoras era la profesora titular del grupo en el cual se hizo la intervención y la otra investigadora la coordinadora del Núcleo de Pensamiento Aleatorio.

El equipo de investigación diseñó una intervención tomando en cuenta las recomendaciones de la

GAISE para abordar el teorema de Bayes. Esta intervención fue revisada con detalle en dos reuniones y se le hicieron los ajustes respectivos antes de ser ejecutada.

Análisis

Inicialmente se aplicó una prueba diagnóstica (pre-prueba) en la cual se exploró la comprensión de la probabilidad condicional, mediante un escenario que ha sido ampliamente usado en investigación (Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., & Cobb, G., 1987), y mediante el teorema de Bayes desde tres diferentes perspectivas, a partir de: (1) una tabla de doble entrada, (2) frecuencias absolutas y (3) probabilidades (ver Anexo 1).

La aplicación de la prueba diagnóstica reveló que los estudiantes presentaron dificultades para diferenciar eventos causales de los condicionales. La prueba también reveló, como lo sugieren algunos autores en Psicología y en Educación Estadística, que los problemas de probabilidades que se enuncian en términos de tablas de doble entrada o en términos de frecuencias son mucho más sencillos de resolver para los estudiantes que aquellos que se enuncian en términos de probabilidades (Gigerenzer, & Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 1999).

A continuación presentamos en detalle el análisis de la prueba diagnóstica. La primera pregunta buscaba determinar si los estudiantes cuando se enfrentan a eventos condicionales razonan en términos de condiciones o en términos de causalidad. El escenario fue presentado en un contexto social donde el estudiante debía determinar cuál era el evento más probable (a) Que una chica tenga ojos azules si su madre tiene ojos azules, (b) Que una madre tenga ojos azules si su hija tiene ojos azules, o si (c) Los dos eventos son igualmente probables. La respuesta correcta para estapregunta es la opción (c). Se esperaba que los estudiantes justificaran apropiadamente; hubo, sin embargo, variedad de respuestas. El 50% de los estudiantes indicó que la opción (a) era la más probable. No obstante, sus justificaciones parecieron mostrar que no estaban razonando en términos de probabilidad. Por ejemplo, uno de los estudiantes que eligió esta opción dio la siguiente explicación: "porque los ojos azules los pudo haber heredado del padre". Esta razón no justifica el haber elegido la opción (a). Muy posiblemente este estudiante razonó teniendo en cuenta información anecdótica. Llama la atención que ningún estudiante eligió la opción (b). Paracontrastar, el 40% de los estudiantes eligió correctamente la opción (c), pero sus justificaciones parecen mostrar nuevamente que no estaban razonando en términos de probabilidad (Tabla 1). Uno de los estudiantes, por ejemplo, justificó: "porque este rasgo característico también depende de los genes que tenga el padre, al igual si la hija tiene ojos azules, la madre puede tenerlos también".

Estudios que han explorado este tipo de preguntas han coincidido en que los estudiantes generalmente se dejan llevar por un razonamiento causal (Pollatsek, Well, Konold, Hardiman, & Cobb, 1987; Tversky & Kahneman, 1980). Cuando la probabilidad condicional es presentada en contextos sociales, el conocimiento previo de los eventos puede interferir con el cálculo de las probabilidades, especialmente si no hay una clara comprensión e interpretación del lenguaje condicional.

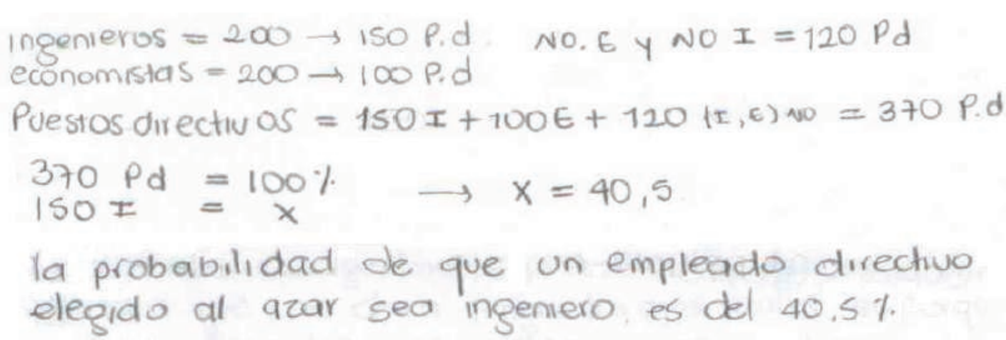
Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas de la prueba inicial

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
	(a) 100		
40	(b) 100	80	0
No responde: 10	(c) 91		
	(d) 91		

La segunda pregunta pretendía verificar si los estudiantes podían encontrar probabilidades de eventos sencillos, probabilidades condicionales y la probabilidad total, si el problema era formulado en términos de tablas de doble entrada. El problema estuvo enmarcado en el contexto de dos fabricas A y B en las que se contabilizó el número de televisores defectuosos del turno de día y del turno de la noche. La segunda columna de la Tabla 1 muestra que hubo un alto porcentaje de respuestas correctas.

La tercera pregunta pretendía comprobar si los estudiantes podían encontrar probabilidades condicionales y su inversa si el problema era presentado en términos de frecuencias absolutas. El problema estuvo enmarcado en el contexto de una fabrica de 1000 empleados en diferentes profesiones (ingenieros, economistas y otros) y desempeñando o no cargos administrativos. La tercera columna de la Tabla 1 muestra, para sorpresa nuestra, que hubo un alto porcentaje de respuestas correctas y los estudiantes fueron muy creativos en la búsqueda de la solución. Uno de los estudiantes por ejemplo llegó a la probabilidad usando una regla de tres (Gráfico 1).

Gráfico 1: Cálculo de la probabilidad condicional inversa de un estudiante usando regla de 3



Si contrastamos los resultados favorables que se tuvieron en la pregunta 2 y 3 con la pregunta 4, la dificultad para la solución es evidente (Tabla 1). El problema 4 fue similar al descrito en el problema 3 pero se enunció en términos de probabilidad y no en términos de frecuencia. Este problema es el clásico problema de los taxis que ha aparecido en varias investigaciones que exploran el razonamiento condicional de los individuos (Diaz & De la Fuente, 2005; Watson & Kelly, 2007). El problema plantea que en una ciudad hay taxis de dos colores; y un testigo, con ciertos problemas oculares, tiene que identificar el color del taxi. El problema pregunta por una probabilidad condicional inversa (que se puede solucionar aplicando el teorema de Bayes). Uno de los aspectos interesantes de este problema es que la mayoría de los estudiantes no pasaron del planteamiento e incluso algunos dieron justificaciones no estadísticas sino anecdótico - sicológicas.

Un estudiante por ejemplo dio la siguiente justificación: “Existe un 80% de posibilidades que sea azul porque es más fácil equivocarse entre tanto taxi verde que en un azul pues el cambio cromático es inmediato cuando se pasa de verde a azul”.

Podemos decir que los resultados obtenidos en esta prueba diagnóstica son coherentes con los resultados de previos estudios que establecen que el teorema de Bayes es mucho mejor comprendido cuando las situaciones se presentan con tablas de doble entrada y con frecuencias absolutas, y no en términos de probabilidades (Pollatsek, Well, Konold, Hardiman, & Cobb, 1987; Tversky & Kahneman, 1980).

Después de la aplicación de la prueba diagnóstica se inició la intervención didáctica. Esta intervención fue diseñada de acuerdo a las recomendaciones del proyecto GAISE (Franklin &

Garfield, 2006) y tuvo la siguiente secuencia: (1) componente exploratorio, (2) componente de conceptualización basado en la simulación y (3) evaluación o aplicación. A continuación se describe cada una de las fases de la secuencia.

Exploración

Para el componente exploratorio se presentó el siguiente escenario que permitió a los estudiantes inspeccionar y clarificar los conceptos de dependencia, probabilidad condicional y regla del producto.

Se tienen dos cajas con las siguientes letras ANA y ANA ANA. Se debe elegir una de las cajas y a continuación extraer, al azar, tres letras, una a una sin reemplazamiento. Si el resultado es ANA entonces se gana un premio. ¿Cuál caja elegirías? (Diaz-Godino, Batanero, & Cañizares, 1991, p. 157).

Antes de sugerir cualquier solución se exploró las intuiciones de los estudiantes. Para esto se les pidió que predijeran cuál de las cajas podría ganar y hubo preferencias encontradas. El 64% de los estudiantes eligieron la caja que tenia las letras ANA (caja 1) y el 36% eligieron la caja con las letras ANA ANA (caja 2). A continuación, los estudiantes trabajaron en parejas haciendo una simulación usando dos bolsas de papel, a cambio de cajas. En la bolsa 1 estaban las letras ANA y en la bolsa 2 las letras ANA ANA. Se les pidió hacer la simulación 10 veces con cada bolsa para determinar cuál de ellas tenia la mayor probabilidad de ganar. Al finalizar las simulaciones por parejas se agruparon las simulaciones del grupo hasta completar 60 intentos para cada bolsa y así determinar la probabilidad experimental de formar la palabra ANA. Se encontró que la probabilidad experimental para la caja 1 fue 0.36 y para la caja 2 fue 0.22. Los estudiantes quehabían predicho mayor probabilidad para la bolsa 2 quedaron sorprendidos pero ahora estabaninteresados en conocer las razones teóricas por las cuales la bolsa 1 tenía una mayor probabilidad.

A continuación, se orientó a los estudiantes en la construcción del diagrama de árbol para encontrarlas probabilidades teóricas con la intención de compararlas con las probabilidades experimentales previamente exploradas. Se e ncontró que la probabilidad teórica de la caja 1 es 0.33 y de la caja 2 es 0.20.

Cuando las probabilidades teóricas fueron determinadas se orientó una simulación usando calculadoras TI Voyage 200[1]. El correr simulaciones ayuda a los estudiantes a mejorar su intuición en términos de probabilidad y además atiende a dos de las recomendaciones de la GAISE (Franklin & Garfield, 2006): (a) Usar datos reales y (b) Usar tecnología para desarrollar conceptos. Se corrió una simulación de 100 repeticiones para la primera caja y cien repeticiones para la segunda (un estudiante obtuvo 0.35 para la primera caja y 0.21 para la segunda). Esta vez las probabilidades estuvieron mucho más cerca de lo teórico que en la simulación en físico. Consideramos que la comparación de la probabilidad teórica con la experimental es esencial para ayudar al alumno a hacer la conexión que lo que pasa en teoría puede ser simulado muy cercanamente con lo experimental si se hace un número de veces suficientemente grande.

Conceptualización

Para el componente de conceptualización en el cual se introdujo a los estudiantes al tema central de esta intervención, se usó otro escenario con la intención de ser simulado por los estudiantes.

Se sabe que el 10% de los empleados de una tienda están robando. Los administradores tienen un detector de mentiras con precisión del 80%. Quienes no pasen la prueba del detector de mentiras serán despedidos. Determine la probabilidad que un empleado no pase la prueba. Determine la

1 Interesados en conocer la simulación pueden contactar las autoras.

probabilidad que un empleado sea ladrón dado que no pasó la prueba del detector de mentiras (Gelman & Nolan, 2002, p. 113).

Antes de sugerir cualquier solución estábamos interesadas en conocer las intuiciones de los estudiantes. Se les pidió que predijeran en una tienda de 100 trabajadores cuántos en promedio esperarían que fueran despedidos. Los estudiantes sugirieron valores entre 7 y 10. Por lo visto estas predicciones no consideraron la probabilidad de ser ladrón y la probabilidad de acierto del detector de mentiras. Parece ser que los estudiantes solo consideraron la probabilidad del evento más simple: probabilidad de ser ladrón.

Dos estudiantes de la clase hicieron las veces de administradores y el resto (incluyendo las profesoras) de empleados de una tienda. Para simular esta situación cada empleado generó un número entero aleatorio entre 0 y 9 en la calculadora (TI Voyage 200), si el número generado fue 0 el empleado fue considerado ladrón, si fue en el rango de 1 a 9 el participante fue considerado honesto. Los dos estudiantes en el rol de administradores usaron una tabla de números aleatorios para determinar si los empleados pasaban la prueba del detector de mentiras. Esta prueba se aplicó primero a los empleados honestos. A cada empleado honesto se le asignó un dígito aleatorio, si el digito salió en el rango de 2 a 9 el empleado pasó la prueba, si el digito salió 0 ó 1 el empleado no pasó la prueba y en conclusión fue despedido. Luego se aplicó la prueba del detector de mentiras a los empleados ladrones. A cada empleado ladrón se le asignó un dígito aleatorio, si el digito fue 0 ó 1 el empleado pasó la prueba, pero si el dígito fue en el rango 2 a 9 el empleado no pasó la prueba y en consecuencia fue despedido. Esta simulación generó muchas expectativas en los estudiantes, especialmente cuando algunos que fueron considerados empleados honestos fueron despedidos.

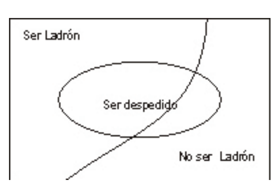
Para ayudar a los estudiantes a organizar los datos de la simulación se les orientó en la elaboración de una tabla de doble entrada (Tabla 2).

Tabla 2: Tabla de frecuencias para la simulación empleados

		Trabajador es ladrón		
		Si	No	Total
Trabajador fue despedido	Si	1	2	3
	No	0	8	8
	Total	1	10	11

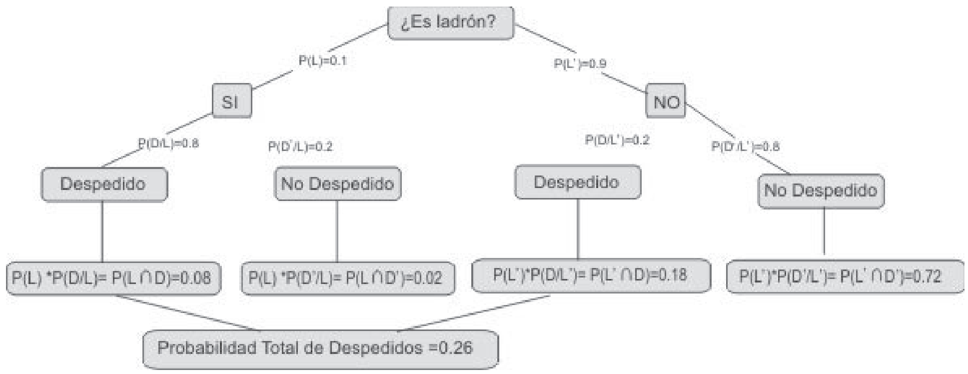
Esta tabla surgida de datos experimentales permitió explorar preguntas tales como ¿Cuál es la probabilidad de ser despedido? ¿Cuál es la probabilidad de ser despedido y ser ladrón? ¿Cuál es la probabilidad de ser despedido y no ser ladrón? ¿Cuál es la probabilidad de no ser despedido y ser ladrón? ¿Cuál es la probabilidad de no ser despedido y no ser ladrón? Se exploró también el error tipo I (despedir al trabajador que no es ladrón) y el error tipo II (no despedir al trabajador que es ladrón). Cuando estos aspectos fueron discutidos se orientó a los estudiantes a la elaboración de un esquema (Gráfico 2) que permitió visualizar desde otro punto de vista lo que se tenía en la Tabla 1.

Gráfico 2: Diagrama para ilustrar la ocurrencia de dos eventos



Usando el Gráfico 2 se abordó de nuevo las preguntas discutidas a partir de la Tabla 1. A continuación se orientó a los estudiantes a la construcción del diagrama de árbol pero con las probabilidades teóricas para ser comparadas con las probabilidades experimentales (ver Gráfico 3).

Grafico 3: Diagrama de árbol para la probabilidad teórica



Los estudiantes identificaron que la suma de la primera rama y la tercera rama del árbol (Gráfico 3) generaban la probabilidad total *P(D)*. Como una estrategia para ayudar a la comprensión, se discutió cual sería la región correspondiente a las probabilidades en el Gráfico 2. Así se resolvió el primer interrogante, pero los estudiantes estaban sorprendidos de descubrir que sus intuiciones los engañaron en la predicción del número de despedidos en una tienda de 100 trabajadores; en promedio serian 26 y no entre 7 y 10 como lo habían sugerido. El siguiente interrogante, *determinar la probabilidad que un empleado sea ladrón dado que no pasó el detector de mentiras P(L/D)*, nos llevaba a pensar en el teorema de Bayes. Para hacerlo más familiar para los estudiantes se partió de la definición de probabilidad condicional.

$$P\,(L/D) = \frac{P\,(L \cap D)}{P\,(D)}$$

Los estudiantes identificaron la probabilidad de la intersección $P\,(L \cap D)$ y la probabilidad total *P(D)* usando el diagrama de árbol y procedieron a hacer el reemplazo y a encontrar el valor del cociente.

$$P\,(L/D) = \frac{P\,(L \cap D)}{P\,(D)} = \frac{0.08}{0.26} = 0.31$$

Para complementar el análisis se les presentó a los estudiantes una tabla de doble entrada similar a la Tabla 2 pero con datos simulados de una tienda con 500 empleados (Tabla 3). La simulación se hizo usando una calculadora TI Voyage 200.

Tabla 3: Tabla de frecuencias para la simulación de 500 empleados

		Trabajador es ladrón		
		Si	No	Total
Trabajador fue despedido	Si	37	98	135
	No	14	351	365
	Total	51	449	500

La Tabla 3 permitió volver sobre las probabilidades de eventos simples, eventos conjuntos y eventos condicionales previamente discutidos, pero esta vez desde una perspectiva diferente, una perspectiva experimental con un número suficientemente grande de ensayos. De nuevo se orientó a los estudiantes a comparar las probabilidades experimentales con las teóricas las cuales fueron muy cercanas. Orientar a los estudiantes en la comparación y en la reflexión en torno a los resultados es una forma de (a) Enfatizar la cultura estadística y desarrollar pensamiento estadístico, y (b) Hacer hincapié en la comprensión conceptual más que en el mero aprendizaje de procedimientos, los cuales son recomendaciones de la GAISE.

Evaluación- aplicación

Para finalizar nuestra intervención y como estrategia para (a) Promover el aprendizaje activo en el salón de clase, y (b) Usar la evaluación para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes, principios que también son recomendaciones de la GAISE (Franklin & Garfield, 2006), se hizo un taller en grupos y una post prueba. El taller en grupos constó de dos problemas, uno de ellos preguntaba por la independencia de dos eventos en un escenario de salarios clasificados por edades; y el otro por la aplicación del teorema de Bayes en un contexto de una prueba de sangre para detectar el síndrome de Down en mujeres embarazadas (ver Anexo 2). El análisis del trabajo en grupo permitió detectar una mayor comprensión del teorema de Bayes. Una de las estrategias más usadas por los estudiantes para solucionar los problemas fue la representación gráficas como el diagrama de árbol. Esta fase de la intervención también nos permitió identificar algunas dificultades. Aun después de la intervención hubo estudiantes a quienes se les dificultó determinar en términos estadísticos la dependencia o independencia de eventos. Algunos expresaron la independencia en términos intuitivos pero no en términos de probabilidades. Por ejemplo, cuando se les preguntó si tener síndrome de Down y ser positivo en la prueba eran eventos independientes, un estudiante expresó: "los eventos son dependientes porque si se tiene síndrome de Down la prueba sale positiva y si sale positiva tiene síndrome de Down". Este estudiante dio una explicación desde lo intuitivo y desconoció la presencia de los errores tipo I y tipo II. Uno de los aspectos para resaltar del trabajo en grupo es que fortaleció el trabajo colaborativo y generó interesantes discusiones entre los estudiantes.

La post prueba fue exactamente la prueba diagnóstica (ver Anexo 1) pero aplicada una semana después de la intervención. Esta vez estábamos interesadas en observar el desempeño de los estudiantes en el problema cuatro. Los resultados de la post prueba son resumidos en la Tabla 4.

Tabla 4: Porcentaje de respuestas de la prueba final

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4
	(a) 100		
22	(b) 100	88	100
No responde: 11	(c) 100		
	(d) 100		

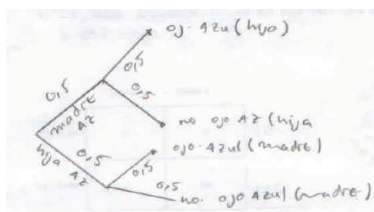
Los porcentajes de respuesta correcta en la post prueba (Tabla 4) revelan que hubo sustancial mejoría en las preguntas 2, 3 y 4. No obstante y para nuestra sorpresa, el porcentaje de respuestas correctas en la pregunta 1 empeoró. Corrimos una prueba t para diferencia de medias con el software SPSS 16.0 para verificar la magnitud de esta diferencia y encontramos que no era significativa con un p-valor de 0.169 (Tabla 5). A pesar de la no significancia en la pregunta 1, estos resultados sugieren que aun después de la intervención se sigue observando la dificultad de los estudiantes de evaluar eventos por su causalidad y no por su condicionalidad. Un estudiante, por ejemplo, dijo refiriéndose a la pregunta 1, que la probabilidad que una chica tenga ojos azules si su madre tiene ojos azules es mayor que la probabilidad que una madre tenga ojos azules si su hija tiene ojos azules y dio la siguiente explicación:

Es mayor la probabilidad de que la chica tenga ojos azules si su madre tiene ojos azules.

Pues afirmaríamos que es una madre con un fenotipo más fuerte y le transmitió el color de los ojos a la niña. Pero no es igual afirmar que si la niña tiene ojos azules, su madre también, pues la niña lo pudo haber heredado del padre.

Esta justificación es un buen ejemplo para ilustrar que la explicación causal sigue predominando sobre el razonamiento condicional. Aunque el 22% de los estudiantes dijo que los dos eventos en consideración tenían igual probabilidad, no todos ofrecieron una justificación acorde. Sólo un estudiante justificó mediante un diagrama de árbol la igualdad de los eventos como es ilustrado en el Gráfico 4.

Gráfico 4: Diagrama de árbol de un estudiante para resolver el problema de los ojos azules



Los resultados de las preguntas 2 y 3 muestran una leve mejoría en las respuestas de los estudiantes, sin embargo después de correr una prueba t para diferencia de medias con los resultados de la preprueba y la post-prueba se encontró que esta diferencia no fue significativa para estas dos preguntas (Tabla 5). Los resultados de la pregunta 4 son los más impactantes ya que todos los estudiantes resolvieron el problema satisfactoriamente. Quisimos correr también una prueba de diferencia de medias para los resultados de la pregunta 4 en la pre-prueba y en la post-prueba pero por ser la desviación estándar de ambas medias igual a cero no fue posible calcular el estadístico t. Corrimosentonces una prueba t de diferencia de medias con el puntaje total de los estudiantes en la preprueba y en la post-prueba para determinar la magnitud de esta diferencia. El p-valor fue 0.00, lo cual revela que hubo diferencia significativa en los promedios de los estudiantes en la pre-prueba y en la post- prueba y esta diferencia es atribuida a la mejoría en la pregunta 4. Concluimos entonces que la intervención tuvo un efecto positivo en los resultados de los estudiantes.

Tabla 5: Prueba de diferencia de medias para muestras relacionadas

Par de Variables	Valor del estadístico t	p-Valor
Pregunta 1 pre prueba con pregunta 1 post prueba	1.512	0.169
Pregunta 2 pre prueba con pregunta 2 post prueba	-1.000	0.347
Pregunta 3 pre prueba con pregunta 3 post prueba	-1.000	0.347
Pregunta 4 pre prueba con pregunta 4 post prueba	No se pudo calcular	No se pudo calcular
Resultados totales en la pre prueba - Resultados totales en la post prueba	-8.000	0.000

Conclusiones

Esta intervención fue diseñada para facilitar la comprensión del teorema de Bayes y se esperaba que los conceptos probabilísticos asociados tales como probabilidad simple, probabilidad conjunta, condicional, probabilidad total y probabilidad inversa también fueran manejados exitosamente por los estudiantes al final de la intervención. Sin embargo, se encontró que el razonamiento intuitivo de los estudiantes es persistente y parece ser difícil de modificar. El razonamiento causal sigue predominando sobre el razonamiento bayesiano aun después de la intervención. Posiblemente estos conceptos necesiten ser abordados más profundamente y con otros escenarios. Esta conclusión deja abierta una puerta para quienes estén interesados en investigar estrategias didácticas que ayuden a los estudiantes a reconocer eventos condicionales de eventos causales.

Los resultados de nuestro estudio coinciden con otros estudios anteriores, confirmando así el hechoque a los estudiantes se les facilita el cálculo de la probabilidad total y probabilidad inversa cuando los problemas son presentados en términos de frecuencias absolutas y no en términos de probabilidades (Gigerenzer, & Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 1999). Sin embargo, nuestros hallazgos difieren de los resultados reportados por Totohashina (citado por Díaz, Ortiz y Serrano, 2008) quien indicó que la representación en tablas de doble entrada dificulta la comprensión porque puede llevar a los estudiantes a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Nosotros en cambio encontramos que el trabajo con tablas de doble entrada es muy favorable para que los estudiantes comprendan y solucionen exitosamente los problemas relacionados con los teoremas de probabilidad total y Bayes. Resaltamos que estudiantes que nunca habían sido expuestos a solucionar problemas de probabilidad inversa fueron creativos encontrando soluciones a partir de tablas de doble entrada. Creemos que la tabla de doble entrada es un organizador que a la vez funciona como una estrategia visual.

Una de las principales conclusiones de este trabajo es que la intervención discutida en este manuscrito tuvo un impacto positivo en el razonamiento bayesiano de los estudiantes. Sin embargo, sentimos que es necesario verificar la retención a largo plazo la cual no fue considerada en este trabajo.

El desarrollo de una intervención didáctica en la que se presente a los estudiantes variedad de aplicaciones en problemas reales con apoyo adicional de la tecnología facilita la conceptualización de ideas complejas como el teorema de Bayes. Las simulaciones que se corrieron en la clase apoyaron desde un punto de vista concreto la conceptualización de los estudiantes. Parece ser que la simulación ayudó a interiorizar la complejidad de los problemas de probabilidad bayesiana.

Uno de los aspectos que se podría considerar como limitación es el tamaño pequeño del grupo en el que se hizo la intervención. El tamaño del grupo podría considerarse como una fuente de invalidación del estudio pero también podría motivar a otros investigadores a replicar y a contrastar si los resultados siguen siendo consistentes cuando la estrategia es extendida a grupos más numerosos.

Referencias Bibliográficas

- Carr, W., & Kemmis, S. (1988). Teoria critica de la enseñanza: La investigacion-accion en la formacion del profesorado. Barcelona: P. Imprenta.
- Diaz, C., & De la Fuente, I. (2005). Recursos para la enseñanza del razonamiento bayesiano en Internet. Paper presented at the Congreso Internacional: El Profesorado ante el reto de las
- Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento. Retrieved from http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/epsilon_condicional.pdf
- Diaz-Godino, J., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1991). Azar y probabilidad. Madrid: Sintesis.

- Díaz, C., Ortiz, J. & Serrano, L. (2008). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del teorema de Bayes. En Investigación en Educación Matemática XI. (pp. 199 – 208). Sociedad Española de Investigación en Educación
- Matemática, SEIEM Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics (pp. 292 – 297): University of Victoria.
- Franklin, C. A., & Garfield, J. B. (2006). The GAISE project: Developing statistics education for grades pre-K–12 and college courses. In G. Burrill & P. Elliott (Eds.), Thinking and reasoning with data and chance (Sixty-eighth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 345–375). Reston, VA: NCTM.
- Garfield, J. (1995). How students learn statistics. International Statistical Review(63), 25–34.
- Gelman, A., & Nolan, D. (2002). Teaching statistics: A bag of tricks. New York: Oxford University Press.
- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction:
- Frequency formats. Psychological Review, 102, 684 – 704
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., & Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 40, 255–269.
- Sedlmeier, P. (1999). Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students' understanding of probability. In J. Kilpatrick, W.
- G. Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards (pp. 216–226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgment under uncertainty. In M. Fishbein (Ed.), Progress in social psychology. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman, P. Slovic &
- A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 153–160). New York: Cambridge University Press.
- Watson, J. M., & Kelly, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning.
- International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(2), 213–235.

Anexo 1

Prueba de entrada

1. Cuál de los eventos es más probable
   a. Que una chica tenga ojos azules si su madre tiene ojos azules
   b. Que una madre tenga ojos azules si su hija tiene ojos azules
   c. Los dos eventos son igualmente probables

Explique su respuesta

2. La tabla siguiente muestra el número de televisores defectuosos producidos cada semana en dos fábricas en el turno del día y en el turno de la noche.

	Fabrica A	Fabrica B
Turno dia	40	30
Turno Noche	40	60

   a. ¿Cuántos televisores defectuosos produce la fábrica B cada semana?
   b. ¿Cuántos televisores defectuosos son producidos por el turno de la noche cada semana?
   c. Si a usted le dicen que un televisor defectuoso fue producido por el turno del día ¿sería más probable que lo haya hecho la fábrica A o la Fabrica B?
   d. Si a usted le dicen que un televisor defectuoso fue producido por la fabrica A, ¿cuál

   es la probabilidad que haya sido producida por el turno del día?

3. Una empresa tiene 1000 empleados. De ellos 200 son ingenieros y 200 son economistas. De los ingenieros 150 ocupan puestos directivos y de los economistas 100 ocupan puestos directivos, mientras que de los no ingenieros y los no economistas solamente 120 ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero? Explique su razonamiento.

4. Un taxi estuvo involucrado en un accidente tarde en la noche. Dos compañías de taxi operan en la ciudad: la verde y la azul. ¿Qué tan probable es que el taxi del accidente sea verde o azul? 90% de los taxis en la ciudad son verdes y el 10% son azules. Un testigo identificó el taxi involucrado en el accidente como un taxi azul. En una noche diferente, pero en condiciones similares a la noche del accidente, este testigo fue evaluado en la capacidad para identificar el color de los taxis cruzando la calle. Para ambos taxis verdes y azules, el testigo identificó correctamente el color de los taxis el 80% de las veces e incorrectamente el 20%. ¿Cuál es la probabilidad que el taxi involucrado en el accidente sea azul? (situaciones tomadas de (Watson y Kelly (2007). Explique su razonamiento.

Anexo 2

Taller en grupo

1. Una muestra aleatoria simple de adultos de una gran ciudad seleccionada. Se les preguntó la edad y el ingreso anual. Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

Ingreso Anual				
Categoría de edad	15 a 30 millones	15 a 30 millones	más de 50 millones	Total
21-30	8	15	27	50
31-45	22	32	35	89
46-60	12	14	27	53
Mayor de 60	5	3	7	15
Total	47	64	96	207

(a) ¿Cuál es la probabilidad que una persona de la muestra elegida al azar tenga entre 31 y 45?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que una persona de la muestra elegida al azar su ingreso sea superior a 50 millones de pesos anuales y que esté entre 31 y 45 años?

(c) Basado en sus respuestas de las partes (a) y (b), ¿es el ingreso anual independiente de la edad para los individuos de la muestra? Explique su razonamiento

2. Las mujeres embarazadas se hacen la prueba de sangre para determinar la presencia del síndrome de Down. Esta prueba es muy precisa pero no siempre es correcta. La probabilidad de un resultado positivo en la prueba sabiendo que hay presencia del síndrome de Down es P(Pos/D) = 0.035. La probabilidad de la prueba ser negativa sabiendo que no hay síndrome de Down es P (Neg/D´) = 0.999. La probabilidad de tener síndrome de Down es P (D) = 0.257.

a. Haga un diagrama de árbol para facilitar la comprensión de esta situación

b. Determine la probabilidad de salir positivo en la prueba: P(Pos)

c. ¿Son los eventos tener síndrome de Down P(D) y salir positivo en la prueba P(pos) dependientes o independientes? Explique su razonamiento.

d. Determine la probabilidad de la presencia de síndrome de Down en una mujer embarazada dado que la prueba es positiva: P(D/Pos)