10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Reflexionando en el curriculo sobre el pensamiento variacional

Angie Carolina Cruz Cáceres
angie240@hotmail.com
Angel Ricardo Vargas Peña
anrivarpe2005@hotmail.com
Lennin David López Castañeda
yiret42@gmail.com
Marcela Rojas Pintor
yurymrojas@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas,
Universidad de los Andes

Introducción

Abordamos en este articulo algunos hallazgos de investigación resultantes del cuestionamiento acerca de la manera como si diseña e implementa el currículo de matemáticas específicamente en lo referido a la transición aritmética- algebra y la construcción del objeto matemático de la variable, a partir de la aplicación de un instrumento de investigación mostramos la importancia de conocer las dificultades que tienen nuestros estudiantes en el desarrollo del pensamiento variacional. Ya que como profesores este tipo de conocimiento nos permite pensar de mejor manera el diseño del currículo y de las actividades de enseñanza- aprendizaje.

Problema de investigacion

Diferentes investigaciones sobre educación matemática, apuntan a un tema en específico, como lo es el pensamiento variacional, campo en el cual los estudiantes presentan mayor número de dificultades puesto que al aparecer los estudiantes deben cambiar una serie de concepciones, procedimientos y lenguajes que son válidos en lo aritmético pero no del todo en lo algebraico. Por ejemplo, en relación con la construcción del objeto matemático de la variable, surge un cuestionamiento acerca de los procesos de generalización que llevan consigo el desarrollo de un lenguaje algebraico, donde los estudiantes usan e interpretan la letra de diferentes maneras para poder expresar dichos procesos.

La complejidad de los procesos cognitivos que se dan alrededor de la construcción del objeto matemático de la variable se refleja en investigaciones como la realizada por el grupo PRETEXTO (1997) quienes hallaron que los estudiantes requieren realizar las diferentes interpretaciones de la letra propuestas por Kucheman, (1978) para poder llegar a usar la letra como variable. Esto nos lleva a pensar en el tipo de experiencias de aprendizaje que deben vivenciar nuestros estudiantes, ya que como lo menciona Ursini y Trigueros (1998) una mala conceptualización de la variable puede ser una causa importante de las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes en los diferentes cursos de matemáticas de enseñanza media y superior.

Adicionalmente, el grupo PRETEXTO (1996) menciona que son necesarias unas posibles invariantes para la construcción de un determinado objeto matemático las cuales son:

1. El objeto matemático es construido paso a paso por el sujeto mediante varios procesos como: resolución de problemas, solución de operaciones, entre otros; que lo llevan a incluir los usos e interpretaciones que tenga del mismo.
2. La formalización del los modelos que el estudiante ha desarrollado para la construcción del objeto matemático juegan un papel importante para la creación de nociones previas a la concepción.
3. Romper con esquemas y procesos ya constituidos para asimilar e incorporar la globalización de una totalidad matemática que le de sentido al objeto matemático que se abarca desde una perspectiva diferente.

Teniendo en cuenta lo anterior consideramos necesario repensar el currículo respecto a la enseñanza del algebra en la escuela, considerando como base el conocimiento por parte del profesor de las dificultades que tienen los estudiantes cuando abordan la construcción del objeto matemático de la variable.

Cuando hablamos del currículo del algebra escolar, debemos tener claro los factores que permiten la creación de este como lo son las diferentes metodologías a seguir, los contenidos a desarrollar, los objetivos a lograr y la evaluación que valora el proceso, como lo propone Vasco (2001). Todo lo anterior con relación a dos procesos fundamentales en la educación matemática como lo son el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje que el estudiante realiza acompañado de diferentes aspectos que influyen de manera directa en este proceso como son:

- Las interacciones emergentes entre el docente como mediador del proceso y el estudiante.
- El contexto cultural en el cual se desenvuelve el estudiante.
- Las interacciones sociales que se dan en el ámbito escolar.

Con relación al primer aspecto vale la pena aclarar que no solo se observa la relación entre el docente y el estudiante sino que también se da relación de forma bidireccional. En este punto es donde se debe reflexionar acerca de una práctica docente donde se creen espacios donde el estudiante construya de manera fundamentada determinado conocimiento matemático, y en este caso, el pensamiento variacional. Dichos espacios dentro de la metodología propuesta por el docente deben permitirle al estudiante interactuar con sus compañeros y con un medio que culturalmente tiene ciertas características de manera que a través de dicha interacción pueda establecer conexiones entre este y las nociones permitiendo la construcción de la letra como variable.

El segundo aspecto compete según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), a los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a la matemática que aprende. Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificarlo y enriquecerlo con la intención de que el estudiante aprenda. En la construcción de conocimiento matemático resulta importante darle sentido a este abordando situaciones que le dan significado cultural.

Por último, las interacciones sociales que se dan en el ámbito escolar crean contextos en los que el estudiante a través del trabajo en colaboración puede discutir, proponer, identificar diferentes puntos de vista, argumentar sus ideas y familiarizarse con diversas estrategias. Con relación a este aspecto, si no se tiene en cuenta, el trabajo colectivo puede perder su eficacia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Metodologia

Lo anteriormente expuesto, nos permitió abordar la problemática de la existencia de dificultades en torno a la construcción de la variable, y a su vez, observamos las implicaciones del currículo en el desarrollo del pensamiento variacional.

De acuerdo a la revisión teórica planteamos un instrumento de investigación (ANEXO 1) que consistía en un situación problema con la cual queríamos evidenciar algunos de los invariantes funcionales (pretexto, 1997) ya mencionados, y determinar algunas de las dificultades manifiestas en el proceso de solución. Poder evidenciar estas dificultades permite repensar la manera como planeamos y gestionamos el proceso enseñanza – aprendizaje.

El análisis del instrumento que se aplicó a 60 estudiantes de grado 11 en un colegio de Bogotá, fue de tipo cualitativo y cuantitativo, las estrategias empleadas por los estudiantes se clasificaron a partir de las categorías de análisis VER ANEXO 2. Lo cual nos permitió identificar en qué aspectos los estudiantes tenían mayor dificultad.

Análisis de datos

Al aplicar el instrumento de investigación, pudimos evidenciar algunas de las dificultades que presentaron los estudiantes con relación a la comprensión e interpretación de la variable en sus diferentes contextos, puesto que al desarrollar la prueba, ciertos estudiantes no aceptaban la falta de cierre en las respuestas a los problemas propuestos, tenían muy pocas interpretaciones de la letra, y por lo general solamente la evaluaban, le asignaban un valor y aplicaban cierto tipo de algoritmos que les permitían aproximarse a proponer una estrategia de solución.

Lo anteriormente expuesto nos permite observar que las implicaciones del currículo adquieren una significatividad especial, puesto que es en este aspecto donde entraríamos a evaluar en que punto del proceso de enseñanza y aprendizaje se crean dichas dificultades.

A continuación presentamos el análisis cualitativo de cada uno de los puntos que propusimos en el instrumento de indagación.

PUNTO 1: Inicialmente los estudiantes en general interpretaban el problema de forma correcta y procedían a modelar la situación de acuerdo con la herramienta que se le daba, en este caso, el teorema de Pitágoras. Luego, evaluaban de forma correcta en el teorema y procedían a hallar la solución, pero a la hora de realizar los algoritmos pertinentes, como aplicar las propiedades de las potencias, desarrollar un producto notable, no lograban realizarlo de forma correcta. El nivel de comprensión e interpretación de problemas para este punto es “Medio” en general.

PUNTO 2: En este punto, la gran mayoría de los estudiantes, modelaron la situación pero muy pocos procedieron a desarrollar el sistema de ecuaciones que les permitiría dar solución al problema. En los estudiantes que desarrollaron el punto B, se observó la dificultad en la realización de algoritmos, aplicación de las propiedades de las operaciones, y no considerar la falta de cierre en una operación algebraica. El nivel de comprensión e interpretación de problemas para este punto es Medio.

Respecto a las categorizaciones de las dificultades (ver anexo 2) identificamos que los estudiantes en su mayoría, no logran percibir el objeto matemático, en este caso, la variable. Sin embargo consideramos la influencia de aspectos como la comprensión de las situaciones propuestas en el instrumento y algunas diferencias en los conocimientos previos utilizados por los estudiantes.

La recolección y categorización de las estrategias evidenció que, aproximadamente el 12% de la muestra que se escogió tiene definido el objeto matemático. Del 88% restante; el 53% se encuentra en la primera fase mencionada por el grupo PRETEXTO (2006); el 35% se encuentra en la segunda fase del proceso de construcción.

Al realizar un análisis del instrumento de investigación y las categorías utilizadas por los estudiantes reconocimos las siguientes dificultades:

Mal uso de algoritmos que no permiten el desarrollo del pensamiento variacional. Reconocimiento y realización de determinados algoritmos, en el contexto algebraico cambian y ésta es una de las razones por las cuales se tienen dificultades en el proceso de construcción del objeto matemático y más aun en la resolución de problemas. Los estudiantes no perciben la falta de cierre en una determinada operación y proceden a utilizar algoritmos de forma incorrecta, en este caso, no les permite ampliar la concepción de variación.

Mala interpretación y comprensión de situaciones problema. La construcción del objeto matemático a través de la resolución de problemas brinda al estudiante espacios en donde se pone en juego el razonamiento lógico-matemático que posea, y a su vez, permite crear estrategias que guían al enriquecimiento matemático y es aquí donde se observa bien definido el objeto matemático.

No interpretación de la letra como número generalizado. Este es una de las interpretaciones claves en el proceso de construcción del objeto matemático, según PRETEXTO (1997); este es uno de los puntos de partida para que el estudiante logre asimilar el contexto algebraico. Los estudiantes no generalizan comportamientos aritméticos y algebraicos y esto es una grave dificultad que se presento en la muestra, ya que la generalización de una determinada cantidad en términos de la letra permite acercar al estudiante a la comprensión de la relación de dependencia dentro del universo de la variable.

No aceptación de falta de cierre en las operaciones dentro del contexto algebraico. En este asunto, al estudiante le resulta difícil aceptar que una cantidad numérica solamente puede ser expresada en términos de letras y busca encontrar el valor numérico de la cantidad ya expresada. Este aspecto, aunque no se muestra en la categorización planteada, muestra la importancia de asimilar la concepción de la falta de cierre en el proceso de construcción del objeto matemático.

Este tipo de categorizaciones de las dificultades conciben que los estudiantes en su mayoría, no logran percibir el objeto matemático, en este caso, la variable; y hay una razón un poco más profunda ya mencionada, y es la interpretación y comprensión de problemas, la no creación de estrategias que les permitan abordar y hacer un análisis en el que se pongan en juego herramientas de tipo matemático; en las que el estudiante proponga y evalué los conocimientos previos y a su vez, adquiera nuevos.

Los anteriores resultados permiten reflexionar no solo acerca de la construcción de la variable en los estudiantes de grado 11 sino también del nivel académico y el desarrollo de competencias que propone el MEN (1994), las falencias que se puedan estar presentando en la didáctica que plantean los docentes de matemáticas a la hora de llevar a los estudiantes al desarrollo de competencias matemáticas y mas exactamente en los contextos aritmético y algebraico como tal.

Por ultimo, pudimos evidenciar dificultades específicas en el proceso de construcción de la variable que afecta directamente el desarrollo de los procesos de la matemáticos escolares y afecta el nivel académico de los estudiantes. Existen antecedentes en el transcurso del proceso del desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante para que estas dificultades se den y es allí donde se promueve la profundización y análisis para una futura investigación en esta área.

Conclusiones

- Las dificultades que presentan nuestros estudiantes cuando resuelven situaciones problema en las cuales se requiere interpretar la letra como variable son una fuente importante de reflexión acerca de las actividades de aprendizaje a las que debemos enfrentar a nuestros estudiantes y acerca de los aspectos a tener en cuenta al diseñar el currículo de matemáticas. De esta forma las dificultades de nuestros estudiantes se convierten en un centro de interés para repensar el currículo.

- La construcción del objeto matemático de acuerdo al marco teórico manejado dentro de esta investigación nos muestra la importancia del desarrollo de las competencias matemáticas que debe adquirir un estudiante como construir, comprender, formalizar y utilizar tanto modelos, algoritmos, estrategias que le permita construir un camino que lo conlleve a encontrar soluciones frente a una situación problema sin depender de un contexto cultural especifico donde se le presente.
- Las dificultades que se presentan en la construcción de la variable también se engloba desde el proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene el estudiante y la interacción que este pueda tener con el docente, limitando de esta manera la comprensión que este pueda tener de cada uno de las interpretaciones que toma la letra en diferentes contextos que no le permite percibir la totalidad matemática que puede tomar la variable.
- El mal uso de algoritmos por parte de los estudiantes forma en ellos una mala interpretación de la letra como variable y así mismo para su construcción y desarrollo de la misma.
- Observamos que las diferentes dificultades se percibieron en el desarrollo de la investigación, pero quedaron espacios en donde se podría realizar otro tipo de investigación en torno a el porque de las dificultades encontradas o que procesos de enseñanza y aprendizaje no permiten el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante, que podrían ser áreas en donde se realizaría otra investigación.

Bibliografia

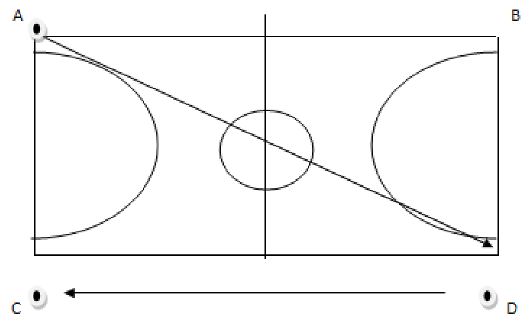
- Kucheman (1981) *Children understand of mathematics.* Editor Hard. Great Britain
- Socas, M (1996) *Iniciación al Algebra.* Editorial Síntesis. Madrid.
- Pretexto (1997) *Transición Aritmética* – Algebra. Editorial Síntesis.
- Usiskin (1988) *Conceptions of School*. Algebra and Uses of Variables.
- Trigueros M, Ursini S. (1999) *La Conceptualizacion de la Variable en la Enseñanza Media*, Articulo de Investigación. Educación Matemática Volumen XII No. 2 (Pág.27-48)
- Torres L, Calderón L. (2002) *El Dominio de la Variable*. *La Variable en la Didáctica del Algebra Escolar*. Revista EMA Vol. 5 No 2. Una empresa docente.
- MEN (1994) *Ley 115 de la constitución nacional de Colombia*. Editorial Litoimperio
- Morales L. Díaz L. (2003) *"La variable en la escuela"*. Revista EMA Vol. 4 No.2

ANEXO Nº 1

Colégio: ____________________________ edad: _____ Curso: ________

1. Utilice todos lo procedimientos posibles que conozca para solucionar cada situación planteada.

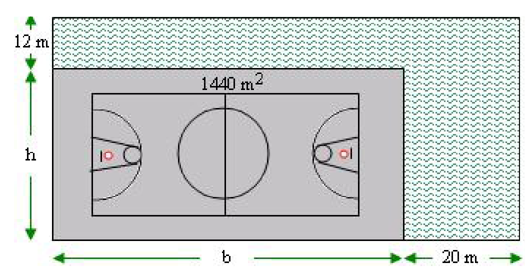
Recuerde que el teorema de Pitágoras es: $h^2 = a^2 + b^2$



Un jugador de fútbol que esta ubicado en la esquina A de la cancha, hace un pase a su compañero que se encuentra en la esquina D, la distancia que recorrió el balón fue de $\frac{x+5}{2}$ A su vez, éste compañero (el que esta en el punto D) regresa la pelota a un defensa que se encuentra en el punto C, en este caso, el balón recorre una distancia de $\frac{x+3}{2}$

¿Cual seria la distancia que hay entre el compañero que se encuentra en el punto C y el que esta en el punto D? ¿Cual es la distancia del compañero que se encuentra en el punto A a la esquina del punto B?

La figura muestra el patio de un colegio. El área de la cancha (parte cementada) es igual al área del césped (el rededor de la cancha)



I. ¿Cuáles son las ecuaciones que podrían modelar la situación? Marque con una "x" la respuesta correcta

a) $\begin{cases} h * b = 1440 \\ (h+12) + (b+20) = 2880 \end{cases}$

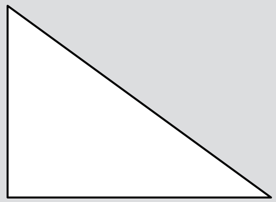
b) $\begin{cases} h * b = 1440 \\ (h+12) * (b+20) = 1440 \end{cases}$

c) $\begin{cases} h + b = 1440 \\ (h * 12) + (b * 20) = 2880 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{h}{b} = 1440 \\ \left(\frac{h}{12}\right)\left(\frac{b}{20}\right) = 2880 \end{cases}$

De acuerdo con la respuesta anterior desarrolle el sistema y halle el valor de *"h" y "b"*

ANEXO 2

<table>
<tr><th>ITEMS</th><th>INTENCIONALIDAD</th><th>CATEGORIZACION</th></tr>
<tr>
<td>Problema N° 1

$h^2=a^2+b^2$

Teorema De Pitágoras
Este ítems va relacionado con el teorema que presenta Pitágoras y que nos ayuda hallar el cateto ola hipotenusa que falta en un triangulo rectángulo</td>
<td>• Dimensionar el estadio en el que se encuentra el estudiante, los cuales propone Kucheman, que según el grupo Pretexto se debe tener claros para la comprensión del objeto matemático.
• Observar en que nivel de las invariantes para la construcción del objeto matemático que propone el grupo pretexto se encuentra el estudiante</td>
<td rowspan="2">1) Construye el objeto matemático a través de problemas en donde se utilice usos e interpretaciones:
1.1) Interpretaciones:
1.1.1) Letra como Incógnita
1.1.2) Letra Evaluada
1.1.3) Letra no usada
1.1.4) Letra como objeto
1.1.5)Letra como numero generalizado
1.1.6)Letra como variable
1.2) Usos:
1.2.1) Comprensión de la variación a través de los diferentes valores que puede tomar la letra en determinada situación.
1.2.2) Comprensión de la relación de dependencia dentro del universo de la variable.
2) Formaliza modelos que le permiten al estudiante el desarrollo de procesos para resolver una situación problema.
3) Comprende y utiliza algoritmos que permiten percibir la totalidad matemática (de lo aritmético-algebraico):
3.1) Procesos de adición, multiplicación y división algebraicos</td>
</tr>
<tr>
<td>Problema N° 2
Este ítems esta relacionado con todas las posibles estrategias que puede utilizar los estudiantes para la solución del problema propuesto.</td>
<td>Se pretende observar la forma en que el estudiante utiliza la variable en los diferentes contextos que platea la situación problema puesto que en este proceso se pueden percibir las dificultades con relación a la construcción de la variable como objeto matemático.</td>
</tr>
</table>