10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

La Superación del ¡ATASCADO! desde la Heurística: Un Estudio en una Comunidad de Estudiantes para Profesor de Matemáticas

Camilo Beltrán
camilo.beltrancatama@gmail.com
Fernando Guerrero
fdog14@gmail.com
Oscar Ramírez
oscarjavier.floyd1987@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Introducción

Esta investigación hace parte de una serie de trabajos de grado en la implementación de la línea de investigación de la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado del grupo de investigación de Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital (MESCUD). Además, tiene como fin dar cuenta del proceso de resolución de problemas en una comunidad, conformada por un grupo de estudiantes para profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con el fin de determinar las herramientas heurísticas que permiten superar un ¡Atascado!.

Planteamiento Del Problema

En el documento de acreditación del proyecto curricular de LEBEM (1999) se resalta que un mayor y mejor conocimiento por parte de los estudiantes para profesor, acerca del contexto de las matemáticas avanzadas, al igual que, de los procesos de pensamiento que se derivan de ésta, sensibilizarían la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Escuela. Puig citando a Brown (1985), arguye que los profesores en formación deben tener experiencias similares de resolución de problemas a las que cabe esperar que tengan sus estudiantes, para ello a estos se le tendrán que plantear no problemas que ellos tengan que plantear a sus estudiantes sino problemas cuya dificultad para ellos sea similar a la que aquellos problemas tendrán para sus estudiantes.

En la propuesta curricular de LEBEM (1999), en concordancia con la comunidad investigadora en educación matemática y los lineamientos curriculares (NCTM, 2000, MEN, 1998), se privilegia "la actividad matemática". Es decir, se considera como objetivo general y principal, el que los estudiantes "aprendan a pensar matemáticamente" por medio de la *resolución de problemas*. Esto es, el poner énfasis en los procesos característicos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar (Mason, Burton & Stacey, 1989). Ahora bien, cuando el énfasis está en los procesos de demostrar, definir y abstraer o en objetos matemáticos avanzados cómo función, límite, espacio topológico, etc., se trata del *pensamiento matemático avanzado* (PMA) (Tall, 1988).

Entendemos por resolución de problemas la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándole un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y que quiere resolverlo hasta que da por acabada su tarea (Puig, 1996) y por pura resolución de problemas aquella que tiene como intención estudiar sólo aquello que puede considerarse independiente del contenido (Puig ,1996). Es decir, este trabajo de investigación no pretendió, ni se intereso en diseñar problemas para el desarrollo de un concepto matemático específico como en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2005).

Por otra parte, es cierto que para un matemático es importante poder resolver problemas con facilidad, al mismo tiempo que debe resolver problemas matemáticos importantes (Polya, 2005). Pero, como educadores matemáticos, es necesario propiciar la reflexión sobre el proceso de resolución de problemas, tal como se expone en el documento de acreditación de LEBEM (1999). De hecho, reflexionar sobre nuestro pensamiento matemático nos hace más sensibles al pensamiento matemático de los demás (Mason et al., 1989). Ésta reflexión es entendida en la comunidad de investigadores de educación matemática como *metacognición*, la cual "se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de problemas". (Santos, 2007).

El proceso de metacognición, nos permitió identificar en la tarea de resolución de problemas, determinados momentos que posibilitaron hacer un seguimiento de la labor desarrollada, entre estos se encuentran el ¡Atascado! Y el ¡Ajá! (Mason et al., 1989). El ¡Atascado! se dio siempre que nos dimos cuenta que no entendíamos, que no sabíamos que hacer, que no podíamos ver cómo o el por qué. El ¡Aja! , que se dio siempre que se nos ocurrió una idea.

Es así, como el interés de este trabajo de investigación se enfatizo en la realización de una sistematización de la reflexión o metacognición de nuestro propio proceso como resolutores de problemas. De lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación que guío el desarrollo del presente trabajo:

¿Cómo surgen las herramientas heurísticas asociadas a la superación del ¡atascado! en un proceso de pura resolución de problemas en el contexto del pensamiento matemático avanzado y en medio de una comunidad de estudiantes para profesor de matemáticas?

Marco Teórico

Uno de los aspectos sobresalientes es la resolucón de problemas, la cual se entiende como "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándole un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea." (Puig, 1996, p.34)

Otro aspecto, es el problema en sí, definido éste como una tarea o situación en la cual aparece la existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos que quiere o necesita encontrar una solución. La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento regla que garantice la solución completa de la tarea. (Santos, 2007).

De la misma manera, según Polya (2005) tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. Esta caracterización dada identifica tres componentes de un problema, a saber, estar consciente de una dificultad, tener deseos de resolverla y la no existencia de un camino inmediato para resolverlo.

Sin embargo, para efectos de este trabajo no se pretendió exáminar lo que sucede con la resolución de problemas cuando estos son vistos desde los conceptos, sino cuando lo son desde los propios problemas y "la intención es estudiar sólo aquello que puede considerarse independiente del contenido: esto es lo que se llama el mundo de la pura resolución de problemas (PRP)" (Puig 1996, p.14).

Este es el objetivo de la heurística, que es independiente del contenido concreto. (Polya, 2005).

Partiendo de lo anterior, debemos considerar que en el proceso de resolución de problemas, es posible que el estudiante que se enfrenta al problema, transforme el problema en otro a través de un cambio de registro. Esto hace parte de lo que Polya (1945) llama heurísticas. Pero al transformar el problema en otro, es lo que Puig (1996) llama herramientas heurísticas. Las herramientas heurísticas y la búsqueda en fuentes de información es lo que tenemos clasificado como estrategias de resolución (Santos, 2007).

Puig (1996), citando a Ausubel (1976) señala que otra idea de heurística es la que la define como el arte de resolver problemas para el cual se estudian reglas, procedimientos, procesos mentales, etapas del razonamiento, de los cuales depende el éxito de los estudiantes en la construcción creativa de soluciones a problemas matemáticos por sí mismo y el descubrimiento de vías óptimas de solución. Así, la resolución de problemas involucra un proceso a través del cual el aprendiz descubre la manera de combinar reglas previamente aprendidas y **aplicarlas** en el tratamiento de situaciones nuevas.

Siguiendo la idea anterior, desde la educación matemática, Puig (1996), retoma varias definiciones de problema para caracterizar éste término. De acá propone tres niveles de análisis que son:

Nivel uno: Sólo aparece el problema y sólo éste es sometido a análisis.

Nivel dos: Aparecen problema y resolutor.

Nivel tres: Aparece la triada, problema-estudiante-profesor.

Para efectos de nuestro trabajo de investigación, optamos por el análisis del proceso de resolución que propone la idea de problema de nivel tres. Sin embargo, el profesor interfirió en este proceso como corredor de la comunidad de práctica. Es decir, el profesor no hizo parte permanente de la comunidad pero en ocasiones intervino discutiendo con ella, refutando conjeturas, exhibiendo contraejemplos, sugiriendo bibliografía y en general dinamizando la negociación de significados (Wenger, 2001).

Así mismo, es necesario hablar del pensamiento matemático avanzado, pero para ello, definiremos primero lo que consideramos como Pensamiento, luego Pensamiento Matemático, para así caracterizar el Pensamiento Matemático Avanzado.

Según Radford (2006), el pensamiento es considerado como una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. A este respecto, la mediatización del pensamiento viene dado por el papel que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, entre otros) en la realización de la práctica social. Los artefactos no son meras ayudas del pensamiento, ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de este. Los artefactos mediatizan y materializan el pensamiento.

De la misma manera "lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada sino sobre todo su modo de ser en tanto praxis reflexiva" (Radford 2006, p. 103). En este sentido el pensamiento se plantea como una reflexión, donde el pensamiento del individuo no es una simple asimilación de la realidad, sino por el contrario es una reflexión, un movimiento dialéctico entre la realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la modifica según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.

Por consiguiente "el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados" (Radford, 2006, p. 113). Así pues, aprender no es simplemente apropiarse de algo o asimilar algo, sino por el contrario es el proceso en que se forman nuestras capacidades humanas.

En estas condiciones, hacer matemáticas no se reduce simplemente a resolver problemas. "La resolución de problemas no es el fin sino un medio para alcanzar este tipo de praxis cogitans o reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático" (Radford, 2006, p. 114)

Igualmente, cuando se habla de Pensamiento Matemático, éste es entendido como "un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión". (Mason et al., 1989, p. 167).

Mason et al. en su libro titulado Pensar Matemáticamente, desarrolla una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas que permite el desarrollo del pensamiento matemático, por medio de la sistematización y la reflexión del proceso de cada individuo, de la misma manera insiste en afirmar que el desarrollo del pensamiento matemático depende de la forma de enfrentarse a los problemas y de la manera en que se reflexiona sobre esta experiencia.

Partiendo del hecho que el desarrollo del pensamiento matemático depende en gran parte al proceso de resolución de problemas desarrollado por un individuo, Mason et al. identifica tres fases en este proceso:

Fase de abordaje: El trabajo en esta fase consiste en formular el problema en forma precisa, y en decidir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Es útil, por lo tanto estructurar el trabajo teniendo en cuenta los siguientes rótulos:

¿Qué es lo que SÉ?

¿Qué es lo que QUIERO?

¿Qué puedo USAR?

Fase de ataque: En esta fase pueden ensayarse diferentes enfoques, así como formular y poner en juego diversos planes, además el razonamiento entra en esta fase cuando se siente que el problema se ha instalado dentro de la mente y ya es propio, y se completa cuando o bien se abandona o bien se resuelve. El proceso matemático fundamental que tiene lugar es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente.

El trabajo en esta fase se estructura teniendo en cuenta los siguientes rótulos:

Intentar

Podría ser

Pero ¿Por qué?

¡Atascado!

¡Ajá!

Fase de revisión: En esta fase se requiere volver atrás para comprobar que se ha hecho y reflexionar en los hechos claves, y mirar hacia adelante para generalizar el proceso y los resultados a un contexto más amplio.

En esta fase el trabajo se desarrollara teniendo en cuenta los siguientes rótulos:

Comprobar la solución.

Reflexionar en las ideas y los momentos claves.

Generalizar en un contexto más amplio.

Para la sistematización de estas fases es necesario retomar la Metacognición desde Santos (2007), ésta se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema. Además, retoma a Schoenfeld quien identifica tres categorías donde se presenta la metacognición:

- El conocimiento de nuestro propio proceso, la descripción de nuestro propio proceso de pensar.
- El control y la autorregulación. Qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso tomando en cuenta las observaciones que se hagan durante la evolución de este.
- Creencias e intuiciones. Las ideas acerca de las matemáticas que se muestran en el trabajo matemático y la forma como éstas se relacionan o se identifican con la forma de resolver problemas.

Partiendo de esta definición se evidencia lo que se considera como aprender matemáticas, ya que Santos (2007) señala que la definición como tal de ¿Qué es aprender matemáticas? se puede ver desde diferentes perspectivas entre las que se encuentra, aprender matemáticas significa identificar los artefactos de la disciplina esto es, sus conceptos y sus procedimientos.

Otra idea, que en este caso es la que se adopta, es la que refiere que aprender matemáticas se relaciona con la participación activa del estudiante en la construcción y desarrollo de relaciones o resultados matemáticos y ubica a esta disciplina como un cuerpo dinámico de conocimientos en constante expansión. Bajo esta perspectiva, el estudiante, al desarrollar matemáticas, se involucra en las actividades propias del quehacer de esta disciplina (Santos, 2007). Esto coincide con la teoría de comunidades de práctica en donde para la negociación de significados es necesaria la participación (Wenger, 2001).

Este proceso de metacognición, nos permitió reconocer en nuestra labor como resolutores de problemas, determinados momentos que facilitaron el seguimiento de nuestro proceso, entre estos se encontraron el ¡Atascado! y el ¡Ajá!. El ¡Atascado! se dio siempre que nos dimos cuenta que no entendíamos, que no sabíamos que hacer, que no podíamos ver cómo o el por qué. El ¡Aja! , que se dio siempre que se nos ocurrió una idea. (Mason, et al. 1989).

Ahora bien, es importante destacar que nuestro proceso de reflexión y de Resolución de Problemas, está en el contexto del Pensamiento matemático Avanzado (PMA), el cual hace referencia, entre otras cosas, a la introducción de definiciones formales y la deducción lógica. De particular interés es la transición de la matemática escolar (geometría, aritmética, álgebra) al pensamiento matemático avanzado (axiomático, demostración) universitario (Tall, 1988).

Tall (1988), afirma que es difícil especificar una lista de atributos que diferencien o caractericen el pensamiento matemático avanzado. No obstante, algunos de estos atributos involucran la generalización, abstracción y el uso de definiciones de conceptos para la deducción asociativa y lógica; resaltando que:

- ***La generalización*** es el proceso de formar conclusiones generales a partir de casos particulares.
- ***La abstracción*** es el aislamiento de atributos específicos de un concepto para que estos puedan ser considerados separadamente de los otros atributos.
- La insistencia en la ***demostración*** lógica en lugar de la justificación coherente que involucra:
    a. La deducción de propiedades de conceptos matemáticos (dadas las definiciones de conceptos).
    b. La implicación que si ciertas propiedades matemáticas se sostienen, entonces las otras se siguen.

Teniendo en cuenta lo anterior, algo que distingue una etapa de la otra (Pensamiento matemático y pensamiento matemático avanzado) es la complejidad y la frecuencia del uso de ciertos procesos, como los de la representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros (Garbin, S. (2005). La influencia de los modelos, las representaciones, y los lenguejes matemáticos. Relime. 08 (2). 171-173).

Metodología

Este trabajo de investigación es de carácter naturalista y empírico. Es naturalista porque se estudia el proceso de demostración elaborado por una comunidad de estudiantes para profesor y no se pretende con ello generalizar a una población más amplia. Es empírico porque se basa en la observación de datos obtenidos del cuaderno grupal de la comunidad. En este cuaderno los estudiantes consignarón, en orden cronológico, no solo su actividad matemática, sino también su actividad metacognitiva.

El instrumento principal con el que se recolectaron los datos fue el cuaderno. Éste fue útil en la sistematización de nuestro proceso de metacognición como resolutores de problemas, allí se evidenciaron todos los datos obtenidos a lo largo del proceso. Para analizar estos datos se tomo en cuenta las categorías propuestas por Mason et al., Abordaje-Ataque-Revisión.

El cuaderno fue considerado en este trabajo de investigación un artefacto (Radford, 2006) ya que éste posibilito observar el proceso de pensamiento que se desarrolló en el transcurso del proceso de resolución de problemas.

Ahora bien, decidimos observar el cuaderno como parte integral del pensamiento, dado que como afirman Sanjuán & Romero (2009) retomando a Radford (2006) en términos de la teoría cultural de la objetivación lo que está puesto en el cuaderno, el cuaderno mismo, hacen parte integral del pensamiento y lo que está haciendo el estudiante es objetivando en un sistema de significación cultural.

Análisis de los Resultados

En este apartado se dará a conocer la recopilación de los datos obtenidos en el ejercicio de metacognición que se realizo del proceso de pura resolución de problemas en una comunidad de estudiantes para profesores de matemáticas, aplicado a la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA*: Sea G un grupo (Zn, +), se toma un subgrupo H de G, se dice que el orden de H divide al orden de G.*

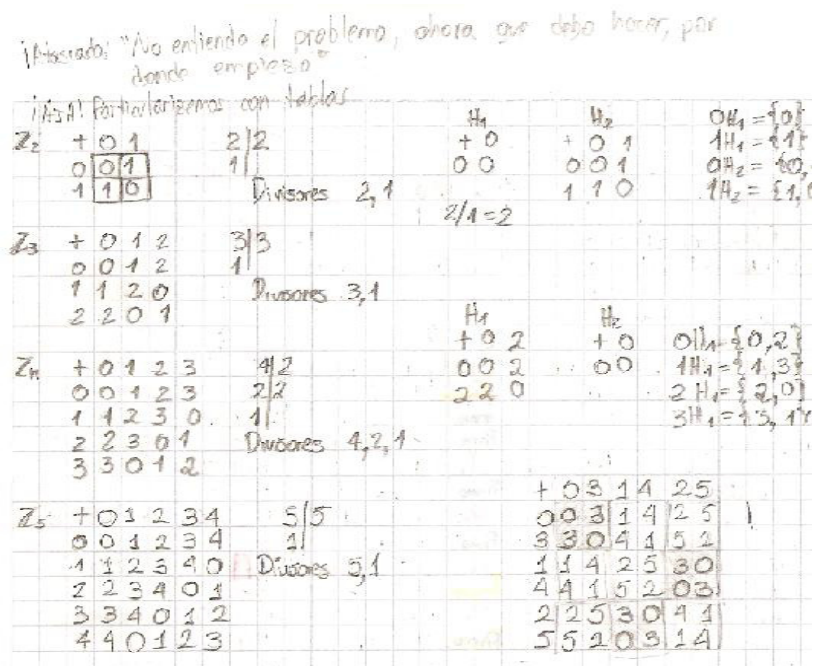
La transcripción de los datos se realizará de manera textual a la que aparecen en el cuaderno de trabajo, que se ha dispuesto para la sistematización grupal de los datos, la cual se realizo por momentos.

Momento 1

Este momento se destaco por la sistematización de las particularizaciones que permitieron hacer un acercamiento al teorema y así superar el primer Atascamiento, de estas particularizaciones se hicieron observaciones de lo que sucedía con las tablas de Zn. Para esto se construyeron las tablas desde Z2 hasta Z10, con la intensión de identificar regularidades en las tablas que cumplian las condiciones para ser grupo, es decir, las tablas que cumplían la propiedad asociativa, que contenían al elemento neutro, al elemento opuesto y cumplían la cerradura.

Al observar y analizar lo que pasaba en cada uno de los grupos ejemplificados, la comunidad de estudiantes estableció como conjetura que permitiría acercarse a la demostración del teorema, que al tomar los divisores del orden de Zn, se obtendría el orden de los subgrupos y por ende los subgrupos de cualquier grupo Zn. Así mismo de esta manera se puede obtener la cantidad de subgrupos que se desprenden del grupo Zn y así reorganizar y conformar en su totalidad el grupo. De esto los investigadores afirman:

[…] en el grupo de Z6, tomamos el orden de este grupo, en este caso 6, sus divisores son 2 y 3 por tal razón tenemos tres subgrupos de orden dos y tres subgrupos de orden tres, igualmente al sumar cada elemento del grupo con cada uno de los elementos del subgrupo, podríamos conformar el grupo original Zn y por ende demostraríamos el teorema.



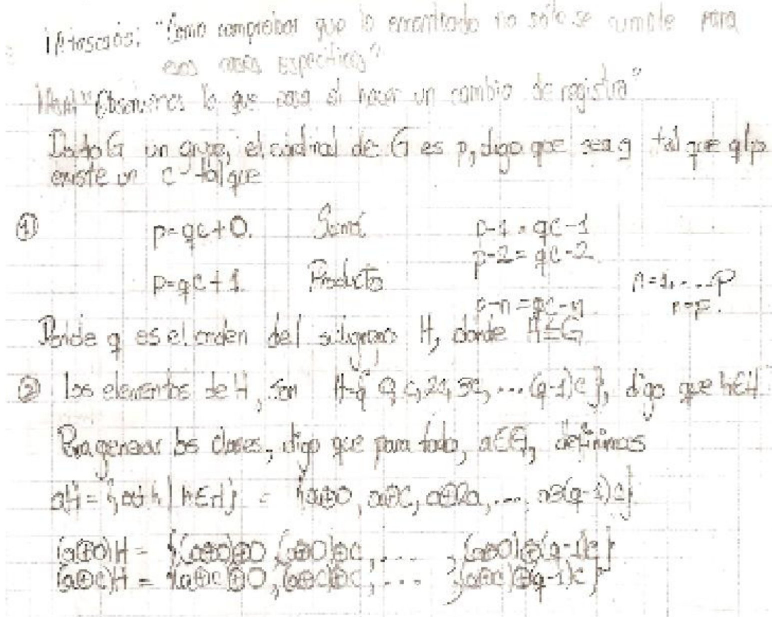
En el momento 1 se distingue con claridad que los investigadores suponen la veracidad del teorema, lo que desarrollan es una serie de ejemplificaciones que permiten acercarse al significado del mismo, igualmente se plantea un posible conjetura o punto de partida de la misma que posiblemente llevaría a la demostración, sin embargo el texto producido no es una demostración, pues ni explica ni tiene el encadenamiento lógico requerido.

Momento 2

Este momento surge en gran medida en consecuencia a la intervención del profesor pidiéndole a la comunidad de investigadores que se convenzan como primera medida de la veracidad de la conjetura establecida para luego si demostrarla, así mismo que determinen si lo concluido del análisis de las particularizaciones puede ser realmente visto como una conjetura que permita satisfacer en su totalidad la demostración del problema.

En este punto se evidencia actividad metacognitiva ya que la comunidad de investigadores retoma acciones realizadas previamente para la reorganización y regulación de su experimentación, convirtiéndose así en validación. Así mismo se identifica la necesidad por parte de la comunidad de cambiar el registro de los datos y conclusiones establecidas gracias a las particularizaciones desarrolladas ya que esto permitiría la justificación y la argumentación del trabajo desarrollado y el establecimiento de la conjetura que llevaría a la comunidad a la demostración del teorema. De esto los investigadores afirman:

[…] para poder determinar la veracidad de la conjetura, que se convirtió en nuestro segundo ¡Atascado! revisamos y organizamos lo desarrollado a lo largo de las particularizaciones, pero tuvimos en cuenta que las demostraciones deben ser establecidas en un lenguaje formal, es así como decidimos y vimos las necesidad de cambiar el lenguaje de los datos, esto desde nuestro punto de vista aumenta rigurosidad argumentación del camino a seguir para poder llegar a la demostración del teorema.


¡Atascado!: "¿Cómo comprobar que lo encontrado no sólo se cumple para esos casos específicos?"
¡Aha!: Observemos lo que pasa al hacer un cambio de registro"
Dado G un grupo, el cardinal de G es p, digo que sea q tal que q|p existe un c tal que
(1) p=qc+0. Suma p-1=qc-1 p-2=qc-2 p-n=qc-n
p=qc+1 Producto n=1,...p
Donde q es el orden del subgrupo H, donde H⊆G
(2) los elementos de H son H={0,c,2c,3c,...(q-1)c}, digo que h∈H
Para generar las clases, digo que para todo a∈G, definimos
aH={a⊕h | h∈H} = {a⊕0, a⊕c, a⊕2c, ..., a⊕(q-1)c}
(a⊕0)H = {(a⊕0)⊕0, (a⊕0)⊕c, ..., (a⊕0)⊕(q-1)c}
(a⊕c)H = {(a⊕c)⊕0, (a⊕c)⊕c, ..., (a⊕c)⊕(q-1)c}

Se destaca en este momento la evidencia de aprendizaje por medio de la comunidad de investigadores, ya que en términos de la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2006) lo que está puesto en el cuaderno y el cuaderno mismo hacen parte integral del pensamiento y lo que está haciendo el estudiante es objetivando en un sistema de significación cultural. Es decir, está aprendiendo.

Momento 3

Luego de generar particularizaciones y hacer el cambio de registro, en este momento surgierón dos nuevas conjeturas que permitieron guiar el trabajo en vía a la demostración del teorema; éstas fueron:

1. *Las clases residuales son disyuntas.*
2. *La unión de las clases es G.*

De este momento los investigadores afirman:

[...] Luego de establecer las conjeturas, surgió un atascado ya que cada uno de los integrantes de la comunidad tenía una notación distinta. Para superar este atascado, debimos utilizar el libro teoría de grupos, con la intención de definir una notación idónea.

¡Ajá! : Cambiamos el registo y determinamos lo siguiente:

Sea $(\mathbb{Z}_n, +)$ un grupo, se toma un subgrupo H de G y se dice, que el orden de H divide al orden de G si:

① Las clases residuales Son disyuntas
② La Unión de clases es G

¡Atascado! Verificamos registros y nos dimos cuenta que no tenemos la misma notación. Es necesario unificar Significados. Igualmente utilizar un referente para validar nuestros resultados.

Momento 4

Este momento de destacó por la rigurosidad que decidimos darle a nuestro proceso. Fue en éste donde se logró hacer una mayor acercamiento a la demostración del Teorema, aceptando que el texto producido es una demostración que demuestra, no solo una demostración que explica. Para armar este texto, la comunidad de estudiantes entrarón en un proceso de validación usando los distintos registros y ejemplos. Es decir, las herramientas heurísticas. Ser conscientes de esto, es además un acto metacognitivo. Así mismo se observa la decisión de la comunidad de recurrir a los libros de texto. Es decir, en búsqueda de los significados culturlamente dispuestos.

Respecto a la primera conjetura, los investigadores afirman:

[...] En primera instancia sabíamos que para demostrar que las clases residuales eran disyuntas, debíamos demostrar que la intersección de dos clases era vacía, o por el contrario eran iguales.

① Las clases residuales son disyuntos

Para demostrar que las clases residuales son disyuntas se toman la intersección de las clases dos a dos.

Sean $[qn - C_0 + K_0q]H \wedge [qn - C_1 + K_1q]H$ clase residuales de G, con $C = 1, \ldots, P$; $C_0 \neq C_1 \wedge K_0 \neq K_1$

A demostrar que:

$[qn - C_0 + K_0q]H \cap [qn - C_1 + K_1q]H = \phi$

Sea $x \in \{[qn - C_0 + K_0q]H \cap [qn - C_1 + K_1q]\}$

$x \in [qn - C_0 + K_0q]H \wedge x \in [qn - C_1 + K_1q]H$

Pero $[qn - C_0 + K_0q]H = \{qn - C_0, qn - C_0 + q, \ldots, qn - C_0 + Kq\}$

$[qn - C_1 + K_1q]H = \{qn - C_1, qn - C_1 + q, \ldots, qn - C_1 + K_1q\}$

$x \in \{qn - C_0, qn - C_0 + q, \ldots, qn - C_0 + Kq\} \wedge$

$x \in \{qn - C, qn - C_1 + q, \ldots, qn - C_1 + K_1q\}$

En este punto ya que la notación y la demostración directa se hace bastante complicada, se toma otra idea para desarrollar el mismo problema

Conclusiones

- Las herramientas heurísticas que permiten superar un ¡Atascado! surgen gracias a la reflexión de la práctica y la construcción de significados que hicieron en conjunto la comunidad de investigadores, ya que "el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados" (Radford, 2006, p. 113).
- Partiendo del hecho de que estar ¡Atascado! se caracteriza por la sensación de no entender, no saber que hacer, no poder ver el ¿Cómo? o el ¿Por qué?, para superar este estado la comunidad de investigadores vuelven y retoman lo desarrollado en el abordaje y entendimiento del teorema, tal y como lo sugiere Mason et al., el cual señala que para superar este estado en un primer momento, la actividad más sensata es volver a la fase de abordaje y reconsiderar los rótulos presentes en ésta: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero?, ¿Qué puedo usar?
- Así mismo, las herramientas heurísticas utilizadas por la comunidad de investigadores que les permitió superar el estado de ¡Atascado! fueron la particularización y la contradicción, acompañadas estas por la reflexión o metacognición del proceso desarrollado, lo anterior apunta a "Resumir todo lo que se sabe y lo que se quiere, representar el problema de alguna forma concreta, y que inspire confianza, aprovechar las particularizaciones que se hayan hecho, releer y resumir el problema, buscando posibles interpretaciones alternativas" (Mason et al.,1989, p. 60)
- Igualmente, otra herramienta heurística identificada como pertinente en la superación del atascado por parte de la comunidad de investigadores fue la denominada analogía , puesto que las particularizaciones y la búsqueda de posibles interpretaciones alternativas del problema (Analogías), son herramientas que sugieren la superación del ¡Atascado! las cuales son denominadas por Puig (1996) como herramientas heurísticas, esto dado que, se hace la transformación del problema a uno más entendible para el resolutor.

Referencias Bibliográficas

- Cobb, P. et, al. (2003) Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher 32 (1) 9-13.
- Fals-Borda, O. (1987). Investigación Participativa. Montevideo. Ed. de la Banda Oriental. pág. 126.
- LEBEM (1999). Documento de Acreditación Previa. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1989), Pensar Matemáticamente, Editorial Labor S.A. Madrid, España.
- Pérez, G. (1994). Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. Vol. 1. Madrid: La Muralla.
- Polya, G. (2005). Como Plantear y Resolver Problemas, Editorial Trillas S.A. México D.F., México.
- Puig, L. (1995). Elementos de Resolución de Problemas. Editorial Comares. Granada, España.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría general de la objetivación. Revista RELIME pp. 103-129.
- Sanjuán, A. & Romero, J. (2009) Continuidad y Ruptura en el Proceso de Demostración: Un Estudio de Caso. Presentado al Congreso Internacional de Educación en Ciencias, Cartagena - Colombia.
- Santos, L. (2007). La Resolución de Problemas Matemáticos. Editorial Trillas S.A. México D.F., México.
- Tall, D. (1988). The Nature of Advanced Mathematical Thinking. El papel de la discusión para PME. Hungría.