10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento algebraico

Castellanos S María y Obando B Jorge A
Maytcas72@gmail.com;
Universidad de los Llanos
jorge_alejo21@hotmail.com
Colegio Galan Cumaral Meta

"Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomas conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos." Roland Charnay.

RESUMEN

Al respecto de las múltiples angustias surgidas por docentes de matemáticas en formación entorno a las dificultades y errores evidenciados por estudiantes de básica segundaria y media en la construcción de pensamiento algebraico, se expone a continuación para el caso de la generalización algebraica los hallazgos logrados desde la investigación que recupera en primera instancia a manera de reseña los referentes teórico conceptuales, las definiciones pertinentes y la clasificación de las dificultades y errores en la educación matemática especialmente en el caso de algebra; de igual manera se detallan características y acuerdos conceptuales entorno a razonamiento, razonamiento algebraico; esta ponencia evidencia los presupuestos e ideales para la educación matemática y la enseñanza del algebra para finalmente establecer la relación y justificación conceptual entre: sistemas de representación- (errores); las dificultades- (comprensión) y razonamiento algebraico. Con la exposición de ejemplos logrados en las experiencias de aula y analizados producto del trabajo de campo en este estudio, se presenta a manera de propuesta los comentarios, reflexiones y recomendaciones que permitirán al futuro docente de matemáticas diseñar un modelo de competencia formal y cognitivo para entender y actuar en situaciones de la enseñabilidad que se dan en el entorno educativo en especial en relación al razonamiento algebraico.

PRESENTACION

Los errores que estudiantes cometen al producir la generalización de expresiones algebraicas o de ecuaciones producto del análisis de determinadas situaciones, son una de las preocupaciones mas constantes de los profesores de matemáticas en la educación básica y media de nuestro sistema educativo Colombiano.

En el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos y en especial para el razonamiento algebraico aparecen sistemáticamente errores, sin embargo lo que mas preocupa es la persistencia y la masividad de alguno de ellos. Evidentemente estos errores influyen en el logro de competencias y aprendizajes de las matemáticas; de esta manera es imprescindible que docentes y estudiantes reconozcan y observen la necesidad de superarlos a fin de favorecer el desarrollo en el área y obtener los resultados esperados para la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas

Se pretende aquí retomar dichos errores y dificultades a partir de la exploración y análisis de algunos ejemplos evidenciados en este estudio, desde la exploración en el aula de matemáticas; el principal propósito de esta indagación radica en evidenciar dificultades y errores en la enseñabilidad del algebra como pretexto del rediseño didáctico y el impulso a un nuevo modelo didáctico para la enseñanza de las matemáticas que impacte en las dinámicas curriculares de las instituciones de educación básica y media de la región. De esta manera, su análisis aporta a docente en formación y aquellos que se encuentran en ejercicio los elementos relevantes para organizar estrategias para contribuir la una preparación cuidadosas de las intervenciones de acomodación.

Además, es importante establecer la diferencia entre: "Conocer sobre errores" y los "errores propiamente dichos", para el profesor es de gran importancia porque provee datos e información necesarios e imprescindibles para una enseñanza y un aprendizaje de calidad, En este caso el error se constituye en organizador y componente de la propuesta didáctica para la enseñanza del algebra; en especial para el caso de la generalización de situaciones partiendo de las posibilidades que otorga la representación y que son indispensables en el desarrollo del razonamiento algebraico. Son los errores y las dificultades mas frecuentes logrados en la generalización de situaciones matemáticas los que se convierten en conocimientos, referentes e información para ser "…asumidos como componentes fundamentales y articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica…"Luis Rico (1999).

Es evidente entonces que al respecto de las dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas hoy existen grandes avances e intereses por el estudio e investigación de estos, sin embargo hay cuestiones importantes aún no resueltas. En las investigaciones en Educación Matemática se nota una amplia motivación por presentar modelos que faciliten las concepciones inadecuadas ("misconceptions") y prevean e interpreten los errores de los alumnos[1]. De igual forma existen autores que consideran que los errores no tienen carácter accidental, por el contrario surgen por las estrategias y reglas que cada alumno utiliza para la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas. En los estudios realizados por Brousseau[2] manifiesta: "Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. …..las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera".

Es importante también anotar que incluso aquellos estudiantes que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, ocultan probablemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. De esta manera es necesario diagnosticar y tratar con atención los errores que puedan generarse; de esta forma el acompañamiento y seguimiento a procedimientos e intervenciones será efectiva para ayudarlos en la corrección de dichos errores y las recomendaciones aquí realizadas mostraran la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, en los errores que cometen.

En esta oportunidad centraremos la atención en algunas de las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, en especial las relacionadas con ***la construcción del conocimiento algebraico*** y a él nos remitiremos para ilustrar de manera concreta algunas cuestiones particulares

1 SOCAS. Martín M, Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico Universidad de La Laguna. 1996
2 DAVIS, R. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G.; Otte, M. (Eds.). Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer. (1986).

que se hace necesario plantear en desde la generalización de diferentes situaciones que conducen a razonamiento algebraico.   La preocupación por las dificultades y errores que el aprendizaje del Álgebra ocasiona a los alumnos, han permitido a investigadores desarrollar diferentes métodos para buscar el más adecuado en la transición de la Aritmética al Álgebra.

Las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

El análisis de errores en el aprendizaje de las matemáticas se ha transformado en una cuestión de continuo interés para las investigaciones en educación matemática. Según Kieran. C. (1998), esta claro que, la generalización y formalización de patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas al igual que el análisis de situaciones con la ayuda de símbolos constituyen una de las aéreas que mayor predomina en los estudios sobre errores en matemáticas escolares. Radatz (1980) quien   dedica gran parte de sus investigaciones a establecer un estado del arte alrededor de los errores en la enseñanza de las matemáticas, afirma que, en los estados unidos se han desarrollado desde inicios del siglo veinte profundos aportes a esta mirada, los aportes mas importantes están destacados por Buswell, Judd y Brueckner casi hasta los años 30, cuando las dificultades especiales toman importancia; para los años 60’ surgen nuevas corrientes quienes usan dichos errores en la reconstrucción del currículo y la resignificación didáctica. Sin embargo, en Europa los estudios se han abordado en forma espontanea.

No obstante en Alemania, con los trabajos de Weiner, Seseman Kiesling y Rose, y dada la importancia de la pedagogía empírica, la presencia de las escuelas influenciadas por la psicología y en especial la psicoanalítica buscan patrones para establecer diferentes errores y proporcionar fundamentación para la enseñanza de las matemáticas. Citado en Radatz; para los años 60’ con Glück, Schlaak y Pipping se concretan aportes en la determinación y descripción de causas de error, interpretación y dificultades especialmente en cálculo. En España, Villarejo, Fernandez H, Centeno, Rico, Castro, Gonzalez, Coriant y Molina entre otros desde los años 50’ se han dedicado a encontrar los errores mas frecuentes, a presentar las intervenciones de corrección y las formas de interpretarlos para el rediseño curricular

Por su parte, en América Latina en especial las investigaciones al respecto han sido orientadas según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y dadas las condiciones de los rediseños curriculares de los diferentes sistemas educativos. Radatz (1980), manifiesta pluralidad al respecto de las expresiones teóricas para atribuir la causa de los errores en el proceso de aprendizaje de la matemática. De igual manera al surgimiento de nuevos errores se los atribuye a las sucesivas reformas del currículo de matemática, a los contenidos específicos, a la individualización y a la diferenciación de la instrucción matemática que requiere gran destreza en el hallazgo de las dificultades para el aprendizaje de la disciplina, puesto que se requieren de modelos para tomar referencia en el momento de diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.

De igual manera, son diferentes los orígenes que se otorgan a ***las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas***, en especial para el Álgebra, estas se ubican generalmente una dinámica que incluye al estudiante, al contenido, al profesor y a la institución escolar, otorgando estatus al microsistema educativo con relevancia; “en la práctica pedagógica se concretan en complicadas estructuras en forma de obstáculo, que son identificadas en los estudiantes como errores”[3] con la presencia de esquemas cognitivos inadecuados,   que no solo son la ausencia de un conocimiento sino el resultado de redes complejas

3   SOCAS, M. M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). 1997.

Un análisis referencial en Socas (1997), describe cinco grandes categorías para establecer la procedencia de estas dificultades, En primera instancia presenta la complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento matemático como propias de la disciplina; de otra manera atribuye origines de las dificultades a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas; otra procedencia que le otorga a las dificultades esta relacionada con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y por ultimo asocia a las dificultades a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas. De esta manera puede notarse varias perspectivas para abordar las dificultades según sea el énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Es necesario manifestar que al respecto de la complejidad de los objetos básicos de las matemáticas, las dificultades encuentran dos estatus: operacional y conceptual, el primero de carácter dinámico -los objetos son vistos como un proceso-, y en el segundo de carácter estático – los objetos son vistos como entidad conceptual. Estos constituyen aspectos complementarios del objeto de las matemáticas.

Con referencia a las dificultades asociadas a las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento matemático, para el razonamiento algebraico y en especial con respecto a la generalización, toma relativa importancia la transición del Pensamiento Numérico al Pensamiento Algebraico, etc.

De otra manera, son distintas las procedencias atribuidas a las dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas entre ellas: la institución escolar, el currículo de Matemáticas y los métodos de enseñanza.

Los modos característicos del razonamiento de los estudiantes y en especial las formas del razonamiento algebraico, son evidencia de sus desarrollo cognitivos; representados generalmente en cada uno de ellos por tareas especificas matemáticas capaces de realizar, constituyen el principal insumo para docentes en el diseño del material de enseñanza. Es de anotar que tales diseños son influenciados por los diferentes enfoques que se pueden considerar: jerárquico del aprendizaje, evolutivo, estructuralista, constructivista y de procesamiento de la información, entre otros muchos.

Los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia las Matemáticas, están relacionados con múltiples asociaciones que intervienen afectiva y emocionalmente con el aprendizaje de esta disciplina; la jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de profesores de hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas son entre otros aspectos asociadas a ansiedades y miedos productos de dificultades para aprender matemáticas[4].

Los errores son notados en las actividades de los alumnos, en especial cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"[5]. Por tanto, el error va a tener múltiples procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado

Las consideraciones para presentar los errores son tomados de la referencia del documento de Socas (1997), en el cual presenta tres descripciones, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error; para tal caso se citan tres orígenes distintos: Obstáculo, Ausencia de sentido y Actitudes afectivas y emocionales.

4 MCLEOD, D.B. y Adams, V.M. Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective. New Cork: Springer-Verlag. Eds.1989.
5 MATZ, M. Towards a computational theory of algebraic competence. Journal of Children's Mathematical Behavior, 3, 1, 93-166. 1980.

Con relación al obstáculo se planteara: como un constructo que ha sido y es objeto de debate, ya que plantea dificultades, como predecía Brousseau (1983), que "la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso"[6] . Otra orientación es la otorgada desde la teoría piagetiana, que interpreta la noción de obstáculo cognitivo y es de tipo constructivista[7]. Los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos. Además es necesario expresar que existe desde el referente planteado la organización posible y útil en términos de obstáculos: epistemológicos, didácticos y cognitivos; los cognitivos fuera de los didácticos, pero estos últimos si contienen los epistemológicos

Los errores categorizados por ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo cual se distinguen tres:

(a) <u>Errores del álgebra</u> tienen origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

(b) <u>Errores de procedimiento</u>. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.

(c) <u>Errores del álgebra</u> debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo "=" en Álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

La identificación de dificultades y errores en el aprendizaje del algebra y en especial de la generalización se incluye como objeto didáctico en el diseño de la propuesta permitiendo analizar los distintos significados que los estudiantes dan al objeto algebraico y determinar la comprensión evidenciada por el razonamiento proporcionado

Ahora bien, <u>el estudio de las dificultades y errores se puede hacer analizando el producto, el proceso y el origen</u>. Los errores como <u>producto</u>, consideran la estructura superficial del objeto algebraico desde la actuación del mismo: operacional, estructural y procesual. El estudio de los <u>errores como proceso</u>, considera la estructura superficial y profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo. Para el estudio de los errores en la estructura profunda es necesario trabajar el objeto con al menos dos representaciones semióticas del mismo.

El estudio de los errores a <u>nivel origen</u> se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico, en los estadios semiótico, estructural o autónomo como en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual. Su origen puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales (Socas, 1997).

El razonamiento y la enseñanza del algebra en las matemáticas

Podríamos decir… por fin un nuevo enfoque de la educación al razonamiento, de la formación

6 Citado en SOCAS (1997) se da una revisión de la noción de obstáculo desde sus orígenes en Bachelard (1938), hasta su traslado al campo de la Didáctica de las Matemáticas, Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989)…,

7 HERSCOVICS, NCognitive Obstacles Encounteres in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M (1989).

del pensamiento, del análisis de las situaciones, del dominio de los instrumentos de ayuda al razonamiento, esto significa el reto del hombre…"el pensamiento", o mejor el desafío. De cualquier

forma, un desafío pedagógico que no se trata de un problema de pedagogía teórica, sino por el contrario del reto que impone la realidad de la vida diaria.

Sin embargo, al enfrentar ciertas situaciones que requieren nuestra disposición para concentrar la atención, se evoca en tal acción la facultad de pensar… pero en el fondo..¿Que es el pensamiento?... poco a poco surgen ideas al respecto. Reflexión, imaginación, lógica, inteligencia, razonamiento, entre otras ideas que se asocian a "pensamiento", pero finalmente esta relación sinonímica no resulta el problema, lo desplaza, lo remite a otras definiciones, todas con igual condición de complejas y que son asumidas como iguales.

Al definir pensamiento[8], se descubre es, como lo que concierne a la conciencia y que compromete todos los fenómenos psíquicos conscientes…..En este caso no es irónico la referencia a la conciencia para delimitar una noción tan difícil. En este orden de ideas es preciso entonces tener de manifiesto identificadas las actividades que forman el pensamiento y establecer una representación de su función en la comprensión de lo que hemos llamado los objetos matemáticos, en especial en el pensamiento algebraico.

De otra parte, el desarrollo del razonamiento tiene sus primeros orígenes con la lógica, se espera haga su aparición desde los primeros años y apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; se dice que este hace parte del razonamiento lógico que posterior mente se evidencia con predicciones y conjeturas; justificaciones o posibilidades para refutar dichas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.

El razonamiento algebraico

En este orden de ideas, el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas y se entiende como la ciencia de los patrones y el orden, ya que formalizar y generalizar son manifestadas como sustancias en el área de las matemáticas.

Sin embargo, se encuentran actividades asociadas al trabajo con la construcción del pensamiento algebraico que podemos calificar en esta caracterización: uso de símbolos para designar objetos, ecuaciones, fórmulas y patrones. Incluso existen elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas.

No obstante resulta aquí pertinente presentar algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y por tanto deben conocer los maestros en formación, son: Los patrones o regularidades que existen y aparecen de manera natural en las matemáticas, pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados, el mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes, los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas. Al expresar

8 Citado en Soca, M. M., y otros Iniciación al Algebra. Capitulo uno. Síntesis. Madrid. (1989).

las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos se logra eficacia en el razonamiento y la comprensión de los constructos. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto, se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Con relación a la segunda característica, hay que destacar que entre los símbolos que usamos para expresar las generalizaciones de patrones y relaciones sobresalen los que permiten representar variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones. Con relación a la tercera característica, hay que destacar que las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían o cambian, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula. Respecto a la cuarta característica, hay que destacar que todas las representaciones de una función dada son simplemente maneras diferentes de expresar la misma idea.

Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a entender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. En niveles superiores, el razonamiento se va independizando de estos modelos (o formalidades) y materiales, y puede trabajar directamente con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, pero suele apoyarse también intermitentemente en comprobaciones e interpretaciones en esos modelos, materiales, dibujos y otros artefactos.

Es conveniente hacer una mirada desde la enseñanza de las matemáticas para expresar que las situaciones de aprendizaje sean entendidas como dinámicas que propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos, geométricos, numérico, algebraico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos[9].

De igual forma hacer reflexión entorno a la visión tradicional y limitada que la educación matemática ha dado al álgebra escolar, en ocasiones denominándola como “aritmética generalizada”, restringida a la manipulación de letras que representan números no especificados: De esta forma los objetos de la aritmética y la “aritmética generalizada” son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas formas de las matemáticas subyacen en cuanto a la generalidad de las afirmaciones que se hacen: - La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales, o mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas; - El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como x, y, t, v, o bien expresiones con variables

Este “tipo de álgebra” está presente siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas que resultan de gran utilidad. Es necesario, sin embargo, presentar entonces una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. <u>La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos</u>, entonces, lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas.

9 MEN estándares básicos de competencias en matemáticas 2006

Algunos autores, en especial Godino[10] expone al respecto del álgebra características esenciales entre ellos: El uso de símbolos, habitualmente letras, expresan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos; la expresión de relaciones entre objetos, mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones. No obstante, estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial esta constituida por la actividad que se hace con estos instrumentos: Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia matemática, de otras ciencias y del contexto

La expresión de estos problemas en el lenguaje algebraico produce un nuevo sistema, explorando la estructura del mismo modelizado y validando la solución. La modelización algebraica de los problemas permite nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas.

Esta visión ampliada del álgebra que favorezca la modelización matemática incluye por supuesto los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, que son propios de los primeros niveles de algebrización. De esta manera, la identificación y designación de las variables que caracterizan una situación o fenómeno en particular, es el paso inicial a la modelación matemática que vendrá seguido del establecimiento de relaciones entre dichas variables y que continua con la manipulación formal de las expresiones simbólicas que muestra las propiedades del sistema modelizado y permite obtener nuevos conocimientos sobre el mismo. Finalmente se realizará la interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico.

En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. Esto nos ha llevado a tenerlo en cuenta en la formación de los maestros y a reflexionar sobre las razones de esta elección.

La representación en el desarrollo del pensamiento algebraico

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación[11] Entre las razones de su importancia se expresa son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos.[12] De igual manera destacar la importancia de las representaciones en la formación adecuada de conceptos, donde se presume existen mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Se distingue entre los objetos matemáticos y sus representaciones[13], estas últimas indispensables en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Duval, Hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento, y es esencial en la actividad matemática para poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que: "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la comprensión (integral) de un

10 GODINO Juan D. y Vicenç Font. El razonamiento algebraico, urg 2006
11 Citado en RESNICK, L. B. y Ford, W. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona. Paidós y MEC. (1990). (Del inglés: The Psychology of Mathematics for Instruction. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1981.
12 PAIVIO, A. Mental comparisons involving abstract attributes. Memory and cognition, 6, pp. 199-208. De Vega, 1984.
13 DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine. Peter Lang. Suisse. 1995.

contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

Para representar una situación podemos utilizar diferentes tipos de signos. Por ejemplo, podemos utilizar gestos, dibujos o iconos que se parezcan a los objetos o a la situación que queremos representar, o bien palabras o símbolos convencionales que no tengan ningún parecido con el objeto representado. Una primera clasificación3 de los signos es la siguiente: 1) *Icono*, se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa, 2) *Índice*, se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto y 3) *Símbolo*, se trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención.

La importancia de considerar el papel que juegan los diferentes tipos de representación en la comprensión de las matemáticas ha sido puesta de manifiesto por diferentes investigadores. Por ejemplo, según Bruner hay que considerar tres tipos de representaciones: 1) La representación enactiva: este tipo de representación permite representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada. 2) La representación icónica: este tipo de representación permite representar una situación por medio de dibujos, figuras o iconos que tengan algún tipo de parecido con aquello que se representa 3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos. De esta manera es pertinente concluir que el lenguaje matemático tiene una doble función: 1) representacional: designar objetos y 2) instrumental: es una herramienta para hacer el trabajo matemático

La utilización de representaciones icónicas permite introducir en la educación primaria un tipo de razonamiento que se puede calificar de algebraico, pre-algebraico o casi-algebraico, y que no sería posible realizar en el caso de haber optado por una representación completamente simbólica como, por ejemplo, las ecuaciones.

La generación de signos (productor de signos), de acciones del signo (signo-acción), y de inferencia es una postura permeada con la influencia de la semiótica. De esta manera, la designación de un objeto matemático mediante un signo es un proceso de inferencia (semiosis) por el cual la representación determina en quien la recibe una interpretación mental que consiste en remitir la representación al objeto que ésta representa, un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos, es decir, el significado de un signo no es otra cosa que el conjunto de signos que permiten desarrollarlo y explicitarlo[14]. De otra manera, todo signo pertenece a un sistema de signos y en él puede ser analizado y comprendido (condición de la significación), pero no todos los signos funcionan idénticamente ni dependen de un único sistema. Es necesario caracterizar diferentes sistemas de signos y establecer en ellos una relación de diferencias y analogías.

La noción de representación pone en relación el objeto matemático con el signo y el significado. Se debe tener en cuenta que la cualidad del signo es la representación y sus diferentes formas, y que además, podemos establecer relaciones entre el signo y el objeto matemático, y entre el signo y el significado. El objeto matemático debe ser entendido en su relación con el contexto y con su fenomenología, sin olvidar que el significado siempre alude a un interpretante que puede ser individual o colectivo, y que éste se hace observable y ostensible a través del signo. Tal relación se adapta para analizar y comprender, planificar y gestionar, las situaciones problemáticas o fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática

Señalemos finalmente que para Vygotsky (1962), los signos causan transformaciones básicas en las funciones psicológicas que intervienen en el funcionamiento mental que permite al individuo la

14 Tomado de …El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) , citado en la Fenomenología de Peirce (1987)

comprensión del objeto matemático, y distingue en los signos dos funciones básicas en la comunicación de los objetos matemáticos, la función indicativa (en la que el signo depende del contexto en el que aparece) y la función simbólica (en la que el signo se usa en situaciones descontextualizadas y abstractas, e implica la organización de los objetos en categorías y la formación de relaciones entre categorías). En este sentido Vygotsky, para quien los procesos mentales pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan de mediadores, coincide con Peirce (1987), al manifestar que el lenguaje es el que marca y distingue al sujeto.

La comprensión puede ser descrita por dos vías diferentes, una, estableciendo relaciones entre el sistema de representación utilizado en la actividad y las dificultades y errores del alumno para el objeto algebraico tratado, en ese caso es el binomio procedimental/conceptual del objeto el que se utiliza para expresar la comprensión en términos de operacional, estructural y procesual. Por otro lado, estableciendo relaciones entre los sistemas de representación, los estadios de desarrollo del objeto y las dificultades y errores.

La comprensión determinada por redes formadas por las representaciones internas generadas en la manipulación de representaciones externas, bajo la siguiente caracterización de la comprensión. "Iniciamos definiendo la comprensión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y las fuerzas de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes y numerosas conexiones"[15] .

La comprensión establece relación entre el representante de un registro y el concepto. Bajo este supuesto teórico la "unidad" más unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático disponen la comprensión. Las tareas de conversión entre representaciones generarán la integración de esas unidades en las estructuras mentales del individuo. Esto quiere decir que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático. Duval (1993)

En este orden de ideas, la mirada a las dificultades y errores se puede hacer desde tres niveles diferentes que denominamos: producto, proceso y origen. El estudio de los errores a nivel producto se realiza, en general, considerando la estructura superficial del objeto algebraico en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual.

El estudio de los errores a nivel proceso se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo. Para el estudio de los errores en la estructura profunda es necesario trabajar el objeto con al menos dos representaciones semióticas del mismo, es necesario el diseño de actividades que, proporcionen: reconocimiento o no de los elementos de un sistema de representaciones de situaciones, con transformaciones internas, conversiones o (transformaciones externas) entre diferentes representaciones de situaciones, en coordinación de diferentes generalizaciones realizadas por parte de los alumnos en la resolución de una tarea algebraica, Los elementos involucrados deben permitir entender: ¿Qué construcción sobre un concepto dado ha realizado el estudiante?, y ¿Que tipo de errores provienen de la estructura superficial o profunda del objeto?. Los errores pueden ser analizados en el nivel proceso operacional, estructural o procesual .

15 HIEBERT, J. y Carpenter, T. P. Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, (1992). Citado en NCTM.

El estudio de los errores a nivel origen se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico, Su origen puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales (Socas, 1997).

Conclusiones

En análisis desde el estudio de casos particulares, que la revisión documental y la observación de tareas permiten aquí son algunas de las miradas a manera de ejemplos para ser analizados y reflexionar, el seguimiento y registro de estas impresiones es solo una de las múltiples evidencia en este estudio

Se pone de manifiesto <u>las dificultades para usar e interpretar los paréntesis</u>. Tales dificultades son encontradas tanto en ambientes aditivos como multiplicativos en los aspectos estructurales y operacionales, no así en el aspecto procesual (sustitución formal) expresado por Socas en el análisis de Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas desde el Enfoque Lógico Semiótico.

<u>Los cambios conceptuales entre la aritmética y el álgebra</u> tienen una importante incidencia en la consecución de errores. El mayor cambio conceptual en el aprendizaje del álgebra se centra alrededor de su diferencia con la aritmética especialmente en el **significado de los símbolos** e interpretaciones **de las letras**. El discernimiento del significado de los valores simbólicos les puede llevar a dar 7x como resultado de 3x + 4, que tiene que ver con su interpretación del símbolo +, en aritmética.

En lo que se refiere a la maduración del **concepto de igualdad**, se presenta un cambio conceptual aún más crítico. En aritmética, el signo = es usado para conectar un problema con su resultado numérico, como: **4+7 =11**; para unir una secuencia de pasos que conducen a un resultado final: **3.(15-6) = 3.9 =27** y, con menor frecuencia, para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, como, por ejemplo: **3x4 = 6+6.**

Las ecuaciones, a diferencia de las expresiones aritméticas anteriores, no son afirmaciones verdaderas universalmente; es decir, el signo **=** no pone en conexión identidades, sino que obliga a la incógnita a tomar un valor (o valores) para que la expresión sea verdadera. Un error bastante frecuente en la resolución de ecuaciones, es efectuar operaciones en el primer miembro de la misma sin modificar el segundo. Este error es debido a que pierden el sentido de igualdad (de equilibrio) entre ambos miembros de la ecuación. En la misma línea está el error de cambiar el signo de uno de los miembros de la ecuación sin modificar el signo del otro miembro. En este sentido es muy útil el recurso de las balanzas para el estudio de las ecuaciones. A continuación se evidencia a maneja de ejemplo la tarea realizada por un estudiante del grupo objeto de observación de este estudio.

ACTIVIDAD : Completa la tabla siguiente:

a	(3 + a)	a	(3 - a)	(3 + a).(3 - a)
4	(3+4)	4	(4-3)	(4+3).(4-3) 7 1 =7
p+2	3+(p+2)	p+2	3-(p+2)	(3+(p+2))(3-(p+2)) 5+p . -1+p =
t - 1				(5+p) . (-1+p)= -5+5p + -1p +1p² =
	3+(t-1	t-1	3-(t-1)	[3+(t-1)].[3-(t-1)]

p+p=2p

A: Datos mal utilizados.

B: Interpretación incorrecta del lenguaje.

C: Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.

D: Errores al operar algebraicamente.

E: No verificación de resultados parciales o totales.

F: Errores lógicos.

G: Errores técnicos.

Por último, una de las diferencias más obvias entre la aritmética y el álgebra reside en el **significado de las letras**. Las letras también aparecen en aritmética, pero de forma diferente, por ejemplo, las letras m y g pueden usarse en aritmética para representar metros y gramos, respectivamente, más que para representar el número de metros o el número de gramos, como en álgebra, aunque la diferencia más significativa se da en la **letra como variable**.

Incluso cuando los alumnos interpretan letras que representan números existe una tendencia a considerar las letras como valores únicos y específicos más que como números generalizados o como variables. Una de las muchas consecuencias erróneas en este sentido es que, a veces, los alumnos reducen la validez de una transformación algebraica a comprobar la verdad aritmética de un ejemplo concreto.

Por ejemplo, deducen que $x^2 = 2x$ ya que esta igualdad se cumple para el número **2**, sin apreciar que, en realidad, no se cumple en ningún otro caso (salvo el cero, claro está).

Aunque, es cierto, que para describir la expresión algebraica de un enunciado es necesario que el alumnado piense en ejemplos concretos, hay que hacer hincapié en que no se limiten a un solo caso, sino que habrá que comprobarlo en numerosos ejemplos. El número 2 es bastante "*traicionero*" ya que cumple que su doble es igual que su cuadrado o que el resultado de sumarle dos; es decir: 2+2 = 2x2 = 22, pero no sucede lo mismo con el resto de números y esto puede llevar a conclusiones erróneas.

Los errores de cálculo y uso incorrecto de fórmulas o procedimientos, que los alumnos presentan en álgebra no son tanto dificultades en álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. Así, por ejemplo, los alumnos que no dominan las operaciones con números enteros o con fracciones traducen estos errores al campo algebraico.

El signo **menos**, sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores como: **$-(a + b)= -a + b$; $-(a +b)/c = -a /c + b /c$.** Algunos errores se deben también al **mal uso de una fórmula** o regla conocida. Muchos de estos errores derivan del mal uso de la **propiedad distributiva** como: **$3(a +2) = 3a + 2$; $-3(a +2) = -3a + 6$.** Llegando incluso algunos alumnos a aplicarla correctamente cuando el valor que multiplica está a la izquierda del paréntesis y no saber qué hacer si está a su derecha.

Este error es un tanto culpa nuestra, pues por inercia solemos escribir la expresión que multiplica al paréntesis a la izquierda del mismo, por lo tanto, los profesores tenemos que acostumbrarnos a ponerles todo tipo de ejemplos, con todos los casos posibles.

En este grupo podemos considerar también los errores debidos a **generalización incorrecta** de propiedades aritméticas. Con bastante frecuencia encontramos errores como que **la raíz de una suma es la suma de las raíces** deducida erróneamente de la propiedad para la raíz del producto o del cociente. En las identidades notables los errores son bastante frecuentes, girando siempre en torno a los siguientes tipos: **$(a +b)^2 = a^2 +b^2$; $(a -b)^2 = a^2 -b^2$; $(3x + b)^2 = 3x^2 +b^2+ +6xb$; $(3 +b) = 9 + b^2 +2. 3$**

+2b. O bien, puede presentarse: **a.(b.c) = ab + ac ó a.(b.c) = (a.b) .(a.c)** deducidas de la propiedad distributiva.

A la hora de simplificar encontramos numerosos errores como: **(a+b) /a = 1+b;** o incluso, **(a+b) /a =b**, deducida erróneamente de: **ab /a = b**, o bien de: **(a+ab)/1+b**. Por esto, la atención a errores aritméticos en su momento es necesario, hay que hacer hincapié en qué propiedades son válidas y cuales no, y enseñar al alumno a que las aplique con corrección.

Desde **la propuesta didáctica**, a manera de se pretende encontrar la ruta y guía para profesores en formación que puedan formular los propios modelos de competencia (en este caso modelo de competencia formal y modelo de competencia cognitivo) se muestra como una alternativa para entender y actuar en los fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el sistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en este caso en particular al respecto de la generalización de situaciones de representación partiendo de las dificultades y errores.

Es pertinente distinguir entre competencia, Modelo didáctico y la competencia del alumno, con la articulación coherente de diferentes registros de representación del objeto algebraico, en los aspectos operacional, estructural y procesual. En este sentido los objetos del álgebra pueden ser representados bajo diferentes formas que constituyen parte de la operación cognitiva básica, y que permite analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales.

De igual manera la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, evidenciadas en los diferentes estadios de desarrollo presentes en las representaciones cognitivas, pasando las dinámicas semióticas, por las estructurales y las autónomas que el desarrollo en la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

Se puede profundizar el estudio de las dificultades y obstáculos que tienen los alumnos en el aprendizaje del algebra en especial mediando en nuevas formas de observar de los errores, especialmente desde dos perspectivas: Los errores que tienen su origen en un obstáculo. Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta última, se le asigna dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

Este estudio apoyado en las investigaciones de referencia da cuenta de los errores en este campo y la necesidad por construir marcos teóricos generales desde los cuales puedan ser tratados sistemáticamente. Parece más acertado establecer marcos referidos a un contenido temático curricular y determinar no sólo una clasificación sino una explicación de su origen, al menos a nivel individual.

Los hallazgos dan cuenta de las propuestas por profundizar en las dificultades y errores que tienen los alumnos en los procesos de generalización algébricas, necesario en el razonamiento algébrico, las propuestas didácticas tendientes a la consolidación del modelo presentan como aportes: (1) Desde (lo semiótico, lo estructural y lo autónomo), se analiza el error en los estadios de desarrollo del signo. (2) Uso de dos registro de representación del objeto que incluye la estructura superficial y profunda. (3) Establece la relación entre conceptual/procedimental del objeto matemático en su triple perspectiva: operacional, estructural y procesual.

En términos generales la gran mayoría de errores analizados en el trabajo de campo al interior del seguimiento a la practica de aula de profesores en ejercicio presenta factores asociados a: los contenidos de las tareas presentadas y de los procesos generalización algebraica que se pretendan tratar, si embargo, hay algunos que se han repetido independientemente del proceso (sustitución formal, generalización y modelización) desarrollado: la clausura, la particularización, el uso incorrecto del paréntesis…, lo que le confieren un carácter de mayor generalidad, pero esto no resta importancia a la necesidad de prestar especial atención al origen individual de los mismos.

Bibliografía de referencia

- DAVIS, R. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G.; Otte, M. (Eds.). Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer.1986.
- GODINO Juan D. y Vicenç Font. El razonamiento algebraico, urg 2006
- MEN. Estándares Basicos de Competencias en Matemáticas Santafé de Bogotá, Edición 2006
- RESNICK, L. B. y Ford, W. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós y MEC. 1990. (Del inglés: The Psychology of Mathematics for Instruction. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum), 1981.
- RICO, L. y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona, Paidós edición 2001.
- SOCAS. Martín M, Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico Universidad de La Laguna. 1996
- _________y otros, Iniciación al Algebra. Capitulo uno. Síntesis. Madrid. 1989.
- __________. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap.V Síntesis. Madrid.1997.