



Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado

Claudia Patricia Quintero Quintero.

clauquinte22@yahoo.com

Luz Adriana Cadavid Muñoz.

adrica262000@yahoo.com

Universidad de Antioquia.

Maestría en Educación.

“Grupo Matemática, Educación y Sociedad (MES)”

Asesora: Diana Jaramillo Quiceno

Resumen

El concepto de función, fundamental en el desarrollo de las matemáticas y de otras ciencias, ha presentado diversas dificultades en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, dada su complejidad, lo cual ha sido identificado en la investigación matemática escolar. Es nuestro interés el analizar el proceso de construcción del concepto de Función, en estudiantes de octavo grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural.

De acuerdo a García, Serrano y Espitia (1997), la enseñanza fragmentada del concepto de función respecto a sus diferentes representaciones, genera restricciones en su conceptualización como objeto matemático. Así mismo, consideramos la importancia del conocimiento histórico y epistemológico que el profesor debe construir del concepto de función, de tal manera que pueda superarse la idea de un conocimiento estático e inmutable; en este sentido retomamos a Youschkevitch (1976), Sierpinski (1992), Ruiz (1998), Azcarate y Deulofeu (1990), Posada & Villa (2006), entre otros.

La metodología de investigación es desde el paradigma cualitativo, bajo un enfoque fenomenológico hermenéutico, en un contexto escolar; en el grado octavo de una institución de carácter oficial, en la ciudad de Medellín. Los datos han sido recolectados a partir de interacción directa con nuestros estudiantes, mediada por situaciones enmarcadas dentro de la teoría de la actividad y desde la investigación de nuestra propia práctica.

Introducción

Esta comunicación es presentada en el marco del desarrollo de un trabajo de investigación de la maestría en educación de la Universidad de Antioquia. En un primer momento damos a conocer las razones por las cuáles consideramos que es importante abordar un análisis del proceso de construcción del concepto de función, en particular en el nivel de octavo grado de la básica secundaria, en el cual los estudiantes comienzan a profundizar en el desarrollo de conocimientos y competencias relacionadas con el álgebra.

En segunda instancia presentamos un panorama general del marco teórico que orienta este proyecto, en el cual retomamos fuentes clásicas y actuales, tanto desde la enseñanza del concepto



de función, como también desde una visión sociocultural de la enseñanza escolar y en particular de lo concerniente a la educación matemática.

Por último hacemos una descripción de la metodología que permitirá guiar el trabajo de campo, el análisis de los datos y la presentación de resultados y conclusiones, teniendo en cuenta, que esta comunicación sólo reportará hasta lo relacionado con el trabajo de campo.

Planteamiento del problema

Todo proceso de construcción de conocimiento involucra una relación entre el sujeto que construye y el objeto a conocer. Relación que, como lo plantea Vigotsky (1995) es mediada por la cultura a la cual se encuentra sumido el sujeto, en una dialéctica en la cual el entorno lo modifica y a su vez, el sujeto modifica su entorno. En esta medida, la cultura es quien determina de una manera no mecanicista, la forma en que el individuo interpreta el mundo y por ende, la forma en que genera conocimiento.

De acuerdo a Vigotsky (1995), las diferentes situaciones a las que se enfrenta el individuo al ingresar a su cultura, son fundamentales en cuanto a la formación de conceptos. Mas, si el medio no lo enfrenta a actividades propias de la cultura, sino le plantea nuevas exigencias y no le plantea nuevos objetivos, su pensamiento no alcanzará estadios de desarrollo superiores en los que se genera el conocimiento.

Al ubicarse entre el sujeto y el objeto, el lenguaje y otros medios culturales de significación, permiten que este último sea percibido por el sujeto como objeto transformado por la acción de las prácticas sociales. Así, como lo afirma Radford (2000), el efecto del lenguaje y la cultura permea la relación entre el sujeto y el objeto, de modo que el conocimiento es concebido como algo supeditado al lenguaje. Este planteamiento concuerda con el de Vigotsky (1995), cuando se refiere a la importancia del lenguaje y con él, al carácter social del signo; a su papel de mediador para influenciar a los otros y a sí mismos.

Las dificultades con las que nos encontramos en el aula en cuanto a la apropiación de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes, esto es, “la relación sujeto-objeto” (Radford, 2000), particularmente en cuanto al concepto de Función como objeto de conocimiento, nos llevan a reflexionar sobre aspectos relacionados con nuestra práctica docente, como posibilitadora de ambientes de aprendizaje en los cuales se tejen a diario interacciones que pueden generar bien sea, el desarrollo de conocimiento matemático o contrariamente, transformarse en un inhibidor del mismo. Así mismo, nos llevan a reflexionar como partícipes de una mediación a través de nuestro papel de adulto; quien, según Vigotsky (1995), es quien por medio de la interacción con los niños y/o jóvenes, les proporciona los elementos básicos culturales para la formación conceptual.

Nuestra reflexión se centra en el análisis de la construcción del concepto de Función. La elección por este tema se debe en primer lugar, al hecho de que consideramos la Función como uno de los conceptos fundamentales en las Matemáticas, en tanto que su complejidad ha permitido a través de la historia repercutir en el desarrollo de las Matemáticas mismas y en el de otras ciencias. En segundo lugar, surge a partir de nuestros recuerdos personales sobre un aprendizaje poco (o nada) significativo de éste, en nuestro rol de estudiantes, y de la búsqueda de nuevos caminos que nos conduzcan ahora como docentes, a una enseñanza en la que no se perpetúe tal error. Una enseñanza, de la que somos conscientes, se practica desde un instrumentalismo tal, que privilegia el tratamiento mecánico del concepto, limitado a la elaboración de tablas, gráficas y esquemas algebraicos, lo cual sabemos, no asegura que en el proceso se esté construyendo un concepto de Función con sentido.

Pensamos que se hace necesario resignificar en las prácticas escolares el proceso de construcción del concepto de función y consideramos que un abordaje desde una perspectiva sociocultural en el cual se diseñen actividades caracterizadas por tener sus objetivos claros e intencionados, al igual que los medios para alcanzarlos, puede brindar elementos que posiblemente no se hayan considerado en el análisis del proceso de construcción del tal concepto. Así entonces, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo es el proceso de construcción del concepto de función, en estudiantes de octavo mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural?

Marco teórico

El concepto de función es uno de los tópicos fundamentales en las matemáticas, es un instrumento que facilita el modelamiento de situaciones de la ciencia, si se quiere mirar en términos de aplicaciones, pero además constituye junto con los conceptos de límite y de continuidad los pilares fundamentales del análisis matemático, y desde allí se dependen aplicaciones importantes en otras ramas de las matemáticas.

Algunas investigaciones en educación matemática han desarrollado trabajos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, los cuales consideramos destacados, pues son la base de otras producciones o reflexiones que posibilitan orientar desde el rigor académico muchas inquietudes y propuestas que emergen a partir del concepto de función en la enseñanza escolar. Además, es nuestro interés realizar el análisis de los datos que podamos reunir, en términos de una interpretación lo más real posible, en cuanto a entender las subjetividades e interacciones que emergen de las situaciones propuestas en el aula de clase, por tanto el entender las consideraciones alrededor del sujeto que aprende, el sujeto que enseña, el conocimiento que media entre ellos y los contextos de estas interrelaciones se constituye en un aspecto fundamental de nuestra mirada sobre la investigación.

Bajo estas premisas consideramos un marco teórico que pueda tejer ideas y reflexiones alrededor de las palabras que hemos considerado clave: función, proceso de construcción, concepto, sujeto, historia, cultura, actividad, mediación y contexto. Dichas consideraciones están reunidas en tres apartados, el primero, trata sobre el concepto de función en desarrollo de las matemáticas, el segundo hace referencia al tratamiento histórico y epistemológico del concepto de función y en el tercero se hace mención de algunas consideraciones en torno al proceso de enseñanza y al proceso de aprendizaje del concepto de función en el marco de la educación matemática.

El siguiente esquema permite visualizar la orientación descrita para nuestro marco teórico.





Sobre el concepto de función en el desarrollo de las matemáticas

El tratamiento de los conceptos en general es un proceso complejo que no se limita al marco de las matemáticas, pero en este campo en particular, es usual generalizar una salida que hace que dicha complejidad sea menos problemática, esto ocurre al establecer las definiciones y con ellas parece estar salvado el problema del concepto; nosotros sabemos que eso no es cierto. Si consideramos en términos de Sfard (2008), los conceptos como “unidades básicas de conocimiento que se pueden acumular, refinar gradualmente, y combinar para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas y más complejas”, nos damos cuenta, como efectivamente ocurre, que de un concepto pueden generarse diversas consideraciones.

De acuerdo a Vigotsky (1995), el concepto no es una formación aislada e inmodificable; todo lo contrario, es una parte activa del proceso intelectual que posibilita la comunicación, comprensión y solución de problemas. Así mismo, su formación deviene de un proceso dinámico que no nace solamente por consecuencia de conexiones asociativas entre la palabra y el objeto, ni únicamente por la presencia de condiciones externas. Ach (1921) citado por Vigotsky (1995), plantea que un concepto surge como resultado de operaciones complejas dirigidas a la resolución de un problema, el cual requiere para su solución, la formación de nuevos conceptos. Esta característica es observable, según los autores, en los sujetos, independiente de la edad ya que los niños difieren de los adolescentes y de los adultos en la forma en que su mente trabaja para alcanzar el objetivo y no, en la forma en que lo comprenden

La complejidad del concepto en matemáticas fue abordada también por Ruíz (1998), donde reconocen que ha sido complejo encontrar en la literatura revisada para su trabajo encontrar una formulación que dé cuenta de lo qué es un concepto, a excepción de los planteamientos de Vergnaud (1982b, 1990) que ella cita, en los cuales “ propone una definición de concepto, adaptada para estudios psicológicos y didácticos, en la cual incluye no sólo las propiedades invariante, que dan sentido al concepto sino también las situaciones y los significados asociados al mismo”.

El concepto de función en los textos escolares, tanto de la secundaria, como de los primeros niveles de educación superior, es asumido desde diversas definiciones, a continuación presentamos algunas para resaltar que este es un concepto de tratamiento complejo también en el sentido de la instrucción, que guía el recurso del texto escolar, que a la larga es un mediador bastante utilizado, teniendo un panorama de lo que está en movimiento con relación a este concepto de función.

- “Una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A, exactamente un objeto de un conjunto B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el conjunto B de objetos asignados se denomina rango”. (Hoffmann, 2001).
- “Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una regla de correspondencia a cada elemento x de A un único elemento y de B” (Del Valle, 2005)
- “una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x, a un conjunto Y de número reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x” (Leithold, 2006).
- “Sean X y Y conjuntos, una función de X en Y es un subconjunto de $X \times Y$ que satisface:
 - Si (x,y) y (x,y') satisfacen f, entonces $y=y'$.
 - Si $x \in X$, entonces $(x,y) \in f$ para algún $y \in Y$ ”.

(Johnsunbauht & Pfaffenberger, 2002).

Estas definiciones y otras expuestas por Azcárate y Deulofeu (1996), invitan a realizar una lectura reflexiva de la propuesta didáctica que llegará al aula de clase para acercarse al concepto de función, especialmente en la educación básica y media.

Sobre consideraciones históricas y epistemológicas asociadas al concepto de función.

Reconocer que las matemáticas no son una construcción perenne e inmutable, que su carácter de únicas, exactas, estructuradas perfectamente e infalibles son adjetivos que ya no se les aplican, precisamente por el reconocimiento de la subjetividad y de las construcciones colectivas que las han constituido, hace que sea necesario en la educación matemática, pensar y reflexionar sobre los procesos históricos y epistemológicos ligados a los conceptos que el maestro comparte y construye con sus estudiantes en el aula de clase. El concepto de función acoge de manera especial una huella histórica que permite ir volver por el camino de ese proceso que lo ha llevado hasta las configuraciones que tiene actualmente. En nuestro trabajo asumiremos dicha construcción histórica como un instrumento que media entre el conocimiento matemático asociado al concepto de función y el conocimiento propio de nosotras como profesoras, de tal manera que éste se vea fortalecido, en concordancia con las propuestas de Ruíz (1998), Azcárate y Deulofeu (1996), García, Serrano y Espitia (1997), Posada y Villa (2006), quienes en sus trabajos dedican apartados importantes a resaltar el valor del desarrollo histórico del concepto de función.

Es nuestro interés ahondar lo expuesto por Youschkevitch, A.P. (1976) en su texto “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century”. Principalmente porque es una referencia directa con respecto al desarrollo histórico del concepto de función en los principales trabajos que hemos retomado, como el de Sastre, P.; Rey, G.; Boubée, C (2008).

Los autores siguiendo el criterio de Youschkevitch, (1976) quien organiza la evolución del concepto de función distinguiendo tres períodos: Época Antigua, Edad Media y Período Moderno, destacan algunos momentos por los que en la matemática occidental ha pasado el concepto de función, desde la época antigua.

Prehelénica.

- Egipto, Mesopotamia, China e India.
- Las cantidades descritas verbalmente o gráficamente
- El conteo implica correspondencia.
- Noción de función, raíces en el desarrollo del concepto de número.
- Cuatro operaciones, funciones de dos variables.
- Babilonios. Tablas, de operaciones y astronómicas, ecuaciones, cambios de variable.

Helénica (500 a.c – 500 d.c)

- Mayor estudio de la geometría.
- Problemas planos y sólidos.
- Problemas con la noción de función implícita. Tablas de acordes y senos, cálculos de longitudes, áreas y volúmenes, fracciones, cuerdas de un círculo.
- Magnitudes geométricas variables, trigonometría.

Edad Media. Oscurantismo (476 – 1453).

- Nicolás Oresme. Representación gráfico-geométrica.
- Fenómenos naturales. Calor, luz color, movimiento...
- Descripciones verbales y gráficas. No se usa fórmula.

Período moderno. La unión entre álgebra y geometría (Fermat, Descartes).

- Extensión del concepto de número. (Bombelli, Stifel)
 - Álgebra simbólica. (Vieta, Descartes)
 - Estudio del movimiento en la ciencia. (Kepler, Galileo)
 - Letras como Variables. Vieta
 - Números en gráficas. Proporciones. Explicaciones de fenómenos naturales Kepler, Galileo.
 - Función en forma analítica. Dependencia entre variables. Descartes
-



- Funciones algebraicas y trascendentes. Gregory
- Problemas de lugares geométricos. Fermat.
- Cálculo diferencial .Objeto de estudio no fueron las funciones, sino las curvas. Leibniz y Newton
- Problemas de lugares geométricos. J. Benoulli.
- Definiciones iniciales, constante, cantidad variable, expresión analítica. Función - curva; curva-función. Euler.
- Definición de Peter Dirichlet
- Definición en términos de la teoría de conjuntos.

Sobre consideraciones en torno al proceso de enseñanza y al proceso de aprendizaje del concepto de función en el marco de la educación matemática

La forma como se asume el concepto de función en la educación matemática, consideramos que no debe ser la misma con que se asume dicho concepto en el plano de las matemáticas como ciencia, pero no se deben desconocer por parte del profesor del profesor unas y otras existencias.

El recorrido histórico deja ver que las bases para la construcción del concepto de función están fundamentadas en las nociones de variable, dependencia, correspondencia, transformación, entre otros, que conllevan un importante componente intuitivo. Pero parece que llegado el momento de presentar el concepto de función en el aula de clase, estas asociaciones se muestran aisladas o se ven opacadas por las rígidas definiciones de función generadas de la teoría de conjuntos, donde las asociaciones intuitivas no operan. En este sentido retomamos las reflexiones de García, Serrano y Espitia (1997), en términos de que “El privilegio de un único sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto, y oculta la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático”.

En esta primera etapa de nuestra investigación destacamos los aportes de Ruíz (1998) en relación al tratamiento del concepto de función desde una investigación que la autora realizó en términos de la noción de función desde un abordaje epistemológico y didáctico, Ruíz aborda un marco teórico amplio que enunciamos ahora desde la autora en mención, pero que a la vez nos ha esclarecido el camino para abordar otras fuentes, como son el caso de Harel y Dubinsky(1992) y Sierpiska (1992), los cuales consideramos fundamentales en nuestro propio marco.

Menciona Ruíz que en una investigación de Sierpiska, On understanding the notion of function (1992), esta autora plantea el problema general de la comprensión de un concepto matemático y determina cuatro categorías para lo que ella llama actos de comprensión, según Ruíz, establecidos como: Identificación, discriminación, generalización y síntesis, luego también Ruíz, plantea que Sierpiska enunció 19 categorías, según esta última, que se pueden determinar en la comprensión de la noción de función, basándose en el desarrollo, epistemológico histórico.

En este apartado no retomamos estas 19 categorías, porque posteriormente lo haremos de la fuente original. Los aportes de Vinner, Tall y Dreyfus, a nuestro modo de ver según lo expresa (Ruíz, 1998,p.67) son trabajos basados en test y cuestionarios de los cuales generan clasificaciones de las definiciones e imágenes conceptuales de los estudiantes con respecto al concepto de función.

De los aportes de Sfard, destaca (Ruíz, 1998,p.70), el proceso de transición de la concepción operacional a la estructural, específicamente en el caso de la noción de función. Determina Sfard dos principios metodológicos teniendo como precedente que la aproximación operacional, antecede a la estructural, dichos principios hacen referencia a que no se debería introducir una nueva noción matemática desde una descripción estructural, pero que también, la aproximación estructural, no se debería asumir hasta que el sujeto se encuentre dentro de una teoría de nivel superior. (Ruíz, 1998,p.70 -71).

Ruíz menciona que desde las investigaciones hechas se hace referencia a aquellas *sobre el aprendizaje de los diferentes componentes de una función*. Nos llama la atención el trabajo que la investigadora referencia de Maryanskii (1979), pues en éste participan estudiantes de 8° a 10°, cuando en los otros los investigadores han trabajado con estudiantes de 10° y 11°, estudiantes de primeros cursos de educación superior y maestros en formación, además la mayoría de las investigaciones relacionadas por Ruíz utilizan como fuente de datos test y cuestionarios, pero en Maryanskii vemos la utilización de numerosas discusiones con grupos y otras pruebas escritas.

Maryanskii indagó sobre variables cuantitativas, conjuntos y relación funcional. (Ruíz, 1998, p. 77-78) resalta una conclusión que a nuestro criterio es bastante importante:

El experimento presentó que la concepción general de una función en las clase de grado 10°, cuyos alumnos conocían un gran número de funciones, es casi el mismo que las clases de grado 8°, cuyos alumnos estaban justo al comienzo del estudio de funciones elementales.

Expresa también Ruíz que Maryanskii sugiere unas orientaciones metodológicas para los profesores, las cuales podemos sintetizar en:

- Utilizar relaciones funcionales asociadas con conjuntos numéricos y relaciones entre elementos de un conjunto.
- Reconocer características poco relevantes de una función.
- En los cursos superiores, explicar el significado del término variable como la designación general de los elementos de cualquier conjunto.

Sobre la teoría de la actividad: construcción social, contexto, cultura, mediación y sujeto.

Compartimos en términos de Lizcano (2002) que las matemáticas constituyen una forma de ver el mundo, lo cual fortalece la idea de que los objetos matemáticos no llegan a todos los sujetos de la misma manera, así estén en condiciones cognitivas “muy similares”. Compartimos la definición cultura dada por D’Ambrosio (2005) como “conjunto de mitos, valores, normas de comportamiento y estilos de conocimiento compartidos por individuos que viven en determinado tiempo y espacio”, de la cual podemos inferir que culturalmente hay muchas maneras de ver el mundo, pero que el hecho de ser varias y variadas no las descalifican.

Las reflexiones anteriores ubicadas en el plano de la educación matemática, nos convocan a mirar tanto el sujeto que aprende, como el sujeto que enseña de una manera más amplia, lo cual posibilita entender la existencia de la complejidad inmersa en las interacciones que se tejen en un espacio como el aula de clase.

Estamos de acuerdo en que el sujeto que aprende es más que “cabeza”, como lo expresa Valero (2006) cuando se refiere a los estudiantes: “son seres con una existencia física y temporal, con sentimientos, con múltiples razones para involucrarse (o no) en el aprendizaje de las matemáticas”, por consideraciones como la anterior, esta autora resalta la importancia del contexto, entendido por ella como la serie de circunstancias que rodean un evento, lo cual implica reconocer la existencia de muchos contextos. Este reconocimiento posibilita dar cuenta de una construcción social del conocimiento desde diferentes ámbitos, de los cuales destacamos tres constructos mencionados por Bishop (2005): actividades, comunicación y negociación, los cuales entran como apoyo la dinámica de la clase para los propósitos de desarrollar y compartir el significado matemático que se lleva al aula.

De manera más amplia, acogemos en nuestro trabajo el concepto de actividad desde la teoría de



la actividad expuesta por Leontiev, la cual como lo expresa Radford (2004) está en armonía con la idea central de la psicología de Vygotski, “Leontiev propuso que el funcionamiento intelectual puramente humano es un funcionamiento mediatizado. En la teoría de Leontiev, la actividad humana se caracteriza, entre otras cosas, por (1) el objetivo que se persigue y (2) los medios para alcanzar dicho objetivo”. Esto conduce a reflexionar como lo plantea Jaramillo (2006) que “las habilidades matemáticas que las personas desarrollan están muy influenciadas por el contexto en el cual se encuentran”

Metodología

La investigación la hemos realizado a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque fenomenológico hermenéutico, ya que nos interesa interpretar a un sujeto que aprende dentro de un contexto particular, el aula de clase en nuestro caso, en interacción con sus compañeros de aprendizaje, con un sujeto que enseña, y con el conocimiento.

De acuerdo a Morse, retomado por Vasilachis (2006), la investigación cualitativa es un tipo de investigación que constituye un modo particular de acercamiento a la indagación, una forma de ver y una manera de conceptuar; es una cosmovisión unida a una particular perspectiva teórica para comunicar e interpretar la realidad. Como lo expresa esta autora, permite comprender un caso individual y reconocer en él características que lo relacionen con otros casos. En esa dirección, pensamos que la investigación cualitativa posibilita analizar al otro; sus actitudes, producto de la cultura a la que pertenece y por lo tanto, acercarnos al proceso de construcción de los estudiantes de temas matemáticos como el de Función, en su espacio natural.

Para la recolección de datos estamos analizando el caso de cinco estudiantes de octavo grado de una institución de carácter oficial de la ciudad de Medellín, mediante observaciones, entrevistas, video grabaciones y registros de las producciones de los estudiantes. Los datos han sido recolectados a partir de interacción directa con nuestros estudiantes, desde la investigación de nuestra propia práctica. Nos interesa mirar las interrelaciones que se tejen en el aula de clase cuando los estudiantes desarrollan situaciones intencionadas hacia la construcción del concepto de Función. Dichas situaciones están consideradas en los términos de la teoría de la actividad planteada por Leontiev, citado por Radford (2000), donde hay una meta clara y unas estrategias direccionadas para alcanzar dicha meta. Actividad, entendida como la forma de organización de las acciones de los individuos que poseen un objetivo común (o meta) el cual está cargado de significación cultural. Los medios para alcanzar el objetivo son aquellos objetos, instrumentos, signos, lenguaje; los cuales a su vez, mediatizan la actividad misma (Radford, 2000).

Concordamos con Bishop (2005), cuando plantea que la actividad matemática busca enfatizar en el involucramiento del estudiante con las matemáticas y no con el contenido presentado por el maestro. Ésta se relaciona tanto con el tema a tratar como con el proceso, permitiendo así analizar factores tanto como el tipo de la situación propuesta en sí y las características de los estudiantes, de modo que permita “el compartir y desarrollar el significado matemático”(p.19). Entendiendo el significado como las posibles conexiones que los estudiantes establezcan entre las ideas propuestas por la escuela y las ideas y significados previos del alumno, brindadas por su práctica cotidiana.

Referencias bibliográficas

- Azcarate, G. y Deulofeu, P. (1990). Funciones y Gráficas. Madrid: Editorial Síntesis.
- Bishop, A. (2005). Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de educación Matemática. Universidad del Valle.

- Díaz, G. (2000) Función: Historia, Investigaciones, Enseñanza. Extraído el 15 de Enero de 2009, de: www.matedu.cinvestav.mx/~matedul/investigacion/portal.htm
 - García, M, Montiel, G. (2007). Resignificando el Concepto de Función en Una Experiencia de Educación a Distancia. Extraído el 15 de Enero de 2009, de: [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/\(GarciaZatti-Montiel2007\)-ENEM-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/(GarciaZatti-Montiel2007)-ENEM-.pdf)
 - García G., Serrano, C. y Espitia (1997). Hacia la Noción de Función como Dependencia y Patrones de la Función Lineal. Cuadernos didácticos. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
 - Godino, J, Wilhelmi, M & Bencomo, D. Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. Aplicación a una experiencia de la enseñanza de la noción de función. Recuperado en febrero 2 de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/criterios_idoneidad_funcion.pdf
 - Jaramillo (2007). Entre El Saber Cotidiano y El Saber Escolar: una mirada desde la Etnomatemática. ¿utopía o realidad?. GECM, Universidad de Antioquia. Primer conversatorio nacional de matemática, diversidad y cultura. Medellín, Colombia. Obtenido el 9 de Enero de 2009 de <http://www.etnomatemática.org/conversatorio%20medellín/Diana.ppt>
 - Lizcano, E. (1991). Del Recto Decir y del Decir Recto. España. Obtenido el 23 de Diciembre de 2008 de http://www.bajo-cero.org/ediciones/pdf/lizcano_web.pdf
 - Posada, F. y Villa J. (2006). Propuesta Didáctica de Aproximación al Concepto de Función Lineal desde una Perspectiva Variacional. Colombia: Universidad de Antioquia.
 - Radford, L. (200). Sujeto, Objeto, Cultura Y La Formación Del Conocimiento. En: Educación Matemática, 12 (1), 51-69. Ontario, Universidad de Laurentienne.
 - Ruiz Higuera, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada. Jaén, España.: Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya.
 - Sastre z, P.; Rey, G.; Boubée, C (2008). El concepto de función a través de la historia. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Recuperado en febrero 2 de 2009 de: http://www.fisem.org/descargas/16/Union_016_014.pdf
 - Sfard, A. (2008). Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional. Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.
 - Sierpiska, A. (1992). Understanding the notion of function. En García, M, Montiel, G. (2007). Resignificando el Concepto de Función en Una Experiencia de Educación a Distancia. Extraído el 15 de Enero de 2009, de: [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/\(GarciaZatti-Montiel2007\)-ENEM-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/Publicaciones/(GarciaZatti-Montiel2007)-ENEM-.pdf)
 - Valero, P. (2006). Consideraciones Sobre el Contexto y la Educación Matemática Para la Democracia. Universidad de Aalborg, Dinamarca.
 - Vasilachis, I. (2006). La investigación Cualitativa. Barcelona: Gedisa.
 - Vigotsky, L.S. (1995). Pensamiento y Lenguaje. Barcelona: Paidós.
-