10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

# Caracterización de los elementos epistemológicos que usan algunos profesores al tratar el álgebra geométrica en algunas clases de grado octavo

**PAOLA ANDREA BUSTOS ACOSTA**
paochik18@gmail.com
**WENDY JOHANA GIRALDO**
johana.0420@gmail.com
**ALBERTO FORERO POVEDA albertoforero84@hotmail.com**
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

**Resumen**

*Este documento intenta mostrar algunas de las causas y consecuencias del desligamiento de la enseñanza de álgebra y la geometría en grado octavo, para esto utiliza un marco de referencia que hace énfasis en el desarrollo epistemológico del álgebra y de la geometría, algunas dificultades cognitivas de los estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los conceptos ligados al Álgebra-Geométrica y su planteamiento en el currículo de matemáticas para los colegios. La metodología de investigación está determinada por observaciones cuyos resultados serán clasificados de acuerdo a categorías de análisis.*

## INTRODUCCIÓN

La geometría así como otras ramas de la matemática ha sido considerada durante mucho tiempo como una estructura de estudio independiente de las otras, sin embargo a través de la experiencia adquirida en las prácticas en los distintos colegios de Bogotá en los últimos cinco semestres de la carrera y el desarrollo epistemológico del álgebra, han permitido observar que la geometría interviene constantemente en la enseñanza de las matemáticas, además de ser una de las estructuras matemáticas mas llamativas y cautivadoras para los estudiantes por la multiplicidad de representaciones que involucra en su contenido. Sin embargo, el papel de ésta en los programas académicos de los colegios ha sido relegado debido en parte a que la intensidad horaria en algunos grados es casi nula y en otros como los grados de bachillerato es por completo nula; causa de ello principalmente a una comprensión inadecuada de la "Nueva Matemática", como se menciona en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas "*énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y el cultivo del álgebra, donde el rigor se alcanza fácilmente; detrimento de la geometría elemental y* *el pensamiento espacia*l". De acuerdo a esto se observa que los estudiantes presentan vacíos conceptuales al relacionar la geometría con algunas temáticas propias del álgebra, particularmente en torno a las ecuaciones algebraicas y los productos notables además de su aplicación en diversos campos.

Desde lo anterior es necesario referirnos a documentos oficiales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Educación (área matemáticas), en los cuales se evidencia la presentación de los distintos tipos de conocimientos básicos en cada pensamiento, encontrando algunas relaciones –por ejemplo– entre el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos con el Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.

A pesar de ello en los currículos la descripción y presentación que se hace de cada uno de estos pensamientos, no involucra los otros; de esta manera se enfoca la geometría exclusivamente desde la percepción espacial "*La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio*." Mientras que la referencia que se realiza sobre el álgebra es "*En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes*."

Hemos observado que la geometría puede ser un arma potente en la búsqueda de un punto medio en el que se realice el traspaso de la aritmética al álgebra de una manera más natural para los estudiantes, ya que permite evidenciar otras formas de razonamiento y de comprensión de un mismo concepto ayudando a la construcción de los conocimientos algebraicos a partir de una base sólida.

La concepción que se tiene del álgebra en el currículo de matemáticas es muchas veces sesgada y como mencionan Kieran y Filloy (1998) citando a Love (1986, p 49). "*Hoy en día el álgebra no es meramente "dar significado a los símbolos" sino otro nivel más allá de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son especialmente algebraicos – por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es lo que significa pensar algebraicamente"*.

Las expresiones simbólicas y las representaciones geométricas constituyen un método de enseñanza eficaz, el cual origina habilidades que permiten un adecuado razonamiento en el estudiante para la interpretación de casos particulares llegando a los generales, además, permite avanzar en la representación verbal de las construcciones geométricas y de las ecuaciones que se presentan a partir de la utilización de un lenguaje retórico.

En este sentido, es necesario reconocer la importancia de relacionar la geometría con el álgebra en el contexto de la investigación nacional, regional e internacional que soportan este trabajo.

## Antecedentes del problema

A través de la historia de la humanidad y del desarrollo de las sociedades han surgido grandes pensadores y especialmente grandes matemáticos que con sus trabajos han colaborado con la organización de la enseñanza, considerando esto como el nacimiento de la matemática a manera de respuesta a las necesidades de los seres humanos, como un medio regulador de problemas y dificultades, este surgimiento condujo a que pensadores como Euclides de Megara (300 AC) recopilaran avances en la geometría en 13 textos llamados Los Elementos de Euclides dejando un legado matemático desde una perspectiva geométrica.

En este sentido, autores como Massa (2001) señalan que en el siglo VIII se tuvo como referente la matemática desde la geometría Euclideana, en todos estos años fueron pocos los individuos que se atrevieron a criticar está matemática, ya que en el momento se daba como cierto y único, pues la matemática antigua era básicamente geometría y no existían otros tipos de representaciones de la misma.

Así mismo el álgebra ha surgido como una rama de las matemáticas que ha tenido una evolución a través del tiempo; la retórica y los simbolismos de ésta tuvieron que pasar por una serie de cambios y de convenciones que fueron surgiendo y evolucionando de las mismas sociedades, uno de los padres del álgebra es Diofanto debido a su forma de escritura, ya que fue él quien introdujo en la matemática la escritura por medio de símbolos para expresar los resultados obtenidos. Pero Descartes y la geometría tenían afirmaciones que inducían una relación desde lo algebraico y lo geométrico a partir de las interpretaciones que permitían proponer una lectura algebraica para la geometría y así acceder a una nueva interpretación de la geometría Euclideana.

Desde Massa (2001), la historia del álgebra y su evolución retórica, simbólica, epistemológica y gráfica mostraban las primeras características que se visualizan en la articulación del álgebra con la geometría, al establecer conexiones entre fórmulas y figuras que permitían depender de los cálculos algebraicos, simbólicos, operaciones geométricas y construcciones, donde les provee maneras aptas para hacer y probar las diferentes representaciones gráficas y la escritura, en las cuales se intenta entender el proceso en términos del conocimiento matemático y de las intenciones con que se trabaja.

De lo expuesto anteriormente, diferentes pensadores matemáticos indujeron reflexiones alrededor de la estructura de los elementos de Euclides, como es el caso de Descartes que mostró un artículo titulado Descartes lector de Euclides, en el que cita y hace referencia a este autor tomando de él definiciones, postulados o axiomas con el objetivo de desarrollar construcciones que permitan dar una orientación en la estructura lógica entre la demostración y la representación grafica. Álvarez (2000) retoma este artículo y se realiza la siguiente pregunta:

¿Qué es lo que Descartes lee en *los Elementos de Euclides? Y argumenta que Descartes descubre un tratado que establece el fundamento de la tradicional división de las dos disciplinas clásicas de la matemática: aritmética y geometría, y también establece el tratamiento preciso para cada una de ellas, pero Descartes encuentra en el texto la clave que permite tratarlas pese a su naturaleza distinta, bajo una nueva versión que hará posible su integración.* Con respecto a lo que Descartes (1637) argumenta acerca de los temas tratados en cada uno de los libros, se induce que están delimitados por las definiciones enunciadas al inicio del mismo, así como por los postulados y las nociones comunes del primer libro, mostrando una división dada a los elementos entre la geometría y la aritmética determinando la existencia de dos libros que están conformados por lo geométrico, mientras que la segunda se conforma por los aspectos aritméticos, evidenciando el papel que juega este último, ya que no desempeña ningún aspecto en el fundamento de axiomas. A lo que se concluye que Euclides construye un sistema basado en dos tipos de proposiciones que son los teoremas que afirman alguna propiedad y los problemas que piden la realización de alguna construcción.

Sin embargo, Descartes pretende reducir el tratado global de las magnitudes geométricas, ya que bastan para explicar cómo es posible el recurso algebraico para la construcción de los problemas geométricos desde operaciones algebraicas definidas por los segmentos el cual se traduce en una ecuación donde se presenta el pensamiento cartesiano influenciado por Viéta a lo que deduce Descartes:

En el presente trabajo hemos decidido dirigir nuestra atención a las conexiones que el docente de matemáticas establece en la enseñanza de dicha temática, analizando cuales son las características metodológicas y epistemológicas más relevantes de estas clases, ya que una de las causas principales de los tropiezos de los estudiantes en la comprensión y desarrollo de los conceptos matemáticos se encuentra en la transición de la aritmética al álgebra, en la que se dificulta la representación de las diferentes ecuaciones y en las cuales se hace necesario observar otros tipos de representación como la geométrica para consolidar los conocimientos algebraicos, como lo menciona Zubia (1988) “Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances (…) en la matemática”. La investigación estará enfocada hacia la realización de una observación no participante de los procesos de enseñanza de las ecuaciones algebraicas realizadas por el profesor y los procesos de aprendizaje del estudiante.

De acuerdo con el anterior contexto surge la siguiente pregunta, que se espera sea resuelta con la investigación:

¿Cuáles son los elementos epistemológicos y las relaciones de tipo geométrico que implementan algunos docentes de grado octavo en el proceso de enseñanza de productos notables y ecuaciones algebraicas en algunos colegios de Bogotá?

## Marco epistemológico de referencia

Desde lo que argumenta Viéta (1593) en su trabajo “in artem analyticem isagoge” en el cual propone un método de análisis de la colección de Papo y los métodos de Diofanto, desde lo que propone Diofanto, Viéta adiciona lo retórico, definido como un procedimiento para que una magnitud desconocida se conozca mediante la solución de una ecuación, para esto, Viéta usa las letras para denotar cantidades conocidas (consonantes) y desconocidas (vocales). Después de hacer esta salvedad plantea en la ley de homogeneidad la comparación de magnitudes tales como género, las cuales se pueden escribir como una ecuación cuadrática.

En posteriores trabajos Viéta discute acerca de la solución geométrica de ecuaciones algebraicas, en la que muestra que la solución de ecuaciones cuadráticas puede ser construida utilizando círculos y líneas rectas, por ejemplo

$$A2 + AB = D2 \text{ ó } A(A+B)=D2$$

Para realizar la construcción geométrica de esta ecuación Viéta (1593) propone "construir dos líneas segmentos perpendiculares B y D, luego dibujar un semicírculo centrado en el punto medio de B. las dos partes restantes del diámetro son iguales a A" esta es una de las construcciones que propone para sustentar las ecuaciones cuadráticas, cabe agregar que se da a partir de los postulados de Euclides.

En 1953 el holandés Romanus planteó a los matemáticos el problema de solucionar una ecuación de 45 grados, en el que Viéta vio que la ecuación y su solución resuelta por una cuerda opuesta a un arco de 8 grados en un circulo de radio 1, y así la fue encontrada la solución a la ecuación dividiendo la circunferencia en 45 grados, Viéta presento una raíz de la ecuación y al día siguiente todas las 23 raíces positivas. Después de la muerte de Viéta el Escocés Anderson publico dos trabajos de Viéta en el cual discute métodos para transformar las ecuaciones, para esto evidencia el siguiente ejemplo: "si se tiene una raíz D de una ecuación, puede obtenerse una raíz de grado bajo" en el cual muestra las siguientes soluciones:

A partir de una ecuación cubica: $BA - A^3 = Z\ (_1)$ siendo dada, y dado que E satisfaga la condición $E3 - Z=BE\ (_2)$ para nosotros esto significa que –E es una raíz original de la ecuación (1), pero Viéta no reconoce raíces negativas. De (1) y (2) concluye:

$$A^3 + E^3 = B\ (A + E)$$

$$(A + E)\ (A^2 - AE + E^2) = B\ (A + E)$$

Ahora se puede dividir por A +E, y se obtiene una ecuación cuadrática para A. en el mismo trabajo, Viéta trata con la solución de ecuaciones bicuadráticas y cubicas.

También, Viéta agrega el método "Enmendación" para resolver una ecuación cubica:

$$A^3 + 3BA = 2Z\ (^1)$$

Viéta introduce una variable desconocida para la ecuación $EB=E\ (A+E)\ (_2)$, sustituyendo $(_1)$ en $(_2)$ obtenemos $A^3+3AE(A+E)=2Z$ y de ahí $(A + E)^3 = 2Z + E^3(_3)$. De $(_2)$, podemos resolver A + E y sustituirlo en $(_3)$. Obtenemos una ecuación cuadrática para $E^3$, $B^3=2ZE^3+E^6(_4)$. La cual puede ser resuelta por $E^3$ y así por E: $E = {}^3\sqrt{}\sqrt{}B^3+Z^2-Z$.

Ahora A puede ser formada desde $(_2)$, en contraste con el método expuesto por Ars Magna de Cardano, se puede extraer solo una raíz cubica, aun el resultado final es el mismo en el método de Cardano.

Por otro lado, la geometría analítica fue fundamental para el desarrollo de la geometría y el algebra, y su objetivo primario fue solucionar problemas geométricos por métodos algebraicos, a la inversa el método fue usado para aplicar métodos geométricos en la solución de problemas algebraicos, entonces desde lo que propone Fermat (1643) en “introducción to plane and solid Loci” el punto final de una cantidad desconocida describe la línea recta o un circulo, resulta un emplazamiento plano, y cuando este describe una parábola, hipérbole o elipse, resulta un emplazamiento solido” a partir de lo anterior, hace referencia a una variable que está determinado por dos coordenadas, las cuales denotan puntos usados en la noción de Viéta, a la que explica desde lo plano y lo canónico.

**Marco cognitivo de referencia**

Durante la revisión bibliográfica que realizamos, llegamos a determinar que los niños al llegar al estudio del álgebra traen consigo las nociones previas adquiridas en el estudio de la aritmética, pero el álgebra no es una simple generalización de la aritmética y mucho menos es hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética, “el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones” (Kieran. C), entre las dificultades más generales que se les presenta a los estudiantes de álgebra se encuentra la forma de ver el signo igual, las dificultad con las convenciones de notaciones, los métodos de simbolizar, las variables, las expresiones y ecuaciones así como la resolución de ecuaciones.

Para el desarrollo de nuestro problema de investigación nos centraremos en las siguientes dificultades:

Métodos de simbolizar. En la solución a problemas meramente aritméticos los estudiantes usan diversos tipos de métodos informales de solución, estos a su vez no les exige tener cierta claridad en los procedimientos que usan para llegar a estas soluciones. Por su parte el álgebra les obliga a formalizar procedimientos que tal vez antes no les interesaban, además no comprenden que el procedimiento es en muchos casos la respuesta al problema; esperando siempre que la operación sea cerrada y que tenga como respuesta un número.

Uso de la variable. En el estudio de la aritmética no es usual que los estudiantes trabajen con variables, uno de los usos que se le otorga a las letras es el de etiquetas para denotar unidades de medida y según Kieran (1998) este es el principal problema que los estudiantes tiene en la comprensión de la variable y su entendimiento como etiqueta, de la misma manera Kieran citando a Kuchemann (1981) “la mayoría de los estudiantes trataban la letra en expresiones y ecuaciones como incógnitas especificas más que como número generalizado o como variables.”

Ecuaciones. Los estudiantes en sus primeros años de estudio, están familiarizados con la solución a ecuaciones del tipo sumando faltante, sin embargo estas situaciones generalmente se les presentan de una manera descontextualizada y carente de significado, además las soluciones que dan a estas ecuaciones muestran al lado derecho la solución del cálculo, es decir un número.

Cuando los estudiantes usan métodos formales de solución de ecuación surgen problemas como; cambio en el concepto del signo igual (mezclan el igual operacional, de la aritmética con el igual como equilibrio en la ecuación). Dificultad con el signo menos, entre otros.

Los estudiantes cuando crean una concepción de ecuación no ven en ella el uso de letras a ambos lados de la igualdad buscando el cierre de la operación y por tanto una respuesta numérica a la misma.

Una de las problemáticas que involucra a los profesores de matemáticas es la preocupación por la enseñanza de la geometría en los colegios puesto que ha sido dejada a un lado y se le ha quitado gran importancia a su aprendizaje, otorgando la responsabilidad de esto a la comprensión inadecuada de "La Nueva Matemática".

La geometría según Meserve citado en Zubia (2001), tiene unos valores insustituibles:

La geometría proporciona uno o más puntos de vista, o modos de ver, aproximadamente en todas las áreas de la matemática. Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas.

Las técnicas geométricas proporcionan eficaces útiles para resolver problemas en casi todas las áreas de la matemática y ciencias.

Los errores y dificultades en la generalización: Para los estudiantes resulta difícil encontrar términos generales y llegar a su expresión simbólica, el problema surge en la introducción didáctica de los problemas que se le presenten. Cuando se ha trabajado un problema es difícil retener en la memoria las distintas propiedades que configuran su estructura; de esta manera se limitan solo unas pocas propiedades y al enfrentarse a otros problemas usan estas propiedades y si se cumplen dan esta como la solución del problema.

**Marco legal**

En la búsqueda legal que realizamos para estructurar la propuesta de nuestro trabajo nos encontramos que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) así como en los Estándares Básicos de Educación (2002) no se encuentra un pensamiento o una teoría llamada álgebra geométrica, por ello tomaremos el Pensamiento espacial y Sistemas Geométricos y el Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos de manera separada.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de 1998, a partir de los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial que es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos, los sistemas geométricos se construyen a partir de la exploración y modelación del espacio. Una de las propuestas de los Lineamientos tiene que ver con la geometría activa donde el estudiante crea sus concepciones a partir de su actividad y de las confrontaciones en el mundo real, es el estudiante quien crea y experimenta.

El desarrollo del pensamiento espacial que se propone tiene su base teórica desde los niveles de Van Hiele en los que se muestra la manera de estructurar el aprendizaje de la geometría, desde el Grupo Azarquiel (1993), a continuación se realizará la descripción de cada uno de estos cinco niveles,

1. Visualización: los individuos perciben figuras como un todo global. No reconocen las partes y componentes de las figuras. No explicitan las propiedades de las figuras para distinguir unas de otras.
2. Análisis: los individuos identifican las partes de una figura ero no las relacionan entre familias de acuerdo a sus características.
3. Ordenamiento: determinan las figuras de acuerdo a sus propiedades pero son incapaces de organizar una secuencia que permita explicar sus observaciones.
4. Razonamiento deductivo: los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra pero no reconocen la necesidad del rigor matemático en los procedimientos.
5. Rigor: los individuos están en capacidad de analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos.

Además, se presentan un pensamiento llamado Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, este pensamiento hace un gran énfasis en la variación y la relación que tiene ésta, en otros núcleos conceptuales matemáticos y parten de aquí para introducir los sistemas algebraicos como la representación de la variación, el orden que se establece para la enseñanza de la variación es por medio del estudio de patrones de la vida diaria de los estudiantes para pasar a la tabulación y llegar así a la graficación de estos patrones.

A partir de lo que está expuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se articulara lo planteado en los diferentes pensamientos con lo propuesto para grado séptimo en los Estándares Curriculares de Matemáticas, en donde se tiene como intención que:

En el pensamiento espacial y los sistemas geométricos los estudiantes deben representar objetos desde diferentes posiciones o vistas, clasificar polígonos reconociendo sus propiedades, además que pueda identificar y describir figuras.

En el pensamiento espacial, el estudiante debe predecir y comparar resultados al aplicar transformaciones, debe estar en la capacidad de resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de las figuras tales como la semejanza y modelos geométricos. Así mismo, el estudiante puede identificar características de los objetos a partir de la localización de los sistemas de representación.

De esta forma, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, se determina en los diferentes ítems que los estudiantes describan y representen situaciones relacionando diferentes representaciones, también que reconozcan el conjunto de valores de una variable en situaciones de cambio, además que pueda analizar las propiedades de variación en contextos aritméticos y geométricos. En este pensamiento proponen utilizar métodos informales en la solución de ecuaciones e identificar las características de las diversas gráficas cartesianas en relación con la situación que represente.

**Metodología de investigación**

La definición que se da a la investigación según Ketele, J & Roegiers, X. (1993) "La investigación como un proceso constatado y orientado sistemática e intencionalmente a innovar o aumentar el conocimiento de un dominio determinado", el conocimiento descrito puede presentar las siguientes formas:

Un cuerpo de conocimiento bajo las forma de leyes condensadas.

El conocimiento de un contexto especifico que permite tomar las decisiones adecuadas en ese contexto.

El conocimiento de los factores determinantes de entorno y de los actores en un sistema dado.

- Conocimiento hipotético.
- Conocimiento especifico.

Entre los diferentes tipos de investigación podemos encontrar los siguientes:

- Investigación científica.
- Investigación tecnológica.
- Investigación evaluativa u operativa.
- Investigación acción.
- Investigación exploratoria.
- Investigación descriptiva.
- Investigación especulativa.

En este trabajo nos detendremos en algunos tipos de investigación que consideramos interviene en el mismo.

Investigación evaluadora: es posible afirmar que existirá la investigación evaluadora cuando la función preventiva o prospectiva predomine sobre la función de regulación, la decisión a tomar posea un carácter innovador.

La convergencia de las conclusiones de diferentes investigaciones puede hacer surgir una hipótesis verificable mediante un dispositivo experimental complementario.

Investigación descriptiva: es un proceso preparatorio de una investigación o de una evaluación, cuando el sistema es muy complejo y se hace necesario el comenzar a describirlo rigurosamente. Sin embargo algunas de estas investigaciones constituyen un objetivo en sí mismas desde sus inicios. Adicionalmente se está usando el termino investigación etológica para referirse según Ketele, J & Roegiers, X. (1993) "un inventario sistemático de los comportamientos de un sujeto en una situación dada".

Entre las funciones primordiales en el proceso de recogida de información se encuentran las siguientes.

En la función *reguladora* se recoge información para verificar la eficacia de una acción, con el fin de proponer modificaciones o cambios que mejoren tales acciones.

La función formativa cumple con el objetivo de recoger información para actuar y retroalimentar el proceso para luego formar. Este tipo de regulación se aplica a un sistema o a un grupo de personas y está orientada hacia el individuo.

La función certificadora se da un juicio de valor sobre un proceso.

La función preventiva anticipa la modificación de un contexto y aporta indicadores, previendo situaciones y acciones especificas de manera concreta.

**Análisis de datos**

Observables para la investigación de la caracterización del álgebra geométrica.

A partir de los observables, se determinaran aspectos de la investigación, los cuales van dirigidos a la interpretación de los hechos educativos actuales, en cuanto a la composición de los procesos, así generar una interpretación correcta desde la epistemología que se tiene del álgebra geométrica, en el sentido de la conexión entre el álgebra y la geometría e identificando la importancia de los procesos de construcción del Algebra desde la génesis, la estructura, la función el método y problemas que se utiliza o que se utilizó.

| **CONEXIONES ENTRE EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA** | | | |
|---|---|---|---|
| Aspecto-Nivel | Nivel alto | Nivel medio | Nivel medio |
| Conexiones entre el Álgebra y La Geometría. | El docente trabaja y pone en juego la conexión entre el Álgebra y la Geometría en el proceso de enseñanza de los productos notables y las ecuaciones algebraicas. | El docente presenta conexiones entre el álgebra y la geometría en el proceso de enseñanza de las ecuaciones algebraicas y de los productos notables, pero no hace uso de ellas para potenciar la comprensión del álgebra. | El docente no presenta conexiones entre el álgebra y la geometría en el desarrollo de los productos notables y las ecuaciones algebraicas. |
| Situaciones que evidencian conexiones entre el Álgebra y la Geometría | Hace uso de construcciones geométricas en el proceso de enseñanza de las ecuaciones algebraicas y los productos notables como un punto principal para potenciar la comprensión. | Hace referencia a las construcciones geométricas dentro del proceso de enseñanza de las ecuaciones y de los productos notables pero como un proceso secundario para cumplir el objetivo de comprensión. | Su proceso de enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones y de los productos notables no refiere de ninguna manera el uso de la geometría para mejorar su comprensión. |
| Usos de la geometría | El docente hace uso de elementos no procedimentales para la enseñanza de los Productos Notables y las Ecuaciones Algebraicas. | El docente conjuga los elementos no procedimentales y procedimentales sin profundizar para la enseñanza de los Productos Notables y Ecuaciones Algebraicas. | El docente ejecuta solo acciones de tipo procedimental para la enseñanza del álgebra y de las ecuaciones algebraicas. |

| EPISTEMOLOGÍA | |
|---|---|
| Génesis | En el proceso de enseñanza que lleva a cabo, propicia actividades de tipo geométrico para el reconocimiento y la comprensión de las ecuaciones y los productos notables. |
| Estructura Matemática | Desde el planteamiento y ejecución de sus actividades promueve la interpretación del álgebra geométrica como un ente que posibilita una mejor comprensión de los productos y las ecuaciones algebraicas. |
| Problemas | Hace uso de los paradigmas epistemológicos que existieron en la construcción del Álgebra para el planteamiento y ejecución de las actividades en relación con las ecuaciones y los productos notables. |
| Función | En el proceso de enseñanza potencia el uso de las ecuaciones y de los productos notables para resolver situaciones dentro y fuera de la matemática. |
| Métodos | En el proceso de enseñanza promueve el uso y manejo de diferentes métodos e interpretaciones acerca de las ecuaciones y de los productos notables. |

**Bibliografía**


- Alsina, C.; Fortuny, J. et al. (1997) ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Educación matemática en secundaria. Síntesis. Madrid.
- Cerinza. C, Sánchez, M. Valero, A. Vargas, C. (1997). Una Experiencia de la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en los grados sexto y octavo. U. Distrital.
- ¨Commission on Standars for School Mathematics¨ del NCTM (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. S.A.E.M. THALES. Sevilla.
- Flores, A (2000). Uso de representaciones geométricas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra. Arizona State University.
- Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Editorial Síntesis. Madrid, España.
- Ketele, J y Roegeriers, X. (1993). Metodología para la recogida de investigación. La Muralla. Madrid.
- Kieran, C y Filloy, M (1998). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Handbook of Research of Mathematical Education. Cambridge: UH
- León. H (2001). Propuesta para la enseñanza de algunas expresiones algebraicas de primer y segundo grado a partir del álgebra geométrica Seminario de Actualización. U. Distrital.

- Libro II Euclides. http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm. Extraído en Marzo de 2009.
- Massa, E (2001). Las relaciones entre el algebra y la geometría en el siglo XVII. Universidad Politécnica de Catalunya. Vol 24 nº 51. pag 705-7025
- Ministerio de Educación Nacional (2002). Estándares Básicos de Matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia.