

RUTAS PEDAGÓGICAS EN MATEMÁTICAS: ¿AZAR O CONSTRUCCIÓN?

LUISA ANDRADE, PATRICIA PERRY,
EDGAR GUACANEME, FELIPE FERNÁNDEZ



INVESTIGACION EDUCATIVA
Y DESARROLLO PEDAGOGICO
ALCALDIA MAYOR SANTAFE DE BOGOTA



una empresa docente®

Bogotá, 2003

RUTAS PEDAGÓGICAS EN MATEMÁTICAS: ¿AZAR O CONSTRUCCIÓN?

© 2003. Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP.
Alcaldía Mayor de Bogotá D.C. & “una empresa docente”, Universidad de los Andes

Autores

Luisa Andrade, Patricia Perry, Edgar Guacaneme, Felipe Fernández

Dirección General del IDEP

Juana Inés Díaz (E.)

Subdirección General del Área Académica

María Cristina Dussán de Suárez

Interventoría del Área de Matemáticas

Edgar Torres

Área de Comunicación Educativa

María Eugenia Romero

Convocatoria del IDEP N° 02 de 2001

Contrato N° 21 de 2001

Entidad contratista

“una empresa docente”, Universidad de los Andes

Equipo investigador

Luisa Andrade, Patricia Perry, Edgar Guacaneme, Felipe Fernández

Primera edición: junio de 2003

Tiraje: 500 ejemplares

ISBN 958-8066-30-1

Diseño de carátula

Interlínea Editores Ltda.

Diseño de páginas interiores

“una empresa docente”

Impresión

Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP

Avenida El Dorado No. 66 - 63. Tercer piso

Tels.: 324 1263 y 324 1264 PBX: 324 100 Exts. 9000 - 9003 - 9007 Fax 324 1265 Ext. 9004

Bogotá, Colombia

<http://www.idep.edu.co>

“una empresa docente”, Universidad de los Andes

Casita Rosada: Calle 18A No. 0 - 29 Este

Tels.: 339 49 49 Ext. 2717 Fax: 339 49 99 Ext. 2709

Bogotá, Colombia

<http://ued.uniandes.edu.co>

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN	1
INTRODUCCIÓN	3
LA PRÁCTICA DOCENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS	7
EL MARCO CONCEPTUAL, SU ORIGEN Y EVOLUCIÓN	9
La primera versión	9
Evolución de las categorías hacia una clasificación de las normas de clase	13
Transformación de la clasificación de normas en categorías más amplias	14
El marco conceptual definitivo	16
Esquema general	17
Visión panorámica de los temas abordados	18
Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje	20
Valoración de las producciones de los estudiantes	21
EL PROCESO DE INDAGACIÓN	25
Un estudio cualitativo	25
Fases del proceso	26
Análisis, interpretación y validación	28
UNA MIRADA A LA PRÁCTICA DOCENTE DEL PROFESOR	31
La perspectiva dada por el cuestionario	31
La clase	31
Esquema general	31
Contenidos matemáticos considerados y rutas temáticas	34
Interacción entre el profesor y los estudiantes	34
Validación de las respuestas de los estudiantes	35
Preparación de clase	36
Evaluación	37
Planeación anual institucional	39

Asuntos que dificultan la enseñanza	39
La perspectiva dada por los casos estudiados	40
Esquema general	40
Asignación y revisión de tareas para desarrollar fuera del aula	40
Asignación y revisión de tareas para desarrollar en el aula	43
Presentación de información matemática	45
Visión panorámica de los temas abordados	49
Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje	54
El escenario de las presentaciones o exposiciones de los temas matemáticos	54
El escenario del trabajo de los estudiantes	57
Valoración de las producciones de los estudiantes	61
OTRAS DERIVACIONES DE LA INDAGACIÓN.	65
La práctica docente desde otras perspectivas	65
Acerca de las matemáticas que se enseñan en la escuela	66
Acerca de las estrategias didácticas que se utilizan en clase	69
Acerca de la interacción en la clase en torno al aprendizaje y las reglas que la regulan	74
Innovaciones encontradas e influencia de teorías existentes	78
Acerca del cuestionario del estudiante	80
EL APORTE DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO A LA COMUNIDAD DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA	83
PARA CONCLUIR	85
REFERENCIAS	87
APÉNDICE	91

PRESENTACIÓN

El Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP, y “una empresa docente”, centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, presentan esta publicación a la comunidad educativa. En ella se da cuenta del estudio realizado por “una empresa docente” para develar rutas pedagógicas de la enseñanza de las matemáticas. Se espera de este modo contribuir al conocimiento detallado de la práctica convencional de la enseñanza de las matemáticas, a dirigir las acciones de los profesores y las entidades financiadoras en relación con innovaciones en la escolaridad, y a proporcionar bases para la formación de profesores de matemáticas en ejercicio.

El IDEP, en cumplimiento de su misión de apoyar y difundir investigaciones educativas cuyos resultados ayuden a identificar prioridades y orientar políticas educativas para mejorar la calidad de la educación, se interesa en tener información confiable sobre la manera en que se enseña y aprende en las instituciones escolares de Bogotá.

En consecuencia, el IDEP abrió la Convocatoria Pública número 2 de 2001 para que universidades, centros de investigación y organizaciones no gubernamentales presentaran propuestas de investigación cuyo propósito fuera identificar y sistematizar las rutas pedagógicas convencionales en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica de Bogotá. En los respectivos términos de referencia se expresaba la problemática que se pretendía abordar y se puntualizaba la visión y las orientaciones básicas del concepto *rutas pedagógicas*.

Aun cuando numerosos estudios internacionales y algunos nacionales han realizado y reportado descripciones de la llamada “práctica tradicional”, la convocatoria del IDEP constituyó para “una empresa docente”, la oportunidad de profundizar y acrecentar sistemáticamente el conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas, lo mismo que sustentar y corroborar percepciones anteriores. Así el estudio “Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor” propuesto por “una empresa docente”¹ apuntaba a caracterizar la enseñanza de las matemáticas y a describir la práctica docente del profesor de matemáticas en instituciones de educación de básica secundaria de Bogotá. Por medio de unos acuerdos precontractuales con el IDEP se fijaron algunos de los detalles metodológicos del proyecto, como el número de profesores y de clases sobre los que se haría la observación. A través del contrato número 21 de 2001, se formalizó el compromiso y la financiación del estudio por parte del IDEP.

1. “una empresa docente” se hace responsable de las opiniones, visiones, conceptualizaciones e interpretaciones expresadas en este libro, sin implicar que sean compartidas por el IDEP.

INTRODUCCIÓN

En Colombia es claro que el problema de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes en el nivel escolar, persiste y es grave, sin importar las definiciones de “calidad” y de “formación matemática” que se acojan (Gómez, Perry, Valero, Castro y Agudelo, 1998, p. 105; Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo, 1998).

La deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes está involucrada en una problemática compleja donde intervienen factores de diversos niveles² del sistema educativo y compromete visiones, decisiones y acciones de los actores en tales niveles. Para el análisis de esta problemática Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo (1998) distinguen los problemas y circunstancias de cada nivel y se enfocan en examinar el funcionamiento de las matemáticas escolares en el nivel institucional, para lo cual construyen un modelo del Sistema Institucional de la Educación Matemática (SIEM) que comprende elementos y relaciones asociados fuertemente con la problemática. En este modelo se identifican tres subsistemas: el de los directivos-docentes en el que se realiza la importancia de los roles del rector y del liderazgo del coordinador del área de matemáticas; el del grupo de profesores de matemáticas en el que sobresalen el diseño curricular, el desarrollo profesional y la interacción entre los profesores como prácticas propias de la cultura profesional del grupo; el del profesor como individuo en el que se considera su conocimiento, sus creencias acerca de lo que son las matemáticas, cómo se aprende y cómo se debe enseñar, el cuestionamiento de las propias creencias y el compromiso con su práctica docente.

A pesar de que la conceptualización de “rutas pedagógicas” elaborada por el IDEP involucra elementos tanto del nivel institucional como del nivel didáctico, y muchos otros que los complementan, vemos que en la construcción y puesta en práctica de rutas pedagógicas el actor principal es sin duda el profesor de matemáticas³. El profesor es quien de manera más natural, legítima y directa tiene la autonomía y las oportunidades para buscar e implementar alternativas de solución que propendan por unos resultados más efectivos de su quehacer profesional en la formación de sus estudiantes. El profesor con su conocimiento, sus creencias, sus hábitos de pensamiento y

2. Estos factores, según Rico (1997), se ubican en tres niveles interconectados entre sí: el nivel social donde intervienen los factores sociales, políticos, económicos y culturales; el nivel institucional donde se localiza la institución con sus concepciones y políticas; el nivel didáctico donde se relacionan el profesor y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático a través del desarrollo de un currículo.
3. No obstante que la iniciativa de adelantar el proyecto de investigación en torno a la idea de “rutas pedagógicas”, que originó el estudio descrito en este libro, fue del IDEP, la visión sobre la calidad de la educación y sus causas corresponde a la visión que “una empresa docente” ha construido a lo largo de sus años de trabajo y experiencia con la Educación Matemática, y no necesariamente es acorde con la del IDEP.

de acción, sus intereses y valores, etc., desarrolla el currículo y por consiguiente crea, gestiona y evalúa las situaciones de enseñanza que propician un determinado ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes llevan a cabo unas determinadas tareas y se involucran en una serie de actividades a través de las que se va construyendo su conocimiento de las matemáticas lo mismo que su visión acerca de lo que es hacer matemáticas. Amaya (1997, p. 45) señala el papel preponderante de la acción del profesor⁴ en los resultados que se obtienen en los estudiantes:

La calidad de la educación que reciben los jóvenes en la escuela tiene una íntima relación con la acción del maestro, ya que es él quien propone y orienta las mediaciones con el conocimiento de los distintos saberes, con la formación ético-social del ciudadano, con las posibilidades y los retos de la creatividad y la invención en todos los campos.

En relación con los reiterados esfuerzos de reforma educativa emprendidos con el propósito de mejorar los resultados de aprendizaje en los estudiantes, Osterman y Kottkamp (1993, p. 2) señalan que la forma como se ha abordado el cambio educativo es deficiente por cuanto se ha centrado en imponer cambios, desde fuera, a aspectos particulares que parecen no estar funcionando adecuadamente —v.g., los libros de texto, el currículo, la cantidad de tiempo de estudio, etc.— cuando lo que se requiere es el cambio en las personas implicadas en las situaciones para que las situaciones mismas cambien. En consonancia con la idea de esos autores, en el contexto de la reforma educativa que se está llevando a cabo en nuestro país se exige una participación renovada y activa de todos los docentes, sin la que sería imposible lograr una relación de articulación entre las implicaciones de la descentralización curricular y los lineamientos generales y estándares propuestos en MEN (1998, 2002).

Centrar la atención en el profesor como uno de los responsables directos de la calidad de la educación de los estudiantes, implica necesariamente examinar su práctica docente cualquiera sea el significado que se dé a este concepto. Aun considerando las diferencias entre los varios significados y las diversas restricciones de contexto que en la literatura se le hayan podido asignar, la práctica docente del profesor hace referencia a las acciones y en general a las actividades que éste realiza en el ejercicio de su profesión, en pro del aprendizaje de los estudiantes.

Ante las numerosas reformas y propuestas innovativas para la práctica y frente a las exigencias de la reforma educativa de 1994 y las direcciones que posteriormente se han definido a través de la llamada “Revolución educativa” en Colombia, es imprescindible acrecentar el conocimiento de la comunidad acerca de lo que constituye la práctica docente actual del profesor de

4. Aunque la educadora se refiere a la educación en general, sus palabras se pueden aplicar sin mayor problema a la educación matemática.

matemáticas. Es indiscutible que los nuevos planteamientos deben provenir del estudio y contrastación de la forma como los profesores han venido haciendo y suponiendo las cosas en nuestro medio, de la identificación de características que nos puedan ser propias y que sitúen la problemática en el contexto social y cultural que vivimos, que indiquen cuál es el cambio que se requiere hacer.

Para contribuir a satisfacer las exigencias que se derivan de las nuevas circunstancias del sistema educativo, “una empresa docente” planeó y adelantó, con el apoyo del IDEP, un estudio con el objeto de describir la práctica docente del profesor de matemáticas en instituciones de educación de básica secundaria de Bogotá. El estudio acopió información de diversas fuentes (un cuestionario para los profesores, un cuestionario para los estudiantes, observaciones directas de clase y entrevistas para los profesores de cinco estudios de caso), elaboró un marco conceptual para hacer esta descripción y consideró una gran y variada cantidad de aspectos que pueden ayudar a conocer y comprender cómo sucede la enseñanza en tanto práctica sociocultural.

En este estudio a pesar de que tomamos como foco principal el salón de clase, fuimos conscientes de que era imperativo dar cuenta también de otras actividades que hacen parte de la práctica docente, pues aunque algunas de ellas no están directamente relacionadas con las clases sí determinan e influyen el actuar del profesor en ellas y por consiguiente inciden en lo que allí pasa. Se consideró entonces necesario conocer detalles acerca del tipo y desarrollo de las actividades primordiales en las que los profesores se involucran para la preparación de clase y —dentro de su labor en el contexto amplio de la institución— para la planeación institucional. Esta información incluyó cuáles son dichas actividades y qué características esenciales definen cómo se llevan a cabo.

En el contexto del salón de clase, nos interesaba conocer las acciones que de manera predominante realiza el profesor allí, describir el contenido matemático abordado y su didáctica, los rasgos más característicos del discurso que se da en la interacción entre los integrantes del grupo, y por último, la relación del profesor y los estudiantes con la autoridad sobre el conocimiento matemático que se pone en juego. Igualmente, con el fin de poder comparar tales acciones, con las señaladas en las caracterizaciones que de la llamada práctica tradicional se han hecho, fue indispensable observar las clases de los profesores desde esta perspectiva, y construir de manera descriptiva una caracterización propia de nuestro medio. Esto posibilitó, así mismo, obtener información acerca de la práctica docente, distinta de la conocida a través de los estudios aludidos, que no obstante haber sido confirmada de manera informal en muchas de nuestras instituciones educativas, era primordial develar de forma más sistemática.

En particular, era indispensable aportar a la claridad y precisión de lo que se denomina enseñanza tradicional de las matemáticas en nuestra comunidad, ya que es usual que los profesores no reconozcan su práctica como

tradicional y más bien cuando pueden compararla con situaciones de prácticas innovadoras, identifican semejanzas con ellas. Es posible que esto se deba en parte a que han introducido modificaciones en el aula. Desde hace unos pocos años, se viene percibiendo —a raíz de las reformas— que algunos profesores han hecho cambios en sus clases y en consecuencia hay prácticas a medio camino entre lo que se denomina tradicional y lo innovador, a las que el IDEP se refiere como convencionales cuando ya han sido consolidadas. En el estudio se comprobó esta percepción con respecto a cambios que sin embargo, no parecen tener implicaciones significativas en el aprendizaje de los estudiantes.

Es claro que además, conocer en nuestra realidad la práctica docente del profesor de matemáticas y tener una idea más certera de ella contribuye en la planeación de la formación de profesores y determina los aspectos a enfatizar en ella. Brown, Cooney y Jones (1990, citados en Nickson, 1992) anotan que la investigación interpretativa puede proveer una comprensión más profunda de los procesos del profesor y en consecuencia puede proporcionar una base para plantear programas de formación de docentes. Específicamente esta información es vital para nuestro grupo de investigación que desde hace varios años ha estado comprometido con la formación de profesores de matemáticas en ejercicio como medio para incidir, indirectamente y a largo plazo, en la calidad de las matemáticas escolares del sistema educativo del que hace parte.

LA PRÁCTICA DOCENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La práctica de enseñar del profesor de matemáticas es un fenómeno complejo que implica atender a una gran diversidad de asuntos, tomar decisiones que tienen repercusiones en los estudiantes y actuar bajo unas condiciones altamente restrictivas. Además los profesores deben desempeñar sus labores de manera comprometida y relacionada.

Se concibe como el conjunto de las actividades que realiza con el propósito de contribuir a la formación matemática de los estudiantes en una institución educativa. Incluye variedad de actividades relacionadas con la enseñanza en el salón de clase y fuera de él. Según Perry, Andrade, Fernández y de Meza (2000, p. 10) la práctica docente del profesor de matemáticas se refiere a acciones relativas a la enseñanza de las matemáticas propiamente dicha, como son el diseño y desarrollo curricular, la evaluación y diagnóstico del aprendizaje de los estudiantes, la realización de proyectos de indagación e innovación como medios para comprender y mejorar su práctica, etc.; pero también abarca acciones diversas que hacen parte de la carga laboral del profesor como son la atención a los padres de familia, la participación en actividades institucionales y en actividades del grupo de profesores, y acciones como la interacción y cualificación profesional.

Diversos autores (v.g., Schön, 1983; Mason, 1996) ubican las labores del profesor directamente vinculadas a la clase en tres momentos en el tiempo: antes de la clase (v.g., la preparación de clase, la preparación de evaluaciones), durante la clase (v.g., la organización de los estudiantes, el manejo del orden y la disciplina, la presentación de las tareas a los alumnos, los cambios o desviaciones en la trayectoria trazada, el discurso y la comunicación que propicia, etc.), y después de la clase (v.g., la revisión de tareas, la reflexión sobre lo sucedido). Tales actividades conforman así un ciclo donde las del último y primer momento llegan a confundirse. Para Llinares (2000), la práctica docente no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula; así, otras labores que hacen parte de la práctica docente y también determinan la enseñanza, a pesar de estar ligadas más indirectamente a ella, son las actividades de desarrollo profesional, formal o no, que el profesor realiza, la participación en las reuniones de área y departamento y en general en las actividades que la institución programa, la organización de actividades relativas a las matemáticas por fuera de la clase, etc., prácticas que hacen parte de lo que Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo (1998), denominan la cultura profesional de los profesores de matemáticas de una institución.

Sanders y McCutcheon (1984) destacan cuatro características de la práctica de enseñar que ayudan a ver la complejidad inmersa en este fenómeno. En primera instancia, la enseñanza involucra un trabajo activo, intencional y cargado de valores; el trabajo es activo no sólo físicamente, sino también

emocional y mentalmente, dada la cantidad de cuestiones, acciones y decisiones a las que es necesario atender de manera permanente; es intencional porque hay que actuar con metas establecidas; los valores y visiones del profesor permean su trabajo. En segundo término, hay imperativos de tiempo para la enseñanza que la moldean y restringen. En tercer lugar, hay otros factores presentes en la situación de enseñar que también influyen en los resultados, lo que hace imposible prever totalmente los efectos de la enseñanza. Por último, las consecuencias del actuar del profesor dependen igualmente de cómo los estudiantes perciben y construyen ese actuar.

EL MARCO CONCEPTUAL, SU ORIGEN Y EVOLUCIÓN

En el intento de caracterizar un fenómeno tan complejo como la enseñanza de las matemáticas, resulta imprescindible construir un marco conceptual descriptivo que permita mirar y comprender cómo hace el profesor lo que hace. También se ve como inevitable que al asumir la perspectiva que provea este marco se dejarán de percibir aspectos que afectan y determinan tal fenómeno.

La elaboración del marco conceptual al que se llegó en nuestro trabajo se hizo en el curso de todo el estudio, y aunque en el inicio se fundamentó en la literatura consultada y en nuestra experiencia, luego se fue nutriendo de las observaciones directas de clase que se iban haciendo.

LA PRIMERA VERSIÓN

Para empezar el trabajo de construcción del marco conceptual se hizo una primera aproximación, basada en la experiencia de los investigadores y diversas fuentes bibliográficas, con el fin de establecer cuáles podían ser a grandes rasgos los aspectos relevantes para mirar en la práctica docente del profesor de matemáticas. Como resultado de las ideas provenientes de estas dos acciones y a partir de la idea general de lo que se buscaba observar, surgió una lista de actividades docentes clasificadas según los momentos en que usualmente las realiza el profesor.

Se consideraron dos momentos distintos pero relacionados entre sí de manera intrínseca, que han sido identificados por autores como Jackson (1975, citado en Llinares, 2000), Schön (1983), Schoenfeld (1996) y Mason (1996): las fases preactiva y activa que corresponden a las labores del profesor en la preparación de clase y en la clase misma respectivamente. Así se tuvieron en cuenta dos tipos de actividades, que según Llinares (2000) configuran el trabajo de enseñar, en el nivel de la clase: las que hacen parte de una fase de planificación (v.g., diseñar, elegir o modificar los problemas que se proponen a los estudiantes, determinar la organización del contenido que se presentará durante la clase, definir los problemas y las cuestiones de evaluación); y las que hacen parte de la gestión del proceso de enseñanza aprendizaje para una clase, tanto específicas del conocimiento matemático que subyace a los problemas que se proponen y relativas a la interacción entre los estudiantes, como de carácter general (ejemplificadas por la coordinación de los distintos segmentos de la clase, del trabajo en grupo, de la discusión en todo el grupo, la interpretación y respuesta a las ideas de los estudiantes, la construcción y uso de representaciones, la introducción de material didáctico o de entornos informáticos). Para aglutinar estos dos tipos

de actividades se establecieron entonces dos grandes categorías denominadas “Clase” y “Preparación de clase”.

Así mismo se tuvieron en cuenta actividades que se llevan a cabo en otros momentos, que se agruparon bajo la categoría designada “Actividades extraclase”, que también según Llinares (2000) — en una conceptualización amplia de la práctica del profesor— hacen parte de tal práctica, como por ejemplo, las actividades que en la institución se programan para los profesores y otras actividades que con frecuencia realizan por fuera de la clase pero que están vinculadas a ella, como tutorías, reuniones de área y departamento, actividades de formación, etc. Surgieron en consecuencia nuevos momentos en la labor del profesor, que se denominaron “Desarrollo profesional” y “Planeación anual”; en los que se incluyeron actividades concernientes a la formación y el desarrollo profesional del profesor y actividades en las que participa el profesor para planear cosas a nivel de la institución, respectivamente.

Por otro lado, se contemplaron actividades que pueden constituir un grupo aparte de las mencionadas por la intención que tienen, pero que no necesariamente se ejecutan o abordan en momentos distintos de los ya especificados; son las actividades relativas a la evaluación de los estudiantes y del proceso de enseñanza en sí mismo, y a la asignación de las tareas para desarrollar en la casa, las cuales se consideraron bajo dos categorías independientes, designadas respectivamente, “Tareas para la casa” y “Evaluación”; en esta última se puntualizaron acciones relativas a la utilización de instrumentos y recursos para hacer la evaluación, y acciones que aludían al proceso mismo de análisis de resultados que el profesor lleva a cabo, que interesa mirar con detenimiento pues es común que en nuestro medio tal proceso se reduzca a verificar si la respuesta es correcta o no.

Las actividades incluidas en la categoría “Clase” se traducen básicamente en acciones visibles del profesor y, en consecuencia, son observables por otra persona; conciernen de manera principal a lo que hace el profesor para desarrollar su clase, a la organización de los estudiantes, a los recursos usados para el trabajo en clase y a la revisión y asignación de tareas para la casa. Había, además, en esa lista algunas que aludían a la socialización de las ideas en clase. Se decidió por consiguiente, contemplar dos subcategorías aquí: una que diera cuenta de las actividades del profesor y otra, del discurso en sí mismo. Aunque inicialmente el término “discurso” se había pensado según las concepciones sugeridas por Sfard (2000a, 2001) que abarcan cualquier forma de comunicación, bien sea escrita, oral, gestual, e incluso mental de una persona consigo misma al leer o reflexionar, así como las reglas que regulan dicha comunicación, o por autores como Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997)⁵, por razón de facilitar la obtención de la información, dicho término se tomó significando solamente la forma y el contenido de las intervenciones orales o escritas, y los gestos del profesor y de los estudiantes. Este uso del término “discurso” está más en concordancia con el que se

hace en los Estándares del NCTM (1989, 1991, 2000), referido a las formas de representar, pensar, hablar, escribir, llegar a acuerdos y disentir que los profesores y los estudiantes usan, es decir, a las formas de intercambiar ideas, y también a lo que conllevan las ideas mismas. Se pensó en incluir también aquí, información con respecto a la relación de poder o autoridad con el conocimiento que se reconoce en clase: lo que se considera actividad matemática legítima y lo que cuenta como respuesta correcta, elementos presentes en la cultura de la clase y resaltados por Sfard (2000a), Carpenter y Lehrer (1999), Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997), NCTM (1991), como valores fundamentales involucrados en el discurso que allí se maneja. Así, se optó por considerar otra subcategoría para poder discriminar detalles sobre cómo se da esa relación en la clase, cómo se construyen las reglas que gobiernan la interacción y el comportamiento, si éstas son conocidas por todos los participantes o no, cuáles son los valores que se transmiten —explícita o implícitamente— y se perpetúan mediante las prácticas cotidianas en las clases, qué es lo que se acepta como respuesta adecuada en clase y quién lo determina.

Se añadió otra nueva categoría que respondía a la preocupación de los investigadores con respecto a la especificidad de las matemáticas que se podía reflejar en la caracterización a medida que ésta se iba construyendo. Muchos investigadores han resaltado las características particulares de la enseñanza de las matemáticas comparada con otras asignaturas⁶. Se pensó en consecuencia, dar cuenta aquí del enfoque que se privilegia al enseñar un tema o asignatura, y de los objetivos de aprendizaje. Así, se miraron las distintas conceptualizaciones del álgebra que el profesor puede enfatizar en su enseñanza propuestas por Usiskin (1988) y de las cuales se desprende la importancia relativa que se da a los usos de la variable: el álgebra como aritmética generalizada, el álgebra como el estudio de estructuras, el álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y el álgebra como el estudio de procedimientos para resolver problemas; se consideraron los planteamientos de Alsina, Fortuny y Pérez (1997) sobre posibles enfoques complementarios en la enseñanza de la geometría: la geometría como ciencia del espacio, la geometría como encuentro entre la teoría y los modelos matemáticos, y la geometría como el estudio de la visualización de conceptos y pro-

5. El quehacer principal que estos autores cobijan con el término “discurso” hace referencia al modo en que los participantes en clase negocian y atribuyen significados a las ideas matemáticas.
6. Como lo anota la investigadora Sfard, para Russell (1904, citado en Sfard, 2000b) en las matemáticas “el no saber de qué se está hablando” es una característica única que ubica el discurso matemático aparte de cualquier otro discurso. Para la misma Sfard (2000b), esta diferencia tiene que ver con las formas en que los significados son construidos y comunicados. En matemáticas la mediación perceptual en el discurso es escasa y sólo es posible con la ayuda de lo que se conoce como sustitutos simbólicos de los objetos que se consideran, mientras que en otras asignaturas la comunicación puede estar mediada perceptiblemente por los objetos mismos sobre los que se está discutiendo.

cedimientos. Estos enfoques para el álgebra y la geometría no fueron lo suficientemente convincentes, en primer lugar por la dificultad para detectarlos mediante la observación de sólo unas clases, y en segundo lugar, por razón de la poca probabilidad de que se ajustaran a la realidad de lo que el profesor hace.

En consecuencia se pensó en tener en cuenta las tareas matemáticas que se proponen, ya que éstas configuran un ámbito de análisis y caracterización de las clases. Una de las responsabilidades que de manera natural se le atribuyen al profesor en las clases, es la asignación de las tareas que deben realizar los estudiantes dentro y fuera de las clases. En términos generales el desarrollo de tales tareas y específicamente la actividad intelectual promovida por éstas buscan suscitar o condicionar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, pero también idealmente, este aprendizaje se refiere a fomentar otros aspectos como la disciplina de trabajo, la concentración en una tarea, el manejo adecuado del tiempo, la autoestima, el reconocimiento de habilidades y debilidades, el orden y la organización, el cumplimiento y la puntualidad, etc. También contempla aspectos específicos tales como razonar matemáticamente, comunicar ideas matemáticas, resolver problemas a través del uso de las matemáticas, hacer conexiones entre ideas matemáticas, comprender un concepto o un procedimiento matemático. En este sentido, las tareas que el profesor propone determinan las oportunidades de aprendizaje de las matemáticas que los estudiantes puedan tener; el desarrollo de la actividad matemática que tales tareas promuevan constituye el referente de acción para que los estudiantes puedan configurar una idea de lo que es “hacer matemáticas” y de lo que son las matemáticas mismas, que se nutre y apoya en lo que se hace en el aula de clase.

Se consideró estipular los tipos de tareas matemáticas según uno de los tres criterios propuestos por Ernest (1989a, 1989b) para diferenciar la enseñanza, criterio que atiende a la forma en que el profesor concibe las matemáticas: como tareas de carácter instrumental y básicas, o más bien como tareas creativas y con fines exploratorios. Finalmente se consideraron ideas de la categorización general de tipos de tareas que Doyle (1977, citado en Flores, 2001) presenta, la cual diferencia las tareas por las demandas cognitivas que éstas exigen: tareas de memoria que exigen memorizar o reproducir información; tareas de rutina o procedimiento que exigen la aplicación de una fórmula estándar o algoritmo; tareas de comprensión o entendimiento, en las que se espera que el estudiante transforme versiones de información y decida y aplique procedimientos a nuevos problemas que exigen conocer por qué y cuándo se usan; tareas de opinión que exigen establecer preferencias. También se vio la necesidad de identificar los participantes en cada una de tales tareas, de acuerdo con los señalamientos de Bishop y Goffree (1986, citados en Ponte, Boavida, Graça y Abrantes, 1997) cuando hablan de la simetría que debe existir entre las tareas que el profesor hace y las que llevan a cabo los estudiantes (v.g., el profesor debe preguntar y respon-

der preguntas, dar razones y pedir razones, clarificar y pedir clarificaciones, describir y pedir descripciones, dar y pedir analogías, dar y pedir contraejemplos, explicar y pedir explicaciones, dar y recibir ejemplos, etc.).

EVOLUCIÓN DE LAS CATEGORÍAS HACIA UNA CLASIFICACIÓN DE LAS NORMAS DE CLASE

Con la aplicación del cuestionario a los profesores fue evidente que sus respuestas daban una idea de lo que hacen en términos de las actividades que realizan o no, pero que a través de dichas respuestas no era posible hacerse una idea concreta del discurso del profesor en matemáticas y además, se tenía poca información acerca de las particularidades de la enseñanza en matemáticas y de su distinción entre las diferentes asignaturas consideradas: aritmética, álgebra y geometría.

Así mismo se notó que a pesar de que la información recogida mediante el cuestionario del profesor y a través de las observaciones, incluía algo sobre la aprobación del trabajo matemático de los estudiantes y por tanto acerca de la autoridad y la cultura de la clase, era necesario obtener más información al respecto que permitiera dar cuenta de la forma de aprobación que se provee en la clase, los gestos y palabras que se esgrimen, cómo y para qué se organiza la clase en la forma en que se organiza, cuál es el discurso que se da en clase, quién habla y para quién dice lo que dice, cuál es la razón de la permisividad con los estudiantes.

De las clases observadas emergió nueva información sobre aspectos no considerados anteriormente, que en conjunto podían suministrar una mirada más profunda y relevante de la enseñanza del profesor de matemáticas, es decir que permitiría hacer una caracterización complementaria a lo que se dijera en términos de las acciones o tareas que se llevan a cabo. Se vio que la manera en que se dan ciertas cosas en las clases, como el comportamiento de los estudiantes y en particular de ciertos estudiantes, la interacción del profesor con los estudiantes, las preguntas que son contestadas o no por los estudiantes y la forma en que son contestadas, sugieren que puede haber por detrás normas, no necesariamente explicitadas, que regulan su funcionamiento. Es decir, que se percibían algunas reglas con las que se maneja la clase y en especial el discurso, que podrían encajar dentro de la propuesta del llamado “contrato didáctico” de Brousseau (1993), o de las denominadas prácticas normativas que según Carpenter y Lehrer (1999) gobiernan la naturaleza de la interacción que se da en el aula y forman la base para establecer la manera en que las tareas se usan para aprender; también que podrían interpretarse dentro del marco desarrollado por Paul Cobb y Erna Yackel (ver Cobb y Yackel, 1996; Yackel y Cobb, 1996) en sus estudios sobre la clase de matemáticas para analizar las actividades de profesores y estudiantes en el salón de clase. Estos dos últimos autores han encontrado útil hacer una

distinción entre los diferentes constructos que denotan tres aspectos de la microcultura de clase: las normas sociales de clase, las normas sociomatemáticas de clase y las prácticas matemáticas de clase⁷. O bien, podrían verse como las reglas de nivel superior o metadiscursivas (metarreglas) que regulan el flujo del discurso, definidas por Sfard (2000a, 2001)⁸.

Se rescataron comportamientos y acciones frecuentes del profesor y de los estudiantes que se veían como recurrentes o parecían ser habituales y otras regularidades, que precisamente por su continua ocurrencia, se imponen como útiles a la hora de describir tales clases. Se estableció así una primera clasificación de las normas que operan en la clase, en categorías influenciadas por las ideas de esos autores; se diferenciaron allí normas relativas al comportamiento de los estudiantes en términos de la disciplina y del manejo que el profesor le da; normas relativas a la interacción entre los estudiantes y con el profesor; normas relativas a la forma en que se organizan los estudiantes para desarrollar el trabajo académico y a los recursos utilizados; normas relativas a cómo y quién aprueba o desaprueba el trabajo; el contenido del discurso en términos de lo que se considera una respuesta apropiada o no apropiada, una respuesta diferente, una respuesta eficiente, un argumento válido; el contenido del discurso en términos de los conceptos y procedimientos abordados, las conexiones establecidas, las definiciones propuestas, lo que enfatiza el profesor; una mirada global al discurso desde el punto de vista matemático para intentar identificar una tendencia.

TRANSFORMACIÓN DE LA CLASIFICACIÓN DE NORMAS EN CATEGORÍAS MÁS AMPLIAS

Al intentar describir hechos de la práctica docente en términos de reglas, los investigadores no nos sentimos cómodos con la idea de encajar la investigación en un marco específico que obligara a dejar por fuera varios de los aspectos ya percibidos y evaluados como importantes para la caracteriza-

7. Las normas sociales para Cobb y Yackel están relacionadas con las creencias acerca del papel del profesor y de los estudiantes, de la naturaleza de la actividad matemática escolar; por ejemplo, la necesidad de explicar y justificar las soluciones que se presenten durante la clase. Las normas sociomatemáticas aluden a lo que cuenta en clase como una solución matemática diferente, una solución sofisticada, una solución eficiente, y una solución aceptable o válida. Las prácticas matemáticas de clase se refieren a la actividad matemática misma que se da en clase comúnmente y a las concepciones que ellas ponen en juego.
8. Para Sfard (2000a), las metarreglas del discurso regulan el flujo del intercambio y son reglas poco explicitadas para las acciones de comunicación en el género humano, que cuentan como las maneras apropiadas de conducir un tipo particular de discurso. Las reglas a nivel de los objetos del discurso matemático gobiernan el contenido del intercambio y son específicas a las matemáticas. Hacen parte del contenido del discurso donde también se ubican las proposiciones y demás elementos del contenido matemático.

ción de las clases observadas. Esto nos condujo a dedicar bastante trabajo en el establecimiento de otras posibles categorías que recogieran algunos de los aspectos incluidos en las normas, pero no bajo esa óptica. Por esta razón se propuso intentar determinar unos asuntos sobre los que se quería hablar. Es claro que la construcción de estas nuevas categorías no estuvo desligada de las propuestas de los autores consultados y en consecuencia no es raro encontrar coincidencias y hacer asociaciones, pero sin que se ajusten exactamente a aquéllas. Se discutieron así, ampliamente, distintos asuntos para llegar a acuerdos sobre los que en definitiva se quería decir algo.

En principio estos asuntos fueron los relativos a la información que el profesor percibe y no percibe de lo que sucede en clase, evidenciados a través de ver a qué reacciona el profesor; si no hay reacción, es difícil saber si esto se debe a que el profesor no percibió esa información o a que eligió no reaccionar. Se determinó como importante describir cuál es esa reacción y la frecuencia con que lo hace. Igualmente para completar este panorama, se estipuló dar cuenta de información que los observadores detectan y que es probable que el profesor también la haya percibido, pero que no genera ninguna reacción en él.

Atendiendo más a la especificidad de las matemáticas se vio la necesidad de destacar el contenido matemático del discurso en el aula, y dar cuenta de los temas, subtemas, conceptos, procedimientos abordados para el tema tratado en las clases de cada profesor, del orden en que fueron abordados, las conexiones que se establecieron, las definiciones propuestas, la pertinencia e intenciones de las tareas que se proponen, la relevancia de éstas para el tema, los ejemplos propuestos, lo que se hace explícito, etcétera.

También fue patente que se requería registrar el tipo de conocimiento que se enfatiza en la clase, es decir si el conocimiento que se promueve es conceptual, procedimental, qué sistemas de representación se utilizan con más frecuencia y si se hacen transformaciones en un mismo sistema o entre distintos sistemas, la clase de ejemplos, la contextualización de éstos en la vida real, etc. Igualmente se pensó que sería deseable poder hablar de cómo se trata lo arbitrario y lo necesario del conocimiento matemático en clase, de acuerdo con los planteamientos de Hewitt (2002a, 2002b, 2002c).

Así mismo, se consideró indispensable retomar aspectos de la cultura que se constituye en las clases por las prácticas habituales que allí se dan⁹

9. Subyacente al ambiente de cada clase hay, según Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997), una cultura que regula las normas de comportamiento y de interacción, y establece las expectativas de los participantes. A veces estas normas se negocian y definen de manera directa, pero con frecuencia se manifiestan a través de mensajes indirectos. La cultura del salón de clase se configura entonces tanto por las acciones, intervenciones y gestos visibles de los participantes como por las que no se explicitan y son tácitas.

(v.g., las respuestas y el conocimiento matemático que se aceptan como válidos en clase, quién o qué es el encargado de aprobar o desaprobar y cómo se hace). También se indicó la importancia de contemplar asuntos relativos al intercambio social, considerado como la principal circunstancia donde el estudiante puede construir o modificar significados matemáticos (Cobb, 2000), en concordancia con la visión acerca del aprendizaje de las matemáticas como una actividad inherentemente social y cultural y no como una actividad individual (van Oers, 1996, Schoenfeld, 1987, Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988, citados en Yackel, 2000; Greeno, 1991, Sfard, 1994, citados en Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000; Cobb y Yackel, 1996). Asuntos tales como el modo y el momento en que contestan el profesor y los estudiantes, si hay diálogo entre profesor y estudiantes, si hay respuestas directas del profesor a los estudiantes en público, si todas las preguntas son atendidas y cuáles son atendidas, cuál es la intención de las preguntas del profesor.

EL MARCO CONCEPTUAL DEFINITIVO

Con base en un refinamiento de los asuntos definidos se elaboró el marco conceptual definitivo para caracterizar la práctica docente del profesor de matemáticas circunscrita a sus actividades en el aula; tal marco emergió a lo largo del estudio y se utilizó en la observación de las clases. Nuestra intención fue describir la práctica docente cubriendo la mayor cantidad de hechos, actividades y asuntos implicados en ella. Se establecieron cuatro grandes categorías estrechamente relacionadas, que separan los asuntos relativos a la práctica del profesor con el fin de simplificar la mirada a dicha práctica y su análisis: el esquema usual para hacer las clases en términos de las actividades que se llevan a cabo, en la categoría “Esquema de las clases”; el contenido del discurso matemático, las tareas matemáticas que se proponen y el tipo de conocimiento matemático que se moviliza, en la categoría “Visión panorámica de los temas tratados”; el contenido del discurso no matemático y la manera en que se da la comunicación en el salón de clase, en la categoría “Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje”; la autoridad que se reconoce y lo que se considera válido frente al trabajo de los estudiantes, en la categoría “Valoración de las producciones de los estudiantes”. No obstante que es posible ver algunos de estos asuntos como apropiados para hablar de la enseñanza de asignaturas diferentes, se intentó considerarlos siempre desde una perspectiva vinculada con las matemáticas que se abordan.

Somos conscientes de que esta clasificación difiere de propuestas recientes de autores como Sfard (2000a, 2000b, 2001), Cobb y Yackel (1996), Yackel y Cobb (1996), Yackel (2000), Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) en las que la clase se mira teniendo como centro el discurso ma-

temático que allí se da. Creemos que la distinción atiende solamente a la forma de nombrar y a la existencia en nuestro estudio de varios focos, pues en los asuntos que describimos están contemplados, entre otros, los elementos involucrados en el discurso, tales como las normas que lo regulan, el contenido de éste, las prácticas matemáticas que se ponen en juego, las reglas matemáticas que se emplean, la autoridad que se reconoce frente al conocimiento matemático, etcétera.

ESQUEMA GENERAL

Aunque la enseñanza es un fenómeno dinámico que cada día puede tener muchas variaciones, y de acuerdo con Schön (1983) es un fenómeno complejo, incierto, inestable, singular y que contiene una carga de valor, las investigaciones que al respecto se han hecho muestran que existen tendencias marcadas en la forma en que los profesores desarrollan sus clases.

En particular, esto es aun más cierto con respecto a las clases de un mismo profesor, en donde es habitual que el profesor reproduzca actuaciones visibles, tales como las acciones que realiza, el tipo de tareas que propone, la manera en que se dirige a los estudiantes, etc. Gregg (1995) describe un patrón de comportamiento del profesor, común a muchas clases, con el que coinciden descripciones de una clase tradicional hechas por otros autores (Fey, 1981, Stodolsky, 1988, Stigler y Hiebert, 1997, citados en Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000; Romberg y Kaput, 1999). El profesor empieza por revisar con todo el grupo de alumnos las respuestas a las tareas asignadas con anterioridad, luego explica y escribe el tema que es objeto de la clase, introduce material nuevo, trabaja con algunos ejemplos para ilustrar lo que ha explicado y asigna trabajo para que los alumnos lo realicen de manera individual en clase o en la casa. En Colombia, Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo (1998) reportan que según los profesores participantes en un estudio realizado, sus actividades típicas en la clase son actividades a través de las cuales se desarrolla la clase, como la presentación del contenido, la resolución individual de ejercicios y la solución de dudas por parte del profesor.

El esquema general de la clase se concibe entonces como el esquema usual de cada profesor para hacer su clase conformado por las actividades de la clase que se repiten y para las que detectan regularidades en el modo en que ocurren y su intención. Se consideran tanto actividades específicas para el aprendizaje de las matemáticas como actividades que se relacionan indirectamente con éste.

Esquema general	
Actividades	<p>Relativas al trabajo con matemáticas (v.g., asignación de tareas, presentación del tema, evaluación, coordinación de discusiones, plenarias, trabajo de los estudiantes para desarrollar tareas asignadas).</p> <p>Que apoyan el trabajo con matemáticas (v.g., motivación del interés de los estudiantes con asuntos no matemáticos, consideración de técnicas de estudio).</p> <p>Referentes a asuntos de interés para la formación integral del estudiante y para el funcionamiento de la clase como parte de una comunidad educativa (v.g., planeación de la participación de los alumnos en algún evento, información sobre fechas y eventos de la institución, rezo, revisión de asistencia).</p>
Rasgos de las actividades relativas al trabajo con matemáticas	<p>Participación y papel de alumnos y profesor en las actividades (v.g., quién las propone, quién las coordina, quién decide cuándo se terminan, qué hacen los estudiantes).</p> <p>Énfasis que se hacen (v.g., relacionados con la comprensión de los estudiantes, con la justificación del contenido matemático que se estudia, con el desarrollo de destrezas).</p> <p>Modo de realización (v.g., acciones que integran las actividades, límites claros entre las diferentes actividades, recursos usados, tiempo invertido).</p> <p>Tipos de tareas propuestos.</p> <p>Tipo de actividad matemática implicada en las tareas (v.g., hacer matemáticas, razonar matemáticamente, resolver problemas, comunicar ideas, hacer conexiones, consultar información).</p> <p>Propósito o intención que parecen tener las tareas para una situación de enseñanza específica (v.g., centrados en la comprensión, en la obtención de respuestas, en el desarrollo de competencias, en la memorización, en la concentración y disciplina de trabajo, en el orden y la organización, en el cumplimiento).</p>

VISIÓN PANORÁMICA DE LOS TEMAS ABORDADOS

Consideramos que la caracterización construida acerca de la enseñanza de las matemáticas atiende a la especificidad de esta asignatura y no se queda en descripciones que podrían dar cuenta de la enseñanza en cualquier área, lo que le imprime un sello que la distingue de otras caracterizaciones hechas más en términos de las actividades y acciones realizadas.

La visión panorámica pretende esbozar el camino seguido al tratar el contenido matemático. Se identifican los tópicos abordados en clase y su secuencia, las ideas matemáticas abordadas en clase y las tareas matemáticas puntuales que el profesor propone para su enseñanza, para las cuales se des-

cribe su enunciado y se atiende al contenido matemático implicado. La expresión “idea matemática” se considera en matemáticas, o en su didáctica, de manera rigurosa como el conjunto de conceptos y relaciones involucrados en una conceptualización compleja de algún tópico puntual matemático que debería ser el centro de la clase de matemáticas. Ante la necesidad de interpretar el tratamiento del contenido matemático en la escolaridad, en este documento, la expresión “idea matemática” se usa para indicar enunciados relativos a un tópico matemático puntual, que presentan un desarrollo parcial, no necesariamente sustentados en contenido matemático y desconectados, de forma que no constituyen de manera evidente una estructura.

Visión panorámica de los temas abordados	
Organización temática	Cómo es (i.e., se hace alrededor de un tema o de varios, se explicitan o no conexiones entre los temas, sufre modificaciones de acuerdo con lo que va sucediendo en clase, cuál es la secuencia de los temas).
Conocimiento matemático y su didáctica	<p>Los términos, nociones, conceptos, definiciones y enunciados trabajados; las notaciones y convenciones empleadas; los procedimientos ilustrados y usados.</p> <p>Tareas matemáticas mediante las cuales se concreta el aprendizaje (v.g., aplicación de procedimientos, generalización de regularidades, formulación de conjeturas, particularización, resolución de problemas).</p> <p>Uso de representaciones (v.g., tipo de representación predominante, hay traducción entre sistemas de representación).</p> <p>Tipo de conocimiento enfatizado: conceptual (i.e., hechos, conceptos, estructuras conceptuales) o procedimental (i.e., destrezas, razonamientos, estrategias).</p> <p>Características del tratamiento que se hace (v.g., sustentado en razones provenientes de las matemáticas o en razones de índole no matemática; enfoque empírico o deductivo).</p> <p>Alusión a temas ya vistos recurriendo a las ideas matemáticas involucradas o a anécdotas.</p> <p>Las cuestiones que se tratan de forma arbitraria siendo de naturaleza necesaria según la distinción que hace Hewitt (2002a, 2002b, 2002c)^a.</p> <p>Uso de recursos (v.g., tecnológicos, instrumentos).</p>
<p>a. Este autor califica los nombres y convenciones matemáticos como arbitrarios, —han sido adoptados por una comunidad, no se puede garantizar que el alumno los descubra por sí solo y deben ser comunicados— y las propiedades y relaciones entre objetos matemáticos como necesarias, pues los estudiantes pueden explorarlas y llegar a enunciarlas.</p>	

Teniendo en cuenta que diversos investigadores han encontrado que las visiones de los profesores con respecto a la naturaleza de las matemáticas y del aprendizaje se reflejan en las maneras como ellos presentan las matemáticas en la escuela, y por lo tanto es común que en el aula se privilegien ciertos tipos de conocimiento, se establece el tipo de conocimiento matemático que se enfatiza en las clases. Para esto se adopta la organización propuesta por Rico (1995, 1997) que considera los hechos, conceptos y estructuras conceptuales como constituyentes del conocimiento conceptual, el cual se caracteriza tanto por la cantidad de unidades de información como por la riqueza de relaciones entre tales unidades; y las destrezas, razonamientos y estrategias como el conocimiento procedimental, el cual hace referencia a los modos de ejecución ordenada de una tarea.

INTERACCIÓN A TRAVÉS DE LA CUAL DISCURREN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

Con frecuencia en las clases de matemáticas impera una forma de instrucción conocida como “instrucción centrada en el profesor”, en la que el profesor es la figura central y es quien domina la instrucción (ver Gregg, 1995; Cuban, 1984, Romberg y Carpenter, 1986 y Richards, 1991, citados en Gregg, 1995). Es natural esperar que en este ambiente, la interacción gire alrededor del profesor y sea él quien hable principalmente y determine cómo se usa el tiempo en la clase; además no es de extrañar que el trabajo que prevalezca en tales entornos sea con toda la clase más que con grupos pequeños, y que los estudiantes se sienten en filas en frente del profesor. Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo (1998) confirman estos resultados al indicar que en el desarrollo de la clase predomina una interacción controlada por el profesor a través de la presentación del contenido, la resolución de ejercicios individuales propuestos por el profesor y la resolución de dudas de los estudiantes por parte del profesor.

Esta categoría se refiere a la interacción que se da entre profesor y estudiantes, y entre los estudiantes mismos en los distintos escenarios a través de los cuales transcurre la clase — identificados con las grandes actividades que allí se llevan a cabo— en los que el intercambio se manifiesta de diferentes maneras. Se atiende tanto al modo de la interacción como al contenido que es objeto del intercambio, pues es frecuente que en muchos salones de clase tal y como Hewitt (2002c) lo describe, la conversación gire principalmente alrededor de cuestiones de control y de administración, de enunciados descriptivos o de la enumeración de las acciones realizadas, pero muy poco en torno a lo que guía las acciones y al contenido matemático que tiene carácter de necesario.

Se persigue también dar cuenta de si la interacción se da en forma de diálogo en el que participan en igualdad de condiciones los estudiantes y el profesor: si hay oportunidad de que ambas partes respondan e intervengan, si el

tiempo dedicado a las intervenciones es similar para cada uno, si todas las intervenciones se tienen en cuenta, si las intervenciones dentro de cierto lapso de tiempo se refieren a un mismo objeto de discusión, si se cuenta con la participación de varios de los estudiantes. O, si como lo señala Gregg (1995) las interacciones en el aula se estructuran a medida que la información se transfiere del profesor al estudiante, y asume así el docente un papel de proveedor de información, es decir, es el encargado de suministrar, en conjunto con el libro de texto, el contenido necesario para el trabajo de los estudiantes en clase.

Interacción a través de la cual discurren la enseñanza y el aprendizaje	
Contenido de la interacción	Cuestiones de control y administración (v.g., cómo deben llevar el cuaderno, llamados de atención sobre puntualidad, excusas presentadas por los alumnos, cómo es la asignación de puntos o calificaciones).
	Cuestiones relativas a la ética (v.g., principios de vida, comportamientos deseados, valores).
	Cuestiones matemáticas (v.g., explicación, argumentación, formulación de enunciados categóricos sobre ideas y/o procedimientos matemáticos) en el contexto de la teoría o en el desarrollo de tareas.
Rasgos de la interacción	Monólogo del profesor o diálogo (v.g., oportunidad y tiempo para consideración de las intervenciones de los integrantes del grupo social de la clase; conversación centrada en un objeto específico o dispersa; intervención por iniciativa propia o solicitada; participación de todos los estudiantes o de un grupo reducido, razones que motivan el intercambio).
	Preguntas (v.g., que inducen a explorar, que se pueden contestar con respuestas cortas y puntuales, que representan adivinanzas para los estudiantes, que exigen razones y explicaciones).

VALORACIÓN DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

Es usual que mediante algunos de los comportamientos del profesor en el salón de clase se ponga de presente lo que él considera importante de aprender, lo que piensa que es una respuesta apropiada, su papel de autoridad con respecto al conocimiento y al discurso que se manejan en el aula. Estos aspectos de la práctica docente marcan definitivamente trayectorias posibles para la enseñanza.

Tal y como Gregg (1995) lo manifiesta, es común que la evaluación de las respuestas de los estudiantes por parte del profesor se limite a mirar si ellas son correctas o no. Para Ernest (1989a, 1989b)¹⁰ otro criterio que puede usarse para diferenciar la enseñanza de los profesores de matemáticas, adicional al mencionado anteriormente, está relacionado con la considera-

ción del conocimiento matemático que se aborda en la enseñanza como un conjunto de hechos y el dominio de tareas centradas en el éxito y la respuesta correcta, o como conocimientos significativos, comprendidos y conectados. Gregg (1995) argumenta que con frecuencia para el profesor, los estudiantes comprenden cuando pueden seguir instrucciones procedimentales con el fin de obtener las respuestas correctas; esto es corroborado por Cooney (1994) al apuntar que los profesores difícilmente conceptualizan distintos niveles de respuestas de los estudiantes, a menos que sea decir hasta qué grado éstas siguen un procedimiento conocido, y por consiguiente el análisis de aquéllas está basado en una orientación procedimental de las tareas.

Valoración de las producciones de los estudiantes	
Producciones consideradas como válidas	<p>Cuál es el foco (v.g., las respuestas numéricas correctas, los procedimientos o pasos realizados, explicaciones, argumentos, interpretaciones que reflejen lo entendido, varias estrategias o soluciones diferentes).</p> <p>Cómo debe ser la presentación (v.g., notación y convenciones especiales, oraciones completas que hagan referencia al objeto del que se está hablando).</p>
Papel del profesor y estudiantes	<p>Quién aprueba o desaprueba el trabajo de los estudiantes (v.g., el profesor, el grupo de estudiantes, el libro de texto).</p>
Estrategia usada para validar	<p>Tipo de acciones, gestos y frases a través de los cuales se manifiestan los juicios (v.g., frases directas que califican o indirectas, señalamiento del error, llamada de atención sobre aspectos que no son errores, planteamiento de otra situación para cuestionar al estudiante).</p> <p>Propósitos de la validación (v.g., cuestionar a los estudiantes en su conocimiento, precisar y/o enfatizar aspectos del contenido tratado, explorar la comprensión del estudiante, trabajar en la consciencia del estudiante, como lo sugiere Hewitt (2002c), acerca de sus errores).</p> <p>Los estudiantes conocen e interpretan las manifestaciones de aceptación o rechazo de sus producciones, reaccionan a regañadientes, sin interés, o aceptando de buena gana.</p> <p>Se valida cuando se comete un error públicamente, cuando hay producciones insólitas, cuando hay producciones que aunque correctas podrían no ser indicio de comprensión apropiada, en todo momento.</p>

10. El tercer criterio que Ernest (1989a, 1989b) plantea, apunta al uso del material curricular: seguir estrictamente un texto o esquema, o construir los materiales curriculares, o situarse en un punto medio en el que el profesor enriquece el texto con problemas y actividades adicionales.

Esta categoría comprende el conocimiento que se considera importante aprender en la clase, quién determina y valora este aprendizaje y cómo lo hace. Es decir, quién es para los estudiantes el encargado de aprobar o desaprobado su trabajo, si el libro de texto juega un papel preponderante en este sentido, si existe la posibilidad de que sean los mismos estudiantes quienes en algunas situaciones manifiestan esta aprobación y qué estrategias se usan para ello.

Se establece si los errores se ven como respuestas inadecuadas que se señalan, o como oportunidades para cuestionar a los estudiantes y como lo sugiere Hewitt (2002c) para trabajar con la consciencia del estudiante, al abordar el problema detrás del error, o la dificultad que subyace a él. Para este autor, una respuesta a la que el profesor contesta únicamente con un juicio y mostrando el error, involucra solamente la consciencia del profesor con respecto a las matemáticas y no tiene en cuenta la consciencia relacionada con la enseñanza y el aprendizaje ni la consciencia del estudiante; el estudiante estaría abandonado a su suerte para tratar de trabajar en el porqué de su error.

EL PROCESO DE INDAGACIÓN

Este estudio se llevó a cabo entre septiembre de 2001 y mayo de 2003, y contó con la colaboración de sesenta y tres profesores de matemáticas de básica secundaria pertenecientes a diecisiete colegios, tanto distritales como privados, para responder el cuestionario del profesor. Las edades de la mitad de ellos oscilaban entre los 30 y los 49 años; 54% de los profesores encuestados fueron mujeres. La mitad de los profesores ha hecho una licenciatura en Matemáticas y 24% sólo ha cursado estudios de bachillerato; 38% ha hecho una especialización, 11% tiene una maestría y ninguno ha hecho estudios de doctorado.

En las observaciones de clase colaboraron seis profesores de matemáticas de básica secundaria de cinco colegios distritales, cinco mujeres y un hombre. Se concretaron así cinco estudios de caso, denominados como Caso 1, Caso 2, Caso 3, Caso 4, Caso 5. En cada colegio se observaron entre cuatro y seis clases consecutivas de un mismo curso; en grado 6° se observaron clases de aritmética sobre tópicos variados y de geometría acerca de la medición y las rectas; en grado 7°, clases de aritmética sobre los criterios de divisibilidad; y en grado 8° y 9°, clases de álgebra acerca de las operaciones entre polinomios y la función cuadrática, respectivamente. Uno de los cursos estaba a cargo de dos profesoras, el llamado Caso 2.

Para responder el cuestionario del estudiante, cooperaron sesenta y cinco estudiantes, trece de cada uno de los cursos cuyas clases se observaron.

UN ESTUDIO CUALITATIVO

El estudio realizado se ubica en la investigación cualitativa consistente con la orientación interpretativista. Esta corriente filosófica plantea que toda actividad humana es fundamentalmente una experiencia social que pretende darle sentido al mundo desde la perspectiva de los participantes, que la investigación relevante sobre la vida humana es un intento de reconstruir esa experiencia, y que los métodos para investigar la experiencia deben ser moldeados o aproximados por ella.

Estas ideas se han utilizado como base para diversas formas de investigación educativa que las han acomodado a la situación de cada estudio. Han surgido así estudios de investigación y evaluación que emplean múltiples métodos e incluyen combinaciones de datos cualitativos y cuantitativos que se complementan. Para autores como Denzin y Lincoln (1998), Eisenhart (1988), Quinn (2002), Emerson, Fretz y Shaw (1995, pp. 142-168), los estudios cualitativos tienen entonces diversas fuentes de información e involucran la recolección y el estudio de una variedad de materiales empíricos: la observación directa, las entrevistas de profundización, la interacción, el análisis de documentos escritos como las guías y evaluaciones propuestas a

los estudiantes por parte de los profesores, las preparaciones de clase suministradas, la experiencia personal, la introspectiva, historia de la vida, la historia y textos visuales que describen momentos rutinarios y problemáticos y los significados de la vida de los individuos. También en la recolección de datos son usados los cuestionarios y encuestas, que permiten contestar preguntas que no pueden ser respondidas únicamente con los métodos etnográficos y que contribuyen a la triangulación (Eisenhart, 1988).

La observación en la investigación cualitativa consiste de descripciones detalladas de las actividades de las personas, conductas, acciones, interacciones personales y procesos organizacionales que son parte de la experiencia humana observable, citas textuales de las personas, comentarios sobre sus experiencias y opiniones. Los procedimientos de análisis usualmente incluyen definir unidades significativas (para el investigador o los participantes) de material y compararlas con otras unidades. Agrupar las unidades en categorías, compararlas entre sí y formular relaciones entre ellas. Las categorías y las relaciones son consideradas y reconsideradas a la luz del material que ya se tiene y del nuevo que se va recogiendo (Denzin, 1978, Goetz y LeCompte, 1984, Spradley, 1979, 1980, citados en Eisenhart, 1988). La recolección de datos y el análisis proceden juntos. La recolección de nuevo material puede generar nuevas preguntas de investigación y lleva a iluminaciones que se incorporan o a veces redirigen radicalmente el estudio, con lo cual puede llegar a requerirse otra recolección de datos y el respectivo análisis (Eisenhart, 1988).

FASES DEL PROCESO

La construcción del marco conceptual para mirar la práctica del profesor de matemáticas fue simultánea a todas las demás fases del estudio. Este marco surgió inicialmente a partir de la literatura revisada y de nuestra experiencia como profesores de matemáticas y formadores de profesores. No obstante, a lo largo de todo el proceso y a medida que se recogía la información y se analizaba, reflexionábamos y se consultaba nueva literatura, el marco se fue modificando; aun en la fase de análisis, los asuntos definidos como categorías fueron refinándose.

Antes de realizar las observaciones de clase se llevó a cabo la elaboración de un cuestionario para el profesor. Para esta labor se concretó previamente una primera caracterización de la práctica que permitió formular las preguntas en coherencia con ella. Las primeras versiones del cuestionario fueron puestas a prueba con varios profesores, cuyos aportes contribuyeron a producir una versión final más afinada. A continuación, el cuestionario fue aplicado a sesenta y tres profesores de matemáticas de básica secundaria, de diez y siete instituciones de Bogotá, tanto privadas como distritales, que cooperaron respondiéndolo. Las respuestas a este cuestionario fueron la base

para avanzar en la construcción del marco conceptual y para la definición de nuevas categorías más específicas a las matemáticas.

Luego se comenzó la elaboración de un cuestionario para el estudiante, labor que se desarrolló en paralelo con las observaciones de clase. Este cuestionario apunta a recoger información sobre algunas de las acciones y tareas implicadas en el proceso de aprendizaje del estudiante, desde la perspectiva del estudiante mismo. La base de este trabajo fueron tanto las respuestas de los profesores al cuestionario del profesor y las observaciones de clase, como el cuestionario utilizado en el Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias —TIMSS (1994)—. También para este cuestionario se hizo una prueba piloto con varios estudiantes cuyos comentarios contribuyeron a mejorar la versión definitiva. Sesenta y cinco estudiantes de los profesores observados, respondieron el cuestionario.

Las clases que se observaron en cada uno de los cinco colegios distritales cuyos profesores colaboraron en los estudios de caso, se grabaron en audio y video, y contaron con la asistencia de dos investigadores que tomaron notas de campo. Una vez finalizadas las observaciones se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con cada profesor, que se desarrolló de acuerdo con un guión predefinido pero también involucró preguntas de los investigadores que surgieron en el momento. Las entrevistas se grabaron en audio y posteriormente se transcribieron. Estos profesores leyeron y comentaron los documentos que los investigadores elaboraron sobre cada uno de ellos, de manera que fue posible no sólo corroborar lo dicho sino también profundizarlo y ampliarlo.

Así, la información recogida para la descripción de la enseñanza de las matemáticas provino de tres fuentes principales: el cuestionario del profesor, las observaciones de clase y las entrevistas realizadas con los profesores observados.

Con base en las transcripciones de audio de las clases, los investigadores elaboraron un documento, que se complementó con información proveniente de las notas de campo y del video; tal documento se utilizó como fuente primera de datos. Consiste de una narración, que obviamente no es exhaustiva —nunca podría serlo— pero que pretende registrar, en lo posible, de manera completa y libre de juicios de valor, lo que pasó en la clase: se da cuenta allí de las intervenciones, diálogos y palabras utilizadas tanto por el profesor como por los estudiantes, y se trata de describir no sólo las intervenciones, acciones y gestos de los participantes sino también lo que se escribe en el tablero y en los cuadernos y papeles de los estudiantes.

La dinámica de trabajo de los investigadores participantes en el estudio combinó el trabajo individual con el trabajo en grupo en reuniones periódicas. En éstas se compartía el trabajo individual realizado, se tomaban decisiones al respecto de asuntos operativos y académicos, se establecían lineamientos generales de trabajo, se definían nuevos criterios y categorías

y se reelaboraban los ya considerados, se asignaban tareas y compromisos individuales y para todo el grupo.

ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y VALIDACIÓN

El análisis fue una labor que permeó todo el proceso de definición de categorías y recolección de datos. A pesar de que varios de los resultados encontrados se apoyan en el análisis de las estadísticas de frecuencias y de comparación de proporciones de las respuestas a los cuestionarios, el análisis realizado en el estudio fue predominantemente cualitativo. Estuvo inmerso en un proceso continuo de trabajo en el que cobró mucha importancia el juego dialéctico y crítico de confrontar los resultados parciales que se iban obteniendo para cada clase observada con las anteriores, y simultáneamente con las de los otros profesores. Con base en estas discusiones y en esa actitud de búsqueda objetiva de consenso se organizó y clasificó la información en las categorías establecidas, se afinaron las categorías, se precisó el marco conceptual, y se llegó a las interpretaciones y caracterización final.

Este análisis cualitativo podría acercarse a una combinación de análisis deductivo e inductivo al mismo tiempo, de acuerdo con la definición de Quinn (2002) o a una mezcla de la conocida *grounded theory*¹¹ (Emerson, Fretz y Shaw, 1995; Quinn, 2002) con la aproximación *top-down*¹². Es decir el análisis se hace a partir de una idea general de lo que se va a observar en los datos, se leen los datos haciendo una primera codificación que incluye citas del texto para ilustrar los temas establecidos a priori; una lectura de esa codificación permite hacer un refinamiento del marco teórico; se vuelve a hacer una o más pasadas a los datos, buscando otros temas, modificaciones o confirmaciones de los ya definidos; se organizan de nuevo los temas y ese es el marco conceptual emergente.

En este estudio intervinieron varios elementos que aportan validez a la investigación realizada desde distintos puntos de vista, y que de alguna manera se acercan a las consideraciones que Eisenhart y Howe (1992) proponen como estándares de validez¹³ para la investigación en educación. Tales elementos tienen que ver con el empleo de distintas opciones para la recolección de datos, la definición de las categorías que conforman el marco conceptual construido, el análisis e interpretación de la información y, especialmente, con el proceso para llegar a consensos en torno a los resultados encontrados. Dada la imposibilidad de efectuar un proceso de valida-

11. Esta teoría también llamada aproximación *bottom-up* propone olvidarse de los marcos teóricos y producir una teoría basada en los datos que se tienen.

12. La aproximación *top-down* parte de un marco teórico inicial que permite decir cuáles son los temas principales que se van a mirar para hacer la codificación, marco que puede a su vez ser modificado de acuerdo con los datos.

ción estricto en los mismos términos de una investigación cuantitativa, el uso de múltiples métodos, materiales empíricos, perspectivas y observadores, es entendido por varios autores no como una herramienta o estrategia de validación sino como una alternativa a la validación (Denzin, 1989a, 1989b, Fielding y Fielding, 1986 y Flick, 1992, citados en Denzin y Lincoln, 1998), que añade rigor, amplitud y extensión desligada de prejuicios, y profundidad a cualquier investigación cualitativa.

-
13. Los estándares de validez propuestos por estos autores pueden resumirse así: 1. Articulación entre la pregunta de investigación, el procedimiento para la recolección de datos y la técnica de análisis. 2. Aplicación efectiva de las técnicas de recolección y análisis de datos. La selección de los participantes, los procedimientos para la recolección de información, y las técnicas de análisis deben responder a razones lógicas y creíbles. Los procedimientos y principios existentes para la recolección de datos deben ser respetados. 3. Atención y coherencia con el conocimiento existente. Los argumentos deben ser contruidos con base en alguna teoría existente o deben contribuir a alguna área considerable. La subjetividad del investigador, interpretaciones personales, y otras suposiciones deben hacerse explícitas. 4. Condiciones internas y externas que pueden limitar la importancia del estudio. Las externas se refieren al valor de los resultados de la investigación y si el estudio está mejorando e informando la práctica educativa. Es muy importante poner atención a las características sociales, políticas y culturales del contexto y de los participantes. Las internas se refieren a la ética de los investigadores, es decir, a la forma como se realiza la investigación.

UNA MIRADA A LA PRÁCTICA DOCENTE DEL PROFESOR

La caracterización de la enseñanza de las matemáticas en básica secundaria, resultante del estudio, atiende a la perspectiva de la conceptualización construida; de acuerdo a dicho marco los asuntos considerados se presentan de manera separada, lo que no impide ver la estrecha relación que hay entre ellos. En primer lugar, damos cuenta de algunos aspectos relativos a la práctica docente de los profesores que colaboraron con el diligenciamiento del cuestionario del profesor; en la medida de lo posible, tratamos de establecer comparaciones acerca de la enseñanza, con las observaciones hechas en los casos estudiados. En segundo lugar, describimos la enseñanza en los cinco cursos que constituyeron los casos observados y estudiados.

LA PERSPECTIVA DADA POR EL CUESTIONARIO

La descripción de la enseñanza que se expone en este apartado es producto de las respuestas de los profesores al cuestionario del profesor. Esta descripción atiende tanto a asuntos de la clase misma —los cuales se han organizado en las categorías del marco conceptual elaborado—, como a otros asuntos de la práctica docente relacionados con ella, que se exhiben agrupados de acuerdo a la clasificación que se presentó en el cuestionario (ver Apéndice).

LA CLASE

Esquema general

El esquema general de la clase que parece imperar entre los profesores de matemáticas que respondieron el cuestionario, está configurado por actividades como la revisión de la tarea asignada para realizar por fuera de la clase, el repaso de temas vistos en clases anteriores, la exposición de un nuevo tema por parte del profesor, la resolución —individual o en grupos— de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes y la asignación de la tarea para la siguiente clase. Lo más usual es que la revisión de la tarea se haga al comenzar la clase y la asignación de la tarea para la siguiente sesión al finalizar, mientras que las otras actividades se realizan en momentos intermedios de la clase. Este resultado está en consonancia con lo observado al respecto para los casos considerados en este estudio y también concuerda con la caracterización hecha por Gregg (1995, p. 443) en lo que concierne a la rutina de las actividades de clase en su descripción de la práctica tradicional.

En relación con el desarrollo de guías de trabajo en la clase, por la que se preguntaba en el cuestionario, cabe mencionar que el número de profesos

res que reportan llevarla a cabo siempre, difiere sustancialmente en las dos ocasiones en que se hace una referencia al respecto. Por otro lado, en la observación directa se hallaron diferencias en el significado que los profesores asignan a la expresión “guía de trabajo”; incluso, un mismo profesor puede no tener un significado preciso y único para tal expresión, lo que puede explicar en parte la poca coincidencia encontrada en las respuestas al cuestionario. En el Caso 4 pudimos advertir que se denominó “taller” a un grupo de ejercicios del libro de texto que constituyeron una tarea para los estudiantes durante la clase, después de haber sido ejemplificado un procedimiento para solucionarlos, mientras que en otras clases, el término se refería a una serie de tareas enunciadas por escrito para las cuales no hubo una explicación previa de parte del profesor o a un documento en el que se presentaba teoría sobre el tema que se iba a tratar, y ejemplos de los ejercicios y tareas que debían realizar los estudiantes.

Una mirada a los resultados referentes a los recursos utilizados por el profesor en la clase, pone de manifiesto que la tendencia de los profesores a no exigir un libro de texto específico para el trabajo en sus clases de matemáticas, no redundan en la utilización más frecuente de guías de trabajo. De hecho, un análisis cuidadoso de los resultados en torno a este asunto no sugiere la presencia de una correlación estadística entre el hecho de no asignar un texto específico para usar en el aula y el hecho de recurrir al uso de guías.

En lo que se refiere a la utilización habitual de recursos diferentes al tablero, al lápiz y al papel, lo apenas destacable —y que aplica más a los currículos de geometría— es la utilización de instrumentos como el compás, la escuadra, el transportador, etc. Dado que muy pocas instituciones cuentan con calculadoras graficadoras no sorprende que para el desarrollo de las clases, los profesores registren muy poca utilización de éstas. Registran también poca utilización de computadores aun cuando en la mayoría de los colegios considerados hay salas con computadores disponibles para su uso; según dicen éstos son empleados casi exclusivamente para la asignatura de informática. En general, el limitado empleo de la tecnología puede deberse a la idea, al parecer compartida por una buena cantidad de profesores, de que la tecnología hace por el estudiante las cosas e impide que desarrolle habilidades de cálculo o para hacer gráficas. Así pues, bajo esta perspectiva se entiende que el profesor esté dispuesto a usar instrumentos como los mencionados, para propiciar el hacer del estudiante y no se incline a promover el uso de un recurso tecnológico. En este estudio los profesores que nunca utilizan la calculadora graficadora o el computador, recurren al menos ocasionalmente a la utilización de materiales como el papel milimetrado, la cartulina, la plastilina, etc. Lo anterior concuerda con lo observado en las clases donde se vio que en algunas pocas situaciones se utilizaron materiales e instrumentos como los señalados pero nunca se emplearon recursos tecnológicos.

Con respecto a los tipos de actividad matemática implicada en las tareas que se llevan a cabo en la clase, se destacan dos como los más usuales: el manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas y el análisis de enunciados de problemas. El primer tipo, que fue observado por lo menos en tres de los casos estudiados, es consecuente con una visión de las matemáticas en la que el formalismo y la rigurosidad de las mismas, se tratan de promover a través de prestarle más atención al manejo sintáctico de los símbolos que al significado propio de lo que representa la notación. Por su parte, la frecuencia de la realización de tareas que involucran el análisis de enunciados de problemas, difiere de manera considerable de lo observado en las clases. Sólo en dos ocasiones vimos hacer algo para analizar el enunciado de problemas: en una de ellas, tal tarea estuvo ligada al tema de la solución de sistemas de ecuaciones, pero los enunciados involucrados eran tan escuetos que casi se podían traducir directamente de la forma verbal a la simbólica; en la otra, la tarea estuvo inmersa en un trabajo cuya realización requería de bastante tiempo, más de una hora de clase, y dado que pretendía promover el razonamiento lógico, se puede ver más claramente como una actividad matemática de análisis de enunciados de problemas. Quizás el resultado obtenido en el cuestionario con respecto a este tipo de actividad matemática, puede obedecer más a la intención de los profesores de expresar un “deber ser” que a lo que en la práctica realmente logran materializar.

Otro tipo de actividad matemática implicada en las tareas que se llevan a cabo en la clase con alguna frecuencia, según las respuestas de los profesores al cuestionario, es el análisis de ejemplos para concretar la teoría, cuya realización se observó en al menos tres de los casos. Salvo en uno de los casos observados, el Caso 2, en los demás casos no se evidenciaron tareas que requerían el análisis de definiciones o propiedades matemáticas, la sustentación de ideas matemáticas y la formulación de problemas, señaladas por los profesores en el cuestionario. Otras tareas en las que se requiere la elaboración de pruebas matemáticas, la utilización de diversas representaciones y la traducción entre éstas, la elaboración de conjeturas y el diseño de estrategias de resolución de problemas no fueron reportadas en los cuestionarios como tareas que se hagan con frecuencia y prácticamente no se detectaron en las clases observadas. La formulación de preguntas relativas al tema matemático de estudio es reportada por los profesores como una labor intensa en sus clases, pero en las clases observadas casi siempre fue mínima y las preguntas eran tan puntuales que se contestaban con dos o tres palabras. En contraste con esto, en las observaciones directas de clase fue completamente evidente que con gran asiduidad se establecían e ilustraban procedimientos para usar en tareas de resolución de ejercicios, actividad matemática que fue señalada en los cuestionarios solamente por la mitad de profesores.

Finalmente, con respecto a las acciones de enseñanza de las matemáticas que pueden verse como comunes a la mayoría de los profesores y que concuerdan con lo observado en las clases, están la de formalizar en algún grado

los elementos teóricos con la colaboración de los estudiantes y la de proponer situaciones particulares para que los estudiantes apliquen los elementos teóricos. En realidad, la formalización de la teoría en las clases observadas la hace el profesor con una participación mínima de los estudiantes, pero que aun así seguramente los lleva a decir que nunca formalizan la teoría sin la participación de los estudiantes. En las clases, sí es usual que a partir de situaciones particulares, los profesores observados expongan los elementos de la teoría e ilustren su aplicación.

Contenidos matemáticos considerados y rutas temáticas

Los resultados reportan que prácticamente todos los tópicos de aritmética y álgebra que por lo regular aparecen en las listas oficiales de programas para las diferentes asignaturas, fueron señalados por los profesores como tópicos que tratan en sus clases; así mismo, casi todos los profesores dicen también considerar temas adicionales que no necesariamente especifican. Los números naturales y enteros, el orden y las operaciones entre ellos, las operaciones con los números decimales y fraccionarios, son tópicos de aritmética señalados por casi todos los profesores en sus clases de aritmética. Los números racionales, las operaciones con números racionales, las expresiones algebraicas, las ecuaciones con una variable y la función lineal son temas de álgebra considerados por prácticamente todos los profesores para su enseñanza. Para la enseñanza de la geometría, hay tópicos considerados por una buena proporción de los profesores como las magnitudes y su medición, ángulos, polígonos regulares e irregulares y su congruencia, triángulos, cuadriláteros, circunferencias, traslaciones en el plano; no obstante, al contrario de lo que ocurre con las otras dos áreas temáticas, se puede dar cuenta de algunos temas que la mayoría de los profesores no consideran en el currículo, como los poliedros, las homotecias, y las reflexiones y rotaciones en el plano.

Si bien con base en los resultados apenas se puede esbozar una posible secuenciación para los diferentes tópicos de la aritmética, el álgebra o la geometría, no deja de ser llamativo el hecho de que el primer tópico de la secuencia de temas para las áreas de aritmética y álgebra sí se pueda establecer con relativa claridad, mientras que para la geometría, no hay una elección que se pueda considerar unánime acerca del tema con el que se comienza. En aritmética, los temas iniciales son las operaciones con los números naturales o su orden. En álgebra, se empieza con los números fraccionarios. En geometría, diversidad de tópicos como las magnitudes de longitud, área y volumen, y la medición de longitudes y ángulos, son registrados como temas para iniciar el estudio.

Interacción entre el profesor y los estudiantes

Son varios los tipos de interpelaciones en términos de su contenido, dirigidas bien sea a todos los estudiantes o a uno determinado, que altos porcen-

tajes de profesores dicen hacer usualmente en sus clases. Sin embargo, estos resultados no siempre coinciden con las observaciones realizadas en las clases. Muchos indican en sus respuestas que hacen preguntas específicas para indagar por la comprensión de los estudiantes, y aunque en las clases de uno de ellos se registraron interpelaciones de este tipo, en otras se presentaron con muy poca frecuencia, e incluso en una casi no se dieron. En los cinco casos sí hubo interpelaciones generales sobre la claridad de lo visto, no necesariamente mediante preguntas, que muchos profesores al contestar el cuestionario dicen formular. En las respuestas al cuestionario, dicen igualmente de que en sus clases hablan para recordar asuntos matemáticos ya tratados, hecho que se registró en por lo menos una de las clases de cuatro de los profesores observados; en un caso, esto nunca se vio. Bastantes profesores al diligenciar el cuestionario reconocen hacer comentarios que indican el hilo conductor del discurso en clase, mientras que sólo en las clases observadas de uno de los casos se percibieron interpelaciones de este tipo. En sus respuestas, los profesores dicen dar reiteradamente instrucciones a los estudiantes para realizar algo, lo que coincide con cuatro de los casos observados, donde las interpelaciones del profesor para dar instrucciones fueron continuas. En el otro caso, el Caso 2, las instrucciones estaban consignadas en las guías de trabajo, sin que hubiera necesidad de que las profesoras las repitieran. Un porcentaje también alto de profesores señala que en sus clases hablan de los objetivos de aprendizaje de la sesión. En contraste la mención que se hace a los objetivos de la sesión en tres de los casos observados es muy breve y no se da en todas las clases; incluso, en uno de los casos observados el profesor nunca aludió a los objetivos de aprendizaje. En el Caso 2 los objetivos siempre estuvieron escritos en las guías de trabajo.

En general, de acuerdo con las respuestas al cuestionario, los profesores privilegian el trabajo individual de los estudiantes, hecho que coincide con lo observado en las clases, en donde salvo con excepción de un caso, los profesores no suelen propiciar el trabajo en grupos y no se fomentan las discusiones de todo el grupo o entre grupos, así que los estudiantes trabajan individualmente.

Validación de las respuestas de los estudiantes

Con respecto a la poquísimas información que suministró el cuestionario acerca de la forma en que se validan las respuestas de los estudiantes, los resultados obtenidos están en concordancia con lo observado en las clases. La mayoría de los profesores son quienes usualmente aprueban o desaprueban las respuestas del estudiante, corrigen las respuestas inadecuadas a solas con el estudiante o frente a todos los estudiantes, y le hacen preguntas para que vea el error. Además, se encuentra que hay una correlación estadística significativa entre el hecho de corregir la respuesta frente a todos los estudiantes y el hecho de indicarle a otro estudiante que corrija la respuesta,

correlación que sugiere que los profesores que tienden a realizar con frecuencia una de las dos acciones, no llevan a cabo la otra acción.

PREPARACIÓN DE CLASE

En lo que concierne a la preparación de clase, los resultados muestran que existe una mayor preocupación de los profesores por el estudio de los temas matemáticos que se van a abordar en clase, que por la consideración cuidadosa y sistemática de lo que en ella ocurra. Estos resultados no sorprenden y son consonantes con las afirmaciones de profesores de matemáticas participantes en un estudio anterior realizado por Perry, Andrade, Fernández y de Meza (2000), donde indicaban que al preparar la clase le prestaban más importancia al estudio de los contenidos de las matemáticas escolares que a la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan en la clase, la cual puede ayudar a tomar decisiones sobre el camino a seguir. Una de estas profesoras señala que:

en la preparación de una clase me dedicaba más que todo a la revisión de contenidos; la elaboración de una guía se reducía a transcribir una serie de ejercicios; para la presentación de una previa me limitaba a hacer preguntas y proponer ejercicios sin un objetivo especial; para la asignación de las tareas me interesaba por la cantidad. En este momento estoy convencida de que para hacer más efectivo el estudio de las matemáticas debo preparar cada situación didáctica haciéndole un buen análisis curricular, de contenido y de instrucción. (p. 95)

En el mismo sentido Romberg (1988) aduce que el trabajo del profesor de matemáticas tal y como suele realizarse —rutinario, y encasillado dentro de esquemas rígidos— no le exige el ejercicio de su juicio profesional.

Por otro lado, a pesar de que un poco más de la tercera parte de los profesores pregona que lleva un registro escrito detallado de sus clases, y de que una proporción similar de los profesores manifiesta hacer una consideración cuidadosa de lo sucedido en sus clases, no existe una correlación estadística entre estos dos hechos que permita afirmar que son los mismos profesores quienes realizan ambas acciones. Por lo tanto, no necesariamente el registro escrito va dirigido a dar cuenta de la consideración cuidadosa de lo que sucede en la clase y es posible que tenga un énfasis mayor en anotaciones de contenido matemático, que en aspectos de enseñanza o aprendizaje que guíen su reflexión.

La participación de otras personas en la preparación de las clases no es una práctica que los profesores reporten como usual. Este hecho puede en parte estar basado precisamente en que el foco principal de la preparación de clase es el contenido matemático, que depende del conocimiento matemático de cada profesor el cual no es común que sea compartido y debatido.

En las ocasiones cuando la preparación de clase sí se hace con otros colegas, estos suelen ser el coordinador y/o el grupo de profesores de matemáticas, lo que quizás refleja que la mayoría de las veces se haga en las reuniones de área, pero también el que al tratar contenidos matemáticos se requiera personas con formación matemática. Además, se advierte que la mayoría de los profesores que dicen preparar clase por fuera de la jornada laboral son los que más frecuentemente dicen no preparar la clase con otra persona.

No se pudo establecer un contraste entre estos resultados de los cuestionarios y los casos estudiados, dado que no se tuvo acceso a todos los registros de preparación de clase llevados por los profesores observados, aunque es claro que para las profesoras del Caso 2 que utilizan guías de trabajo, esta preparación podría estar consignada, en buena medida, en las guías mismas. En realidad, sólo un profesor entregó unos textos generales donde nombra corrientes y metodologías educativas que dice tener en cuenta en sus clases, pero donde no registra concretamente los planes de clases específicas ni si los preparó conjuntamente con otra persona. Se percibe que los profesores han incluido en su lenguaje profesional términos como “aprendizaje significativo”, “construcción del conocimiento matemático” o “facilitador del aprendizaje”, que circulan en el medio, y se muestran convencidos de estar impulsando tales procesos en sus clases mediante las actividades que hacen.

EVALUACIÓN

Un resultado en las respuestas de los profesores que llama la atención, es el que se refiere a la resolución de problemas como algo que los estudiantes deben hacer siempre en las evaluaciones propuestas por el profesor, pues no fue la constante en lo observado en las clases. Infortunadamente, al igual que en la situación ya comentada con respecto a la expresión “guías de trabajo”, lo que se entiende por “resolución de problemas” parece ser interpretado por los profesores en un sentido distinto al que se promulga en la comunidad académica. En particular, las observaciones de clase sugieren que el término “problema” es usado por los profesores para referirse a ejercicios rutinarios para los que se ha propuesto o ilustrado la manera de solucionarlos. Una excepción en las clases observadas, fue el Caso 2 en el que se desarrollaron guías, en donde se propuso la resolución de problemas con un significado de “problema” más en consonancia con situaciones donde el estudiante no conoce la forma de solución y tiene que acudir a sus conocimientos previos y a la creatividad para solucionarlo.

Por el contrario, la poca atención que los profesores prestan, según dicen en sus respuestas, a la presentación de diversas estrategias de solución a un problema, es coherente con lo observado en las clases donde dicho trabajo no se detectó y lo que se esperaba más bien allí era que los estudiantes emplearan los procedimientos ya expuestos. En el curso en el que se implementaron guías, el Caso 2, era posible trabajar varias estrategias de solución para

los problemas; sin embargo, este hecho no se destacó por parte de las profesoras cuando se discutían las soluciones con los estudiantes. En general, allí se observó un énfasis en la tarea de dar cuenta de los procesos realizados en la solución y de los resultados, de manera similar a lo exigido en los demás cursos, en los que se requería registrar las operaciones, sus resultados y los pasos realizados.

En las clases observadas casi no se presentaron oportunidades donde los estudiantes tuvieran que formular problemas o construir ejemplos, realizar proyectos, probar enunciados, escribir textos o argumentar sus respuestas, que le permitieran al profesor evaluar o complementar sus evaluaciones; los resultados del cuestionario al respecto están en concordancia con esto y permiten concluir que los profesores no dan muestras de que su trabajo siga orientaciones consonantes con una postura donde se proponen diferentes tareas que implican distintos tipos de actividad matemática para evaluar el trabajo del estudiante.

Con respecto al momento en que los profesores suelen realizar las evaluaciones, la mayoría de los profesores en sus respuestas afirman que usualmente evalúan a sus estudiantes a través del trabajo realizado en clase durante el proceso de aprendizaje; sólo en dos de los casos lo observado podría asimilarse a esto. En el curso del Caso 2, en el que las clases se realizan mediante el trabajo en grupos para desarrollar guías, las profesoras sostienen que a través de las interacciones que motivan con cada uno en los grupos en las que participan tanto los estudiantes como ellas, hay una evaluación permanente del trabajo de los estudiantes; también el Caso 4 donde la profesora revisa lo hecho por los alumnos que está registrado en sus cuadernos y asigna puntos, podría entenderse como acorde con lo dicho. Sin embargo, hay un resultado de los cuestionarios que parece validarse coherentemente con lo observado en las clases: la decisión del profesor de proponer una evaluación escrita sólo hasta finalizar un proceso particular de aprendizaje.

En lo que tiene que ver con la intención de las evaluaciones que el profesor propone a sus estudiantes, dos propósitos principales son señalados por los profesores en los resultados de los cuestionarios: conocer el estado de comprensión de los estudiantes y detectar sus dificultades. No se menciona que a través de las evaluaciones pueden tener información para realimentar su práctica y tomar decisiones con relación a la didáctica misma de las matemáticas, pero muy posiblemente aquéllas sí ayudan a los profesores a tomar decisiones sobre contenidos a repasar, enfatizar o incluso evadir durante el desarrollo curricular. Por otra parte, a pesar de que una buena cantidad de profesores sostenga que al evaluar tiene en cuenta principalmente los argumentos planteados, las estrategias seleccionadas, los enunciados construidos y las explicaciones suministradas, en las clases observadas, con excepción del Caso 2 donde se utilizaron guías, no se percibió que se propiciara tal actividad matemática en el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes; las respuestas al cuestionario y lo observado en las clases

coinciden en cuanto a tener en cuenta los procedimientos realizados en las evaluaciones. Además, lo observado en las clases sugiere que en general la respuesta correcta tiene un gran peso para que el profesor acepte un trabajo de los estudiantes como válido, lo cual contradice los resultados del cuestionario donde éste es uno de los asuntos en los que supuestamente los profesores no se fijan tanto.

PLANEACIÓN ANUAL INSTITUCIONAL

De los resultados al cuestionario, es claro que prácticamente en la totalidad de las instituciones en las que laboran los profesores se hace algún tipo de planeación anual concerniente a las matemáticas y que en dicha planeación los más comprometidos son los profesores, el coordinador del área de matemáticas y el jefe del departamento de matemáticas. De otro lado, la participación del rector o de los profesores de otras áreas en esta planeación no es frecuente; cuando esta participación efectivamente se da, no se puede afirmar además que esté relacionada con algún asunto particular que se deba tratar allí, dado que no se identificaron correlaciones estadísticas significativas entre las variables asociadas a las participaciones de aquéllos y los asuntos que se abordan. En contraposición con esto, la participación del grupo de profesores del área sí está claramente relacionada con los asuntos que principalmente se abordan, como por ejemplo, con la selección de los libros y materiales didácticos a usar en las clases, los temas matemáticos que se van a tratar y los indicadores de logro, entre otros.

En lo que se refiere a las personas o documentos que influyen en la determinación del currículo de matemáticas, es claro que los profesores son quienes tienen una influencia más definitiva a la hora de definirlo; la incidencia de documentos como los Lineamientos curriculares o el Proyecto Educativo Institucional (P.E.I.), se relega a un segundo plano, así como tampoco son muy importantes los aportes del rector o de los padres de familia. Llama la atención el hecho de que haya una correlación estadística significativa entre la participación del rector en la planeación y su influencia en la determinación del currículo; este resultado sugiere que los pocos rectores que participan en la planeación anual institucional tienen a su vez una gran influencia en la determinación del currículo en esas instituciones.

ASUNTOS QUE DIFICULTAN LA ENSEÑANZA

Se identificaron correlaciones estadísticas significativas entre la cantidad de estudiantes (usualmente los cursos son de cuarenta y cinco estudiantes) como dificultad para la enseñanza y otros asuntos que se ven también como dificultades; esto muestra que los profesores que se quejan acerca del gran tamaño del curso como problema que afecta la enseñanza, también responden por ejemplo, que a los estudiantes no les interesan las matemáticas, que son indisciplinados, que traen unos conocimientos previos muy defi-

cientes, que la composición del curso es muy heterogénea, etc. Cabe resaltar que las dificultades que pueden presentarse en la enseñanza no son atribuidas por los profesores a ellos mismos. Así, desde la perspectiva de los profesores las deficiencias en su conocimiento matemático o didáctico, las visiones diferentes de las de los colegas, la falta de experiencia, de preparación de las clases, o de motivación en la institución, no parecen afectar su enseñanza.

LA PERSPECTIVA DADA POR LOS CASOS ESTUDIADOS

A continuación se presenta la descripción de la enseñanza para los cinco casos estudiados, obtenida de la observación directa de las clases. Los asuntos y aspectos de tal enseñanza se organizan en las categorías establecidas en el marco conceptual.

ESQUEMA GENERAL

De las actividades que se llevan a cabo en clase, las que pudimos reconocer como comunes a la mayoría de los casos, definen el esquema de las clases. Tales actividades son: la asignación de tareas para la casa, la revisión en el aula del desarrollo de estas tareas, la asignación y desarrollo de tareas para el aula¹ y la presentación de información matemática. Las similitudes y diferencias de estas actividades en los distintos casos, se exponen a continuación.

Asignación y revisión de tareas para desarrollar fuera del aula

En las clases observadas identificamos que la asignación de la tarea para la casa y su posterior revisión en el aula son actividades que los profesores de los casos estudiados, salvo los del Caso 2, realizan.

En la mayoría de tales clases, la asignación de la tarea para la casa se hace normalmente hacia el final de la sesión de clase, aunque en el Caso 4, la profesora lo hace en cualquier momento durante el transcurso de ésta. En algunos de los casos estudiados, los profesores enuncian o copian la tarea en el tablero y los estudiantes tienen tiempo suficiente de registrarla por escrito; en otros, es frecuente que los profesores enuncien la tarea de manera oral en medio de un ambiente disciplinario que no favorece que los estudiantes escucharan para registrarla por escrito.

La actividad matemática implicada en las tareas, no es tan diversa. Sin pretender ser exhaustivos, los tipos de actividad relativos específicamente a las matemáticas² que reconocemos en las tareas asignadas en cuatro de los

1. Para hacer la discusión, inicialmente tratamos por separado las tareas asignadas por el profesor para ser desarrolladas fuera y dentro del aula. Sin embargo, como se expresará luego, existen muchas más características que hacen semejantes a las tareas asignadas para dentro y fuera de la clase, que aquellas que podrían diferenciarlas.

casos, son dos: consultar información matemática y desarrollar procedimientos matemáticos. Con estas tareas es probable que se esté promoviendo una visión de que las matemáticas son información registrada en los textos y algoritmos para desarrollar ejercicios, y en consecuencia se deduce que hacer matemáticas es leer tal información y aplicar correctamente dichos algoritmos.

Con tales tareas los profesores parecen buscar que los estudiantes por un lado, ganen habilidad para desarrollar procedimientos matemáticos rutinarios (casi siempre algorítmicos) de forma fiable y eficaz y por otro lado, estudien y comprendan la información consultada. A pesar de esta última posible intención, lo que se evidencia es que generalmente los estudiantes se limitan a copiar textualmente la información, o bien a copiar el texto cambiando una que otra palabra y/o suprimiendo algunos fragmentos del texto que consultan, y que no le asignan un significado o el asignado no es suficientemente consistente. Consideramos que esta situación se presenta debido a la carencia de acciones docentes específicas, o a la poca efectividad de éstas al asignar y revisar dichas tareas, que favorezcan el desarrollo de la lectura comprensiva de información matemática. Quizás también difícilmente en las casas se propicia un ambiente encaminado a tal desarrollo.

No obstante haber identificado dos tipos predominantes de actividad matemática que se propicia en las tareas para fuera del aula, en algunas ocasiones se pueden reconocer tareas que generan una actividad matemática potencialmente diferente, pero que no logran concretarse efectivamente. De manera específica, reconocemos en el Caso 5 una tarea³ para la casa que plantea la posibilidad de tratar una idea o procedimiento matemático de manera intuitiva y dos tareas⁴ en el Caso 1 que podrían haber llegado a catalogarse como de solución de problemas y como de validación de respuestas por parte de los estudiantes.

Por otra parte, el significado de la revisión de tareas propuestas para trabajar fuera del aula se concreta de dos maneras diferentes para los profesores de los cuatro casos (1, 3, 4 y 5): de un lado, revisar la tarea significa

2. La actividad involucrada en algunas tareas no es de este tipo; por ejemplo, una de las tareas consiste en hacer firmar de uno de los padres o del acudiente una evaluación, y otra procura que los estudiantes dispongan para la siguiente clase de una cinta métrica.
3. La tarea podría haber tenido la intención de iniciar una aproximación a la idea de parábola como curva descrita por las trayectorias en algunos movimientos y la forma de algunos objetos. En las producciones de los estudiantes como respuesta a dicha tarea se reconoce que al parecer ellos están asociando la forma curva de un objeto, con la palabra "parábola".
4. Una de las tareas consistía en reconocer los diferentes segmentos determinados por seis puntos ubicados en una recta. Sin embargo, los estudiantes dieron cuenta de la tarea que se proponía sin que ello pareciera constituir un problema matemático genuino, pues una vez reconocieron los cinco segmentos determinados por puntos vecinos en la secuencia no hubo nada que problematizara su respuesta.

determinar quién hizo la tarea y quién no; de otro lado, revisar la tarea significa establecer la calidad de los desarrollos dados a las tareas.

Con respecto al primer significado, evidenciamos que la acción de identificar los estudiantes que hacen o no las tareas conlleva intenciones loables tales como determinar con qué estudiantes dialogar y a quiénes emplazar para que mejoren su desempeño, e intenciones de disponer de información para valorar el desempeño del estudiante. Con respecto a la segunda significación, aunque la revisión pretende reconocer, de manera personal o pública, respuestas correctas o incorrectas y señalar para estas últimas los errores cometidos, advertimos que en general, no se indaga acerca de las causas y/o motivaciones de las respuestas y que, en consecuencia, cuando éstas son incorrectas, no se logra una aproximación siquiera inicial a las dificultades que subyacen a los errores de las que éstos son expresiones. De otro lado, para los Casos 1 y 3, la revisión de tareas hace parte central de la clase, en tanto que a partir de ella se intenta construir una significación de información matemática, propósito que no siempre parece alcanzarse. Así, en sentido estricto, la revisión de los desarrollos de las tareas no es usada en aras de la comprensión de los estudiantes ni como ventana al aprendizaje logrado por ellos.

En los Casos 1, 3, 4 y 5 se puede advertir la existencia de diversas estrategias para revisar los desarrollos de las tareas, hechos por los estudiantes, algunos de los cuales se utilizan durante el curso de la clase. En el Caso 1, en la mayoría de las tareas, la profesora utiliza la información que los estudiantes han consultado y que exponen de manera verbal como fuente para presentar y sintetizar información matemática que pretende que tenga un significado para los estudiantes. En el Caso 3, el profesor utiliza los desarrollos y elaboraciones de los estudiantes como asunto sobre el cual indagar y construir — ante todo el grupo de estudiantes y con la mayoría de ellos — un significado de algunos aspectos conceptuales pero sobre todo de cuestiones procedimentales. En el Caso 5, la profesora elige un estudiante para que copie de su cuaderno el desarrollo en el tablero y luego de revisar lo que está escrito en el tablero lo expone o hace comentarios a todo el grupo de estudiantes al respecto. En el Caso 4, mientras los alumnos trabajan en sus puestos, la profesora revisa en su escritorio el desarrollo de la tarea asignada en la clase anterior y si éste cumple los requisitos de validez le asigna puntos, de lo contrario eventualmente hace comentarios en términos generales a través de los cuales manifiesta que el desarrollo no es completamente adecuado. También en ocasiones esta profesora invita a algún estudiante cuyo desarrollo de la tarea considera apropiado a copiarlo en el tablero.

Estas acciones de los profesores podrían indicar una intención de propiciar discusiones en clase, pero dado que son ellos quien se encargan o bien de repetir lo que el estudiante ha dicho o de exponerlo oralmente cuando aquél no lo ha hecho, no es tan claro que sea ese el propósito.

Asignación y revisión de tareas para desarrollar en el aula

En uno de los casos observados, las tareas asignadas por el profesor para desarrollar durante la clase pueden no alcanzarse a realizar durante ésta y su conclusión queda como tarea para la casa; en el Caso 2, las tareas asignadas pueden no concluirse en la sesión y su conclusión se hace en la siguiente o siguientes sesiones de clase. En los otros tres casos, las tareas se terminan durante la sesión de clase.

En los cinco casos la asignación de las tareas se hace a través de enunciados orales y escritos. Sin embargo, en la mayoría de los casos son más frecuentes los enunciados orales, eventualmente acompañados de algún breve registro escrito en el tablero. En el Caso 2, a pesar de que la asignación de tareas se hace fundamentalmente de manera escrita a través de las guías que las profesoras han preparado y entregado a los estudiantes, es frecuente que en la interacción de las profesoras con los grupos de estudiantes ellas planteen de manera oral ampliaciones o explicaciones a las tareas propuestas que, en cierto sentido, constituyen nuevas tareas. En todos los casos, la gran mayoría de las tareas debe desarrollarse de manera escrita; no obstante, no en todos los casos este registro es objeto de valoración al momento de revisar el desarrollo logrado para la tarea.

La actividad matemática que se aborda a través de las tareas propuestas para desarrollar en el aula no es considerablemente diferente a las de las tareas asignadas para la casa; tampoco lo son los significados a través de los cuales se concreta la acción de revisarlas. En efecto, en la mayoría de los casos los profesores asignan prioritariamente como tarea para el aula la identificación de información matemática a través de una lectura y/o la realización de ejercicios en los que de manera primordial se replican los procedimientos matemáticos —casi siempre algorítmicos— presentados previamente. Consideramos que estas tareas coinciden en que hay una respuesta preexistente que es única; en otras palabras, la información que se debe identificar y resaltar corresponde a enunciados matemáticos validados y a procedimientos preestablecidos, o lo que permite resolver de manera correcta o incorrecta los ejercicios es la adecuada o inadecuada aplicación de un procedimiento. En este sentido, se puede estar consolidando la idea de que las matemáticas son “exactas, únicas y preelaboradas” y que sirven principalmente para resolver ejercicios.

No obstante lo anterior, reconocemos que existen tareas que no van en la misma dirección. Particularmente en el Caso 2, identificamos algunas tareas asignadas para la clase que no propenden, de manera exclusiva, por la búsqueda de la respuesta o por la realización de un procedimiento matemático preestablecido; en ellas hay un mayor grado de libertad para la actividad intelectual del estudiante y en cierto sentido admiten más de una solución e invitan al estudiante a especular y validar sus elaboraciones. En los otros casos también identificamos unas pocas tareas que podrían ofrecer una alter-

nativa diferente a la búsqueda de información y al desarrollo de ejercicios; sin embargo, consideramos que las intenciones de estas tareas no siempre parecen haber sido objeto de reflexión de los profesores, dado que aunque implica una actividad matemática como explorar y hacer conjeturas, ésta no se propicia expresamente. En particular, reconocemos que los profesores propusieron algunas tareas que parecen buscar la introducción de ideas matemáticas desde una perspectiva intuitiva (v.g., la medición de una longitud con unidades arbitrarias, la construcción de un cono y su corte con un plano paralelo a una generatriz) y algunas otras que abordan la resolución de problemas (v.g., resolver acertijos y problemas de razonamiento, desarrollar tareas para las cuales no se ha discutido ni presentado previamente una estrategia de solución). Frente a las primeras tareas, no son los estudiantes sino el profesor quien termina enunciando la idea a la que pretendía que ellos se aproximaran; con tal actuación, no se permite que los estudiantes especulen acerca de lo que su observación y análisis de la situación les permite concluir, impidiendo de paso saber si efectivamente la tarea conlleva el reconocimiento de tal idea. En las tareas que propician la resolución de problemas, advertimos que en la mayoría de los casos estudiados, quizá excepto en el Caso 2, la intención de trabajar en los problemas no va más allá de encontrar la respuesta correcta y de verificarla. En efecto, los profesores no realizan acciones a través de las cuales se reconozca un interés genuino por abordar junto con sus estudiantes la exploración de estrategias y caminos que no prosperaron en la solución del problema, la indagación de las interpretaciones del enunciado del problema, la validez de la respuesta encontrada respecto del contexto del problema, la existencia de una única o varias soluciones —entre otras; de esta manera, se recalca la idea de que los problemas en matemáticas tienen una única solución y una estrategia para hallarla, con lo cual se ratifica lo mencionado antes como ideas de hacer matemáticas y de las matemáticas mismas, que se promueven. A diferencia, en el Caso 2, una de las profesoras se esfuerza por promover con sus estudiantes acciones en torno a los aspectos mencionados antes.

Con frecuencia algunas de las acciones relacionadas con las tareas que los profesores proponen, tienen como fin motivar a los estudiantes. La formulación y el desarrollo de acertijos matemáticos, que aunque pueden no estar vinculados a los temas que se allí se tratan, son vistos por los estudiantes como la oportunidad para tomar un descanso del trabajo “pesado” con las matemáticas en clase; el planteamiento de contextos para las tareas que creen que les son familiares a los estudiantes; y las exigencias de manipular materiales en el desarrollo de las tareas, constituyen ejemplos de tales acciones.

En términos generales, para la revisión de las tareas propuestas para el aula, los profesores de los Casos 1, 3, 4 y 5 proceden de la misma manera que lo hacen para las tareas propuestas para la casa. También reconocemos que las intenciones de la revisión de estas tareas son las mismas que las de

aquéllas. En este orden de ideas, concluimos que en estos casos la revisión de las tareas propende más por intentar dar algún significado a la información matemática y por reconocer respuestas correctas o incorrectas, que por permitir oportunidades de actividad matemática genuina a los estudiantes y por abrir espacios en los que el profesor pueda reconocer el razonamiento de sus estudiantes.

De otra parte, reconocemos que una de las tareas habituales que los profesores esperan que los estudiantes desarrollen es prestar atención a las explicaciones que él o — muy eventualmente — sus compañeros hacen; otra de tales tareas es responder las preguntas que los profesores o los otros estudiantes les formulan. A este respecto, algunos profesores manifestaron que advierten que no es posible lograr que todos los estudiantes estén atentos a lo que se está discutiendo en clase y que admiten que algunos de ellos se distraigan durante la clase. Esta actitud se puede ver como una manera de hacer más agradable la clase por razón de establecer relaciones laxas entre estudiantes y profesor, la cual llevada a un extremo no beneficia la configuración de un ambiente de aprendizaje propicio. Ahora bien, consideramos que las acciones llevadas a cabo por los profesores y el tipo de tareas asignadas no permiten que se den las condiciones fundamentales para que los estudiantes escuchen a sus compañeros y entablen discusiones con respecto a lo que presentan.

Presentación de información matemática

Una aproximación inicial a las estrategias que implementan cada uno de los profesores de los cinco casos estudiados para presentar información matemática nos da la idea de una diversidad de éstas. No obstante, al examinar con más detalle tales estrategias reconocemos que tal variedad es relativamente aparente y, en consecuencia, también aquí encontramos elementos comunes entre las estrategias, que las identifican más de lo que las diferencian. A continuación pasamos a detallar tales elementos.

En primer lugar, señalemos que, con excepción del Caso 2⁵, en todos los casos estudiados los profesores hacen exposiciones orales a través de las cuales dan una información matemática que se refiere prioritariamente a procedimientos matemáticos, aunque en ocasiones también se refiere a conceptos y objetos matemáticos; usualmente esta información se presenta exhibiendo cómo se aplica el procedimiento en casos específicos y se espera

5. En este caso, si bien las profesoras en ningún momento hacen exposiciones orales para todo el grupo, sí hacen exposiciones escritas a través de algunas guías. Por otra parte, ocasionalmente los estudiantes hacen exposiciones orales al grupo; en efecto, reconocimos un momento en el que un grupo de estudiantes expone a sus compañeros aspectos matemáticos relativos a su trabajo en alguno de los talleres. Consideramos que esta última situación fue provocada más por nuestra presencia en las clases y por nuestra pregunta acerca de la existencia de actividades de aula que pudieran comprometer a todos los estudiantes y profesores de manera simultánea, que por ser esta una situación usual en tal caso.

que los estudiantes establezcan así el procedimiento ilustrado como general para solucionar determinado tipo de ejercicios. Los estilos de las exposiciones varían de un profesor a otro. Las profesoras de los Casos 4 y 5 realizan exposiciones del contenido matemático en el tablero frente a sus estudiantes y los involucran en éstas a través de preguntas que les formulan o de breves tareas que les proponen y que vinculan en la exposición; en cierto sentido, no sólo hacen la exposición para los estudiantes sino también con ellos. Ambas profesoras luego de realizar su exposición de procedimientos, en la que de manera prioritaria dan cabida al manejo sintáctico de signos y símbolos y a la manera de notar y escribir, proponen ejercicios para ser desarrollados por sus estudiantes; estos ejercicios eventualmente se titulan con la palabra “taller” pero generalmente tan sólo implican la réplica de un procedimiento, enseñado durante la exposición, bajo las reglas sintácticas y de notación expresadas en la misma. En ambos casos, son las profesoras quienes acostumbran presentar los procedimientos hechos por los estudiantes como respuesta a una tarea y copiados por ellos en el tablero.

En los Casos 1 y 3 reconocemos algunas pequeñas diferencias con los dos descritos inmediatamente antes. En su exposición, el profesor del Caso 3 incorpora notablemente las respuestas de sus estudiantes a preguntas que les va planteando e incluso aborda detalladamente algunas de tales respuestas para intentar aclarar el sentido de las mismas o los significados y afirmaciones que éstas contienen. No obstante este interés en las respuestas de los estudiantes, es relativamente fácil identificar que es el profesor quien a través de estas acciones expone la información y, en cierto sentido, le asigna un significado; en las clases observadas en este caso, evidenciamos que el profesor mediante tres preguntas que propone y que pretenden significar los aspectos centrales de la aplicación del criterio, expone la manera como se verifica que un número satisface un criterio de divisibilidad. Por su parte, la profesora del Caso 1 con frecuencia verbaliza y concluye la idea matemática⁶ a la que los estudiantes deberían haberse aproximado después de desarrollar una tarea en la que generalmente ellos no pueden verbalizar la idea, a pesar de los intentos de la profesora para que lo hagan.

En nuestra opinión, los profesores en su deseo de abandonar la estrategia de exposición magistral —tan criticada por algunos— implementan otras estrategias a través de las cuales desempeñan un papel un tanto diferente al de conferencista y hacen jugar a sus estudiantes un papel diferente al de auditorio pasivo, en el que se espera su participación más activa; a pesar de ello, consideramos que los profesores terminan siendo los expositores de las ideas y procedimientos matemáticos y tenemos la impresión de que las ta-

6. Un ejemplo de esto es la situación en que la profesora intenta que los estudiantes lleguen a la definición de medir, a través de la descripción del proceso seguido al medir segmentos. Los estudiantes se refieren a comparar y la profesora hace varias preguntas para guiarlos a decir qué lo que se compara son los objetos con una unidad de medida, pero como ellos no pueden expresar esto, la profesora termina verbalizando la definición.

reas en las que comprometen a sus estudiantes no parecen generar el aprendizaje ni la comprensión de las ideas matemáticas que son objeto de estudio. Quizá la exigua diferencia en cuanto al papel desempeñado por el profesor se justifique en la idea de que en la escuela él es precisamente el responsable de que los estudiantes tengan la información matemática contenida en los textos escolares o en el saber matemático mismo del profesor y así termina por exponerla independientemente de si los estudiantes lograron intuir-la, descubrirla, construirla y/o comprenderla.

Este tratamiento de la información casi siempre relega a un último plano otros aspectos del aprendizaje de las matemáticas (v.g., el desarrollo de competencias matemáticas o de actitudes hacia la matemática) que hacen parte de la formación matemática de los individuos — asumida como fin fundamental de las experiencias matemáticas escolares.

Es notorio que el tiempo total de clase empleado para exponer la información matemática por parte de la mayoría de los profesores es poco, mientras que asignan gran parte del tiempo de la sesión al trabajo de los estudiantes. Quizá esto se deba a que el profesor considera que es en la clase donde mejor puede contribuir al aprendizaje del estudiante, ya que es común que las tareas asignadas para la casa no se desarrollen.

En segundo lugar, señalemos que en tres de los casos estudiados (Casos 1, 2 y 4), se utiliza la estrategia de lectura de un texto escrito en alguna de las clases como manera de poner a los estudiantes en contacto con una información relativa a las matemáticas. Por ejemplo, en una de las clases observadas, la profesora del Caso 1 propone a los estudiantes leer en grupos, recapitular y parafrasear individualmente una información de un libro de texto; para ilustrar lo que espera que hagan con el fin de recapitular la información, la profesora hace que un estudiante lea una breve parte de la información y les pregunta a los estudiantes qué es lo importante de lo leído; ellos contestan fragmentos de la información leída y la profesora registra en el tablero palabras alusivas a dichos fragmentos pero indica que lo que espera es que ellos escriban las ideas y no sólo palabras. La profesora del Caso 4, como parte de su estrategia, propone a los estudiantes tareas en las que deben hacer la lectura de un texto y responder preguntas relativas al contenido del texto; luego de que los estudiantes realizan la lectura y responden las preguntas, es ella quien hace un recuento de la información contenida en la lectura y quien presenta finalmente la información del texto. En ambos casos, las profesoras enfatizan en que “no se trata de copiar” la información sin lograr una comprensión de la misma, sino de escribir lo que han entendido; a pesar de ilustrar lo que se debe hacer y formular preguntas, en las clases en las que utilizaron la estrategia de leer un texto no advertimos una acción docente realmente efectiva que pudiera potenciar en los alumnos la comprensión de la información que debían leer. Al contrario, percibimos algunas condiciones que no facilitaban la consecución de tal intención y llevaban a que el profesor tuviera subsecuentemente que repetir la

información, a saber: el hecho de que los textos incluyan términos desconocidos y palabras que se refieren a conceptos e ideas matemáticas avanzadas para el grado de los estudiantes (v.g., integral indefinida, para el grado octavo), el tener que compartir un mismo texto para cuatro o más estudiantes, la falta de argumentaciones en los textos leídos y la generalidad de las ideas allí consignadas.

Ante esto, y ante la ausencia de una genuina disposición de los estudiantes para cuestionar la información que leen y su significado, no parecen quedar otras opciones a los estudiantes que las mismas reportadas cuando nos referimos a tareas similares asignadas para fuera del aula, es decir, limitarse a copiar textualmente la información, o, copiar el texto cambiando una que otra palabra y/o suprimiendo algunos fragmentos del texto.

Por otra parte, en el Caso 2 identificamos que en algunas de las guías de trabajo propuestas a los estudiantes, se presenta información matemática que los alumnos deben leer y con la cual deben hacer algún trabajo, o se pide hacer una determinada lectura de un libro de texto para recapitular información allí expuesta. En este caso, tales tareas pretenden también que los estudiantes logren significar tal información, utilizarla y eventualmente recapitularla; esta acción se acompaña de la interacción con las profesoras en la que se habla sobre tales significados, usos y recapitulaciones.

Las tareas de lectura son tareas que pueden implicar una actividad matemática distinta para el estudiante, si se comparan con las tareas que es común asignar en la enseñanza de las matemáticas. No obstante, desde nuestra perspectiva, la lectura comprensiva de textos matemáticos es una actividad bastante exigente para los estudiantes y desarrollar en cierta medida la capacidad para hacerla podría constituir uno de los objetivos de aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Al analizar lo observado en las clases, consideramos que la cantidad y calidad de acciones docentes encaminadas a tal fin deben ser seriamente reflexionadas por los profesores, pues la mayoría de las acciones que pudimos observar no parecen beneficiar efectivamente la consecución de tal objetivo; además creemos que el significado de la actividad de “leer matemáticas” debe ser estudiado con más detenimiento y profundidad. Por otra parte, creemos que quizá buscando alternativas para no exponer la información en el tablero, los profesores utilizan la lectura de textos por parte de los estudiantes, lo que en esencia no constituye una alternativa real para la enseñanza ni efectiva para el aprendizaje. En efecto, en ambos casos se enfrenta a los estudiantes a una información matemática poco significativa, a la cual deben asignar un significado a partir de lo que saben, casi siempre sin una estrategia que beneficie tal asignación, y posterior o simultáneamente deben usarla en la aplicación de procedimientos y en el desarrollo de tareas.

VISIÓN PANORÁMICA DE LOS TEMAS ABORDADOS

Presentamos aquí una descripción sintética de las secuencias de actividades desarrolladas en los cursos para tratar los temas matemáticos cuya enseñanza observamos, y una perspectiva del énfasis en los elementos conceptuales y procedimentales del conocimiento abordado, percibida en la manera en que se desarrolla la enseñanza de los temas.

En primer lugar, señalemos que nuestro interés y objeto de estudio es el currículo desarrollado y no el currículo propuesto; en este sentido, en cada uno de los casos consideramos que las actividades realizadas configuran una organización de facto de la(s) temática(s) tratada(s) y no las posibles organizaciones previstas. Así, en las clases observadas los profesores desarrollaron organizaciones temáticas alrededor de uno o varios temas específicos. La divisibilidad es el tema que se estudia en el Caso 3. En el Caso 1, los objetos geométricos básicos y la medición de longitudes constituyen los dos temas estudiados. En el Caso 4 —a pesar de que en una clase se hayan trabajado, a través de un repaso, las definiciones de variable y constante, la representación geométrica de algunos números irracionales y la representación algebraica de enunciados verbales—, la suma, resta y multiplicación de polinomios son los temas específicos estudiados. En el Caso 5 podría pensarse que la función cuadrática es el tema estudiado; sin embargo, es necesario reconocer que con respecto a su representación gráfica —asunto central de la enseñanza en este caso— se tratan superficialmente temas específicos que aunque relacionados con el tema central no le son esenciales (v.g., la parábola como cónica o la representación gráfica de parábolas de eje paralelo al eje x). De los tres temas tratados en el Caso 2, a saber, la clasificación de objetos, la solución de problemas de razonamiento aritmético y elementos de la geometría plana, sólo este último aborda contenidos matemáticos específicos; no obstante la diversidad de temas tratados, no puede decirse que este caso comporte una organización fragmentaria de los temas, pues cada taller trata uno de tales temas y es desarrollado por los estudiantes en varias sesiones de clase⁷.

La identificación del tema (o de los temas) se complementa con el estudio de las interrelaciones entre éstos, establecidas también a través de las actividades desarrolladas en las clases. A este respecto afirmamos que en la mayoría de los casos se evidencia ausencia de conexiones explícitas y/o efectivamente significativas entre tales temas, o de éstos con otros que les podrían asignar una referencia o significado. Por ejemplo, en el Caso 4 no se explicitaron las conexiones entre la suma y resta de polinomios y la suma

7. El curso se desarrolla con base en guías de trabajo que se van entregando a los alumnos, una a una, en una cierta secuencia, y sólo se entrega una nueva guía una vez que se ha completado el proceso de elaboración de la anterior. Así que, durante una clase se pueden estar desarrollando diferentes talleres; de hecho, en las cuatro clases observadas pudimos ver trabajo en torno a las primeras cinco guías.

y resta de números, lo que hubiese sido importante para —entre otras— establecer la solución a un problema propuesto a los estudiantes (y resuelto sólo por un número bastante reducido de ellos); tampoco se recurrió a la geometría para proveer un significado que pudiera darle algún sentido a los polinomios. En el Caso 5, es también notoria la debilidad de la conexión entre las representaciones numérica y gráfica de la función cuadrática, ya que se reduce a ubicar en el plano los puntos cuyas coordenadas se calcularon y a identificar los parámetros h y k de la expresión $y - k = (x - h)^2$ con las coordenadas del vértice; el estudio de las características de la función habría podido aportar elementos para conjeturar algunas características de la respectiva gráfica cartesiana. Para el Caso 1, la conexión entre el estudio de los objetos geométricos y la medición de longitudes es bastante débil pues se reduce al reconocimiento de que hay segmentos que notados de diferente manera comparten la misma medida; en este sentido no hay un estudio de las características de los objetos geométricos, ni de la determinación de cuáles de ellas constituyen magnitudes medibles, ni de cómo se realiza el proceso de medición, lo que pudo haber dado mayor cohesión a los temas. En el Caso 3, se establece conexión entre los criterios de divisibilidad y reside fundamentalmente en la oportunidad que se tiene de contrastar tales criterios a través de responder tres preguntas; no obstante, reconocemos que esta conexión podría haberse hecho de manera más fuerte si para algunos criterios se hubieran seleccionado unos enunciados diferentes a los estudiados. En uno de los talleres sobre geometría propuesto en el Caso 2, las tres perspectivas desde las que se define el ángulo (i.e., unión de dos semirrectas con un punto en común, zona del plano limitada por dos semirrectas con un punto en común y objeto generado por un movimiento de rotación de un rayo sobre su origen) son ejemplo de una presentación desconectada que podría generar en los estudiantes una noción confusa de ángulo.

En la mayoría de los casos se percibe que las variaciones en el rumbo predeterminado para las clases son casi inexistentes; reconocemos que las organizaciones temáticas preestablecidas por el profesor parecen inmutables, lo que sucede con sus estudiantes (sus respuestas, reacciones, intereses, etc.) no las modifican en esencia y sólo se perciben ligeros ajustes. Además, no se saca partido de situaciones en las que el trabajo de los estudiantes posibilitaría desviarse del camino trazado con fines de explorar los tópicos para una mayor comprensión de parte de ellos.

También en la mayoría de los casos se evidencia que fundamentalmente se aborda un conocimiento procedimental de las matemáticas y que a pesar de estudiar algunas ideas, notaciones y términos matemáticos se relega a un segundo plano el estudio de elementos conceptuales. Al respecto, en el Caso 3 y en los Casos 4 y 5 (que abordan temáticas referidas a la aritmética y al álgebra, respectivamente), el aprendizaje de los criterios de divisibilidad y de los algoritmos para establecer los resultados de operaciones entre polinomios o para construir una tabla y hacer una gráfica cartesiana, constituyen el

centro de atención. En contraste, en el Caso 1, el aspecto procedimental del conocimiento geométrico no parece ser el centro de atención; y en los talleres propuestos en el Caso 2 para el estudio de la geometría, aunque se consideran elementos del conocimiento procedimental (v.g., la construcción de rectas paralelas, la construcción de ángulos con amplitud dada), el aspecto procedimental no configura el centro de atención.

Los hechos mencionados en el párrafo anterior permiten reconocer que en aritmética y álgebra los procedimientos constituyen para los profesores aspectos esenciales en tanto que en geometría no, razón por la cual el énfasis que se hace en esta clase con respecto al tipo de conocimiento que se pone en juego, no apunta necesariamente a reproducir y aplicar unos procedimientos. Quizá esto se debe, por una parte, a falta de precisión en el conocimiento del profesor con respecto a cuáles son los elementos esenciales del aspecto procedimental del conocimiento geométrico, y por otra parte, a que en la geometría euclidiana escolar, aunque hay técnicas y destrezas (v.g., usar instrumentos para medir longitudes y amplitudes), procedimientos (v.g., determinar la distancia de un punto del plano a una recta del mismo plano, hacer construcciones con regla y compás), razonamiento y estrategias (v.g., aplicar los criterios de semejanza y congruencia triangular para obtener la medida de los elementos de una figura dada), no hay algoritmos propiamente dichos. Esto podría marcar definitivamente una distinción en la enseñanza que de manera natural privilegia los procesos de conceptualización. Aun así, en las clases de geometría observadas, las tareas propuestas para trabajar en la comprensión de conceptos se quedaron a medio camino y no se culminaron los esfuerzos realizados al respecto. Para el Caso 1, esto impide concretar la diferencia con las de aritmética y álgebra. Para el Caso 2, la diferencia podría indicarse como el establecimiento explícito de conexiones entre algunos de los conceptos tratados. La fuerte tendencia al trabajo de aplicación de procedimientos previamente especificados, que se observó en uno de los cursos de aritmética y en los dos de álgebra, podría explicarse por la ausencia de una reflexión profesional por parte de los profesores, acerca de la existencia y réplica escolar de una aproximación casi que exclusivamente algorítmica a algunas disciplinas matemáticas.

Además, reconocemos que muchos de los procedimientos tratados se presentan sin una justificación o argumentación matemática o que ésta es muy débil y no reside en las conexiones y dependencias que se puedan establecer con los aspectos conceptuales que los sustentan. Por ejemplo, tal es la situación del trazado de la curva que conecta los puntos correspondientes a un conjunto de parejas de números de una tabla; la profesora del Caso 5 sólo menciona que se debe trazar una curva suave que pase sobre los puntos pero no hace referencia alguna a la variación conjunta de las variables relacionadas, al carácter continuo o denso de los conjuntos de partida y llegada de la función, o al dominio de la función, características de la función que sustentan tal modalidad de trazo. En el Caso 3 evidenciamos otro ejemplo,

al observar que el profesor se preocupa de que sus estudiantes logren un manejo de los criterios de divisibilidad sin que haya alusión alguna a posibles deducciones de dichos criterios. Consideramos que al presentar el conocimiento matemático procedimental sin sustento en lo conceptual, no le queda al estudiante otra alternativa que memorizar los algoritmos y ejercitarse en su ejecución; además, creemos que a través de ello se comunica una visión de las matemáticas, al menos en su aspecto procedimental, como disciplina arbitraria e injustificable.

La apreciación acerca del énfasis en los aspectos procedimentales no puede entenderse como la ausencia de un tratamiento de aspectos conceptuales. De hecho, en todos los casos se enuncian y se estudian términos matemáticos relativos y específicos a la temática abordada, es decir, que se refieren a objetos o conceptos matemáticos que tienen significados precisos. Sin embargo, consideramos que la aproximación que, a través de las actividades de los profesores y estudiantes, se hace a los significados matemáticos de dichos términos, no siempre conduce a los estudiantes a abandonar la significación cotidiana de tales términos y/o a asumir una significación matemática específica. En cada uno de los casos encontramos ejemplos que ilustran la anterior aserción. En el Caso 1, se hace una alusión distante del significado matemático para el término “infinito”, ligado a la interpretación del dibujo de una recta o semirrecta, como que no tiene principio o fin; también allí se hace referencia a los objetos geométricos como los dibujos de los mismos y se asocian diversos significados para el término “centímetro”. En el Caso 2, se mencionan diferentes términos (v.g., forma, altura, grosor, tamaño) pero no se hace un trabajo de significación de éstos o se asumen distintas acepciones para un mismo término (v.g., figura) sin precisar o concretar alguna de ellas. En el Caso 3, se enuncian los términos “número”, “cifra” y “dígito” sin hacer una distinción entre sus significados, lo que genera en algunos momentos dificultades en la comunicación entre el profesor y los estudiantes. En el Caso 4, para el término “simplificar” —entre otros— no se aborda tarea alguna que le permita a los estudiantes lograr algún significado y para términos como “variable” o “constante” el significado asociado parece no corresponder con el procurado a través de la lectura de un texto donde se les define. En el Caso 5, la palabra “parábola” sólo constituye una forma diferente de denotar formas curvas, pues ninguna de las actividades realizadas permiten concretar rasgos descriptivos adicionales.

También en cada uno de los casos —excepto en el Caso 3— reconocemos que los profesores presentan notaciones y hacen que los estudiantes las utilicen; a este respecto advertimos en el Caso 4 un énfasis por parte de la profesora en el uso correcto e imprescindible de las notaciones en la escritura de la solución de algunos ejercicios (v.g., el uso de la notación algebraica de la función para el cálculo de los valores de las imágenes de valores numéricos predeterminados en una tabla, o la escritura de la expresión “de ... restar ...” en el enunciado de un ejercicio de resta de polinomios

y su distinción con el enunciado estrictamente algebraico del mismo), así como las observaciones verbales de la profesora y estudiantes del Caso 1 acerca de la notación de los segmentos y de las rectas.

Además de los términos y las notaciones, en todos los casos se hace algún trabajo para aproximarse a una idea o enunciado matemático. Tal trabajo contempla acciones como: enunciar la idea y luego ejemplificarla; ilustrar la idea con casos particulares y luego enunciarla; o hacer una tarea en donde se descubra la idea o el enunciado. Tenemos la percepción de que dichas aproximaciones casi siempre quedan a medio camino, son incompletas o superficiales, por tanto, en la mayoría de los casos, los estudiantes deben aprender los enunciados sin lograr una comprensión efectiva de las ideas matemáticas que les dan significados. Un hecho que respalda tal percepción es el registro de que la referencia que los estudiantes hacen a veces del enunciado o idea matemática no va más allá del recuerdo de la tarea desarrollada o de los materiales o instrumentos que se utilizaron en la misma. Por ejemplo, en el Caso 5, los estudiantes se informaron del enunciado “la parábola es una cónica” a través del trabajo de corte de un cono con un plano sin hacer un estudio de las características de la curva obtenida; algunos estudiantes del Caso 4 recordaron el trabajo en torno a la función lineal sólo cuando se les mencionó que en aquél habían utilizado papel milimetrado.

Al margen de los aspectos procedimentales y conceptuales de los temas matemáticos tratados, en algunos de los casos se mencionan y abordan algunos datos o anécdotas provenientes de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, en el Caso 1, la profesora propone a sus estudiantes una tarea para que consulten la historia del metro (en tanto patrón de medida) y en el Caso 2 se incluye un taller con referencias a la historia de la geometría y otro con referencias a la historia de los sistemas de numeración. Creemos que esta incorporación de la historia de las matemáticas a los desarrollos curriculares debe hacerse enfocada en los aspectos epistemológicos de las nociones, conceptos y procedimientos matemáticos relegando a un plano secundario los aspectos anecdóticos.

Finalmente, reconocemos que sólo en el estudio de contenido geométrico hay un uso de material concreto a través de tareas que lo exigen. Igualmente, identificamos que en ninguno de los casos hay uso de herramientas tecnológicas ni referencia a lo que éstas pueden hacer, al margen de los instrumentos de medición utilizados en geometría. Este hecho no deja de ser preocupante, pues a través de esto se promueve la idea de que el trabajo en matemáticas es de papel y lápiz, desconociéndose el papel que la tecnología puede cumplir en hacer y aprender matemáticas.

INTERACCIÓN A TRAVÉS DE LA CUAL DISCURREN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

En este apartado resaltamos aspectos relativos a la interacción de los profesores con los estudiantes y de los estudiantes entre ellos, en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los temas abordados. Para ello destacamos dos escenarios en los que la interacción en clase se manifiesta de maneras un poco diferentes. El primer escenario lo constituyen las exposiciones o presentaciones de los temas matemáticos por parte del profesor; el segundo lo conforma el trabajo individual o en grupos de estudiantes en torno a tareas propuestas por el profesor.

Para dar cuenta de la interacción hemos configurado un intervalo para el cual uno de los extremos está definido por las interacciones que típicamente se dan en lo que se conoce como monólogo y el otro por las interacciones que se dan en los diálogos. En el primer extremo existe un único personaje que habla o plantea reflexiones en voz alta y —como en una obra dramática— un auditorio que le observa y escucha. En el extremo opuesto se reconoce una plática entre dos o más personas, que alternativamente manifiestan sus ideas o afectos. En el primero, la interacción entre el personaje y el auditorio es casi inexistente y las acciones del personaje parecen ser unidireccionales, es decir, parecen no modificarse sustancialmente por las reacciones del auditorio; en el segundo, se establecen un sinnúmero de interacciones entre los participantes y son definitivamente bidireccionales, es decir parecen depender de las reacciones de unos y otros. Se percibe así que la interacción entre profesor y estudiantes es bastante limitada cuando la forma de trabajo se aproxima a las clases magistrales mientras que las clases dialógicas ofrecen un panorama potencialmente más expedito para que haya un diálogo entre profesor y estudiantes, o entre los estudiantes.

El escenario de las presentaciones o exposiciones de los temas matemáticos

Para este escenario, los extremos del intervalo permiten ubicar sendos y correspondientes tipos de clases, a saber: las clases magistrales y las clases dialógicas. Como es de esperarse en cada uno de estos tipos de clase se definen las interacciones de manera diferente. Para precisar éstas, comencemos, por las interacciones en las clases magistrales. En una clase de este estilo es usual que el maestro comunique a sus estudiantes un cúmulo de información teórica o práctica relativa a las matemáticas. Esta comunicación se puede dar a través de una conferencia —entendida ésta como una disertación en público sobre algún punto doctrinal— en la que se pretende que el alumno participe del saber del profesor al escucharlo y verlo actuar. En tal conferencia, el profesor hace uso de la palabra la mayor parte o casi totalidad del tiempo; los estudiantes (i.e., el auditorio) tienen la palabra una vez que el profesor ha expuesto y su uso se restringe a hacer preguntas al profesor para que aclare o amplíe una idea. Aquí la exposición inicia y ter-

mina según lo disponga él o el horario previsto. En estas clases expositivas, las afirmaciones enunciadas tienen por lo regular un carácter asertivo y carecen de explicación —hecho que las asemeja a dogmas—, o cuando las afirmaciones están respaldadas por justificaciones, explicaciones o demostraciones, éstas generalmente se presentan como elaboraciones matemáticas incuestionables; ante esto, al auditorio no le queda más opción que aceptarlas y/o memorizarlas.

Ahora, en una clase dialógica se da un diálogo o plática entre dos o más personas, que alternativamente manifiestan sus ideas. En estas clases existe, en consecuencia, la posibilidad de una discusión. El uso de la palabra se alterna entre las personas que dialogan y no es normal que una de ellas se apodere de la palabra. El diálogo sobre un tópico termina cuando las personas que en éste intervienen así lo deciden y la finalización no implica que necesariamente se haya agotado la discusión; en muchas oportunidades se acuerda continuar luego con la discusión. En este tipo de clases quienes intervienen en el diálogo hacen afirmaciones, formulan hipótesis o conjeturas, enuncian preguntas, pero ante todo presentan explicaciones a esto y sustentan las ideas, lo que contribuye a que se dé el diálogo.

Si bien intentar ubicar la interacción que se manifiesta en cada uno de los casos estudiados en una posición específica de tal intervalo es una tarea quijotesca, sí es posible establecer una posición que permita enunciar una tendencia de cada uno de los casos hacia alguno de los extremos del intervalo de la interacción.

En cuatro de los casos estudiados (1, 3, 4 y 5) identificamos que si bien entre el profesor y los estudiantes la interacción no se manifiesta de manera estricta como en un monólogo, sí exhibe una tendencia a éste más que a una interacción semejante a la de un diálogo. No obstante esta semejanza en la tendencia de estos casos, entre ellos podemos hacer distinciones que pasamos a precisar.

En las clases de los Casos 4 y 5, las profesoras hacen exposiciones de los temas matemáticos y durante éstas establecen interacciones con los estudiantes al proponerles preguntas y breves tareas. La existencia de preguntas puede hacer suponer que hay un interés por iniciar diálogos en torno a la exposición, sin embargo, creemos que el hecho de que las preguntas usualmente puedan ser contestadas con una palabra o con una breve frase y que casi nunca exijan como respuesta una o más oraciones que expresen una idea matemática completa, no favorece la existencia de tal diálogo. El hecho de que en uno de los casos la profesora proponga a sus estudiantes tareas que hacen parte de la exposición, hace pensar que se quiere generar una interacción en torno al contenido central de la exposición, sin embargo, como las tareas son casi siempre parte de un procedimiento que la profesora explica en el tablero, tal interacción es bastante limitada y se refiere sólo a fragmentos de lo que hay que hacer. En este sentido, estas preguntas y tareas no logran vincular a los estudiantes con los aspectos centrales del tema de

estudio, sino con aspectos secundarios y no ofrecen una opción genuina para que los estudiantes respondan de manera amplia.

Si se supone que las preguntas tienen por intención indicar si los estudiantes están siguiendo el hilo de la presentación, podría reconocerse que las respuestas de los estudiantes sí cumplen un papel de realimentación respecto del grado de atención de ellos en la exposición, pues en algunas oportunidades ante la ausencia de respuesta las profesoras reaccionan con llamados de atención respecto de la disciplina o enfatizan algún aspecto de la exposición. Para las profesoras de estos dos casos es muy importante que los estudiantes presten atención a la exposición y que no se distraigan en otras labores, ni siquiera en copiar lo que se está exponiendo, pues esto se puede hacer una vez la exposición haya terminado. En consecuencia, reconocemos que a pesar de haber una interacción a través de preguntas, tareas y respuestas, ésta es bastante restringida y, por lo tanto no se puede hablar de la existencia de diálogo entre las profesoras y los estudiantes durante las exposiciones.

Durante las exposiciones de temas matemáticos en sus clases, los profesores de los Casos 1 y 3 también proponen preguntas y tareas, pero la interacción con sus estudiantes se da en términos un poco diferentes, dado que en ambos casos las respuestas y los desarrollos efectivamente vehiculan la exposición. Los profesores le dan la palabra a los estudiantes para que expresen de manera pública y muy frecuentemente de forma oral los desarrollos a tareas que ellos han propuesto. Cuando los estudiantes están presentando sus desarrollos, los profesores y algunos pocos estudiantes escuchan las respuestas, que pueden o no generar reacción en los profesores y casi nunca —o muy eventualmente— generan alguna reacción en sus compañeros. Las reacciones de la profesora del Caso 1 pueden indicar que la respuesta es incorrecta, que incluye algún elemento destacable (el cual casi siempre escribe de manera sintética en el tablero), que es necesario someter la respuesta a debate, que está replicando aspectos de una respuesta anterior, o que está presentando información nueva; como respuesta a estas reacciones de la profesora casi nunca los estudiantes hacen algo diferente de presentar otros desarrollos de las tareas, incluso similares a los ya presentados; en ocasiones, las preguntas de los profesores son asumidas por los estudiantes como adivinanzas e incorporan en sus respuestas las frases o palabras que el profesor ha mencionado, obteniendo eventualmente una aprobación tácita a tal estrategia. Por su parte, el profesor del Caso 3, además de asumir reacciones similares a las citadas antes, reacciona a las respuestas de los estudiantes formulando contrapreguntas que por lo general intentan aclarar el sentido de las respuestas o los significados y afirmaciones que éstas contienen; estas reacciones generan nuevas respuestas del estudiante que originalmente enunció la respuesta o de algunos pocos de sus compañeros. En unas oportunidades, esta interacción tiene varios ciclos con un mismo estudiante pues sus respuestas llevan a que el profesor enuncie nuevas contrapreguntas. En este caso, el hecho de que el profesor cumpla una función de cuestiona-

dor recurrente y el estudiante sólo se encargue de contestar las preguntas define un tipo de interacción que también dista de una interacción estrictamente dialógica, en tanto que no es muy evidente que uno y otros efectivamente expresen ideas matemáticas completas en sus intervenciones.

En los cuatro casos anteriores (1, 3, 4 y 5), los profesores son quienes deciden qué aspectos discutir y cuáles no, y son ellos quienes determinan cuándo se inicia y termina una discusión o cuándo hay necesidad de enunciar preguntas y de escuchar respuestas. Por su parte, los estudiantes casi nunca cuestionan la validez de lo expuesto por el profesor o sus compañeros, muy esporádicamente enuncian preguntas, y es raro que hagan afirmaciones que sean deducciones de lo que se está exponiendo. Eventualmente, cuando preguntan, no indagan por aspectos matemáticos sino por cuestiones de forma u organización de la clase.

De otro lado, las afirmaciones que enuncian los profesores de estos casos como parte de la presentación del tema, tienen un carácter asertivo que no ofrece una auténtica posibilidad de establecer dudas respecto de su veracidad y, en consecuencia, restringe la aparición de una interacción entre los estudiantes, o entre ellos y los profesores, en torno a tal asunto.

En el conjunto de clases observadas para el otro caso, el Caso 2, no reconocimos una sola en la que las profesoras desarrollaran una exposición oral de un tema matemático, razón por la cual no abordamos aquí, sino bajo el siguiente título, asuntos acerca de la interacción en este caso.

El escenario del trabajo de los estudiantes

Uno de los escenarios en que se manifiesta la interacción entre profesor y estudiantes, o entre estudiantes, lo constituye el trabajo de ellos ya sea individual o en pequeños grupos. Este tipo de trabajo comúnmente se da cuando el profesor ha asignado una tarea para ser desarrollada en clase. La interacción entre los estudiantes y el profesor se puede generar cuando la tarea propuesta no es comprendida por los estudiantes y, en consecuencia, ellos preguntan qué deben hacer, aunque es más frecuente la pregunta acerca de cómo deben hacerlo, y el profesor vuelve a enunciar la tarea, les explica cómo hacerla, o empieza a desarrollarla en el tablero para todo el curso. Si los estudiantes inicialmente han logrado alguna comprensión de la tarea y de la manera de realizarla, comienzan su desarrollo y la interacción se da cuando ellos le presentan al profesor sus elaboraciones o cuando el profesor decide detenerse ante el puesto de un estudiante y le hace algún comentario o pregunta. Los profesores algunas veces les recuerdan a los estudiantes cómo hacer el trabajo y la notación que deben utilizar, manifiestan su acuerdo o desacuerdo con el desarrollo presentado, eventualmente les hacen preguntas a los estudiantes sobre el mismo o les señalan un error y en algunas oportunidades se dirigen a todo el grupo para hacer una recomendación. Rara vez abordan la dificultad detrás de los errores, cuestionan o retan al estudiante de manera que pueda ampliar su comprensión.

Aunque, el trabajo de los estudiantes es la fuente para que los profesores hagan comentarios personales o realicen comentarios a todo el grupo, es decir, haya una interacción entre profesor y estudiante, se desaprovechan las oportunidades para ahondar en la comprensión de los estudiantes, pues las preguntas o señalamientos que se hacen no llegan a cuestionarlos, las respuestas no se exploran y es el profesor quien proporciona para todo el grupo la respuesta adecuada.

En todos los casos, una vez que los profesores han asignado la tarea para ser desarrollada en el salón de clase y que los estudiantes han iniciado el trabajo, los profesores recorren el salón y parecen observar los desarrollos de los estudiantes. El tiempo de duración de esta acción es variado. La profesora del Caso 4 destina poco tiempo a pasar por los puestos de los alumnos, luego se dedica a revisar en su escritorio los desarrollos de tareas anteriores; otros profesores circulan por el salón durante la casi totalidad del tiempo asignado para el desarrollo de la tarea. En los Casos 1 y 4, como resultado de mirar el trabajo de los estudiantes, las profesoras reaccionan con comentarios en voz alta para todo el grupo o con comentarios dirigidos a un estudiante en particular, que se refieren a errores matemáticos detectados, a reconvenciones disciplinarias o sugerencias “de vida” en torno a cuestiones éticas o de comportamiento, de las que esperan que a la larga algo les quede a los estudiantes. En el Caso 5, la profesora pasa por los puestos y se detiene de vez en cuando para hacer también comentarios. Estas profesoras en este escenario no establecen diálogos con sus estudiantes y su interacción mantiene la proximidad con la que se establece en los monólogos. El profesor del Caso 3 durante buena parte del tiempo de la clase es abordado por los estudiantes quienes le muestran los resultados de su trabajo para que él los avale o les señale algún error, tarea que normalmente realiza; casi nunca hace comentarios para todo el grupo; en algunas oportunidades cuando decide dirigirse a algún estudiante al parecer lo hace porque sabe que tal estudiante requiere de un apoyo especial y la manera de darle dicho apoyo es preguntándole por lo que está haciendo y explicándole cuando el estudiante no contesta o lo hace de forma errónea. Aunque este tipo de interacción no puede reconocerse como idéntica a un diálogo, sí se aproxima un poco, pues hay interacción en torno a las elaboraciones de los estudiantes, es decir a lo que pueden o no hacer y a sus justificaciones.

Quizá sea sensato suponer que los desplazamientos por el salón tienen como finalidad verificar que los estudiantes trabajan en la tarea, más que observar los desarrollos logrados, pues en al menos dos de los casos hay evidencia de que varios estudiantes hicieron desarrollos deficientes desde nuestra perspectiva y las profesoras no lo advirtieron o decidieron no reaccionar, en concordancia con los énfasis hechos en la exposición.

En este escenario ocasionalmente algunos profesores reaccionan ante la indisciplina que muestra el grupo de estudiantes. No obstante, para algunos profesores la disciplina no parece ser un elemento fundamental; en este sen-

tido hay profesores que permiten que los estudiantes deambulen por el salón, desarrollen otro tipo de labores y hablen de aspectos no siempre relativos a la tarea y es frecuente que las clases sean bastante ruidosas. Los profesores hacen algunos llamados de atención e invitan a bajar el nivel de ruido, a hacer silencio, a escuchar al otro, pero no siempre todos están dispuestos a ello o pueden oír lo que se pide. Esta permisividad puede deberse en parte a que la relación entre profesor y estudiantes se manifiesta menos distante: los estudiantes tienen menos reservas y más confianza para dirigirse a él, e igualmente los profesores demuestran un trato amistoso y laxo con ellos. Estas reacciones del profesor y los estudiantes parecen ser constituyentes de la cultura de la clase de matemáticas asumida y puesta en práctica tanto por unos como por otros.

Aunque en principio el hecho de que en estos casos los estudiantes dispongan de mayor tiempo en la clase para trabajar ellos mismos y de que en ocasiones se propicie el trabajo en grupo podría ser coherente con visiones del aprendizaje centradas en la interacción social, no se propende por un intercambio verdadero cercano al diálogo. Esta descripción de la interacción de los profesores con sus estudiantes, cuando éstos desarrollan tareas en clase, permite en suma reconocer que existe una correspondencia con el tipo de interacción que se establece en la exposición del tema. En efecto, en los casos que utilizan presentaciones que incorporan rasgos de una clase magistral o se aproximan a la misma, no existe una interacción legítima y dialógica en la revisión y observación del trabajo de los estudiantes. Aquí es frecuente que, tal y como Hewitt (2002c) lo describe, la conversación gire principalmente alrededor de cuestiones de control y de administración, de enunciados descriptivos o de la enumeración de las acciones realizadas, pero muy poco en torno a lo que guía las acciones y las ideas matemáticas.

En las clases del Caso 2, siempre los estudiantes —organizados en grupos pequeños— estuvieron trabajando en talleres y cada una de las dos profesoras del curso pasaba por los grupos que tenía a su cargo, interactuando así con los estudiantes en torno a los desarrollos logrados. De esta manera el escenario donde se da la interacción en este caso, es en la revisión de las tareas realizadas por los estudiantes. La interacción consiste en intervenciones verbales entre uno de los grupos de estudiantes y la profesora que lo atiende. Esta interacción puede ser iniciada a solicitud de los estudiantes —quienes llaman a la profesora para consultarle alguna duda o para presentarle el resultado de su trabajo con las tareas del taller— o puede ser promovida por la profesora quien indaga por las respuestas de los estudiantes. La profesora inicialmente se informa del aspecto a tratar y reacciona con contrapreguntas, pide y da explicaciones, explicita o pide que se explicita un significado, hace recomendaciones y/o sugerencias. En estas interacciones se establecen diálogos en los que hay tiempo suficiente para expresar ideas, preguntas, conjeturas y explicaciones; además, se reconoce un interés por indagar en torno a aspectos que van más allá de los resultados, tales como la

estrategia utilizada, o por la opinión ante una respuesta. Como es usual que los estudiantes trabajen en grupo, la interacción con la profesora regularmente se establece con el grupo, aunque a veces hay una interacción con alguno de los integrantes del grupo. De manera general, podemos catalogar muchas de tales interacciones como diálogos en los que los estudiantes y las profesoras pueden elaborar sus intervenciones sin un condicionamiento sobre el tiempo, sin que sean interrumpidos, sin necesidad de usar un lenguaje especializado, o sin el temor a preguntar. Es por lo tanto el caso que más se aproxima al extremo donde hemos ubicado las interacciones de las clases dialógicas.

Durante el desarrollo de tareas en grupos de trabajo, los estudiantes interactúan entre ellos, aunque no siempre sus interacciones incorporan aspectos matemáticos. En el trabajo individual —que es el más usual—, también los estudiantes interactúan, aun transgrediendo la condición explícita del carácter individual expresada por los profesores (por ejemplo, en una evaluación escrita). En la mayoría de los casos estudiados, las interacciones entre los estudiantes que se refieren a aspectos matemáticos implican la comparación de los desarrollos realizados y respuestas obtenidas, la indagación (con uno de los estudiantes de mejor rendimiento) acerca de la forma de hacer un ejercicio, entre otros. Si el aspecto no es matemático, los estudiantes también interactúan verbalmente para definir, por ejemplo, quién lee y quién escribe, qué y cómo se copia una respuesta, dónde se ubica el grupo y por quiénes está constituido, o para comentar sobre otras actividades escolares u otros temas. Ahora bien, la exígua información registrada al respecto de la interacción de los estudiantes, nos impide proporcionar más detalles del contenido de la interacción. Sin embargo, nos atrae el hecho de que no exista una distinción en acto del trabajo individual y en grupo.

En ocasiones el objetivo, entre otros, del trabajo en grupo que los profesores propician es que los estudiantes aprendan a colaborar; a veces también el propósito de que los estudiantes expongan en público sus respuestas, o las compartan entre ellos es que aprendan a escuchar y respetar a los demás. Igualmente sobresale como urgente que el estudiante avance en la comprensión de lectura y en la manera de expresarse, tanto escrita como oral. Esto último es particularmente evidente en el Caso 2, donde la profesora insiste y cuestiona verbalmente al estudiante para que relate y escriba el proceso realizado y lo haga de forma coherente y clara.

Como se vio, hay acciones específicas de los profesores guiadas a transmitir mensajes a los estudiantes o a hacerlos vivir experiencias que podrían contribuir a desarrollar capacidades o habilidades relativas por ejemplo, a valores de convivencia. Los valores, entendidos como las cualidades afectivas profundas que los profesores promueven y estimulan en clase (Bishop y Clarkson, 1988)⁸ son prioritarios para la formación de los estudiantes. En este sentido, las intenciones de la enseñanza matemática dirigidas durante mucho tiempo primordialmente al aprendizaje de las matemáticas por parte

de los estudiantes, se perciben ampliadas pues incluyen aprendizajes o entrenamientos relativos a otro tipo de capacidades o habilidades.

VALORACIÓN DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

En los cinco casos se evidencia que lo que se valora de las producciones de los estudiantes incorpora tanto la validez matemática de las mismas como otros aspectos específicamente no matemáticos. A continuación nos referimos, en primer lugar a aspectos de la validez matemática y enseguida a los aspectos no matemáticos. Además establecemos que las reacciones de los profesores constituyen un aspecto descriptivo de la cultura de la clase a través del cual los estudiantes identifican la validez de sus respuestas.

Para muchas personas —a pesar de los trabajos de Gödel— la verdad de los enunciados matemáticos depende de la posibilidad de deducirlos de otros enunciados por métodos hipotético-deductivos. También se asume que la validez de los procedimientos se debe reconocer en la conexión de éstos con los aspectos conceptuales y en la correcta aplicación; igualmente, se considera que en matemáticas los procesos de argumentación, explicación, demostración y comprobación son fundamentales a la hora de decidir sobre la validez de una producción matemática. En este sentido, la validez de las ideas matemáticas debería recaer en la racionalidad. No obstante, en la mayoría de las clases observadas este principio de racionalidad no es el que orienta la validez; al parecer para los estudiantes tiene más peso o poder de validez una afirmación enunciada por el profesor o encontrada en un libro de texto, que las conexiones que se puedan establecer de manera racional para argumentar, explicar o demostrar.

En efecto, salvo en algunas situaciones observadas en el Caso 2, en los demás casos los profesores son quienes tienen y hacen uso del poder de decisión sobre la validez de las respuestas de los estudiantes. En los Casos 1, 3 y 4, el libro de texto es considerado también una fuente de validación por los estudiantes, sobre todo cuando se realizan ejercicios allí planteados y se dispone de un listado de respuestas a tales ejercicios. En estos casos, las explicaciones o argumentaciones dadas por un estudiante no son suficientes para sustentar una postura sobre un aspecto o procedimiento matemático, si no son corroboradas por el profesor o por el libro; en este sentido, los intentos, si ocurren, de dar participación a los estudiantes en la determinación de la validez parecen quedar a medio camino. El profesor y el libro de texto son así la autoridad reconocida frente al conocimiento matemático.

Este reconocimiento a la persona o al libro de texto como fuente de verdad puede verse respaldado en el hecho de que la mayoría de las veces el profesor no enuncia ideas falsas, siempre enuncia ideas matemáticas verda-

8. Un análisis inicial realizado por estos autores, revela que hay tres clases de valores que los profesores transmiten: los valores generales de la educación, los valores matemáticos y los valores específicos de la educación matemática.

deras y como se supone que el libro de texto no puede tener información falsa, no es frecuente cuestionar la información allí contenida; quizá la comprensión de las ideas del libro de texto en algún momento sea objeto de estudio, pero en ningún momento la validez de las mismas se constituye en objeto de estudio. Tampoco la validez de las ideas que el profesor enuncia es objeto de estudio, aunque sí se hace un trabajo para que los estudiantes logren su comprensión. De esta manera, se puede afirmar que la argumentación no es la norma que moviliza la discusión, la enseñanza ni el aprendizaje. La pregunta acerca del “por qué” no es usualmente planteada por ninguno de los actores de las clases. También puede ser fuente de estas posibles justificaciones el hecho de considerar que los profesores, por su saber erudito, no pueden equivocarse. Este reconocimiento parece acentuarse ante la percepción de que no es usual que los profesores admitan cometer errores. En lo que vimos, casi siempre en la clase los errores cometidos por el profesor se disculpan o no trascienden; además, en ocasiones el profesor atribuyó el error a algo externo (por ejemplo, al hecho de que los estudiantes no estaban poniendo atención y que ellos deberían haberse percatado al momento de suceder, o a un problema con los dibujos hechos, etcétera).

Si bien el principio de racionalidad no parece guiar la determinación de la validez de las producciones, sí lo hacen otros aspectos matemáticos. La notación, constituye uno de ellos. En algunos de los casos estudiados, los profesores enfatizan en que la notación matemática se debe emplear ajustada a sus normas matemáticas. Por ejemplo, la profesora del Caso 1 hace convenciones sobre la notación de algunos objetos geométricos empleada por los estudiantes cuando pasan al tablero a escribir los desarrollos de una tarea; específicamente se preocupa de que la notación de los segmentos incluya las letras que nombran sus extremos en mayúscula, y que la línea horizontal esté ubicada sobre éstas y en sus extremos tenga dibujados pequeños segmentos verticales que denotan que “tienen principio y fin”. El carácter correcto de la respuesta es otro de tales aspectos. Cuando los profesores de los Casos 3, 4 y 5 proponen como tarea la realización de un ejercicio, parecen esperar que los estudiantes, a través de la adecuada aplicación del procedimiento, encuentren la respuesta correcta al ejercicio. Como en la mayoría de los ejercicios esta respuesta es única, cualquiera otra es incorrecta, por tanto —independientemente de la estrategia usada— sólo hay una posibilidad de acertar, la cual es valorada positivamente por el profesor y por los estudiantes. Esta idea de la existencia de la respuesta correcta en algunas oportunidades parece proyectarse a tareas que no involucran un ejercicio matemático sino que implican el trabajo con información o con experiencias matemáticas. En este sentido, es usual que ante algunas preguntas de los profesores de los Casos 1, 3, 4 y 5 los estudiantes respondan con palabras o frases cortas que podrían ser adecuadas pero que no corresponden con la que los profesores esperan escuchar, poniendo a los estudiantes en situaciones muy parecidas a las que ofrecen las adivinanzas; como

ejemplo, reseñamos un evento en el que la profesora del Caso 1 pretendía que los estudiantes contestaran que “medir es comparar”, para lo cual propuso una serie de preguntas y realizó algunas acciones en las que los estudiantes intervenían y contestaban correctamente aun sin pronunciar la palabra “comparar”, ante lo cual fue enunciando sílabas para que los estudiantes fueran armando la palabra. La aparición en las producciones escritas de los estudiantes de las operaciones realizadas y de los pasos implementados de un algoritmo, constituyen otro de tales aspectos cuyo interés se destaca en los Casos 3 y 4. Por ejemplo, en varias oportunidades el profesor del Caso 3 solicita a los estudiantes que escriban completas las operaciones aritméticas que realizan para juzgar la divisibilidad de un número.

También la validez incorpora otros aspectos no específicamente matemáticos como la forma de anotar las operaciones, la pulcritud y el orden en el desarrollo de un ejercicio, el uso de sustantivos en las oraciones, la escritura de respuestas con sus respectivas preguntas, el recapitular ideas sin copiarlas textualmente. Para la profesora del Caso 4 es sumamente importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios que les propone utilizando la misma forma de anotar que ha utilizado en su explicación y que los ejercicios estén escritos con bastante orden, a tal punto que condiciona la revisión de las producciones de los estudiantes a la satisfacción de tales criterios. A los profesores de los Casos 1, 2 y 4 parece interesarles mucho que los estudiantes registren por escrito en sus cuadernos como desarrollo de las tareas propuestas la información relevante y que ésta esté escrita con un lenguaje generado por los mismos estudiantes. A la profesora del Caso 1 le interesa que las respuestas verbales de los estudiantes incorporen el sustantivo al que se refieren (cuando la pregunta alude a la definición de un objeto o procedimiento) y que al tomar nota los estudiantes copien tanto la pregunta como la respuesta.

Si bien estos requerimientos son expresados por los profesores como imprescindibles en las respuestas y producciones de los estudiantes y constituyen criterios de validez de las mismas, las acciones de los profesores no siempre contribuyen a ello. Por ejemplo, es usual que la profesora del Caso 1 no copie en el tablero frases u oraciones completas y con significado para los estudiantes, sino que se limite a escribir palabras o frases breves, pero que exija que los estudiantes en sus cuadernos escriban definiciones completas a través de oraciones bien estructuradas.

De otra parte, en la interacción con los estudiantes, y más precisamente con sus producciones, se observa en los Casos 1, 3, 4 y 5 que ante las respuestas de los estudiantes hay unas reacciones del profesor mediante las cuales indica tácita o explícitamente la validez o no del trabajo. No obstante, no es común encontrar expresiones que descalifiquen directa y expresamente, tales como “está mal”. Este tipo de reacciones parece configurar parte de la cultura del salón de clase y particularmente de las clases de matemáticas; cultura que los estudiantes interiorizan y asumen de manera natural; así, in-

interpretar tales eventos culturales constituye la forma de saber si la respuesta presentada es o no correcta. Por ejemplo, es usual que los profesores expresen frases cortas de aceptación a las producciones, que parafraseen la respuesta del estudiante, que hagan un gesto que evoque la aceptación, e incluso que continúen el trabajo sin cuestionar la respuesta. Los estudiantes aprenden a reconocer que, por lo general, los profesores sólo cuestionan las respuestas incorrectas o incompletas, repiten una pregunta varias veces cuando las respuestas que escuchan no les satisfacen, no prosiguen la clase hasta encontrar la respuesta esperada o anuncian explícitamente que la respuesta es incorrecta o que van a hacer algo (fuera del libreto o guión de la clase) para que los estudiantes puedan responder correctamente; particularmente, frente a las respuestas erróneas se señalan los errores cometidos, pero no hay un trabajo acerca de la dificultad que subyace al error evidenciado. Percibimos entonces que el centro de la atención y por consiguiente de las intervenciones de los profesores con respecto a las producciones de los estudiantes, es señalar el error, es decir, indicar lo que es incorrecto tanto desde el punto de vista del contenido matemático como también, en ocasiones, desde el punto de vista de la forma, la cual abarca una manera específica de notar, el orden y la presentación. Usualmente no se refieren a la dificultad inherente al error o a las causas posibles que podrían generarlo, o que hagan preguntas de por qué, o que planteen otras situaciones que arrojen luz para el estudiante sobre cuál es el problema de fondo, o que hagan ver las consecuencias de sus respuestas.

Así podría decirse, de acuerdo con las ideas planteadas por Hewitt (2002c), que los profesores han desarrollado y hacen uso de su consciencia sobre su conocimiento matemático, que les permite establecer lo que es correcto o no. Sin embargo, no se evidencia que hayan trabajado y hagan uso de su consciencia acerca de su conocimiento didáctico o acerca de la consciencia de los estudiantes, lo que podría ayudarles a que sus reacciones incluyeran poner en práctica estrategias encaminadas a que el estudiante vea y comprenda por qué en su trabajo hay un error, fuera de aceptar que alguna autoridad en la clase lo dice.

El Caso 2 exhibe un manejo un tanto diferente al reportado antes; allí, como parte de la cultura del salón de clase se intenta promover la argumentación como elemento de validación de las producciones de los estudiantes. Son precisamente ellos quienes tienen que “convencerse” y “convencer” a sus compañeros de grupo y a sus profesoras de que han comprendido lo que están estudiando, que han solucionado el problema de manera adecuada, que lo que escribieron es suficientemente claro y da cuenta efectiva del proceso y de la respuesta. Este propósito es apoyado por las profesoras a través de acciones en las que exigen y promueven la discusión de las elaboraciones.

OTRAS DERIVACIONES DE LA INDAGACIÓN

Algunas consideraciones adicionales a la caracterización de la enseñanza de las matemáticas de los profesores participantes, hecha en la sección anterior de este documento, contribuyen a precisar y a extender los aportes del estudio.

Como resultado del proceso de observación y análisis descrito, los investigadores hemos ganado mayor consciencia con respecto a la práctica docente del profesor de matemáticas, en general, y con referencia a la enseñanza de las temáticas observadas, en particular. Además la información encontrada nos permitió ampliar y confirmar en alguna medida varias de las conjeturas que hicimos inicialmente, las cuales estaban basadas principalmente en la intuición, experiencia previa y en lo que otros han escrito.

Encontramos tal y como se describió anteriormente, características afines en las clases, que se traducen en escenarios, actividades, tipos de tareas y énfasis en el conocimiento que se pone en juego, que pueden verse como comunes y que sin embargo, varían entre los diferentes casos. También apreciamos esfuerzos en distintos grados por introducir modificaciones en las clases. En particular, el Caso 2 estudiado presenta características innovadoras que lo alejan de los otros cuatro y que son una voz de aliento en el panorama educativo. Esto no quiere decir que no se evidenciaran problemáticas y tensiones en la enseñanza allí.

A continuación presentamos una descripción de la práctica docente, que recoge elementos de la caracterización hecha pero desde otras perspectivas. Damos cuenta luego de algunos hechos de las clases en los que vislumbramos que los profesores han implementado cambios. Finalmente, hacemos mención de resultados obtenidos por medio del cuestionario del estudiante y las dificultades encontradas en su desarrollo que impusieron limitaciones al alcance del estudio mismo con respecto a los resultados del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

LA PRÁCTICA DOCENTE DESDE OTRAS PERSPECTIVAS

Con base en la información recogida y mediante la caracterización ya presentada, intentamos aquí describir la práctica docente de los profesores en términos de cuáles son las matemáticas que enseñan, las estrategias didácticas que emplean para esto y las normas que regulan el intercambio que se da en el aula. Creemos que las respuestas a estos interrogantes pueden verse en cierta forma como explicaciones a lo que los estudiantes aprenden en la clase de matemáticas y por consiguiente a la deficiente calidad de la formación matemática que alcanzan.

ACERCA DE LAS MATEMÁTICAS QUE SE ENSEÑAN EN LA ESCUELA

¿Qué matemáticas se enseñan en las clases?

Para contestar esta pregunta, inicialmente debemos puntualizar qué es hacer matemáticas en la escuela. Por fortuna, la respuesta a esta pregunta ha sido abordada por investigadores de reconocida trayectoria internacional en Educación Matemática, como John Mason (Mason, Burton y Stacey, 1992; Mason, 1999), y por equipos de educadores matemáticos, como el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991) o el convocado por el Ministerio de Educación Nacional para la elaboración de los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998).

En términos generales, hacer matemáticas en la escuela con el fin de desarrollar el pensamiento matemático implica la realización de tareas que involucren resolver problemas, comunicar ideas matemáticas, razonar matemáticamente, conocer y comprender estructuras conceptuales y cuestiones procedimentales. El desarrollo de estas tareas debe promover la actividad matemática intelectual de particularizar, hacer conjeturas, generalizar y validar.

De manera específica, resolver problemas incluye no sólo encontrar una solución al problema sino también diseñar y aplicar diversas estrategias para solucionar el problema, comprobar e interpretar la solución encontrada, generalizar soluciones, formular problemas. La comunicación de ideas matemáticas involucra interpretar y expresar verbalmente ideas matemáticas, lo cual generalmente exige el uso de vocabulario, notaciones y modelos matemáticos. Por otra parte, razonar matemáticamente incluye procesos de razonamiento inductivo —utilizado para reconocer patrones y formular conjeturas— y deductivo —empleado para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos válidos—, así como el reconocimiento de propiedades y estructuras comunes. El estudio de las estructuras conceptuales implica nominar, significar, definir y representar conceptos matemáticos, lo que hace necesario identificar y generar ejemplos válidos y no válidos, utilizar diagramas y símbolos, alternar modos de representación, identificar propiedades y condiciones de un concepto determinado, y comparar y conectar conceptos. En tanto que el estudio de las cuestiones procedimentales incluye reconocer cuándo es adecuado utilizar un procedimiento, explicar la justificación para cada paso de un procedimiento, realizar un procedimiento de forma fiable y eficaz, verificar el resultado de un procedimiento, reconocer procedimientos correctos e incorrectos y generar procedimientos nuevos.

Aunque el esbozo anterior acerca de lo que es hacer matemáticas puede tener semejanzas con lo que hacen los matemáticos, debemos advertir que no pretendemos describir las actividades de los matemáticos, pues reconocemos que dicho esbozo está distante de las actividades de producción, validación y comunicación de las matemáticas como investigación de punta.

Con esta idea en mente es posible examinar la información y los análisis expuestos en el capítulo anterior y reconocer que en las clases observadas no se potencia suficientemente el hacer matemáticas, debido a que: se da prioridad a algunas tareas, se trabajan pocos aspectos de cada una, y se discriminan las tareas para el profesor y para los estudiantes. Veamos con cierto detalle tales causas.

De las tareas que describen el hacer matemáticas en clase se da prioridad a conocer las estructuras conceptuales y las cuestiones procedimentales, especialmente las últimas. En efecto, como lo mencionamos en el capítulo anterior, la mayoría de las tareas matemáticas asignadas para realizar durante la clase y fuera de ella, generalmente implica la búsqueda de una información matemática y la correcta aplicación de un procedimiento preestablecido y enseñado. En general, con la primera tarea se pretende poner en contacto a los estudiantes con la exposición de enunciados sobre hechos matemáticos válidos; sin embargo, no se les ofrecen herramientas o instrucciones para que puedan particularizar tales enunciados como estrategia para lograr comprenderlos, es decir —recapitulando a Mason (1999)—, no se le da al estudiante la oportunidad real para que construya casos específicos (numéricos o algebraicos) del enunciado, realice dibujos que concreten la afirmación, explore los significados de la notación matemática incorporada en el enunciado, y reconozca lo semejante y diferente de tales casos particulares. En este sentido, la comunicación que pueda desarrollar un estudiante se restringe a tal punto que frecuentemente la única opción posible es copiar el enunciado, memorizarlo y repetirlo (o simplemente, leerlo) frente al profesor. Como es de esperarse, tampoco se le ofrecen herramientas ni se le hacen exigencias para que cuestione la validez de los enunciados, pues casi siempre el análisis de dicha validez está vedado para el estudiante, no figura como parte del texto y/o se da por sentado que lo registrado en los textos donde aparecen tales enunciados es verdad. En cuanto a las tareas relacionadas con los procedimientos, generalmente se proponen para lograr destrezas en la realización de una rutina que habitualmente se hace cada vez más compleja pues involucra llevar a cabo procesos de generalización, pero esto no se acompaña de herramientas que los faciliten para el estudiante; por ejemplo, no se ofrece una verdadera oportunidad para conjeturar a partir del reconocimiento de las semejanzas de los ejercicios propuestos y mucho menos la posibilidad de verificar la validez de tales conjeturas.

Este tratamiento de los aspectos conceptuales y procedimentales genera, en consecuencia, una escasa presencia y valoración de las demás tareas, a tal punto que algunas de ellas están ausentes de algunas clases de matemáticas.

Este hecho merece una atención especial, dado que en las políticas educativas estatales (v.g., MEN, 1998) se reconoce una recomendación de implementar tales tareas, fundamentalmente la resolución de problemas, como estrategia para propiciar el aprendizaje de las matemáticas y modificar la imagen social que de éstas se tiene. Tales políticas responden al llamado internacional —generado en las comunidades académicas y promovido por las nuevas condiciones sociales y científicas— de redimensionar la matemática en la escuela y hacer de su estudio un medio para el desarrollo del pensamiento matemático.

Además de reconocer que no todas las tareas que describen el hacer matemáticas en clase se trabajan con igual énfasis, debemos señalar que el trabajo realizado en cada tarea sólo involucra un número exiguo de aspectos de la misma. En el estudio de las estructuras conceptuales y las cuestiones procedimentales, se reconoce un trabajo parcial de los aspectos. Para sustentar —al menos en parte— la anterior afirmación, basta señalar que de los seis aspectos a través de los cuales describimos el estudio de cuestiones procedimentales se enfatiza en uno de ellos (realizar un procedimiento de forma fiable y eficaz). También advertimos que el trabajo en resolución de problemas es esporádico en las clases o inconexo con las temáticas tratadas; la preocupación de los profesores al proponer problemas de matemáticas o acertijos a sus estudiantes, no parece ir más allá de permitir un espacio para la búsqueda de una solución; en general, los profesores no aprovechan tales espacios como una oportunidad real para promover —entre otras—: la particularización como actividad intelectual recomendable que permite abordar, entender y apropiarse del problema, la generalización como actividad intelectual aconsejable para reconocer patrones y formular conjeturas, y la validación como actividad intelectual necesaria para verificar una respuesta y para convencerse y convencer a otros de que la respuesta obtenida es solución al problema. En suma, se desaprovecha una potencial oportunidad para exigir y promover procesos característicos y centrales —aunque no exclusivos— del pensamiento matemático.

De manera similar, reconocemos que en la mayoría de los casos estudiados la comunicación de las ideas matemáticas se restringe casi exclusivamente a la presentación verbal, por parte del profesor, de enunciados y procedimientos matemáticos y a la interpretación de éstas por parte del estudiante. No obstante, y para hacer justicia, debemos reconocer que esporádicamente se propician oportunidades para que los estudiantes manifiesten sus interpretaciones, que por lo general no coinciden con la que el profesor ha querido expresar, pues o bien no recogen lo fundamental de los enunciados o no utilizan formas de (re)presentación que faciliten su expresión. También debemos reconocer que algunos profesores intentan aproximar a los estudiantes de manera intuitiva y empírica a ideas o enunciados matemáticos (v.g., la parábola es una cónica) pero o bien no ofrecen el espacio para que los estudiantes manifiesten su nivel de aproximación a éstos, o actúan

con premura, precipitando la aparición del enunciado y debilitando su significado matemático.

Lo anterior y las exiguas oportunidades de particularizar observadas en las clases, nos ofrecen evidencias que permiten ilustrar que el trabajo que involucra procesos de razonamiento deductivo es bastante limitado. De manera similar, de la limitación en las actividades de reconocer patrones, generalizar y validar percibida en el aula, se colige la existencia de restricciones a los procesos de razonamiento inductivo. Estas evidencias no hacen más que sustentar el hecho de que razonar matemáticamente no es una actividad que se potencie significativamente en las clases de matemáticas.

En lo reportado antes pueden identificarse elementos que permiten evidenciar que en la mayoría de las clases se discriminan las tareas para el profesor y para los estudiantes. Por ejemplo, es más o menos explícito que generalmente el profesor —o un texto— es el encargado de presentar las ideas matemáticas, en tanto que su interpretación es una tarea del estudiante. El profesor es quien propone los problemas y valida la solución que los estudiantes generan. El profesor —o eventualmente el texto— es el encargado de establecer si un ejercicio, desarrollado por un estudiante, está bien realizado y cumple con los requisitos por él exigidos. No obstante, es necesario reconocer y resaltar que también hay acciones, promovidas por algunos profesores, que —aunque muy esporádicas y quizá poco efectivas— pretenden modificar el papel que cada actor escolar juega respecto de la validez; de esta manera es posible advertir que en algunas oportunidades se propicia que sean los estudiantes quienes se convencen y convencen a otros de la validez de sus respuestas; o se enfrenten a varios textos, interpreten la información allí contenida, y presenten y discutan la aproximación lograda.

Finalmente, debemos comentar que bajo un esquema ideal se debería pretender que los estudiantes y los profesores “hicieran matemáticas” en la escuela, pues —como lo afirma Mason (1999)— “en matemáticas, la esencia de aprender es hacer” (p. v).

ACERCA DE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS QUE SE UTILIZAN EN CLASE

¿Se utilizan estrategias didácticas como parte de la enseñanza en las clases observadas? Si es así, ¿en qué consisten tales estrategias?

Desde nuestra perspectiva, una *estrategia didáctica* es una manera de proceder consciente y deliberada de parte del profesor en relación con la enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes, para la cual se han definido unos propósitos específicos y relevantes en pro del aprendizaje, se han identi-

condiciones en las que se puede implementar, y se han establecido las acciones que la configuran con características que revelan, de manera clara, tales propósitos.

En términos generales, al considerar las varias actividades implementadas por los profesores en las clases observadas, reconocemos detrás de ellas la existencia de ideas o supuestos que podrían tomarse como expresión de las intenciones que ellos tienen de coordinar y apoyar el proceso de sus estudiantes. Sin embargo, al examinar de cerca tales actividades para determinar cuáles son las acciones mediante las cuales el profesor espera lograr sus propósitos, cómo se articulan dichas acciones y cuáles son los énfasis que permiten reconocer de manera clara los objetivos de enseñanza y/o aprendizaje, se nos revela una carencia de tales acciones. Para decirlo de una manera simple, la mayoría de las actividades que implementan los profesores para concretar su enseñanza no están asociadas a estrategias didácticas; aunque en otras actividades se vislumbran ideas innovadoras y potentes desde el punto de vista del proceso de aprendizaje, como no tienen una elaboración suficiente abortan a mitad de camino en su implementación. Veamos algunos ejemplos.

Atendiendo a las tareas matemáticas poco relevantes que se plantean a los estudiantes, a las circunstancias poco organizadas en las que éstas se asignan para fuera de la clase, a las intenciones poco enfocadas en la comprensión que dichas tareas tienen, y a la manera superficial de revisar en la siguiente clase los desarrollos hechos por los estudiantes, sostenemos que la asignación y la revisión de tareas se llevan a cabo sin que medie una estrategia didáctica clara. Estas actividades no son usadas de manera decidida en pro de la comprensión de los estudiantes ni como ventana al aprendizaje logrado por ellos. Desde nuestra posición, estrategias didácticas al respecto se deberían concretar en acciones específicas para:

- elegir ejercicios, problemas y preguntas claves para los estudiantes en el sentido de que les demanden puntualizar nociones e ideas tratadas en clase, lo mismo que reconstruir explicaciones y poner a prueba su comprensión, darse cuenta de vacíos que pueden tener en su comprensión, etcétera;
- buscar mecanismos para involucrar de manera más contundente a todos y cada uno de los estudiantes en la revisión de los desarrollos que ellos han hecho;
- abrir oportunidades para que los alumnos expliciten diferentes formas de solución o diferentes respuestas y examinen en dónde está la diferencia;
- abrir oportunidades para que los estudiantes expliciten las razones que hay detrás de sus soluciones, reconozcan respuestas

acertadas, detecten errores y expliquen por qué son errores y cómo se corregirían;

- registrar por escrito lo sucedido en clase de manera que pueda ganar consciencia acerca de la comprensión del grupo y eventualmente de los estudiantes individuales.

Formular a los estudiantes la tarea de leer y resumir por escrito información matemática tomada de libros de texto o documentos, recomendarles insistentemente que no deben copiar sino parafrasear, presentar a manera de ejemplo una forma de proceder que no necesariamente refleja todo lo que se espera que los alumnos hagan, abrir espacios para que algunos alumnos lean lo que escribieron pero no hacer un trabajo de revisión de las producciones de los estudiantes, presentar su propio resumen del texto, son acciones detrás de las que podemos intuir la intención de que los alumnos estudien y comprendan información matemática; sin embargo, desde nuestro punto de vista no configuran una estrategia didáctica pues son acciones que por un lado, se limitan a señalar a los estudiantes que deben hacer ciertas tareas — difíciles por naturaleza y novedosas para los alumnos — sin aportarles pautas concretas que los encaminen o les muestren qué se espera que ellos hagan, y por otro lado, se conforman con abordar de manera informal y poco cuidadosa lo que al respecto hacen los estudiantes, comportamiento que lleva un mensaje oculto con respecto a la poca importancia real que tiene tal tipo de tareas dentro del quehacer de la clase de matemáticas. Una estrategia didáctica para impulsar la intención debería, ante todo, garantizar que el profesor elige de manera cuidadosa los textos a los que enfrenta a sus alumnos de manera que las demandas cognitivas que tal lectura les hace no excedan el nivel de conocimiento que ellos tienen; además, podría recurrir, entre otras, a acciones para:

- ayudar a determinar cuáles son las ideas centrales del texto;
- discutir si lo escrito por los alumnos tiene sentido, si coincide con lo que querían decir, si realmente atiende a lo que es más relevante en el texto;
- construir y discutir con los alumnos unas pautas encaminadas a lograr una lectura comprensiva e ilustrar su utilización en casos específicos;
- discutir sobre las experiencias que vayan teniendo los alumnos al aplicar por su cuenta tales pautas;
- fijar criterios que posibiliten valorar los progresos de los estudiantes en el logro de la intención;
- dar realimentación individual y en grupo con respecto a los progresos que se van advirtiendo.

La estrategia, común en términos generales a una buena proporción de las clases observadas, que se emplea para desarrollar el contenido matemático sobre el que se enfoca la clase tiene como su acción principal la presentación de procedimientos matemáticos para resolver tareas específicas, presentación que el profesor hace ante todo el grupo exhibiendo cómo se utiliza un determinado procedimiento en una, dos o tres situaciones particulares y en la que da a los estudiantes alguna participación a través de preguntas y tareas específicas cuyas respuestas hacen parte de la exposición y en algunos casos la modifican por lo menos parcialmente; en tal presentación se hace énfasis sobre cuáles son los pasos y cómo se ejecutan y no se hace mención (o es muy débil) a las razones matemáticas que justifican el procedimiento. Luego se asignan tareas a los estudiantes que se resuelven aplicando el procedimiento expuesto; usualmente resolver la tarea no requiere, por ejemplo, que los estudiantes determinen, antes de aplicar el procedimiento si es apropiado y pertinente para la situación que tienen entre manos, y mucho menos, que expliquen por qué y para qué hacen los diferentes pasos que configuran el procedimiento.

No calificamos la estrategia descrita como propiamente didáctica por al menos tres motivos. Creemos que dotar a los estudiantes, principal y/o exclusivamente, con herramientas para solucionar tareas matemáticas puntuales y propender de manera prioritaria por el desarrollo de su habilidad para aplicar tales procedimientos (v.g., factorizar un polinomio, hacer la gráfica cartesiana de una expresión, determinar si un número es divisible por otro) no constituye un propósito relevante de la educación matemática escolar pues no está relacionado con el desarrollo de pensamiento matemático; de hecho, se estaría dedicando todo el esfuerzo educativo de las matemáticas escolares a alcanzar metas para las que la tecnología da una respuesta óptima. Por otro lado, consideramos que exponer la información matemática a los alumnos —ya sea de manera oral o escrita— y asignarles tareas similares para que repliquen lo que vieron realizar, son acciones que probablemente no comportan reflexión de parte del profesor (o ésta es muy incipiente) acerca de asuntos relativos al conocimiento matemático implicado, al aprendizaje y enseñanza del mismo, asuntos sobre los cuales un profesional de la enseñanza de las matemáticas debería tener un conocimiento, dado tanto por la experiencia previa como docente como por su estudio y reflexión; casi que cualquier persona conocedora de la información lo que haría si tuviera que “enseñar” dicha información sería exponerla. Además, centrar y casi que limitar la atención al procedimiento mismo sin establecer conexiones con el respectivo conocimiento conceptual dificulta la comprensión y aprendizaje del tema dado que se está presentando como algo arbitrario, sin justificación desde las matemáticas, ante lo que los estudiantes no tienen otra opción que usar la memoria; no obstante como esta situación se reitera con cada procedimiento matemático tratado y es imposible mantener de manera permanente la ejercitación de todos y cada uno de ellos, el estudiante los va

olvidando a medida que requiere poner su esfuerzo de memoria en los nuevos.

Una estrategia didáctica para el abordaje del conocimiento matemático procedimental, desde nuestra perspectiva, debería incluir acciones que permitan considerar:

- todos los pasos que configuran el procedimiento y el orden en que se realizan;
- aspectos de la tarea matemática que se resuelve con tal procedimiento tales como el contexto temático en el que se formula, el propósito, y las características que la tipifican;
- explicación y/o justificación de por qué el procedimiento es cómo es, con base en el respectivo conocimiento conceptual;
- explicación y/o justificación de por qué el procedimiento sirve para realizar la tarea en cuestión;
- conexión del procedimiento con otros procedimientos;
- casos especiales en los cuales no se puede aplicar el procedimiento o es más adecuado usar otro procedimiento;
- mecanismos de control para saber si el resultado obtenido es correcto o por lo menos razonable.

Con respecto a la consideración de elementos del conocimiento matemático conceptual, en particular de algunas ideas matemáticas, en unos pocos casos percibimos que se recurre a un enfoque intuitivo y empírico como medio para significarlas; en tales casos vemos que hay una estrategia didáctica incipiente que podría ser desarrollada a cabalidad con el ánimo de propiciar oportunidades reales para que los estudiantes vean, comprendan y expliciten las matemáticas que hay detrás.

La resolución de acertijos, observada en uno de los casos con el fin de motivar el interés de los estudiantes en la resolución de problemas, para “quitarles el miedo” que suelen tener ante tales actividades y mostrarles que ellos pueden resolver problemas, y como recurso que ayuda a descansar la mente y atención de los estudiantes, sin duda tiene valor didáctico gracias a su intencionalidad. Sin embargo, consideramos que una estrategia didáctica relativa a dicha tarea debería incluir además otras acciones como:

- elegir los acertijos de acuerdo con criterios didácticos (v.g., las matemáticas que ponen en juego, el conocimiento matemático que requieren);
- propiciar discusiones en torno a las estrategias empleadas para solucionarlo;

- dar realimentación a todos y cada uno de los estudiantes sobre el progreso que van haciendo en el arte de resolver problemas.

En la mayoría de los casos no vimos actividades que tuvieran la intención de potenciar en los estudiantes su capacidad crítica para juzgar la validez matemática de las producciones que se realizan en la clase de matemáticas. Vemos este hecho consistente con la poca preocupación de los profesores por proveer explicaciones y argumentaciones tanto de parte de ellos como de los alumnos; creemos que la carencia de énfasis sobre este asunto impide que los estudiantes tengan criterios basados en las matemáticas para determinar si lo que se hace en clase es o no apropiado. En uno de los casos observados encontramos que las profesoras les piden a los estudiantes que se convenzan unos a otros con respecto a las soluciones que se elaboran en los grupos de trabajo e incluso los estudiantes deben convencer a las profesoras de que sus desarrollos son apropiados. Vemos esta acción como parte de una estrategia didáctica incipiente muy valiosa que debería ser elaborada más detalladamente con respecto al manejo de las discusiones entre los estudiantes, pues no parece suficiente para garantizar que efectivamente ellos están centrando la atención en argumentos matemáticos.

Como una excepción, en la resolución de problemas de razonamiento lógico observada en uno de los casos, vemos una estrategia didáctica con un buen grado de definición. En una interacción dialógica con un grupo de cuatro estudiantes, la profesora enfoca inicialmente la atención en la lectura comprensiva del enunciado del problema: se lee varias veces el enunciado haciendo la vocalización y la puntuación adecuada, precisando el significado de palabras que puedan no ser conocidas por los alumnos, determinando cuál es la información conocida, las condiciones que se deben cumplir y la pregunta que se debe resolver. Luego, la atención se centra en la explicitación de la solución que el grupo de alumnos ha encontrado; la profesora escucha todo lo que el grupo tenga que decir y luego hace preguntas o pone objeciones en caso de que lo considere necesario y da tiempo para que los estudiantes respondan, muchas veces alejándose del grupo por un rato.

ACERCA DE LA INTERACCIÓN EN LA CLASE EN TORNO AL APRENDIZAJE Y LAS REGLAS QUE LA REGULAN

¿Qué normas o reglas del nivel metadiscursivo regulan la interacción en torno al aprendizaje en las clases observadas? ¿Se explicitan o negocian tales reglas?

La interacción que en una clase determinada se da entre los asistentes depende de un sinnúmero de factores tanto externos como internos al aula. Es cla-

ro que el profesor como encargado de la clase es quien moldea las interacciones que allí se dan, de manera tácita por medio de sus actuaciones que ejemplifican comportamientos considerados como apropiados por los estudiantes y que son deseables de reproducir, y explícitamente mediante expresiones verbales y gestuales. Por otra parte, factores externos tales como los aspectos socio-culturales y políticos, y las circunstancias personales del individuo se trasladan a la clase y permean lo que allí sucede. Es por consiguiente responsabilidad del profesor considerar e incorporar, o transformar para el aula, estos aspectos de manera que contribuyan a generar un ambiente propicio en el salón de clase para alcanzar una participación activa de los integrantes en las actividades que se llevan a cabo en la clase, en especial en las discusiones que allí se promueven. Además, tal y como lo propone Sfard (2000a) se debe iniciar a los estudiantes en las reglas del discurso matemático explicitándolas, pero sobre todo poniéndolas en juego y desplegándolas en el proceso de interacción para que los estudiantes puedan vivirlas y asumirlas.

En las clases observadas de cuatro de los casos estudiados, expresarse oralmente no es una acción exclusiva del profesor, aunque es él quien hace uso de la palabra la mayor parte del tiempo, decide qué aspectos tratar y cuáles no, determina cuándo se inicia y termina una interacción o cuándo hay necesidad de enunciar preguntas y de escuchar respuestas. Hay distintos escenarios definidos por las principales actividades a través de las cuales se desarrolla la clase, donde además de las intervenciones del profesor, hay intervenciones orales de los estudiantes tanto para dirigirse al profesor como a sus compañeros: la revisión de las tareas, las exposiciones del profesor sobre el tema que se trata, el trabajo de los estudiantes en el desarrollo de tareas propuestas por el profesor mientras el profesor recorre el salón y parece observar dicho trabajo, la presentación del trabajo de compañeros y la asignación de las tareas. Haciendo caso omiso de las intervenciones no relacionadas con el contenido matemático que se aborda — las que son frecuentes —, las intervenciones del profesor, además de exponer información matemática, apuntan a hacer comentarios para todo el grupo o a un estudiante en particular, que se refieren a errores matemáticos detectados, más como monólogos; las intervenciones de los estudiantes pueden describirse como intervenciones cortas en el tiempo y en contenido, que en general apuntan a responder preguntas puntuales que los profesores hacen, donde no hay cabida para respuestas más amplias, o a hacer preguntas sobre la manera de desarrollar las tareas. En ocasiones, las preguntas de los profesores son asumidas por los estudiantes como adivinanzas y así incorporan en sus respuestas las frases o palabras que el profesor ha mencionado. Casi nunca en estas intervenciones los estudiantes cuestionan la validez de lo expuesto por el profesor o sus compañeros, esporádicamente incluyen preguntas que apuntan primordialmente a tener información de cómo hacer la tarea que se ha propuesto, es raro que planteen reacciones al trabajo presentado por otros

estudiantes, y muy eventualmente contienen afirmaciones que sean deducciones de lo que se está exponiendo o explicaciones a lo que hacen. A veces la interacción de un estudiante con el profesor tiene varios ciclos donde sus respuestas llevan a que el profesor enuncie nuevas contrapreguntas, pero el estudiante sólo se encarga de contestar las preguntas. La interacción que se da entre los estudiantes referida a aspectos matemáticos es normalmente para comparar los desarrollos realizados y respuestas obtenidas, o para indagar con uno de los estudiantes de mejor rendimiento acerca de la forma de hacer la tarea.

Como se ve, todas estas interacciones están bastante alejadas de un verdadero diálogo o discusión académica, en la que efectivamente se expresen ideas matemáticas completas y la cual propenda por una exploración del conocimiento que lleve a su mejor comprensión. En consecuencia, las normas que se traslucen como operantes para la interacción en estas clases, y que se percibe que son conocidas —aunque sea tácitamente, pues este tipo de reglas no se explícita ni se negocia en las clases observadas— y acatadas por los estudiantes podrían enumerarse como:

- Los estudiantes pueden manifestar la no comprensión del tema que se aborda mediante preguntas acerca de cómo desarrollar las tareas.
- El principio de racionalidad no es el que guía la determinación de la validez de las matemáticas que se tratan. Es el profesor, o en algunas ocasiones el libro de texto, quien confirma que el trabajo de los estudiantes está o no bien hecho. Las posibles explicaciones de un estudiante no son suficientes para sustentar una postura sobre un aspecto o procedimiento matemático ante él mismo o ante sus compañeros, si no son corroboradas por el profesor o por el libro de texto; de esa manera su participación en la determinación de la validez es poca.
- Lo que el profesor dice o escribe es válido y no se cuestiona, y no es usual que los profesores admitan cometer errores; el carácter asertivo que tienen sus intervenciones no ofrece una posibilidad auténtica de establecer dudas con respecto a su veracidad.
- Las preguntas del profesor deben contestarse con la respuesta correcta y no se espera que ésta se argumente o explique; la argumentación no es la norma que moviliza la discusión, la enseñanza ni el aprendizaje.
- En los ejercicios la respuesta es única, solamente hay una posibilidad de acertar.
- Aunque la validez de las producciones de los estudiantes está centrada en aspectos matemáticos como la respuesta correcta y la adecuada aplicación del procedimiento, se tienen en cuenta

otros aspectos como el empleo de la notación ajustada a las convenciones matemáticas, la inclusión de los pasos implementados de un algoritmo, la forma de anotar las operaciones, el orden en el desarrollo de un ejercicio, el uso de sustantivos en las oraciones, la escritura de respuestas con sus respectivas preguntas o el recapitular ideas sin copiarlas textualmente.

- Las reacciones del profesor ante las producciones de los estudiantes que indican la validez o no del trabajo son tácitas muchas veces y consisten en un gesto, o una expresión verbal indirecta que el estudiante aprende a interpretar.
- El centro de la atención y por consiguiente de las intervenciones de los profesores con respecto a las producciones de los estudiantes es señalar el error, es decir, indicar lo que es incorrecto tanto desde el punto de vista del contenido matemático como también, en ocasiones, desde el punto de vista de la forma; usualmente no se refieren a la dificultad inherente al error o a las causas posibles que podrían generarlo; tampoco hacen preguntas de por qué, o plantean otras situaciones que arrojen luz para el estudiante sobre cuál es el problema de fondo, o acerca de las consecuencias de sus respuestas.
- Es posible en cualquiera de los escenarios definidos para la clase, abordar al profesor y hacerle preguntas sobre lo que se está haciendo o acerca de otros asuntos relacionados con la clase.
- En general aunque los estudiantes trabajan individualmente se puede preguntar o compartir con los compañeros mientras se desarrollan las tareas.

A pesar de que en las interacciones vemos la apertura de los profesores a permitir la intervención de los estudiantes y a que se expresen libremente, también vemos que las acciones deliberadas de los profesores para que en las clases surja una discusión académica son pocas y cuando las hay, éstas son débiles. Quizás esto se deba a la dificultad inherente a orquestar una discusión académica en el aula que realmente aporte al aprendizaje. Nuestra vivencia como docentes y en el trabajo de formación de profesores nos ha mostrado que idear y manejar una discusión en el aula donde se traten, se cuestionen, se exploren y se descubran ideas matemáticas, requiere de gran pericia y experiencia. Se necesita inicialmente, por lo menos, que el profesor imagine la discusión y cómo puede discurrir ésta, con las posibles intervenciones y reacciones de los participantes, para poder así prever sus respuestas y preparar problemas, ejercicios y situaciones que ayuden a cuestionar o a ilustrar.

Además, aunque percibimos en los profesores el esfuerzo por no descalificar tajantemente el trabajo de los estudiantes y por utilizar expresiones menos directas a la hora de juzgarlo, en una situación ideal los profesores deberían poner en juego y negociar en las clases —o al menos explicitar— normas con respecto a la validez del trabajo realizado por los estudiantes basadas en la validez matemática misma, de manera que los estudiantes estén en capacidad de hacer y sustentar los juicios correspondientes. Es claro que esto implica para el profesor por un lado, asumir un papel distinto ante las producciones de los estudiantes, pero por otro lado, de nuevo lo obliga a estudiar y preparar sus intervenciones de forma tal que reflejen cómo deben proceder los estudiantes, por ejemplo con referencia a cómo se deben explicar o argumentar las ideas matemáticas en la clase; adicionalmente, conlleva buscar y adecuar preguntas y situaciones que promuevan que el estudiante argumente sus respuestas, y vea y entienda las dificultades que subyacen a sus errores.

Un comentario para terminar. Para nosotros fue evidente que responder a las tres preguntas relativas a las matemáticas, las estrategias didácticas y las normas de clase, exige una toma de posición con respecto a lo que son las matemáticas, cómo se aprenden y cómo se deben enseñar; en consecuencia, lo que aquí hemos planteado contiene por lo menos parcialmente nuestra visión sobre estos asuntos. En esta medida lo dicho es discutible, ya que otra visión, y en particular la que podría estar detrás de las acciones observadas en las clases, es que tales acciones de enseñanza son necesarias y suficientes para que los estudiantes aprendan matemáticas. El reconocimiento acerca del bajo rendimiento y desempeño de los estudiantes en matemáticas, que también es evidente en los profesores, puede entonces estar asociado para ellos, con problemáticas referentes a los mismos estudiantes o a condiciones y circunstancias externas al aula, que se ha visto que obviamente inciden en lo que allí pasa.

INNOVACIONES ENCONTRADAS E INFLUENCIA DE TEORÍAS EXISTENTES

Detrás de las actitudes y acciones de los profesores en las clases analizadas en este estudio, reconocemos intenciones y esfuerzos de su parte encaminados a abordar problemas específicos de su práctica que han identificado y, en general, a implementar estrategias —puntuales o no— que contribuyan a lograr el aprendizaje de sus alumnos y hacer de la clase un evento amable para ellos. Algunos hechos en los que vislumbramos lo mencionado son:

- 1) La motivación y disposición de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas se percibe como un asunto que le concierne abordar al

profesor y en consecuencia éste implementa una estrategia especial —en el sentido de que no hace parte del repertorio de las estrategias empleadas para desarrollar los temas matemáticos— que le permita al estudiante tener una vivencia de la clase de matemáticas algo diferente de la que tiene a través de las actividades usuales de la clase.

- 2) La realización de tareas por parte del estudiante en horario diferente al de la clase no es una condición que se pueda garantizar para su proceso de aprendizaje, así que el profesor percibe que la clase es el espacio donde el aprendizaje principalmente puede ocurrir y en consecuencia, ésta tiene que aprovecharse de la mejor forma; para ello, buena parte del tiempo de la clase se ocupa en el desarrollo de ejercicios del tipo que se quiere que el estudiante llegue a realizar diestramente.
- 3) La participación de los estudiantes en la clase se percibe como una condición importante para que ellos vayan aprendiendo los temas tratados en clase y en consecuencia, incluso durante la exposición del profesor, se abren espacios para que los alumnos tengan alguna participación.
- 4) La invitación a los alumnos para que trabajen en grupo para realizar las tareas asignadas en la clase o por lo menos la aceptación de que interactúen entre ellos en torno a asuntos puntuales de la tarea, el recurso a la lectura de parte de los alumnos para que se informen sobre algún tema, la solicitud a los alumnos para que expresen en sus palabras lo que han entendido de una lectura o la solución que dieron a un problema, la invitación a los alumnos para que discutan entre ellos la solución a un problema, son estrategias de trabajo en clase empleadas por varios de los profesores.

Es probable que algunos de estos hechos, si no todos, representen para los profesores comprometidos en ellos, cambios importantes en su práctica si se tiene como referencia el inicio de su práctica profesional; también es probable que comparada con la práctica de otros docentes, los hechos mencionados se puedan ver como innovaciones. Sin embargo, a pesar de reconocer que los hechos mencionados y otros adicionales puedan haber cambiado pocos o muchos aspectos de la práctica de estos docentes en el aula y sin desconocer la importancia relativa de tales cambios, consideramos que éstos no son suficientes para cambiar sustancialmente los resultados relativos a la formación matemática de los estudiantes. No creemos que éstos sean posibles sin hacer cambios sustanciales en la forma de aproximar a los estudiantes al conocimiento matemático y para ello percibimos que hace falta un mayor compromiso de los profesores con el diseño y desarrollo curricular específico para cada tópico que se pretenda estudiar; esto incluye entre otras cosas, tomar decisiones fundamentadas con respecto a los tópicos matemáticos que es relevante que el estudiante aprenda, a la formación matemática que se quiere lograr en el estudiante (conocimiento conceptual, conocimien-

to procedimental y conocimiento actitudinal), a la selección o diseño de tareas con objetivos de aprendizaje claros, al desarrollo de estrategias de observación en clase y mecanismos de seguimiento al aprendizaje de los estudiantes, etcétera.

Al examinar con algún detalle cómo ocurren en las clases los hechos mencionados anteriormente, encontramos que detrás de por lo menos algunos de ellos puede no haber una reflexión seria de parte de los profesores para buscar soluciones reales a los problemas identificados y en cambio se han implementado las soluciones que de manera más intuitiva vienen a la mente del profesor o estrategias que parecen interpretaciones adecuadas para teorías del aprendizaje que son conocidas con mayor o menor detalle por los profesores. Así, por ejemplo, aunque vemos la participación de los alumnos en la exposición del profesor acerca de un determinado tema como una oportunidad real para que el estudiante entienda lo que se está exponiendo, no se puede concretar cuando lo que los estudiantes pueden hacer principalmente es responder preguntas puntuales de respuesta única. No creemos que se logre una motivación genuina hacia el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes con actividades desligadas del tema que se está tratando. En la interacción entre alumnos en torno a asuntos matemáticos, lo que puede aportar al aprendizaje de las matemáticas no es la interacción en sí y por sí misma; es el contenido de tal interacción y la consciencia que logren los alumnos de tal contenido, lo que es relevante. Con respecto al punto que se está tocando, consideramos importante que el profesor pueda tener espacios dentro de su jornada laboral para hacer reflexión acerca de su práctica de manera individual y como miembro de una comunidad de práctica; además, que pueda contar con la colaboración de agentes externos para que en su interacción con ellos pueda confrontar y enriquecer su perspectiva. En particular, vemos la necesidad e importancia que puede tener en la reflexión del profesor —como agente transformadora de su práctica— una actitud de no “pasar entero” las teorías que de alguna manera se ponen de moda y estudiar a cabalidad los documentos que configuran la legislación oficial del sistema educativo en lo que toca con la enseñanza de las matemáticas.

ACERCA DEL CUESTIONARIO DEL ESTUDIANTE

No obstante que de la información recolectada por medio del cuestionario del estudiante emergen algunos datos interesantes que aportan a nuestro conocimiento sobre su trabajo, dicha información no permitió caracterizar el grupo de estudiantes en términos de su aprendizaje ni tampoco posibilitó al menos, describir para la mayoría, aspectos de su aprendizaje

. Este cuestionario fue originado por una exigencia adicional del IDEP, posterior a la aprobación de nuestra propuesta y por consiguiente, existieron grandes limitaciones para su desarrollo. Consideramos que esto es reflejo de

las tensiones que existen en las entidades financiadoras, principalmente en las estatales, entre la cantidad de recursos disponibles y la forma de gastarlos. Las políticas que en consecuencia se reconocen para la financiación de proyectos académicos, reducen cada vez más las cuantías asignadas y exigen aumentar los compromisos de los proponentes, con las consecuentes implicaciones en la calidad.

En el análisis de las respuestas de los estudiantes a dicho cuestionario sobresalen dos grandes resultados. Por un lado, es claro que en las respuestas a muy pocas preguntas se pueden detectar tendencias que permitan generalizar algo, y por lo tanto caracterizar el grupo de estudiantes. Esto es válido aun para estudiantes del mismo curso, e incluso para lo que el profesor de todos ellos hace. Por otro lado, se ha hecho evidente que las preguntas formuladas no contribuyeron a obtener información que permitiera describir aspectos del aprendizaje. Se podría decir incluso más: muchas no fueron pertinentes para esto, una de las preguntas no se entendió y la mayoría por ser de opinión del estudiante, proporcionan sólo una visión de cómo se ven los estudiantes a sí mismos, pero no se tiene la información sobre su trabajo que permita relacionar las respuestas con su aprendizaje matemático. Estos resultados se podrían explicar en primer lugar, por la razón relativa a las políticas de las entidades gubernamentales antes expuesta y en segundo lugar, porque cada estudiante habla de su propia experiencia al vivir su formación y en consecuencia sus repuestas son subjetivas, su interpretación de las preguntas es diferente, y el significado de ciertas palabras varía entre ellos; no sorprende que los estudiantes no sean conscientes sobre la forma en que se hace la clase y sobre la forma en que ellos aprenden, ya que son asuntos que usualmente no se explicitan.

Vale la pena destacar unos pocos resultados del cuestionario en los que sí se percibe una respuesta común para muchos estudiantes. No obstante que es frecuente escuchar que los estudiantes no se consideran “buenos” para las matemáticas, estos estudiantes tienen una buena opinión de sí mismos y por consiguiente la mayoría piensa que su rendimiento es bueno y que sus padres y profesores opinan lo mismo. Con excepción de la atención del profesor sólo a unos estudiantes que no es del agrado de algunos estudiantes, para la mayoría de ellos las razones relativas al profesor, no son la causa de su desagrado por la clase de matemáticas. Se evidencia una diferencia con lo que la mayoría de los profesores dicen hacer siempre en sus clases: revisar la tarea para la casa, repasar temas ya vistos, explicar el tópico a tratar, proponer solución de ejercicios, asignar tarea para la casa, pues para los estudiantes no existen actividades de clase que sean usuales.

Los estudiantes utilizan las palabras especiales empleadas por el profesor o siguen los pasos que él hizo indistintamente, hayan o no entendido su significado o sin estar seguros. Para la mayoría de los estudiantes las principales razones que determinan un buen rendimiento en matemáticas incluyen tener disposición, escuchar atentamente al profesor, seguir sus instrucciones

y estudiar y hacer las tareas. En menor proporción también es importante para ellos memorizar los apuntes. Como tópicos recientemente aprendidos los estudiantes señalan casi en su totalidad los temas tratados recientemente en clase, que se refieren a procedimientos como la elaboración de la gráfica de la parábola, la solución de la ecuación cuadrática, la solución de un determinante por la regla de Kramer, encontrar el mínimo común múltiplo, sumar, restar, multiplicar o dividir polinomios, hacer conversión de unidades, medir; esto es coherente con el énfasis propiciado por el profesor en el conocimiento procedimental que se evidenció en las clases de cuatro de los casos estudiados.

EL APORTE DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO A LA COMUNIDAD DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Exponemos en esta sección algunas de las posibles diferencias de los resultados obtenidos con otros estudios que al respecto se han llevado a cabo anteriormente.

Es claro que en la comunidad de educadores matemáticos nacional y, con mayor certeza en la comunidad internacional, se han realizado numerosas investigaciones con el propósito de caracterizar la enseñanza de las matemáticas y, en particular, la denominada enseñanza tradicional. En contraste con estas investigaciones, que en su mayoría hacen una descripción de la enseñanza enfocada en algún aspecto, y atienden así por ejemplo a las actividades que se dan en la clase o al discurso matemático que se propicia, en este estudio hemos hecho una caracterización de la práctica docente tanto desde la perspectiva de los profesores como la de los investigadores, que abarca no sólo las actividades de la clase y las actividades extraclase, sino que profundiza en el trabajo matemático que se lleva a cabo, en el tipo de conocimiento matemático que se pone en juego, en la comunicación que allí ocurre y en la autoridad que se reconoce.

A nuestro juicio, la caracterización presentada proporciona una mirada amplia y bastante completa de la práctica docente del profesor de matemáticas, desde una óptica que básicamente deja por fuera aspectos relativos a las estructuras y procesos mentales del profesor. En dicha caracterización, tanto los profesores de matemáticas como las entidades financiadoras pueden focalizar problemáticas relevantes y puntuales para abordar, identificar carencias o deficiencias en el camino de estrategias ya implementadas con el fin de subsanarlas, y encontrar pautas que guíen el planteamiento y realización de innovaciones en el aula. Adicionalmente, la caracterización resultante suministra ideas sobre aspectos y asuntos a enfatizar en las acciones que se ejecuten para la formación de profesores de matemáticas en ejercicio, que así mismo sean coherentes con las direcciones promulgadas por el Ministerio de Educación Nacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De otra parte, el marco conceptual construido puede verse como una herramienta fundamental que permitirá, y de hecho ya nos ha posibilitado, observar la enseñanza y lo que pasa en las clases de matemáticas de una manera más estructurada y con focos específicos que ayudan a simplificar la mirada.

La riqueza de lo observado y la diversidad de elementos involucrados en la clase han confirmado nuestras intuiciones acerca de la necesidad imperiosa de complementar los procesos de formación de profesores que llevamos a cabo, con la instrumentación del análisis de clases, bien sea clases en que intervienen los mismos profesores en formación u otros profesores. Este

ejercicio realizado de forma sistemática y bajo el marco elaborado, además de evidenciar la complejidad presente en el fenómeno de la enseñanza, pone de manifiesto innumerables aspectos de la práctica a nivel personal de los cuales no se es necesariamente consciente. Ayuda también a inferir muchas de las razones que están por detrás de lo que hacemos como profesores y a explicar los resultados que se obtienen en los estudiantes. Se vislumbran adicionalmente posibilidades más objetivas, y quizás más efectivas, de actuación para los profesores.

PARA CONCLUIR

Es claro que reconocemos que diversos factores afectan el aprendizaje matemático de los estudiantes y por tanto su formación matemática, pero vemos que es el profesor, como principal constructor de las rutas pedagógicas, quien tiene la mayor responsabilidad en el asunto; en consonancia con ello —y sin restar importancia a los demás factores mencionados al comienzo de esta publicación— al examinar la enseñanza, emergen ideas sobre posibles razones que pueden incidir tanto en el desempeño poco satisfactorio de los estudiantes en el área como en su limitada formación al respecto. Así, en las caracterizaciones de la práctica docente del profesor de matemáticas anteriormente presentadas y, de manera más específica, en las respuestas a los interrogantes relativos a las matemáticas que se enseñan, a las estrategias didácticas y a las normas de clase, se encuentran explicaciones a lo que los estudiantes aprenden en la clase de matemáticas.

Con base en nuestra visión de lo que son las matemáticas y de cómo se deberían enseñar, se perfila en general lo que podría ser una formación matemática de los estudiantes que pudiera catalogarse como de buena calidad. En primer lugar, vemos que la formación matemática no está únicamente determinada por los resultados obtenidos en las pruebas académicas, donde se espera que los estudiantes alcancen o por lo menos se acerquen a unos logros previamente establecidos. La formación matemática deseada para el estudiante se concibe en un sentido mucho más extenso que comprende también el desarrollo del pensamiento, habilidades y competencias matemáticas necesarias para la vida —lo que algunos autores han denominado alfabetización o potencia matemática—, que le permita su adaptación exitosa a la sociedad; más aun, de acuerdo con Skovsmose (1999)¹, tal formación debe propender por generar ciudadanos críticos que puedan participar activa y democráticamente en la comprensión y transformación de la sociedad.

Sin duda, las acciones de enseñanza y, en particular, las actividades y tareas propuestas por los profesores observados para trabajar en torno a las matemáticas, tienen como intención —no necesariamente expresada de este modo— contribuir al aprendizaje de los estudiantes y por lo tanto a su formación matemática. Sin embargo, al mirarlas de cerca vemos que se quedan cortas en muchos sentidos y limitan las oportunidades para que los estudiantes puedan vivir una experiencia matemática distinta que vaya más allá de saber cómo responder lo que va a ser objeto de una próxima evaluación. Se vio que el hacer matemáticas está enmarcado en la escuela en conocer parcialmente estructuras conceptuales y cuestiones procedimentales, y en manejar

1. La conceptualización de Skovsmose acerca de la educación matemática crítica está fundamentada en la idea del poder formativo de las matemáticas y en el papel que juegan al producir nuevas invenciones en la realidad, no sólo porque cambian las interpretaciones de ésta por nuevas percepciones sino porque la colonizan y reorganizan.

estas últimas. Se desaprovecha el espacio para potenciar el razonamiento matemático e impulsar procesos característicos, primordiales y definitivos del pensamiento matemático. Además se percibió que aunque algunas de las actividades que proponen los profesores en su enseñanza, se pueden ver como innovadoras, no es claro que en general las actividades tengan por detrás estrategias didácticas que las sustenten. Así mismo, se evidenció que no se propicia el diálogo ni las discusiones en clase que apunten a una participación activa de los estudiantes, como tampoco se fomenta un discurso fundamentado en las matemáticas mismas y su argumentación. Se entiende, por consiguiente, que la formación que los estudiantes alcanzan esté lejos de la formación matemática que sería deseable, y su calidad se considere deficiente.

De lo anterior, no sorprende percibir que las rutas pedagógicas que se siguen en la escuela para la enseñanza de las matemáticas parezcan surgir un poco al azar. Se ven más como el resultado aleatorio de la suma de una infinidad de elementos que como el conjunto de acciones deliberadas, conscientes e intencionadas de parte de los diferentes actores del sistema educativo que las moldean. En lo que concierne a los profesores de matemáticas de cuatro de los casos observados podría parecer que las rutas pedagógicas puestas en juego como parte de su práctica docente, están determinadas en primer lugar por la reproducción de la enseñanza vivida como estudiantes y experimentada como profesores practicantes en sus años de formación universitaria, de acuerdo a las pocas pautas pedagógicas que allí pudieron tener.

En segundo lugar, dichas rutas tienen origen en ideas poco procesadas, exploradas y comprendidas que los profesores han recopilado tanto de actividades de desarrollo profesional en las que han participado, como de los diversos documentos que las entidades estatales ponen en circulación con recomendaciones, sugerencias y nuevos planteamientos educativos. En un estado incipiente de elaboración de tales ideas las incorporan a su enseñanza, sin un estudio cuidadoso de las mismas, de sus posibilidades y efectos. Tal y como se ha descrito, se percibe que los profesores están dispuestos a hacer cambios menores que no les imponen transformar partes esenciales de su práctica docente, o modificaciones que dan la apariencia de ser sustanciales, pero que terminan siendo adaptadas a su forma usual de proceder, influida por sus visiones acerca de las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza, y en especial por su conocimiento matemático. Es claro que ambas posibilidades los llevan a sentirse más cómodos y en control de la situación.

Se necesitan cambios más de fondo considerados con cuidado y con intenciones precisas dirigidas a transformar la manera en que los estudiantes se aproximan y trabajan el conocimiento matemático, de modo que tales cambios tengan una incidencia real en el aprendizaje de los estudiantes. Ello implica necesariamente redimensionar la formación didáctico-matemática de los profesores al punto que les permita visualizar tanto nuevas maneras de actuar en clase, como nuevas y diferentes tareas para sus estudiantes; en suma, redireccionar el papel del profesor, del estudiante y del conocimiento matemático.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Editorial Síntesis, S. A.
- Amaya, G. (1997). La escuela, el maestro y su formación. En IDEP (Comp.), *La formación de los educadores en Colombia* (pp. 15-64). Bogotá: IDEP.
- Bishop, A., y Clarkson, P.C. (1988). What values do you think you are teaching when you teach mathematics? En J. Gough y J. Mousley (Eds.), *Exploring all angles* (pp. 30-38). Melbourne: Mathematics Association of Victoria.
- Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Escuela francesa*. México: DME-CINVESTAV.
- Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning with understanding. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175-190.
- Cooney, T. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. En D. Aichele y A. Coxford (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 9-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Denzin, N. y Lincoln, Y. (1998). Entering the field of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 1-34). Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.
- Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.
- Eisenhart, M. y Howe, K. (1992). Validity in educational research. En M. LeCompte, W. Millroy y J. Preissle (Eds.), *The handbook of qualitative research in education* (pp. 643-680). San Diego, CA: Academic Press.
- Emerson, R., Fretz, R. y Shaw, L. (1995). *Writing ethnographic fieldnotes*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel (Ed.), *Mathematics, Education, and Society* (document series 35, pp. 99-101). Paris: UNESCO.
- Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15 (1), 13-33.

- Flores, P. (2001). La clase como contexto de las tareas académicas (documento de trabajo). Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P., Perry, P., Valero, P., Castro M. y Agudelo, C. (1998). Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares. En IDEP (Comp.), *La investigación: fundamento de la comunidad académica*, Serie Investigaciones 2 (pp. 103-156). Bogotá: IDEP.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 225- 274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5), 442-466.
- Hewitt, D. (2002a). Lo arbitrario y lo necesario: una forma de ver el currículo de matemáticas. *Revista EMA*, 7 (1), 43-64.
- Hewitt, D. (2002b). Lo arbitrario y lo necesario: apoyo a la memoria. *Revista EMA*, 7 (2), 206-226.
- Hewitt, D. (2002c). Lo arbitrario y lo necesario: educación de la consciencia. *Revista EMA*, 7 (3), 310-343.
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verão-1999* (pp. 109-132). Portugal: Sociedade de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Mason, J. (1996). *Personal enquiry: Moving from concern towards research*. United Kingdom: The Open University.
- Mason, J. (1999). *Learning and doing mathematics*. Straylands Grove: QED.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Editorial Labor, S.A.
- MEN (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- MEN (2002). *Estándares para la excelencia en la educación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp. 101-114). New York: MacMillan Publishing Company.
- Osterman, K. y Kottkamp, R. (1993). *Reflective practice for educators. Improving schooling through professional development*. California: Corwin Press, Inc.
- Perry, P., Andrade, L., Fernández, F. y de Meza, M. (2000). Reflexión: componente de la actividad profesional del docente de matemáticas (reporte de investigación, documento no publicado). Bogotá: una empresa docente.
- Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P. y Agudelo, C. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: una empresa docente.
- Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. En *Didáctica da matemática* (pp. 71-95). Lisboa: Ministério de Educação, PRODEP.
- Quinn, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.
- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA, 1* (1), 4-24.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE/Horsori.
- Romberg, T. (1988). Can teachers be professionals? En D. Grouws, T. Cooney y D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (vol. I, pp. 224-244). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Romberg, T. y Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Sanders, D. y McCutcheon, G. (1984). On the evolution of teachers' theories of action through action research. *The Action Research Reader*, 177-185.
- Schoenfeld, A. (1996). Elements of a model of teaching (documento no publicado). Berkeley: University of California at Berkeley.
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.
- Sfard, A. (2000a). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2* (3), 157-189.
- Sfard, A. (2000b). Symbolizing mathematical reality into being—or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46 (1/3), 13-57.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: una empresa docente.
- Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M. y Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction. A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.
- TIMSS Study Center (1994). Student Questionnaire. Boston: The Hague.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford y A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K - 12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yackel, E. (2000). Introduction: Perspectives on semiotics and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458-477.

APÉNDICE

PROYECTO “RUTAS PEDAGÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

UNA MIRADA A LA PRÁCTICA DEL DOCENTE”¹

CUESTIONARIO DEL PROFESOR

Instrucciones generales

En este cuestionario usted encontrará preguntas sobre usted mismo y sobre asuntos de su práctica como docente de matemáticas.

Lea cuidadosamente cada pregunta y responda lo más precisamente posible. Por favor si no entiende algo o no está seguro de cómo responder, solicite ayuda.

Para responder las preguntas que tienen la indicación “escoja una sola respuesta”, usted debe seleccionar únicamente una de las posibilidades que se presentan en forma horizontal y marcar en frente la opción correspondiente en una de las casillas con x o escribir el número pedido, según la pregunta.

Para responder las preguntas que no tienen dicha indicación usted debe marcar la opción en una de las casillas con x o escribir el número pedido, según la pregunta, en frente de todas las posibilidades que se presentan en forma horizontal.

Si usted trabaja en más de una institución como profesor de matemáticas, para responder este cuestionario, por favor, haga referencia a una de ellas solamente.

Institución: _____

Nombre: _____ Fecha: _____



una empresa docente®

Universidad de los Andes
Casita Rosada: Calle 18A # 0-29 Este
Tels. 3394949 Ext. 2717
Fax: 3394949 Ext. 2709
Bogotá

1. Este proyecto se desarrolla con el apoyo financiero del Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP.

Sección A: Clase

Para contestar las preguntas de la secciones A y B, por favor haga referencia a uno de los cursos de matemáticas que ha dictado recientemente en la institución indicada antes.

Grado: _____ Asignatura: _____

1. En sus clases usted:

Marque con una x

<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>siempre o casi siempre</i>
--------------	----------------	---------------------------------------

- a. exige a sus estudiantes el uso de un libro de texto específico
- b. sugiere el uso de otros libros de texto
- c. propone el uso de guías
- d. sugiere el uso de otros documentos

2. Si la respuesta anterior a la opción b. o d. fue distinta de “nunca”, indique qué otros libros de texto o documentos se usan y con qué propósito?

3. ¿En sus clases asigna usted trabajo a sus estudiantes que implique el uso de:

Marque con una x

<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>siempre o casi siempre</i>
--------------	----------------	---------------------------------------

- a. materiales (papel milimetrado, cartulina, plastilina, etc.)
- b. instrumentos (compás, escuadra, transportador, etc.)
- c. juegos (regletas, ábaco, geoplano, pentominó, etc.)
- d. calculadoras graficadoras
- e. otras calculadoras
- f. programas matemáticos para computador
- g. información suministrada por otras personas

4. Indique la frecuencia con la que se hacen actividades como las siguientes en sus clases. Además, para las actividades que usted marque con “siempre o casi siempre”, indique el orden en que usualmente se realizan (con un número empezando por el 1), y los minutos (aproximados) que toman dichas actividades. Utilice el mismo número para indicar actividades que se realizan simultáneamente.

	<i>Marque con una x</i>	<i>Indique el número</i>
	<i>siempre nunca a veces o casi siempre</i>	<i>orden tiempo</i>
a. revisión o corrección de la tarea		
b. repaso de lo visto en las clases anteriores		
c. lectura de una máxima o un texto corto		
d. dinámica de integración		
e. resolución de un acertijo		
f. exposición de un tema por parte del profesor.....		
g. realización de una lectura		
h. resolución individual de ejercicios o problemas.....		
i. resolución en grupo de ejercicios o problemas		
j. discusiones plenarias.....		
k. trabajo de los estudiantes en el tablero		
l. actividades matemáticas fuera del salón		
m. evaluaciones escritas cortas		
n. evaluaciones orales cortas		
o. asignación de tareas para la casa		
p. desarrollo de parte de la tarea para la casa		
q. desarrollo de guías de trabajo		
r. exposición de parte de los estudiantes		

5. **Indique la frecuencia con que se realizan tareas como las siguientes en sus clases. Además, para las tareas que se realizan algunas veces, siempre o casi siempre, establezca el principal realizador.**

		<i>Marque con una x</i>		
		<i>realizador</i>		
		<i>siempre</i>		
		<i>o casi</i>	<i>alumno</i>	<i>profesor</i>
		<i>siempre</i>	<i>todo el grupo</i>	
<i>nunca a veces</i>				
a.	búsqueda o construcción de ejemplos			
b.	búsqueda o construcción de contraejemplos.....			
c.	análisis de ejemplos para ver cómo se concreta la teoría			
d.	análisis de enunciados matemáticos (definiciones, propiedades, etc.)			
e.	expresión de ideas relacionadas con los tópicos matemáticos que se tratan			
f.	sustentación de las ideas matemáticas que se exponen durante la clase			
g.	elaboración de pruebas matemáticas			
h.	análisis y evaluación de pruebas, argumentos.....			
i.	aplicación de enunciados matemáticos generales para casos particulares.....			
j.	establecimiento de enunciados matemáticos generales como resultado de estudiar casos particulares y reconocer una regularidad en ellos			
k.	establecimiento de procedimientos para resolver tipos de tareas matemáticas			
l.	formulación de preguntas relativas al tema matemático de estudio en la clase.....			
m.	utilización de diversas representaciones para un mismo concepto			

- n. traducción entre diversos sistemas de representación
- o. manejo del lenguaje simbólico de las matemáticas
- p. búsqueda de conexiones entre conceptos
- q. búsqueda de conexiones entre procedimientos y conceptos
- r. búsqueda de conexiones entre temas matemáticos
- s. construcción de esquemas conceptuales al finalizar el estudio de una unidad temática o capítulo
- t. análisis de enunciados de problemas
- u. diseño de estrategias de solución de problemas
- v. formulación de problemas
- w. construcción de maquetas o modelos físicos.....
- x. elaboración de conjeturas.....

6. De las tareas anteriores en las que haya respondido con siempre, elija una y descríbalas en detalle (si lo requiere ponga un ejemplo).

7. Describa una tarea o actividad cualquiera (no tiene que ser de la tabla anterior) que usted propone a sus estudiantes y con la cual esté altamente satisfecho porque considera que es útil para el aprendizaje de sus alumnos. Explique por qué cree que esa tarea o actividad es efectiva para eso.

8. Usted realiza actividades como:

Marque con una x
siempre
nunca a veces o casi
siempre

- a. la consideración cuidadosa y sistemática de lo sucedido en sus clases
- b. el estudio de los temas matemáticos que está tratando

9. Las interpelaciones que usted hace a los estudiantes en clase se refieren a:

Marque con una x
siempre
nunca a veces o casi
siempre

- a. reglas de juego para la clase
- b. llamados de atención para la marcha adecuada de la clase
- c. objetivos de aprendizaje de la sesión
- d. ideas sobre el tema matemático a tratar
- e. instrucciones para realizar algo
- f. preguntas que ponen en conflicto las concepciones
- g. preguntas generales sobre la claridad de lo visto
- h. preguntas específicas para indagar en la comprensión
- i. comentarios sobre la validez matemática de las participaciones
- j. recordar asuntos matemáticos ya tratados
- k. comentarios que indican el hilo conductor del discurso en clase

10. La validez de las respuestas dadas por un estudiante queda determinada para los alumnos de la clase porque usted:

Marque con una x
siempre
nunca a veces o casi
siempre

- a. corrige la respuesta con el estudiante
- b. corrige la respuesta en frente de todos los estudiantes
- c. hace otras preguntas al estudiante para que él vea el error
- d. indica a otro estudiante que corrija la respuesta.....

11. De las siguientes acciones que se puedan llevar a cabo para enseñar matemáticas, usted:

Marque con una x

*siempre
nunca a veces o casi
siempre*

- a. presenta elementos de la teoría correspondiente a un determinado tema que quiere enseñar con el propósito de dar bases conceptuales.
- b. a partir de casos particulares, expone elementos de la teoría correspondiente a un determinado tema que quiere enseñar, con el propósito de ilustrar ya sea un procedimiento o características de un concepto
- c. sin la participación de sus estudiantes, formaliza en cierta medida la teoría tratada.....
- d. en colaboración con sus estudiantes, formaliza en algún grado los elementos teóricos que pretende que se aprendan
- e. con o sin la participación de sus estudiantes, ilustra mediante casos particulares la aplicación de los elementos teóricos ya presentados.....
- f. propone casos particulares para que sus estudiantes apliquen los elementos teóricos tratados
- g. con el propósito de motivar y/o justificar el trabajo posterior, en el contexto de una situación particular plantea preguntas o tareas que comprometen la comprensión de conceptos matemáticos que no han sido estudiados previamente, pero a los cuales los estudiantes pueden aproximarse de manera intuitiva.....
- h. orquesta una discusión con el propósito de que los estudiantes puedan revisar y reelaborar sus intuiciones que han sido planteadas mediante las interacciones estudiante-estudiante y estudiante-profesor y vayan surgiendo para todo el grupo respuestas más apropiadas que las dadas intuitivamente y los elementos teóricos que se quiere que los estudiantes comprendan
- i. otro, ¿cuál?

12. Si en el curso al cual se refieren las respuestas de esta sección usted enseñó aritmética, indique si los tópicos de la lista a continuación fueron tratados allí y en qué orden (con un número empezando por el 1). Utilice el mismo número para indicar tópicos que se trataron simultáneamente. En caso de que un tópico haya sido abordado en varios momentos enumérelas veces que sea necesario. Por favor añada al final de la lista los tópicos que considere que hacen falta.

	Marque con una x		Indique el número orden
	si	no	
a. operaciones de los números naturales			
b. orden de los números naturales			
c. propiedades de los números naturales			
d. factores de números naturales			
e. divisores de números naturales			
f. múltiplos de números naturales			
g. números enteros y representación en la recta...			
h. operaciones con números enteros			
i. propiedades de los números enteros			
j. orden de los números enteros			
k. números fraccionarios			
l. operaciones de números fraccionarios			
m. fraccionarios equivalentes			
n. expresión decimal de los números fraccionarios			
o. razones y proporciones			
p. operaciones de números decimales			
q. números racionales			
r. operaciones de números racionales			
s. orden de los números racionales			
t. representación en la línea numérica de los números racionales			
u. números irracionales			
v. otros, ¿cuáles?			

13. Si en el curso al cual se refieren las respuestas de esta sección usted enseñó álgebra, indique si los tópicos de la lista a continuación fueron tratados en el año y en qué orden (con un número empezando por el 1). Utilice el mismo número para indicar tópicos que se trataron simultáneamente. En caso de que un tópico haya sido abordado en varios momentos enumérelo las veces que sea necesario. Por favor añada al final de la lista los tópicos que considere que hacen falta.

	Marque con una x		Indique el número orden
	si	no	
a. números fraccionarios			
b. operaciones de números fraccionarios			
c. fraccionarios equivalentes			
d. expresión decimal de los números fraccionarios			
e. operaciones de números decimales			
f. números racionales			
g. operaciones de números racionales			
h. orden de los números racionales			
i. representación en la línea numérica de los números racionales			
j. números irracionales			
k. expresiones algebraicas			
l. ecuaciones de una variable			
m. inecuaciones de una variable			
n. representaciones (tablas, gráficas, ecuación) de función lineal			
o. representaciones (tablas, gráficas, ecuación) de función cuadrática			
p. otros, ¿cuáles? _____			

14. Si en el curso al cual se refieren las respuestas de esta sección usted enseñó geometría, indique si los tópicos de la lista a continuación fueron tratados en el año y en qué orden (con un número empezando por el 1). Utilice el mismo número para indicar tópicos que se trataron simultáneamente. En caso de que un tópico haya sido abordado en varios momentos enumérelo las veces que sea necesario. Por favor añada al final de la lista los tópicos que considere que hacen falta.

	Marque con una x		Indique el número orden
	si	no	
a. magnitudes: longitud, área, volumen			
b. medición de longitud			
c. medición de área			
d. medición de volumen			
e. medición de ángulos			
f. medición de perímetros			
g. triángulos			
h. cuadriláteros			
i. polígonos irregulares			
j. polígonos regulares			
k. líneas de los polígonos			
l. circunferencia			
m. ángulos			
n. congruencia de polígonos			
o. rotaciones en el plano			
p. translaciones en el plano			
q. reflexiones en el plano			
r. homotecias.....			
s. poliedros			
t. otros, ¿cuáles?			

15. Si en la institución a la cual se refieren las respuestas de este cuestionario se enseña otra asignatura matemática distinta de aritmética, álgebra o geometría, en básica secundaria, indique el nombre, los tópicos que son tratados allí durante el año y su orden (con un número empezando por el 1). Utilice el mismo número para indicar tópicos que se trataron simultáneamente. En caso de que un tópico haya sido abordado en varios momentos enumérelo las veces que sea necesario.

Sección B: Preparación de clase

16. En la preparación de clase que realiza, ¿participa alguien más además de usted mismo?

Marque con una x

<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>siempre</i>
		<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

17. Si la respuesta anterior fue distinta de “nunca”, ¿quiénes participan en dicha preparación de clase?

Marque con una x

<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>siempre</i>
		<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. coordinador académico
- b. coordinador del área
- c. todos los profesores del área
- d. algunos profesores del área
- e. estudiantes
- f. otras personas

18. ¿En qué momento lleva a cabo dicha preparación?

Marque con una x

<i>en la</i>	<i>fuera</i>
<i>jornada</i>	<i>de la</i>
<i>laboral</i>	<i>jornada</i>
	<i>laboral</i>

19. ¿Lleva un registro escrito de la preparación de clases?

Marque con una x

<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>siempre</i>
		<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

24. Para preparar la clase utiliza:*Marque con una x*

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. el libro de texto
- b. los lineamientos curriculares
- c. el plan de estudios de la asignatura
- d. las respuestas de los estudiantes
- e. la información de las clases anteriores
- f. las preparaciones previas de clase que había hecho
- g. otros documentos
- h. aportes de colegas
- i. computadores
- j. calculadoras graficadoras

25. Si la respuesta anterior al punto a. fue distinta de “nunca”, ¿qué usa de dicho libro en la preparación de clase?*Marque con una x*

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. la manera en que allí se presenta la teoría
- b. los problemas o ejercicios que allí se sugieren
- c. otras ideas expuestas allí

26. Si en la pregunta 24. la respuesta al punto g. fue distinta de “nunca”, ¿qué tipo de consultas hace en dichos documentos?

Marque con una x

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. de tipo matemático
- b. de tipo didáctico
- c. de tipo histórico
- d. de otro tipo

27. Las evaluaciones que usted prepara para sus estudiantes tienen como propósito:

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. determinar el conocimiento adquirido
- b. conocer el estado de comprensión
- c. detectar dificultades de los estudiantes
- d. ejercitar habilidades o algoritmos
- e. desarrollar habilidades de comunicación
- f. dar realimentación a los estudiantes
- g. realimentar su práctica
- h. entrenar a los estudiantes para resolver evaluaciones
- i. cumplir con un requisito administrativo

28. La evaluación de sus estudiantes la hace?

Marque con una x

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. usted
- b. el mismo estudiante
- c. otros estudiantes del curso

29. Usted evalúa a sus estudiantes usando:*Marque con una x*

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- pruebas escritas realizadas en la clase al final de un proceso particular de aprendizaje
- pruebas orales realizadas en la clase al final de un proceso particular de aprendizaje
- trabajo realizado por fuera de la clase al final de un proceso particular de aprendizaje
- trabajo realizado en clase durante el proceso de aprendizaje
- trabajo realizado por fuera de la clase durante el proceso de aprendizaje
- entrevistas para ahondar en los procesos realizados

30. En las evaluaciones que usted hace, sus estudiantes deben:*Marque con una x*

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- responder preguntas de selección múltiple
- responder preguntas de verdadero o falso
- responder preguntas de completar la información dada por el profesor
- responder preguntas de respuesta conocida por los estudiantes
- realizar tareas para las que hay procedimientos o algoritmos conocidos por los estudiantes
- presentar diversas estrategias de solución
- construir ejemplos
- resolver problemas
- formular problemas
- escribir textos
- dar cuenta de los procedimientos realizados
- probar enunciados
- realizar proyectos

31. Las evaluaciones que usted prepara para sus estudiantes contemplan:

Marque con una x

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. la consulta de apuntes o del libro de texto
- b. el uso de material didáctico
- c. el uso de computadores o calculadoras graficadoras
- d. el uso de otras calculadoras

32. Usted evalúa a sus estudiantes a través de:

Marque con una x

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. trabajo individual
- b. trabajo en grupos

33. Como indicios del aprendizaje de sus estudiantes, en las evaluaciones usted tiene en cuenta:

Marque con una x

		<i>siempre</i>
<i>nunca</i>	<i>a veces</i>	<i>o casi</i>
		<i>siempre</i>

- a. las respuestas finales dadas
- b. las fórmulas usadas
- c. los algoritmos seguidos
- d. las estrategias seleccionadas.....
- e. los procedimientos realizados
- f. las representaciones utilizadas
- g. los enunciados construidos
- h. los textos elaborados
- i. los argumentos planteados como justificación.
- j. las explicaciones adicionales suministradas.....

Sección C: Planeación anual institucional

Para contestar las preguntas de las secciones C y D por favor haga referencia a la práctica como maestro de matemáticas en general.

34. ¿Se hace planeación anual de matemáticas en la institución?

Marque con una *x*

si no

35. Si la respuesta a la pregunta anterior fue “sí”, ¿quiénes participan en tal planeación?

Marque
con una *x*

el rector

el coordinador académico

el jefe del Departamento de Matemáticas

el coordinador del Área de Matemáticas

los profesores del Área de Matemáticas

los profesores de otras áreas

36. Si usted participa en la planeación anual de matemáticas que hace la institución, su papel allí es:

Marque con una *x*

*nunca a veces siempre
o casi siempre*

- a. hacer propuestas
- b. hacer análisis de las propuestas planteadas
- c. participar de las decisiones
- d. escuchar y comentar críticamente
- e. escuchar y no participar
- f. otro, ¿cuál?
-

37. Los asuntos que se tratan y se definen como parte de la planeación institucional son:

*Marque
con una x*

los horarios de las clases.....

la carga laboral

los recursos para utilizar en las
clases.....

computadores

calculadoras

libros

materiales didácticos

otro, ¿cuál?

los temas matemáticos que se van a tratar en cada curso y la
secuencia de éstos

el enfoque que se sigue para
abordar los temas

resolución de problemas

trabajo por proyectos

otro, ¿cuál?

los objetivos del enfoque

los indicadores de logro

el esquema de recuperación de logros

las condiciones para la pérdida de año

las fechas para previas y exámenes

los exámenes institucionales

actividades relacionadas con las
clases.....

olimpiadas matemáticas

club de matemáticas.....

exposiciones o ferias.....

otra, ¿cuál?

*Marque
con una x*

actividades distintas a las clases

- atención a padres
- entrega de informes
- bazares
- tiendas
- otra, ¿cuál?

otro, ¿cuál?

38. En la determinación del currículo de matemáticas de su institución, indique la influencia de:

Marque con una x
ninguna alguna mucha definitiva

- a. los lineamientos curriculares
- b. el P.E.I.
- c. otros documentos
- d. el rector
- e. el coordinador de matemáticas
- f. los profesores de matemáticas ...
- g. los padres de familia

Sección D: Información general

39. Usted es:

Escoja una sola respuesta

*Marque
con una x*

mujer.....

hombre

40. ¿Cuál es el mayor nivel de educación formal que ha completado usted?

Escoja una sola respuesta

*Marque
con una x*

bachillerato.....

bachillerato pedagógico

pregrado..... Licenciatura en Matemáticas

Matemáticas

pregrado..... Licenciatura en Física

Física

Licenciatura en Ciencias

Licenciatura en otra disciplina

otro, ¿cuál?

Especialización ¿cuál?

postgrado..... Maestría ¿cuál?

Doctorado ¿cuál?

41. ¿Cuántos años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas tiene, sin contar las prácticas docentes y sin incluir el presente año?

Indique el número

42. **¿Qué edad tiene usted?***Escoja una sola respuesta**Marque
con una x*

- menos de 25 años
- entre 25 y 29 años
- entre 30 y 39 años
- entre 40 y 49 años
- entre 50 y 59 años
- más de 60 años

43. **¿En qué grados de secundaria está usted enseñando matemáticas este año?***Marque
con una x*

- grado 6°
- grado 7°
- grado 8°
- grado 9°
- grado 10°
- grado 11°

44. **¿En qué grados de secundaria ha enseñado matemáticas en los últimos cinco años?***Marque
con una x*

- grado 6°
- grado 7°
- grado 8°
- grado 9°
- grado 10°
- grado 11°

45. ¿Cuántos estudiantes en promedio tiene por clase?

Indique el número

46. ¿Cuántas horas a la semana en promedio dedicó a cada una de las siguientes actividades para el curso antes indicado?

*Indique el número
en la fuera de
jornada la jornada
laboral laboral*

- preparación de clase
- atención a estudiantes fuera de clase
- atención a padres
- evaluación de los estudiantes
- elaboración de parceladores u otros informes administrativos
- reuniones de área
- preparación y ejecución de actividades no relacionadas con las clases de matemáticas (dirección de grupo, celebraciones, etc.)
- otras tareas administrativas.....

47. ¿Realiza usted actividades como las siguientes?

Marque con una x

nunca a veces a menudo

- a. lectura de documentos relativos a su práctica
- b. escritura de documentos sobre sus experiencias docentes
- c. reuniones con colegas para discutir asuntos relativos a la práctica, distintas a la reunión de área
- d. presentaciones o charlas a colegas acerca de su trabajo

49. ¿Participa usted en actividades relacionadas con las matemáticas o con la Educación Matemática, como las siguientes?

Marque con una x

nunca a veces a menudo

- a. seminarios o talleres
 - b. congresos o eventos
 - c. cursos o programas de formación
 - d. proyectos de innovación o investigación
- 50. ¿Ha tenido usted alguna experiencia de innovación de su práctica que haya sido sistemática tanto en su preparación como en su observación? En caso de una respuesta positiva, describa por favor en qué consistió la innovación, por qué fue innovadora, y qué tan permanente fue.**