EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Errores y dificultades de los estudiantes
Resolución de problemas
Evaluación
Historia

EDITORES

JEREMY KILPATRICK
PEDRO GÓMEZ
LUIS RICO

una empresa docente® **Umiversidad de los Andes**

Bogotá, 1998

Versión de la obra *Educación Matemática*
Jeremy Kilpatrick, Pedro Gómez y Luis Rico (Editores)
Edición original en español publicada por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. en México
ISBN 970-625-107-3

Diseño carátula: Interlínea Editores

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel.: (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 3520466 ext. 2709
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

Impresión: Cemtro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-17-X
Impreso en Colombia

El Primer Simposio Internacional de Educación Matemática fue realizado gracias al patrocinio de las siguientes entidades:

- Apple Computer Inc.
- COLCIENCIAS
- Comisión Fulbright
- Embajada de España
- Fundación Alejandro Angel Escobar
- Fundación Corona
- Fundación FES
- Fundación Restrepo Barco
- Fundación Santillana
- Gaseosas Colombiana
- ICETEX
- Nestlé de Colombia

Contenido

Introducción

En marzo de 1993, "una empresa docente", centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, organizó y realizó, a través de su programa Club EMA, el Primer Simposio Internacional de Educación Matemática. Para este evento fueron invitados dos de los investigadores más importantes a nivel mundial en el área de la educación matemática: el profesor Jeremy Kilpatrick, catedrático de la Universidad de Georgia, Estados Unidos, y el profesor Luis Rico, catedrático de la Universidad de Granada, España.

El Simposio buscaba diversos objetivos. El más importante de ellos consistía en presentar a la educación matemática como un área del conocimiento, tanto desde el punto de vista tecnológico —el conocimiento de la teoría y su aplicación a la práctica—, como desde el punto de vista científico —un área de investigación con aplicaciones prácticas—. Para ello, se pretendía informar a la comunidad de profesores de matemáticas que la educación matemática es, de hecho, un área de investigación, con resultados teóricos y prácticos relevantes para los problemas educativos del país y que, convertirse en "educador matemático" no es un proceso gratuito: requiere del establecimiento de un conjunto de normas y criterios que introduzcan los elementos necesarios para la producción de resultados tecnológicos y científicos de calidad.

El Simposio realizó diversas actividades entre las que se cuentan una serie de conferencias magistrales dadas por los invitados internacionales y por el doctor Carlos Vasco; un seminario de investigación en el que participaron los principales investigadores colombianos en educación matemática; dos cursos dictados por los invitados internacionales; un evento de un día en la ciudad de Cali; y visitas a diversas instituciones de educación del Distrito de Bogotá.

Este libro es el resultado del trabajo realizado en el Simposio. A través de él, el lector podrá tener una visión global de la educación matemática y de algunos de los temas que preocupan en la actualidad a la comunidad internacional en esta disciplina.

En la primera parte, el profesor Kilpatrick hace una reflexión acerca de la historia de la investigación en educación matemática y de algunos de sus temas de actualidad. Por su parte, el profesor Rico hace una presentación de la evolución que la educación matemática ha tenido en España. Finalmente, el prosesor Carlos Vasco hace una relación de algunas de las líneas de investigación en educación matemática que se han trabajado en Colombia.

La segunda parte del libro presenta las opiniones de los profesores Kilpatrick y Rico alrededor de dos temas de gran actualidad en la educación matemática: la resolución de problemas y la evaluación. Estos textos son producto de las discusiones que estos dos profesores tuvieron con un grupo de investigadores colombianos.

En la tercera y última parte del libro, el lector encontrará dos textos de educación matemática con gran valor práctico. El profesor Rico hace una reflexión sobre los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. El profesor Kilpatrick presenta algunas técnicas sencillas de evaluación que un profesor puede introducir en su quehacer docente.

Este es un libro de gran interés para el profesor de matemáticas y el investigador en educación matemática. En él, ellos encontrarán tanto una visión general de la disciplina, como reflexiones teóricas y metodológicas de la investigación y resultados y sugerencias prácticas para la actividad docente en matemáticas.

La realización de este simposio contó con la participación de la mayor parte de los colaboradores de "una empresa docente" cuyo trabajo los editores desean agradecer: Cristina Carulla en la organización y realización de los seminarios de investigación y la redacción de sus resultados; Vilma María Mesa en la organización y realización del curso del profesor Kilpatrick y la redacción de su contenido; Felipe Fernández en las grabaciones de video y audio del curso del catedrático Rico y en la diagramación y producción de este libro; Patricia Inés Perry en la organización y realización del ciclo de conferencias y en la organización y realización del curso del profesor Rico; Paola Valero en la traducción de los textos del inglés al español y en la realización del curso del profesor Kilpatrick; Luz Mary Pinzón en la atención a los invitados internacionales; y Herbert Suárez en la coordinación de la grabación de video y audio de todo el simposio.

Los editores

Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad

Dr. Jeremy Kilpatrick

Universidad de Georgia

La historia de la investigación en educación matemática es parte de la historia de nuestro campo —la educación matemática. Este se ha desarrollado durante los últimos dos siglos debido a que matemáticos y educadores han enfocado su atención hacia qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos; también se han interesado en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela. Desde su comienzo, la investigación en educación matemática ha sido también modelada por fuerzas provenientes del campo más general de la investigación educativa, la cual abandonó, hace aproximadamente un siglo, la especulación filosófica en favor de un enfoque más científico. Al igual que la educación matemática, la investigación en este campo ha tenido que luchar para lograr su propia identidad. Ha tratado de formular su propia problemática y sus propias formas de tratarla. Ha intentado definirse a sí misma y constituir un grupo de personas que se autoidentifiquen como investigadores en educación matemática.

Durante las últimas dos décadas, esta tarea de auto-definición ha sido lograda en su mayor parte. Existe una comunidad internacional de investigadores que hace reuniones, publica revistas y boletines, promueve la colaboración ínter e intra disciplinaria, mediante la elaboración y crítica de estudios de investigación; intenta, asimismo, mantener viva una conciencia de investigación en los consejos de aquellas organizaciones de educación matemática en los que participan miembros de la comunidad de investigadores. En este artículo, expongo primero algunas de las fuerzas que, en el pasado, han dado forma a nuestro campo de investigación, para después examinar algunos de los problemas actuales que tiene que enfrentar.

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 1-18.

Una definición amplia y útil de investigación es la de *indagación metódica* (Cronbach & Suppes, 1969). El término *indagación* sugiere que el trabajo busca dar respuesta a una pregunta específica; no es una especulación fútil o erudita para la satisfacción propia. El término *metódica* sugiere, no solamente que la investigación puede ser guiada por conceptos y métodos de otras disciplinas como la psicología, la historia, la filosofía o la antropología, sino que, además, se expone de tal forma que el proceso de indagación pueda examinarse y verificarse. La indagación metódica no necesita ser "científica" en el sentido de estar basada en hipótesis que hayan sido verificadas empíricamente, pero como todo buen trabajo científico, debe ser erudito, público y abierto a la crítica y posible refutación. La investigación en educación matemática es entonces la indagación metódica acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los orígenes de la investigación en educación matemática

Al igual que la educación matemática, la investigación en esta área se originó en las universidades. A la vuelta del siglo diecinueve, las universidades protestantes de Prusia comenzaron una reforma de la educación superior que eventualmente se extendió a otros países y que dio lugar a la diferenciación y profesionalización de las disciplinas científicas modernas (Grattan-Guinness, 1988; Jahnke, 1986; Pyenson, 1985; Schubring, 1988; Shils, 1978). Con esta reforma, se esperaba que el profesor universitario, además de enseñar, realizara investigación. En Europa, la educación comenzó a ser estudiada como una disciplina académica independiente. El progreso fue lento. La primera posición académica en educación fue establecida en la Universidad de Halle en 1779, y habiendo ya comenzado el siglo veinte, había tan sólo unos pocos miembros de planta de las universidades europeas que tenían responsabilidades de enseñanza en educación. La primera cátedra permanente en educación vino a establecerse solamente en 1873 en la Universidad de Iowa. En 1890, había menos de una docena de cátedras en educación en los Estados Unidos (Cubberley, 1920, p.827).

A lo largo del siglo diecinueve, las universidades graduaban profesores de matemáticas para la escuela secundaria, pero la instrucción en la enseñanza de las matemáticas era, en el mejor de los casos, una parte separada y menor de la preparación del profesor. Solamente hacia el final del siglo, los estudiantes de las universidades alemanas comenzaron a recibir formación práctica en la enseñanza de las matemáticas. Uno de los líderes en la introducción de cursos de metodología en la educación universitaria fue Felix Klein, quien no solamente creó estos cursos en varias universidades, sino que también supervisó el primer grado de doctorado (*Habilitation*) en educación matemática que fue obtenido por Rudolf Schimmack en Göttingen en 1911 (Schubring, 1988).

En otros países como Inglaterra y Francia, los estudiantes que se preparaban para enseñar matemáticas estudiaban matemáticas, asistiendo quizás a una charla ocasional sobre el manejo de clase o la educación moral, como preparación profesional. Los profesores de las escuelas primarias eran formados, en general, en instituciones pedagógicas independientes —llamados colegios, institutos, seminarios y escuelas normales— siendo éstas, instituciones de secundaria, más que de educación superior. Cuando algunos países comenzaron a establecer sistemas escolares a nivel nacional, se encontraron con la necesidad de una mayor oferta de profesores calificados con una formación profesional. El entrenamiento especializado en el tema de estudio que habría sido suficiente para preparar a los profesores de los colegios de la élite era claramente insuficiente para los profesores que se necesitaban en las nuevas escuelas secundarias que se estaban fundando. La demanda creciente de profesores de primaria mejor calificados llevó a los países a mejorar aquellas instituciones de formación profesoral de nivel secundario a superior.

La educación matemática, como campo de estudio, comenzó lentamente a desarrollarse hacia el final del siglo diecinueve en la medida en que las universidades de varios países, como respuesta a la necesidad de una mayor cantidad de profesores mejor preparados, comenzaron a ampliar sus programas de formación de profesores. La primera organización de profesores de matemáticas fue la "Asociación para la mejora de la enseñanza de la geometría" (the Association for the Improvement of Geometrical Teaching —AIGT—), fundada en 1871 en el Reino Unido. Esta organización fue la precursora de la "Asociación Matemática" (the Mathematical Association). Otras organizaciones influyentes fueron ulteriormente creadas en otros países:

> *Las asociaciones profesionales fueron durante esta época responsables de las mejoras en educación matemática alentando y proporcionando medios para el cambio hacia nuevas ideas" (Rico & Sierra, 1991, p.16).*

En 1912, un estudio hecho por la Comisión Internacional en la Enseñanza de las Matemáticas informó que se estaban ofreciendo conferencias en educación matemática (para complementar los cursos de matemáticas) en los Estados Unidos, el Reino Unido, Alemania y Bélgica (Schubring, 1988). En algunos lugares, se establecieron nuevas instituciones de educación superior con el propósito de formar profesores. Sin embargo, muy frecuentemente, algunas de estas escuelas, especializadas en la formación de profesores, de primaria como de secundaria, fueron absorbidas por universidades, o se convirtieron ellas mismas en universidades. Uno de los primeros ejemplos que llegó a ser emulado ampliamente alrededor del mundo, fue el New York College for the Training of Teachers, que, establecido en 1887, fue afiliado a la Universidad de Columbia, como el Teachers College.

Con el tiempo, y de manera algo diferente en los diversos países, la educación matemática llegó a ser reconocida como un tema de estudio a nivel universitario. Se esperaba entonces que las personas comprometidas con la formación de profesores de matemáticas dentro de una universidad, no sólo debían enseñar, sino también hacer investigación. Esto generó el comienzo de la actividad investigativa en educación matemática.

Hay dos disciplinas que han tenido una influencia fecunda en la investigación en educación matemática. La primera son las matemáticas mismas. Los matemáticos tienen una larga, aunque esporádica, historia en cuanto al interés en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de su tema. A medida que la educación matemática se desarrollaba en las universidades, comenzó a atraer a un grupo de personas cuyo principal interés era el tema matemático en sí mismo y quienes, en general, se consideraban a sí mismos como matemáticos. Estos educadores matemáticos realizaron estudios históricos y filosóficos, encuestas, y, eventualmente, otro tipo de investigación empírica. Su trabajo anticipó una buena parte de la problemática que los investigadores están estudiando en la actualidad.

La segunda influencia importante en la investigación en la educación matemática es la psicología. Una de las condiciones previas para el desarrollo de la educación matemática fue la escuela nivelada según edades en la cual el maestro podía manejar grupos homogéneos y comenzar a observar patrones cognitivos (Schubring, 1988). Hacia el comienzo del siglo veinte, los institutos de psicología en Alemania y los departamentos de psicología en los Estados Unidos comenzaron a realizar estudios empíricos en educación (Husén, 1983). La psicología se convirtió en la "ciencia central" de la escuela y por tanto en una parte central del currículo de la escuela normal (Cubberley, 1920, p. 775).

Cambios en las metodologías de investigación

A través de los pasados 100 años (Kilpatrick, 1992) el campo de la investigación en educación matemática ha evolucionado desde una fuerte dependencia con respecto a la psicología del siglo diecinueve que emulaba las ciencias naturales, hasta la adopción de métodos usados en otras ciencias humanas. Al mismo tiempo, la psicología ha ampliado su visión metodológica. La psicología conductista de las primeras décadas de este siglo, partiendo de una filosofía ahora llamada "positivista", buscaba regularidades en los fenómenos educativos, del tipo de las leyes de la ciencia natural. Hasta los años setentas, gran parte de la investigación en educación matemática, y especialmente la realizada en América del Norte, buscaba especificar el comportamiento de los estudiantes o los profesores y analizar este comportamiento en componentes. El mundo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas era visto como un sistema de variables que interactuaban entre sí. El propósito de la investigación era el de describir esas variables, descubrir sus interrelaciones e intentar manipular algunas de ellas para obtener cambios en otras. Esta visión tiene todavía sus adherentes. Sin embargo, existen orientaciones alternativas.

En Europa y en Australia, se han utilizado aproximaciones fenomenológicas a la investigación en educación desde hace tiempo. Recientemente, estas aproximaciones han comenzado a tener una influencia profunda en la investigación en educación matemática. Una de estas aproximaciones se parece a la del antropólogo, en el sentido de que intenta capturar y compartir la comprensión que tanto profesores como estudiantes tienen de su encuentro educativo. El propósito es el de proporcionar conocimiento específico acerca de la actividad social dentro de un contexto. En Estados Unidos, esta aproximación se conoce como la visión interpretativa; el investigador busca interpretar el significado que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen para los participantes, al vivir dentro del salón de clases, participando o no del proceso de instrucción.

Otra aproximación es la del sociólogo crítico. Dado que, de acuerdo a esta posición, tanto el colegio como la sociedad deben estar libres de manipulación, represión y dominación, el investigador en educación matemática debe asumir un papel activo ayudando a profesores y estudiantes a lograr esta libertad. El investigador necesita no solamente comprender el significado que los participantes le dan al proceso educativo, sino que también debe ayudar a cambiar aquellos significados que han sido distorsionados por la ideología. En Australia y Nueva Zelandia este tipo de investigación se conoce como "investigación acción".

En la aproximación conductista, aun si la posición epistemológica no es la del positivismo lógico, el investigador debe salirse del encuentro educativo y asumir una actitud de observador neutral. En la aproximación interpretativa, el investigador se introduce en el encuentro educativo con el propósito de comprender sin pretender juzgar. En la aproximación crítica, el investigador se introduce en el encuentro no solamente para comprenderlo, sino también para cambiarlo en aquellas direcciones que den a los participantes mayor libertad dentro de la cual trabajar.

Cada una de las aproximaciones tiene algo que aportar al campo; no es posible rechazar ninguna de ellas. La educación matemática requiere de las múltiples perspectivas que estas aproximaciones diferentes (lo mismo que otras —tanto las utilizadas actualmente, como aquellas que están por desarrollar—) pueden aportar a los fenómenos de enseñanza e instrucción.

En algunas ocasiones el choque de las diferentes aproximaciones metodológicas ha dado lugar a lo que se conoce como "el debate cualitativo-cuantitativo" (Howe & Eisenhart, 1990; Salomon, 1991). Los investigadores deben decidir entre adoptar métodos en los cuales la medición produce información numérica o métodos con los cuales la información que se obtiene no puede ser convertida en números. De acuerdo a Salomon, la distinción más importante está entre la aproximación analítica, en la cual los eventos externos al sujeto son manipulados (aislados, controlados y medidos) con el propósito de inferir acerca de eventos internos como el aprendizaje o la toma de decisiones, y la aproximación sistémica, en la cual los eventos son estudiados en su mutua interacción e interpretación. Salomon ha descrito cómo los efectos de utilizar el computador como herramienta de escritura dentro del salón de clase han sido estudiados utilizando ambas aproximaciones de forma tal que se han complementado mutuamente. "La aproximación analítica capitaliza en precisión, mientras que la aproximación sistémica capitaliza en autenticidad" (p. 16).

La aproximación sistémica domina actualmente la investigación en educación matemática. Se prefieren los entornos naturalistas sobre aquellos en los que se manipulan los eventos. Se valora la autenticidad. Pero los investigadores matemáticos no deben nunca casarse con una aproximación metodológica, una epistemología, un paradigma, un medio de representación o un método particular. Todos son parciales y provisionales; ninguna puede contar la historia completa. En particular, ningún método de investigación puede considerar el conjunto completo de preguntas que son de interés para el educador matemático. Aunque el investigador individual puede adherirse a un método particular, el campo, como un todo, necesita una multiplicidad de métodos. Adicionalmente, los investigadores deben mirar más allá del valor explícito de un estudio y preguntarse si han logrado satisfacer otros criterios de calidad investigativa. Algunos métodos dan lugar a investigación que satisface algunos criterios y otros no. La multiplicidad de métodos producirá un cuerpo de investigación con una alta calidad colectiva, aun si los estudios individuales son deficientes.

La investigación en la enseñanza de las matemáticas requiere de una indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos. La investigación actual en educación matemática cubre una gran variedad de temas, desde cómo el niño aprende a contar, hasta cómo el adolescente aprende a integrar y, desde los efectos de utilizar calculadoras, hasta la estructura de los cursos en general y de las clases en particular.

Cambios curriculares

A medida que el currículo escolar de matemáticas evoluciona en muchos países hacia una mayor utilización de las aplicaciones y la tecnología, como también hacia una mayor importancia de la investigación individual y de grupo, los investigadores han comenzado a examinar los efectos de estos cambios. La nueva visión de la enseñanza de las matemáticas como facilitadora de la adquisición del conocimiento por parte del que aprende, en contraposición de una visión de transmisora de un conocimiento ya construido, ha generado una línea de investigación que intenta adoptar la perspectiva del que aprende y comprender y manejar las concepciones erradas que pueden preceder o ser el resultado del proceso de instrucción. Se le está dando una mayor atención tanto al proceso de instrucción como al contexto dentro del cual éste tiene lugar. En su intento de comprender por qué las matemáticas producen tanto fracaso escolar y generan una tal aversión hacia el tema de estudio, los investigadores en educación matemática continúan utilizando conocimientos y técnicas de otras disciplinas académicas.

Históricamente, las matemáticas han sido un tema difícil pero importante dentro del currículo escolar y, tal vez por esta razón, se han utilizado como filtro para la educación ulterior. Con el desarrollo de los sistemas de educación universal, los países se enfrentan al reto de modificar el currículo de matemáticas de tal forma que se ofrezcan oportunidades para todos los estudiantes. Los objetivos y los métodos de la enseñanza de las matemáticas se han adaptado a las nuevas demandas de la sociedad y se han acomodado a una población estudiantil cada vez mayor (Pellerey, 1991).

Algunos estudios comparativos han mostrado los efectos de diferentes ofertas curriculares y formas alternativas de organizar el currículo escolar en matemáticas en una variedad de países (Robitaille & Travers, 1992). Sin embargo, existe también una "extraordinaria uniformidad en los programas" (Howson & Wilson, 1986, p.19) de las matemáticas escolares. La llamada reforma de las matemáticas modernas de los años sesentas y setentas enfatizó las matemáticas puras y le dio prominencia dentro de los programas a la teoría de conjuntos y al método axiomático. La investigación que se hizo como consecuencia de este movimiento examinó los efectos de enseñar estos temas, como también de enseñar en las escuelas primarias sistemas de numeración no decimal y el desarrollo de la noción de prueba. El último tema continúa siendo muy popular en el campo de la investigación (Burscheid, Truve, & Walther, 1992; Nesher & Kilpatrick, pp. 126-129).

Recientemente, muchos programas de matemáticas en el mundo han mostrado una tendencia a darle una mayor atención a las matemáticas aplicadas, enfatizando la construcción de modelos matemáticos para el análisis de problemas de la vida real. Una parte de esta tendencia surge de los desarrollos que han tenido lugar dentro de las mismas matemáticas. La tecnología computacional ha hecho que las matemáticas se conviertan en una ciencia más empírica y esa misma tecnología le ha permitido al estudiante trabajar más fácilmente con una gran cantidad de información relacionada con problemas que no habría podido resolver de otra forma. Los investigadores en educación matemática están comenzando a estudiar los procesos utilizados por los estudiantes en la construcción de modelos matemáticos y en el análisis de información.

Al nivel de la retórica oficial, el currículo escolar de matemáticas en la mayoría de los países enfatiza el desarrollo del razonamiento de las habilidades de resolución de problemas sobre la memorización de hechos y procedimientos. Lo que hoy en día se conoce como "pensamiento de alto nivel" ha sido, por lo menos desde el comienzo de este siglo, el foco de una gran cantidad de investigación. Esta investigación ha examinado tanto las habilidades que se supone deben tener estudiantes de diferentes edades, como también la eficacia de los métodos diseñados para mejorar estas habilidades. En particular, los procesos de resolución de problemas han sido un área mayor de investigación.

A medida que los currículos tienden hacia una importancia del modelaje matemático, una mayor comunicación entre los estudiantes y nuevas aplicaciones de las matemáticas a las ciencias sociales y naturales, la investigación también ha comenzado a darle una mayor atención a los procesos de enseñanza y no simplemente al contenido aprendido o al pensamiento del estudiante. El mismo currículo está siendo estudiado por algunos investigadores, más como un proceso que como un contenido. También se está investigando acerca de la forma como las diversas fuerzas, tanto al interior como al exterior del salón de clase, le dan forma al currículo.

El currículo escolar de matemáticas se puede ver por lo menos desde tres puntos de vista (Robitaille & Travers, 1992, p. 693): el currículo propuesto por las autoridades escolares, el currículo implantado por el profesor y el currículo aprendido por los estudiantes. Las diferencias entre estos tres puntos de vista han sido tema de mucha investigación. En particular, se ha dado gran atención a la visión que tiene el estudiante del tema que le es enseñado debido al énfasis renovado en un aprendizaje que es más una construcción social de significado que una recepción de información. La problemática epistemológica de la enseñanza de las matemáticas es, hoy en día, un punto central de la investigación y de la teoría de la educación matemática (Burscheid et al., 1992; Nesher & Kilpatrick, 1990, ch. 1).

Práctica docente

Hasta hace más o menos quince años, la gran mayoría de la investigación en educación matemática se centró en el aprendizaje, más que en la enseñanza. Una gran cantidad de investigación que se realizó al comienzo de los setentas tuvo que ver con la comparación de métodos para enseñar el "mismo" contenido matemático. Sin embargo, el interés de los investigadores giraba invariablemente alrededor del método, definido de una forma general, y no en el proceso de instrucción mismo. Recientemente, estos estudios de comparación de métodos han sido considerados infructuosos y han sido casi completamente abandonados. El interés de los investigadores se ha volcado, por una parte, hacia cómo los profesores manifiestan su conocimiento y sus creencias en el proceso de instrucción, y, por el otro, hacia cómo los estudiantes aprenden y comprenden aspectos específicos de las matemáticas.

Los estudios sobre el conocimiento y las creencias del profesor han sido muy populares en los últimos años, particularmente en América del Norte (ver Brown, Cooney & Jones, 1990; Nesher & Kilpatrick, 1990, ch. 7). Una parte de esta investigación ha estudiado la relación entre las visiones que los profesores tienen sobre el tema que enseñan y las visiones de los matemáticos. Otro tipo de investigación ha examinado la relación entre la práctica docente del profesor y sus creencias acerca de las matemáticas y de la forma en que éstas deben ser enseñadas. Se ha encontrado que los profesores experimentados tienen un conocimiento elaborado de las matemáticas, de su pedagogía y de sus estudiantes. Este conocimiento se transforma continuamente y afecta la forma en que los profesores organizan la instrucción.

Algunos investigadores en Europa, particularmente en Francia, han estudiado el contrato didáctico que se negocia entre el profesor y los alumnos durante el proceso de instrucción matemática (Nesher & Kilpatrick, 1990, pp. 142-143). Este contrato determina las reglas del juego del salón de clase. El proceso de enseñanza - aprendizaje es dialéctico y requiere de un entorno estable que permita que el conocimiento crezca. Para que sea posible enseñarlo, el conocimiento matemático debe estar inmerso dentro de un contexto. No obstante, para que este conocimiento pueda ser utilizado, el contexto debe ser eliminado y el conocimiento debe hacerse general. Cuando los estudiantes trabajan en un problema matemático, el carácter y el significado del conocimiento que ellos construyen está cambiando. Uno de los trabajos más delicados del profesor es el de guiar a los estudiantes, partiendo de sus errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento oficial que pueda ser validado matemáticamente. La negociación del contrato didáctico, la transposición del conocimiento para la instrucción (Chevallard, 1985) y los obstáculos epistemológicos hacia las nuevas concepciones (Sierpinska, 1988) son todas áreas activas de investigación.

El proceso de aprendizaje

Los estudios del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes han pasado, durante la última generación, de teorías generales de aprendizaje a estudios del aprendizaje de un contenido matemático específico. El estudio del proceso de conteo, de los números naturales y de las operaciones con los números naturales en los primeros años de primaria ha sido por algún tiempo, quizás el área más prolífica de la investigación en educación matemática de los últimos tiempos. Sin embargo, recientemente la atención de los estudios se ha volcado hacia el aprendizaje tanto de los números racionales y del álgebra, como de la geometría, la probabilidad y el cálculo (ver Grouws, 1992; Nesher & Kilpatrick, 1990). La escuela primaria ha sido desplazada como lugar principal de investigación en educación matemática y una gran cantidad de investigadores se encuentran examinando el proceso de aprendizaje de las matemáticas secundarias y universitarias. A medida que se buscan nuevas aplicaciones de las matemáticas en todos los niveles, la investigación se ha interesado en la forma como estas aplicaciones son aprendidas (Burscheid et al., 1992). La investigación en las aplicaciones será cada vez más importante dados los esfuerzos de varios países para integrar la enseñanza de las matemáticas con la de la ciencia.

La investigación acerca del proceso de aprendizaje continúa preocupándose cada vez menos por una atención exclusiva hacia las respuestas correctas o incorrectas y cada vez más hacia los procesos y las estrategias utilizadas para obtener esas respuestas. Aunque se ha hecho algún trabajo alrededor de las estructuras cognitivas que los estudiantes generan cuando resuelven tipos particulares de problemas (especialmente aquellos que involucran operaciones con números naturales o racionales), la investigación no ha logrado aclarar los esquemas cognitivos generales que se utilizan cuando se trabaja en matemáticas (Burscheid et al., 1992). Más aún, la investigación en el aprendizaje de las matemáticas se ha preocupado más por el aprendizaje individual y menos por el aprendizaje de grupos de estudiantes. Las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, junto con sus creencias y concepciones acerca del tema, continúan atrayendo la atención de los investigadores. Sin embargo, buena parte de la investigación resultante ha carecido de una base teórica fuerte y ha sido relativamente impotente.

Empleo de tecnología

Los diseñadores de la política educativa continúan presentándonos la imagen futurista de un salón de clases lleno de tecnología en el que el profesor ha sido reemplazado por un programa de enseñanza por computador. No obstante, la investigación ha mostrado repetidamente que ésta es una imagen errada. La atención de los investigadores y de los desarrolladores en tecnología computacional se ha centrado ahora en el desarrollo de programas de computador para la enseñanza, algunos para los profesores y otros para los alumnos, pero todos manejados por un profesor y no por un técnico (Kaput, 1992; Nesher & Kilpatrick, 1990, pp. 144-147). Los efectos de este tipo de tecnología, junto con el video interactivo y otros medios, han sido estudiados en algunos salones de clase especialmente seleccionados. Existe buena razón para ser optimistas acerca de la capacidad de los profesores para utilizar la tecnología computacional como una herramienta de enseñanza (ver, por ejemplo, Hoyles & Noss, 1992). Esta tecnología no solamente le permite a los estudiantes investigar sobre temas tradicionales de maneras nuevas (por ejemplo, al presentar transformaciones de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y al manipular información por medio de hojas de cálculo electrónicas), sino también les permite explorar nuevos temas como la geometría fractal.

Los computadores están penetrando lentamente en el salón de clases de matemáticas (Kaput, 1992, p. 517). Las calculadoras parecen ser más utilizadas que los computadores en las clases de matemáticas. Los nuevos modelos de calculadoras, al tener gráficas, manejo de información y capacidades para la manipulación simbólica, siendo esencialmente pequeños computadores, le ofrecen al estudiante un medio potente para explorar las ideas matemáticas. Aunque se han hecho estudios para medir la intensidad de utilización de estas nuevas herramientas, se conoce aún muy poco acerca de cómo se utilizan en el salón de clase y de qué efectos tienen en el aprendizaje.

Los métodos de enseñanza tienden a cambiar lentamente y las innovaciones tecnológicas del pasado no han encontrado necesariamente un nicho en las escuelas (Cuban, 1986). Algunos entusiastas piensan que la disponibilidad de la tecnología computacional puede llegar a transformar la enseñanza de las matemáticas. Esta tecnología tiene ciertamente la potencialidad para hacerlo y, en algunos lugares, lo ha logrado. Sin embargo, la idea de que los computadores, por sí solos, crearán una mejor práctica docente es "uno de los mitos de la cultura informática" (Olson, 1988, p. 55). Los profesores han sido siempre capaces de reformar las herramientas tecnológicas para adaptarlas a las condiciones de la institución dentro de la cual trabajan. Los investigadores en educación matemática, teniendo como propósito la mejora de la enseñanza de las matemáticas, deben examinar cómo la disponibilidad de la tecnología computacional puede interactuar tanto con las creencias y capacidades del profesor, como con las restricciones institucionales y sociales.

Prácticas de evaluación

Los efectos de la evaluación en la práctica docente y, por consiguiente, en el aprendizaje son de gran interés para los investigadores en educación matemática (Leder, 1992; Webb, 1992). Los esfuerzos previos para cambiar el currículo y la instrucción fracasaron frecuentemente porque los cambios propuestos entraban en conflicto con las evaluaciones externas. Los nuevos esfuerzos que se están introduciendo en muchos países están siendo acompañados por esfuerzos para introducir nuevos métodos de evaluación que incluyen proyectos, investigaciones en grupo y portafolios. Algunos sistemas de evaluación externa, además de utilizar los exámenes externos, han comenzado a tener en cuenta la evaluación que los profesores hacen del trabajo del estudiante en el salón de clase. Se está motivando a los profesores para que adapten su práctica de evaluación a los cambios en la práctica docente.

El alcance y la frecuencia de las evaluaciones externas han ido aumentando a medida que los gobiernos buscan más información acerca del progreso de la educación. La educación está siendo "vista cada vez más como una industria, con un interés creciente en aplicar los principios de contabilidad" (Webb, 1992, p. 688). A medida que los sistemas y los exámenes de evaluación externa cambian en muchos países, los profesores parecen responder al adaptar su enseñanza a estos cambios. La investigación ha sido lenta para documentar tanto la naturaleza como la dirección de las respuestas de los profesores. En muchos aspectos, la evaluación es como la tecnología: los cambios que se proponen son adoptados, adaptados o rechazados por los profesores a la luz de sus creencias, de lo que ellos pueden manejar y de la situación en su salón de clases y en su colegio. Se requieren estudios críticos de la evaluación en matemáticas desde el punto de vista de las perspectivas del estudiante y del profesor.

Desarrollo profesional

Se supone comúnmente que el profesor de matemáticas debe saber matemáticas. Los estudios sobre el conocimiento del profesor han revelado bajos niveles de comprensión matemática (Brown et al., 1990) y esto ha dado lugar a requerir un mayor conocimiento de matemáticas. Sin embargo, qué tipo de conocimiento matemático deben tener los profesores y cómo se debe combinar este conocimiento con su conocimiento pedagógico aún son temas de debate. La investigación no puede decidir sobre estos puntos; no obstante, ella puede profundizar en nuestra comprensión de cómo los profesores utilizan su conocimiento en la enseñanza.

Desde hace unas décadas, los investigadores han comenzado a interesarse en los procesos por medio de los cuales uno se convierte en profesor de matemáticas y, habiendo llegado a esa posición, uno logra una maestría de su oficio (Brown & Borko, 1992; Noddings, 1992). Dado que los estudios de correlación entre las características del profesor y su relación con el aprendizaje de los estudiantes han sido en su mayor parte improductivos, los investigadores han comenzado a entrar en el salón clases para examinar el desempeño docente que allí encuentran. Recientemente, los estudios que han intentado relacionar acciones específicas del profesor con logros específicos del estudiante han dado lugar a investigación en (a) el contraste entre el profesor "principiante" y el profesor "experimentado"; (b) intentos para mejorar la eficiencia del profesor; y (c) descripciones de cómo el profesor "construye significado y percibe su vida profesional" (Brown et al., 1990, p. 650).

Los estudios sobre profesores principiantes y expertos han generado preguntas no solamente acerca de cómo se deben definir estas dos categorías, sino también acerca de si es posible y cómo se debe utilizar la investigación descriptiva que analiza sus diferencias para sugerir recomendaciones que sean útiles para la formación de profesores. El trabajo realizado se ha centrado más en la descripción de la enseñanza de las matemáticas y en el examen de las creencias y las concepciones del profesor que en la descripción y evaluación del desarrollo profesional del profesor. Tenemos algunas impresiones de su enseñanza, pero comprendemos muy poco acerca de cómo ha evolucionado esta enseñanza. Se han hecho algunos estudios sobre programas específicos de formación inicial y permanente de profesores de matemáticas. Sin embargo, hay muy pocos estudios que analicen transversalmente estos programas o que hagan un seguimiento de los profesores una vez que han terminado el programa y entran en su vida profesional.

El contexto social

Uno de los cambios más sorprendentes en la investigación en educación matemática desde los años setenta ha sido el salto de estudios sobre el aprendizaje de estudiantes individuales a estudios que tienen en cuenta de diversas maneras el contexto social dentro del cual tiene lugar la instrucción. Profesores y estudiantes son miembros de varios grupos sociales; la enseñanza y el aprendizaje son procesos sociales; y las matemáticas que se enseñan están determinadas socialmente. Los estudios de investigación han comenzado a incorporar estos factores.

Existe mucha investigación que muestra los problemas de logro en matemáticas por parte de grupos sociales que se identifican por sexo, raza, cuestiones étnicas, clase social o lenguaje. La utilidad de este tipo de investigación se está cuestionando a la luz de la exagerada simplificación que implican estos tipos de clasificación y de los riesgos que se crean al legitimar condiciones socialmente desiguales.

Se ha hecho una gran cantidad de investigación acerca de la diferencia en el éxito en matemáticas por parte de niños y niñas, teniendo en cuenta una tendencia persistente a que las niñas interrumpan tempranamente sus estudios de matemáticas en una mayor proporción que los niños. Actualmente, los investigadores parecen estar menos interesados en simplemente documentar estas diferencias y están intentando tanto comprender mejor cómo los dos sexos reciben tratos diferentes durante la enseñanza, como también en evaluar los efectos de aquellos programas que han sido diseñados con el propósito de motivar una mayor participación en matemáticas por parte de las niñas. Los estudios de grupos definidos en términos de raza, cuestiones étnicas, clase social y lenguaje son mucho menos comunes y han producido resultados problemáticos. En particular, se ha observado que el lenguaje juega un papel complejo en el aprendizaje de las matemáticas (Ellerton & Clements, 1991).

Los científicos cognitivos han estudiado el tema de la construcción social del conocimiento durante la enseñanza de las matemáticas (por ejemplo, Newman, Griffin & Cole, 1989, ch. 6) y este tema está comenzando a ser estudiado intensamente por parte de los educadores matemáticos. Los estudios de las clases de matemáticas muestran cómo los estudiantes utilizan su experiencia previa al adquirir nuevo conocimiento "dentro de situaciones de interacción social en las cuales se proyectan, hacen pruebas y negocian activamente" (Nursheid et al., 1992, p. 297). Los investigadores han sido exhortados a percibir las matemáticas como un fenómeno social:

> *La totalidad del aprendizaje de las matemáticas tiene lugar dentro de circunstancias sociales. Este puede ir desde el aprendizaje individual, donde las influencias sociales se experimentan a distancia, siendo mediadas por el texto de un autor, hasta el aprendizaje en grupo, donde las influencias sociales son inmediatas. Todos los profesores, estudiantes y observadores educativos saben que existen muchas influencias sociales e interpersonales que tienen lugar en la clase de matemáticas. Por lo tanto, es imperativo que los investigadores intenten interpretar el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva social si es que la investigación ha de tener alguna validez y credibilidad para el contexto del salón de clase (Nesher & Kilpatrick, 1990, p.139).*

Los estudios acerca de cómo las matemáticas se utilizan por fuera del salón de clase han sido especialmente útiles al revelar cómo las matemáticas mismas se construyen socialmente y cómo las matemáticas que se enseñan en la escuela están determinadas por la sociedad. Los estudios etnográficos de la utilización de las matemáticas en varias culturas muestran grandes discrepancias entre los procedimientos que se utilizan en la escuela y aquellos que se utilizan para resolver problemas cuantitativos y espaciales tanto en la plaza de mercado, como en el trabajo y el hogar (Nunes, 1992). A los estudiantes en la escuela no solamente se les está enseñando matemáticas; también se le está iniciando en una cultura matemática (Bishop, 1988). Un área creciente de la literatura de investigación se está preocupando por la relación entre la cultura de las matemáticas escolares y la cultura que el niño trae a la escuela y la cultura dentro de la cual el adulto hace matemáticas.

La investigación en educación matemática se ha convertido en los últimos años en una de las áreas más activas de los estudios en educación. Esta área de investigación continúa atrayendo mucho la atención en parte por razón del papel crucial que las matemáticas juegan en el proceso educativo — como un tema esencial para el aprendizaje posterior y la vida adulta pero que presenta grandes dificultades para los estudiantes. La educación matemática se encuentra en la intersección de varias disciplinas más establecidas como las matemáticas, la psicología, la sociología, la lingüística, la epistemología y la ciencia cognitiva. En muchas ocasiones trabaja en problemas que han sido tomados de otras disciplinas. Pero la educación matemática está también comenzando a desarrollar sus propias agendas de investigación, sus propios esquemas teóricos, sus propias técnicas y metodologías, y sus propias comunidades y tradiciones. Un número creciente de investigadores, en un número también creciente de países, se encuentra estudiando la enseñanza de las matemáticas con el propósito tanto de comprenderla, como de mejorarla.

Referencias Bibliográficas

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic.

Brown, S. I. y Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. En Grouws, D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 209-239). New York: Macmillan.

Brown, S. I., Cooney, T. J. y Jones, D. (1990). Mathematics Teacher Education. En Houston, W. R., Haberman, M. y Sikula, J. (Eds.). *Handbook of Research on Teacher Education*. (pp. 639-656). New York: Macmillan.

Burscheid, H. J., Struve, H., & Walther, G. (1992). A Survey of Research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *24*(7), 296-302.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cronbach, L. J. y Suppes, P. (Eds.). (1969). *Research for Tomorrow's Schools: Disciplined Inquiry for Education*. New York: Macmillan.

Cuban, L. (1986). *Teachers and Machines: The Classroom Use of Technology Since 1920*. New York: Teachers College Press.

Cubberley, E. P. (1920). *The History of Education*. Boston: Houghton Mifflin.

Ellerton, N. F. y Clements, M. A. (1991). *Mathematics in Language: A Review of Language Factors in Mathematics Learning*. Geelong, Victoria: Deakin University.

Grattan-Guinness, I. (1988). Grandes écoles, petite université: Some Puzzled Remarks on Higher Education in Mathematics in France. *History of Universities, 1795-1840*, *7*, 197-225.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Howson, G. y Wilson, B. (1986). *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University.

Hoyles, C. y Noss, R. (Eds.). (1992). *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge, MA: MIT .

Husén, T. (1983). Educational Research and the Making of Policy in Education: An International Perspective. *Minerva*, *21*, 81-100.

Jahnke, H. N. (1986). Origins of School Mathematics in Early Nineteenth-Century Germany. *Journal of Curriculum Studies*, *18*, 85-94.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kilpatrick, Jeremy. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Leder, G. (Ed.). (1992). *Assessment and Learning of Mathematics*. Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.

Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.). (1990). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University.

Newman, D., Griffin, P. y Cole, M. (1989). *The Construction Zone: Working for Cognitive Change in School*. Cambridge: Cambridge University .

Noddings, N. (1992). Professionalization and Mathematics Teaching. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 197-208). New York: Macmillan.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and Everyday Cognition. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 557-574). New York: Macmillan.

Olson, J. (1988). *Computers and the Culture of the Classroom*. Oxford: Pergamon.

Pellerey, M. (1991). Mathematics Instruction. En Lewy, A. (Ed.). *The International Encyclopedia of Curriculum* . (pp. 870- 881). Oxford: Pergamon.

Pyenson, L. (1985). *Cultural Imperialism and Exact Sciences: German Expansion Overseas 1900-1930*. New York: Lang.

Rico, L., & Sierra, M. (1991). *El área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

Robitaille, D. F. y Travers, K. J. (1992). International Studies of Achievement in Mathematics. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Salomon, G. (1991). Transcending the Qualitative-Quantitative Debate: The Analytic and Systemic Approaches to Educational Research. *Educational Researcher*, *20*(6), 10-18.

Schubring, G. (1988). Factors Determining Theoretical Developments of Mathematics Education as a Discipline --Comparative Historical Studies of its Institutional and Social Contexts. En Steiner, H. G. y Vermandel, A. (Eds.). *Foundations and Methodology of theDiscipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics). Proceedings of the 2nd TME-Conference*. (pp. 161-173). Bielefeld & Antwerp: University of Bielefeld & University of Antwerp.

Secada, W. (1988). Diversity, Equity, and Cognitivist Research. En Fennema, E., Carpenter, T. P. y Lamon, S. J. (Eds.). *Integrating Research on Teaching and*

Learning Mathematics. (pp. 20-58). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Shils, E. (1978). The Order of Learning in the United States from 1865 to 1920: The Ascendancy of the Universities. *Minerva*, *16*, 159-195.

Sierpinska, A. (1988). On the Concept of Epistemological Obstacle in Research on Teaching and Learning Mathematics. En Steiner, H. -G. y Hejny, M. (Eds.). *Proceedings of the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education* . (pp. 21-36). Bratislava: University of Bratislava.

Webb, N. (1992). Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En Grouws, D. A. (Ed.).*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 661-683). New York: Macmillan.

La comunidad de educadores matemáticos y la situación actual en España

Dr. Luis Rico

Universidad de Granada

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad de los Andes, a una "empresa docente" y, en particular, a su director, el profesor Pedro Gómez, por esta invitación y por permitirme estar con ustedes durante estas conferencias, compartiendo y, espero que también, debatiendo ideas y propuestas. También mi agradecimientos a la Embajada de España y a la Fundación Santillana, que han contribuido a mi estancia aquí durante estos días.

Paso a comentar el título de la conferencia. Después de la visión global que nos ha presentado con anterioridad el profesor Kilpatrick, cuando se presenta como título *La comunidad de educadores matemáticos y la situación actual en España*, se trata de ejemplificar lo que viene ocurriendo en un país concreto. Quisiera aclarar el significado de este título y de mi intervención en el sentido de que no se trata de ofrecer "buenos ejemplos", puesto que en educación no valen ejemplos. Cada país tiene su propia historia, sus prioridades y sus propias necesidades. Por tanto, hay afirmaciones que tienen sentido en una Comunidad y no lo tienen en otra; hay cosas que yo estoy aprendiendo en Colombia y hay cosas que a los profesores de Colombia les puede interesar conocer sobre lo que ha ocurrido y ocurre en España en el campo de la educación matemática, para poderlas utilizar en algunos casos, pero siempre con un sentido de respeto y de igualdad.

Realmente si hay algún mensaje, si yo quiero transmitir algún mensaje, lo concretaría en las siguientes ideas:

- en primer lugar, en el mundo actual, la educación matemática propone un campo de trabajo con problemas reales que resolver; no es un invento: enseñar y aprender matemáticas son actividades que tienen sus dificultades y resultan problemáticas;

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 19-39.

- en segundo término, hay unos estudios e investigaciones ya realizados (como creo que se ha puesto bastante de relieve en la intervención anterior) en los que se han ensayado técnicas, se han utilizado diferentes métodos y procedimientos y hay unos resultados contrastables que se pueden discutir y que la comunidad puede aceptar, rechazar o ubicar en su contexto adecuado;
- en tercer lugar, la educación matemática presenta, ayudada por una serie de disciplinas, una organización disciplinar viable; no sólo hay unos problemas y no sólo tenemos unos ensayos o actividades que realizan unos profesores sino que hay una sistemática, una teoría, una posibilidad de un campo de estudio investigativo;
- finalmente, hay una comunidad de profesionales en busca de responsabilidad y autonomía.

Este es el mensaje en el que se debe de encuadrar mi intervención, y voy a intentar centrarla sobre cuatro núcleos, que se pueden resumir en: una presentación de lo que es el sistema educativo español no universitario en la actualidad y el papel o la función que las matemáticas desempeñan en este sistema; qué se entiende, qué entiendo yo, por educador matemático, qué actualidad tiene, qué tipo de organización se da en mi país, qué relaciones de comunicación y a qué tipo de formación responde este educador matemático; cuál es en el momento actual el papel de la educación matemática en la universidad y, en particular, en mi universidad; y, finalmente, presentar algunos retos con los que ahora mismo y en España se encuentra enfrentada la comunidad de educadores matemáticos y creo que también la comunidad de profesores en general.

Sistema educativo español

El sistema educativo español, recientemente reformado, abarca las siguientes etapas: educación infantil de cero a seis años, de los que realmente son obligatorios sólo los dos últimos cursos (niños con 4-5 y niños con 5-6 años) de preescolar; educación primaria, desde los 6 a los 12 años, que está organizada en tres ciclos de 2 cursos cada uno: inicial, medio y superior; educación secundaria obligatoria, desde los 12 a los 16 años, organizada en 2 ciclos; y educación secundaria postobligatoria, que se divide en un bachillerato de 2 años con 4 modalidades opcionales y una formación profesional de grado medio.

Las especialidades de bachillerato recientemente aprobadas son: bachillerato artístico, bachillerato de ciencias de la naturaleza y de la salud, bachillerato de humanidades y ciencias sociales y bachillerato tecnológico. Estos bachilleratos todavía no se han puesto en práctica. Seguramente hasta el año

97-98 no entrarán en funcionamiento los nuevos bachilleratos, que se articulan con cierto grado de especialización en todos sus niveles y variedades.

La matemática ocupa un lugar importante en la enseñanza primaria y secundaria como área de contenidos diferenciados y obligatorios; también en el bachillerato es materia obligatoria en todos los primeros cursos, con una matemática complementaria u opcional en los segundos cursos. El papel de la matemática dentro del sistema escolar no universitario español es especialmente importante y aquí se podrían citar múltiples referencias de documentos oficiales. He seleccionado algunos ejemplos:

> *la contribución que hacen las matemáticas son decisivas para alcanzar los objetivos generales de la educación obligatoria, tanto de primaria como de secundaria, y esto es debido a que ocupan un lugar preferente en la adquisición de capacidades cognitivas, intelectuales, motrices, afectivas, de relación interpersonal y de actuación en sentido social.*

Más explícitamente:

> *la importancia educativa que se le atribuye a esta materia viene de entender que la matemática, en sentido amplio, es sinónimo de capacidad para conocer por cuanto se la considera como un instrumento del pensamiento que permite aprender y comprender lo real bajo los aspectos cuantitativos y cualitativos y su capacidad para servir como medio de comunicación, como lenguaje para comunicar estas ideas a los demás.*

Estas ideas se repiten en preámbulos de decretos y en las presentaciones de los currículos.

Pero no sólo se valora el aspecto positivo; también se ha realizado un debate y una crítica fuertes a la función a veces equivocada, a veces falseada, a veces simplificada, que tienen o que han tenido las matemáticas en la enseñanza tradicional. En particular, la crítica se dirige con énfasis hacia la memorización de hechos, hacia la exclusiva ejercitación de destrezas, puesto que con esa orientación parece que el conocimiento matemático se planteara como alejado del medio cultural y de los intereses y la afectividad del niño. Sin embargo, el planteamiento actual trata de superar esta visión reduccionista, ampliando el campo del aprendizaje hasta integrar el dominio de las estructuras conceptuales, ricas en relaciones, procedimientos y estrategias que abren la puerta a la creatividad, a la intuición y al pensamiento divergente de los alumnos. Han cambiado las prioridades en educación matemática.

Otra cuestión que se ha sometido a crítica, y creo que es un dato importante, es el carácter selectivo que ha tenido la asignatura de matemáticas.

Se ha discutido exhaustivamente que si se quería incorporar dentro de una formación matemática a todos los miembros de una sociedad, un momento importante es el periodo de educación obligatoria, en el que se proporcionan los conocimientos matemáticos básicos a todos los jovenes; de ahí la profunda dimensión educativa de las matemáticas. La educación matemática hay que contemplarla conjuntamente con los valores sociales prioritarios. Por ello, en una sociedad democrática es incoherente utilizar las matemáticas como filtro, como criterio de selección y discriminación, mediante el cual se dividen los alumnos en buenos y malos, en listos y en tontos. No es positivo presentar la educación matemática como opuesta a los valores democráticos. Por supuesto, el problema no queda resuelto simplemente con esta crítica, pero no debemos olvidar que la enseñanza de las matemáticas no solamente ha sido alabada por sus muchas virtudes, sino que también ha sido criticada por sus posibles malas interpretaciones y malos usos.

El educador matemático

Pasamos al análisis de lo que se entiende en España por educador matemático. La figura del educador matemático ha surgido en los últimos años. Por educador matemático se entiende a toda persona que pretende formar o instruir a otra u otras mediante las matemáticas. Es decir, el educador matemático considera las matemáticas en todo o en parte como objeto de educación para las personas a cuya formación o desarrollo está contribuyendo. Conscientemente se borran con esta definición (no se olvidan pero se borran) las fronteras entre el profesor de preescolar, el profesor de primaria, el profesor de secundaria y, posiblemente, muchos de los profesores universitarios.

La idea del educador matemático es una idea comprensiva, que incluso hemos cuantificado para mostrar que socialmente responde a un fenómeno importante y tiene una potencialidad considerable. De las estadísticas oficiales del Ministerio de Educación y Ciencia de España, correspondientes al año 90/91, tenemos la población de profesores de los distintos niveles:

Tabla 1:

Niveles docentes	Total profesores
Educación preescolar	39.513
Educación General Básica 1º y 2º ciclos	114.343
Educación General Básica 3º ciclo	76.693
Educación permanente de adultos	6.878
Educación especial	12.908
Bachillerato unificado polivalente y COU	81.498
Formación profesional	52.521

Hemos considerado como poblaciones distintas a los profesores de preescolar, general básica primero y segundo ciclo (donde el profesor es generalista), educación general básica tercer ciclo (donde los alumnos están divididos por especialidades), educación de adultos, educación especial (que son cuerpos diferenciados de profesores), bachillerato, curso de orientación universitaria y, finalmente, profesores de formación profesional. Aunque estos datos responden a la estructura antigua del sistema educativo español, aún vigente, proporcionan una información muy importante sobre cuántos profesores están actualmente implicados en la enseñanza de las matemáticas.

No todos estos profesores están directamente involucrados en la enseñanza de las matemáticas. Lo que nos interesa ahora es cuantificar la población de profesores directamente implicados en la transmisión de conocimientos matemáticos. Para ello hemos utilizado unos coeficientes reductores, por los cuales hemos multiplicado cada una de las cifras anteriores para dimensionar el tamaño de la comunidad de educadores matemáticos.

Tabla 2:

Niveles docentes	Total prof.	Coefic.	Total estimado
Educación preescolar	39.513	50%	19.756
E.G.B.1º y 2º ciclos	114.343	75%	85.757
E.G.B. 3º ciclo	76.693	25%	19.173
Educación de adultos	6.878	25%	1.719
Educación especial	12.908	25%	3.227
BUP y COU	81.498	10%	8.150
Formación profesional	52.521	10%	5.252
Total	384.354		143.034

Así, hemos entendido que, aproximadamente, el 50% de profesores de educación preescolar inician al alumno en el razonamiento lógico y numérico; que el 75% de los profesores de primero y segundo ciclo están implicados en algún modo en la enseñanza de las matemáticas; que sólo el 25% de los profesores del tercer ciclo etc., (tal y como se ve en la Tabla 2). Multiplicando los totales de profesores por estos coeficientes salen las cifras de la Tabla 2, que dan un total, en números redondos, de 144.000 profesores implicados en la enseñanza de las matemáticas en España. Se trata de una población importante y considerable, a la que podemos añadir los 2.500 profesores de matemáticas de los cuerpos universitarios. En total obtenemos una población bastante respetable y con unas características específicas.

Sin embargo, esta comunidad procede de lo que llamaríamos una doble cultura, e imagino que ésta no es una peculiaridad de mi país; ocurre también en la mayor parte de los países de Europa, y supongo que, igualmente, ocurre en los países latinoamericanos.

El educador matemático español actual procede de dos tipos de formación muy diferentes. El profesor de primaria y primer ciclo de secundaria (que corresponde a los actuales profesores de educación general básica) tiene una formación matemática de carácter muy general y poco desarrollada; en una descripción estándar encontramos un profesor que concluyó su bachillerato, cursando las materias de matemáticas correspondientes y, posteriormente, ha cursado, como máximo, 3 asignaturas de contenido matemático y de didáctica de las matemáticas. La mayor parte de las veces habrá cursado solamente una asignatura de matemáticas. Sin embargo, su formación psicopedagógica y didáctica es amplia y continuada. El nivel académico de estos profesores se denomina Diplomatura y corresponde a una titulación universitaria de Primer Ciclo (las titulaciones universitarias del Primer Ciclo tienen una duración de 3 años y no tienen el grado de licencia; corresponden a unos determinados niveles formativos y luego profesionales).

En el otro extremo, el profesor de bachillerato tiene una formación matemática amplia y profunda, de cinco años de duración, alcanzando el nivel académico de Licenciatura. Sin embargo, la formación psicopedagógica de estos profesores es nula, no existe, y se reemplaza simplemente por unos rudimentos de preparación didáctica, la mayoría de las veces puramente formales y muy cortos en el tiempo.

Estos dos tipos tan diferentes de formación proporcionan una composición bastante heterogénea en la comunidad de educadores matemáticos, deficiente en sus dos extremos. Si en el utillaje del educador matemático debiera de existir una caja de herramientas matemáticas junto con otra caja de herramientas educativas, en la realidad encontramos que a cada una de estas dos culturas se le ha dotado de los dones y de las capacidades de uno sólo de los instrumentales, privándoles del otro. Así, los licenciados disponen de una alta competencia matemática y los diplomados disponen de una adecuada formación pedagógica; sin embargo, a cada una de esas dos poblaciones se les ha privado de la información y de la formación complementaria. Esta situación plantea problemas importantes, aún no resueltos en el momento actual, y que, de alguna manera, hay que encarar seriamente en el futuro.

Vamos a pasar lista brevemente a una serie de realizaciones que en los 10 o12 últimos años han tenido lugar en nuestro país. Durante este tiempo ha comenzado a formarse un estado de opinión sobre el carácter diferenciado de la educación matemática como profesión. Comienza a crearse la conciencia de que nadie dispone de todos los instrumento necesarios para trabajar en su profesión. Esto ha dado lugar a una serie de iniciativas para superar estas deficiencias y las tradicionales tutelas, que vienen de la administración o de la academia. Si uno es profesor de educación general básica, tiene temor de hablar de matemáticas, tiene que conseguir el permiso de la academia, el respaldo del especialista. Por el contrario, el licenciado en matemáticas suele ocultar su ignorancia despreciando los temas didácticos y pedagógicos. Cuando entra al fondo de la cuestión reconoce su carencia de formación, que no le es imputable, y pone de manifiesto sus necesidades formativas.

Recientemente hubo un curso de formación y actualización científico-didáctica para profesores de educación secundaria de matemáticas. El director del curso, profesor de análisis matemático en la Universidad de Sevilla, se extrañaba que sus predicciones no se habían cumplido en el siguiente sentido: él esperaba que, al ser los asistentes a este curso Licenciados en Matemáticas, fueran más críticos con las conferencias y sesiones del curso relativas al contenido matemático que con las sesiones relativas a la actualización didáctica. Sin embargo, había ocurrido a la inversa: los cursos sobre fractales, estadística, geometría habían sido aceptados, con mayor o menor interés, pero no habían recibido mayores comentarios por parte de los asistentes, ni habían sido sometidos a la crítica o al debate. No obstante, la parte didáctica había sido fuertemente criticada y sometida a multitud de consideraciones. Estos profesores estaban poniendo de manifiesto que su profesión es la de educadores matemáticos (no la de matemáticos).

Para el educador matemático tanto vale la dimensión educativa como la dimensión matemática. No podemos dar prioridad a una dimensión sobre la otra. Es en el análisis didáctico de los contenidos donde se conjugan estas dos dimensiones, y fue precisamente aquí donde los profesores asistentes al curso habían notado las mayores deficiencias y habían sido mayoritaria y prioritariamente críticos.

La comunidad de educadores matemáticos

En mi país se han producido en los últimos años una serie de iniciativas, algunas de las cuales voy a comentar puntualmente. Se han constituido sociedades de profesores y educadores matemáticos desde finales de los 70 y principios de los 80. En esta época, comenzó un movimiento que hoy en día es bastante fuerte y que dimensionaremos más adelante. Se vienen celebrando una serie de reuniones, encuentros, jornadas, congresos y simposios. Se editan revistas profesionales cuyos datos generales y producción vamos a comentar. Se han constituido en la universidad departamentos de didáctica de la matemática; se han puesto en marcha programas de doctorado en didáctica de la matemática para lograr que el título de doctor en matemáticas tenga entre una de sus posibilidades (además de la especialidad en álgebra, en análisis, en geometría, en estadística, en investigación operativa o en matemática aplicada), la posibilidad de ser doctor en matemáticas en la especialidad de didáctica de la matemática. Se han leído ya, recientemente, las primeras tesis doctorales. Hay una presencia creciente de investigadores españoles en organismos y congresos internacionales. Surge un nuevo campo de publicaciones.

Las sociedades de profesores o educadores matemáticos, que actualmente existen en España, son y casi por orden de constitución, las siguientes:

Tabla 3:
Sociedades españolas de profesores de matemáticas

Sociedad	Socios
Sociedad Andaluza "Thales"	1.300
Sociedad Canaria "Newton"	700
Sociedad Aragonesa "Pedro Ciruelo"	100
Sociedad Navarra "Tornamira"	100
Sociedad Castellonenca	150
Sociedad Extremeña "Ventura Reyes"	150
Sociedad Alicantina	100
Sociedad Madrileña "Emma Castelnovo"	100
Sociedad Castellano Leonesa "Puig Adam"	150
Sociedad Gallega	150

Todas estas sociedades están en una única federación que articula y coordina las diversas actividades de las sociedades.

Estas sociedades celebran las Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM), que organiza la federación bianualmente. Desde el año 81 al 84 tuvieron un momento álgido, seguido por un período de interrupción, y se reiniciaron de nuevo en el año 91. Este año tendrán lugar a finales de marzo y principios de abril en la ciudad de Badajoz.

Tabla 4:
Jornadas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas - JAEM

Edición y lugar	Fecha	Asistentes	Nº de Conf.	Comunicaciones	Temas*	Otras activ.
I Barcelona	may. 81	—	3	23	C: 2, I: 2, M: 18	Mesas redondas 2
II Sevilla	abr. 82	434	3	44	I: 2, M: 30, C: 6, E: 7	—
III Zaragoza	mar. 83	875	2 y 3 ponencias	50	M: 23, E: 16, I:1, C: 5, G: 5	Zoco con 10 actividades
IV Tenerife	sep. 84	550	9	28	I: 5, E: 8, C: 1, M: 14	
V Castellón	mar. 91	410	1	59		10 expos., 1 mesa y 14 grupos trab.

(*) I = Investigación, M = Metodología, C = Currículum, E = Experiencias y G = Generales

Como se ve en la tabla, las primeras JAEM tuvieron lugar en Barcelona, Sevilla, Zaragoza y Tenerife. Se puede apreciar el número creciente de profesores asistentes, cuya culminación se alcanzó en Zaragoza en el año 83. El momento político en España en el año 83, con el partido socialista recién ganadas la elecciones, es de una gran expectativa sobre reformas y en especial sobre reformas educativas y, como siempre, los profesores de matemáticas están al frente en las innovaciones. También, conseguir que en el año 84 asistieran 550 profesores al encuentro en las Islas Canarias fue un gran éxito.

Este periodo finalizó por no existir más sociedades de profesores de matemáticas constituidas en ese momento. Las Jornadas de Sevilla fueron organizadas por la Sociedad Andaluza, las de Zaragoza por la Sociedad Aragoneza, las de Tenerife las organizó la Sociedad Canaria. Después viene la interrupción y hasta que no comienzan a integrarse nuevas sociedades no se recuperan este tipo de encuentros.

El número de ponencias y conferencias va variando. También varía el número de comunicaciones y los temas en los que éstas se pueden clasificar sufren una evolución, según se puede observar en la Tabla 4. La historia de lo que es el movimiento asociativo de la educación matemática en España tiene como uno de sus integrantes estas jornadas.

Otras jornadas son las que organiza la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, ininterrumpida y bianualmente desde el año 83. En estas jornadas el número de asistentes también ha aumentado, alcanzando en las últimas —hace 2 años en Granada— un total de 350 asistentes, con un total de 30 comunicaciones (de ellas 7 relativas a investigación).

Tabla 5:
Jornadas de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática - "Thales"

Edición y lugar	Fecha	Asistentes	Nº de Conf.	Comunicaciones	Temas*	Otras activ.
I Cádiz	Sep. 83	192	6	23	I: 4	---
II Almería	Sep. 85	250	7	32	I: 10	Grupos de trabajo: 3
III Huelva	Sep. 87	324	7	24	I: 6	Grupos de trabajo: 5 Mesa red.: 1
IV Belnalmádena (Málaga)	Sep. 89	226	3	19	I: 4	Talleres: 8 Expos.: 6 Mesa red.: 1
V Granada	Sep. 91	349	3	30	I: 7	Grupos de trabajo: 3 Talleres: 3 Expos.: 4 Mesa red.: 1

No todas las comunicaciones que se llevan a los congresos responden a un modelo de investigación: son opiniones, experiencias particulares, reflexiones de grupos de profesores. Sin embargo, los temas de investigación son especialmente importantes dentro de la comunidad.

Las sociedades, además de reunirse periódicamente y mantener comunicaciones durante el transcurso de las Jornadas, tienen otros medios de comunicación que son las revistas de enseñanza de las matemáticas.

Tabla 6:
Revistas de enseñanza de las matemáticas

Título	Editor	Periodo	Números revisados	Total de trabajos	Clasif.
Numeros	Soc. Cana. I. Newton Prof. Matem.	1981-90	20	171	M: 45, E: 12, I: 13, C: 6, G: 66
Thales	Soc. Andal. Profesores de Matemáticas	1984-87	10	89	M: 23
Epsilon (1ª Epoca)	Asoc. Prof. Matemáticas de Andalucía	1984-87	9	100	E: 12
Epsilon (2ª Epoca)	Soc. Andal. Ed. Matemática "Thales"	1988-90	9	93	M: 13, E: 12
Enseñanza de las Ciencias	ICE Autónoma de Barcelona	1985-91	26 (3 por año)	32 en Did. Mat.	I: 20, G: 12
Suma	Federación de Soc. Profesores de Matemáticas	1988-91	8	113	M: 45, C: 8, E: 11, G: 24

Durante un primer período, entre el 84 y el 87 aparecen 2 revistas editadas en Andalucía, la revista Thales y la revista Epsilon. En esta época había en Andalucía dos sociedades distintas, que se fusionaron en el año 87. Al fusionarse ambas sociedades en una única sociedad, la sociedad Thales, se conserva la denominación Epsilon para la revista de la Sociedad. Así pues, hay un único periodo para la revista Thales (que desaparece en el año 87) y dos períodos 84-87 y 88- 90 para la revista Epsilon (el período actual que comienza en el año 91 no aparece en la Tabla ya que no ha concluido); cada uno de los períodos considerados ha tenido un equipo de redacción y un director responsable distinto.

También es interesante considerar la revista Enseñanza de las Ciencias, revista dedicada exclusivamente a temas de investigación en didáctica, no solamente de las matemáticas sino también de didáctica de la física, de la química, de la biología y de la geología.

La revista Suma, comenzó a editarse en el año 88 por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. En este balance sólo se analiza el primer periodo, que corresponde a un mismo equipo de redacción y que abarca 8 números. Actualmente ya han salido los 12 primeros, pero el segundo período de dirección aún no ha concluido.

Durante la época que hemos considerado se han publicado en estas revistas más de 400 trabajos en educación matemática. Con las categorías mencionadas —desde el punto de vista de la educación matemática— la revista Thales destaca por los temas metodológicos y la revista Epsilon destaca por los temas de experiencia. En la fusión de ambas aparecen tanto trabajos metodológicos como trabajos sobre experiencias.

En la revista Enseñanza de las Ciencias aparecen 20 trabajos de investigación y 12 generales. En la revista Suma —que abarca y está sostenida por un colectivo más amplio— se pueden localizar trabajos metodológicos, curriculares, sobre experiencias y trabajos generales.

Esta revisión da también una idea de cuál es el tamaño de la producción en trabajos (artículos) publicados en España sobre educación matemática durante los últimos años.

No quisiera cerrar este apartado sin indicar algunas necesidades actuales que se pueden detectar en la comunidad de educación matemática de mi país. En primer lugar, es importante seguir insistiendo en el aumento de la conciencia sobre la importancia social del trabajo del educador matemático y de esa dimensión cultural que nos comentaba el profesor Kilpatrick.

En segundo lugar, no debe de haber crítica más fuerte en nuestra comunidad o hacia nuestra comunidad que la propia autocrítica; debemos ser los primeros en exigir el máximo de calidad y el máximo de seriedad científica en nuestros trabajos. No necesitamos que venga nadie de fuera a decir que lo que hacemos es de baja calidad o carente de interés.

También se debe destacar la necesidad de reformar profundamente la formación inicial y la formación permanente del educador matemático equilibrando, como se señalaba, la componente matemática con la componente psicopedagógica. El educador matemático tiene su propia entidad profesional y tiene sus propias necesidades de formación.

En cuarto lugar, es importante promover los trabajos de equipo. La dimensión educativa es una dimensión social y se debe practicar socialmente, desde los grupos de trabajo, seminarios y departamentos, promoviendo actuaciones conjuntas y contribuyendo a crear un estado de opinión sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Educación matemática en la universidad

Voy a hacer una reflexión particularizada sobre el papel que en mi país esta empezando a tener la educación matemática en la universidad. Para contextualizar creo que es importante hacer referencia a los cambios recientes y me remonto al año 75, que es un año emblemático con la muerte del General Franco y la desaparición de la dictadura. Sin embargo, el cambio no comienza en el año 75; comienza mucho antes y tiene entre sus dimensiones más importantes los cambios educativos. Si hubiera que singularizar en unas cuantas etiquetas los cambios más importantes ocurridos en la sociedad española en los últimos años tendríamos que señalar los cambios políticos, ya comentados; los demográficos, con una desertización del campo y una concentración de más del 80% de la población alrededor de las grandes ciudades y en determinadas zonas del país, en la costa mediterránea, en el sur, en el centro, alrededor de Madrid; los cambios económicos, fuertemente impulsados por la integración en la Comunidad Económica Europea; y, finalmente, los cambios de carácter cultural, potentes e importantes. En correspondencia con estos cambios en la sociedad, hay cambios en la universidad. En correspondencia con los cambios políticos, ha habido una nueva organización en la estructura universitaria y una autonomía que supone la gestión de los propios recursos, el nombramiento de los propios profesores, la elección de los propios órganos de gobierno, cosas que seguramente en países con mayor tradición democrática pueden resultar cotidianas, corrientes, pero que en nuestro país hubo que realizar en los 15 últimos años.

Los cambios demográficos también han planteado nuevos retos a la planificación, que pasan por la constitución de nuevas universidades y la necesidad de una política de becas para aquellos segmentos de población que no tienen fácil acceso a los centros universitarios.

Los cambios económicos han planteado la necesidad de innovaciones en la gestión y estudios de rentabilidad. En mi época se decía que "la universidad española era barata, pero mala" y que, por la calidad de su oferta, no merecía la pena establecer sistemas selectivos especialmente complicados. Sin embargo, en este momento, las cuestiones de rentabilidad —económica y académica— están siendo cuestiones importantes, que se están debatiendo en el marco de la autonomía y que están orientando los criterios para tomar decisiones, ya que los datos y actividades económicas son importantes.

Finalmente, la dimensión cultural se ha visto reforzada en la universidad con un avance considerable de la investigación, con una integración de los profesores universitarios en los grandes equipos internacionales y con la elaboración de nuevos planes de estudio.

En esta reflexión quisiera también hacer mención de las funciones que la Ley de Reforma Universitaria, promulgada en 1984, señala a la universidad.

> *Son funciones de la universidad al servicio de la sociedad la creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica, de la cultura; la preparación para el ejercicio de actividades profesionales (y por tanto la formación de profesorado, entre otras) que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos o para la creación artística; el apoyo científico y técnico al desarrollo cultural, social y económico tanto nacional como de las Comunidades Autónomas; y la extensión de la cultura universitaria.*

Son cuatro dimensiones prioritarias que se señalan como funciones de la universidad en la ley, y es en este marco en donde aparece por primera vez como un área diferenciada, como una área de conocimiento, la didáctica de la matemática. Con anterioridad, didáctica de la matemática podía ser el título de una asignatura, pero no un área de conocimiento, en la que se integran grupos de profesores, no solamente para organizar la docencia, sino también para desarrollar investigación.

Actualmente en la universidad española hay establecidas 162 Areas de Conocimiento, tales como didáctica general y organización escolar, psicología evolutiva y de la educación, sociología, o también, sin salirnos de nuestro campo, son áreas de conocimiento análisis matemático, álgebra, estadística, investigación operativa y matemática aplicada. Dentro de estas 162 áreas de conocimiento hay una que se denomina didáctica de la matemática.

La organización administrativa y de gestión se hace en los departamentos universitarios. Para constituir un departamento universitario es necesario un mínimo de 12 profesores, pertenecientes a una misma área de conocimiento, y cuando no hay suficientes profesores en una universidad de una misma área de conocimiento se agrupan por materias afines. Actualmente hay 1.651 departamentos universitarios en todas las universidades españolas, de los que en mi universidad hay constituidos un total de 82 departamentos.

Interesa dar algunos datos generales relativos al área de conocimiento didáctica de la matemática y a su situación particular en mi universidad. En el año 84, aparece por vez primera el reconocimiento del área de conocimiento didáctica de la matemática; en el momento actual hay aproximadamente 200 profesores universitarios en España ocupados única y exclusivamente de didáctica de la matemática. Estos son profesores en plantilla (funcionarios del estado) que, según la situación en cada universidad, han tenido que agruparse con otros profesores o bien constituir departamento independiente.

Básicamente, hay dos modelos con los que los profesores de didáctica de la matemática han constituido departamento. El primer modelo ha consistido en agruparse con áreas de matemáticas, mientras que el segundo modelo ha consistido en agruparse con áreas de didáctica. ¿De qué ha dependido la elección de modelo en cada caso? Varios han sido los factores que han condicionado la elección en cada universidad. Entre otros, han influido el tamaño de la universidad, el número de profesores en cada área, la tradición previa en los estudios de matemáticas y en los estudios de educación, el conocimiento y las relaciones entre los profesores de distintas áreas, las circunstancias particulares, etc. El departamento de la Universidad de Granada, en particular, se constituye en el año 85 y es, como veremos, uno de los pocos departamentos específica y exclusivamente dedicados a la didáctica de la matemática.

Dentro de cada uno de los dos modelos enunciados se presentan distintas posibilidades, que pasamos a describir.

Tabla 7:

Modelo primero: agrupamiento con áreas de matemáticas	Total
Departamento de matemáticas, junto con el resto de áreas: *Alcalá de Henares, Autónoma Madrid, Cantabria, Islas Baleares, León, Oviedo, Navarra, Zaragoza.*	8
Departamento de matemáticas, junto con matemática aplicada exclusivamente: *Castilla la Mancha, Córdoba, Las Palmas*.	3
Departamento de análisis matemático: *La Laguna, Valladolid.*	2
Departamento de economía aplicada: *Alicante*.	1

Si consideramos el agrupamiento con áreas de matemáticas podemos ver en la tabla que se presentan varias opciones. Hay casos en los que se constituye un departamento de matemáticas único, en donde se agrupan todos los profesores de matemáticas (con o sin los profesores de estadística). Hay algunas variantes, pero los profesores de álgebra, de análisis, de geometría y de didáctica de la matemática en las 8 universidades que aparecen listadas se agrupan en un mismo departamento. Hay 3 universidades en donde el departamento de matemáticas lo constituyen el área de didáctica de la matemática junto con matemática aplicada. Hay 2 universidades en donde los profesores de didáctica de la matemática están conjuntamente con los profesores de análisis matemático. Finalmente, hay una universidad en donde los profesores de didáctica de la matemática pertenecen al departamento de economía aplicada.

La opción alternativa incluye un número similar de universidades que en el caso anterior. Son aquellas universidades en donde la didáctica de la matemática se ha agrupado pero con otras áreas también de didáctica.

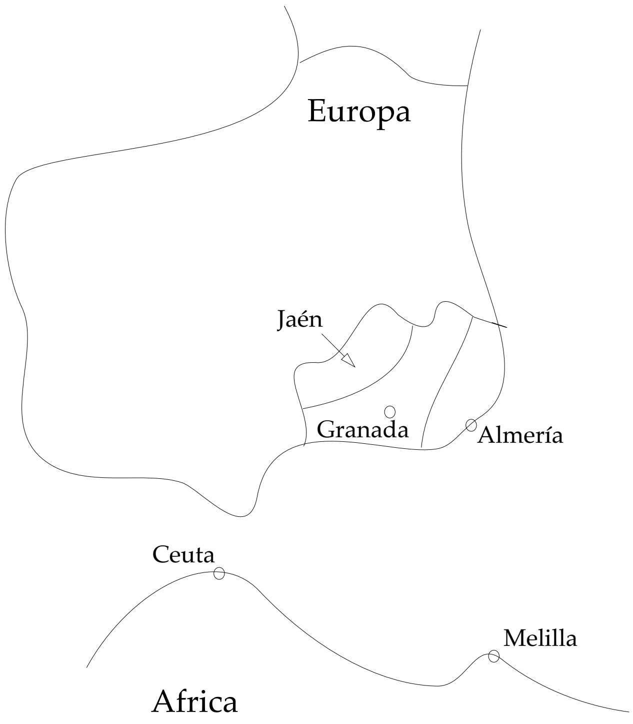
Tabla 8:

Modelo Segundo: agrupamiento con áreas de didáctica	Total
Departamento de didáctica de la matemáticas y de las ciencias experimentales: *Autónoma de Barcelona, Barcelona, Extremadura, País Vasco, Salamanca, Santiago, Sevilla.*	7
Departamento de didáctica de las matemáticas y ciencias sociales: *Murcia.*	1
Departamento de formación de profesorado - junto con el restos de áreas educativas: *Málaga.*	1
Departamento de didáctica de la matemáticas (exclusivamente): *Complutense, Granada, Valencia.*	3

Tenemos que en 7 universidades existe un departamento de didáctica de la matemática y de las ciencias experimentales, lo que podría interpretarse como un gran departamento de didáctica de la ciencia. Hay un departamento de didáctica de la matemáticas junto con ciencias sociales en la universidad de Murcia. Hay un gran departamento que se denomina Formación de Profesorado (en donde no sólo están las didácticas especiales, sino también didáctica general, psicología evolutiva y de la educación) en la universidad de Cádiz; un Departamento de Didáctica de la Matemática, Ciencias Sociales y Experimentales en la Universidad de Málaga; y, finalmente, hay 3 universidades en donde existe un departamento de didáctica de la matemática especializado, la Universidad Complutense de Madrid, la Universidad de Valencia y la Universidad de Granada.

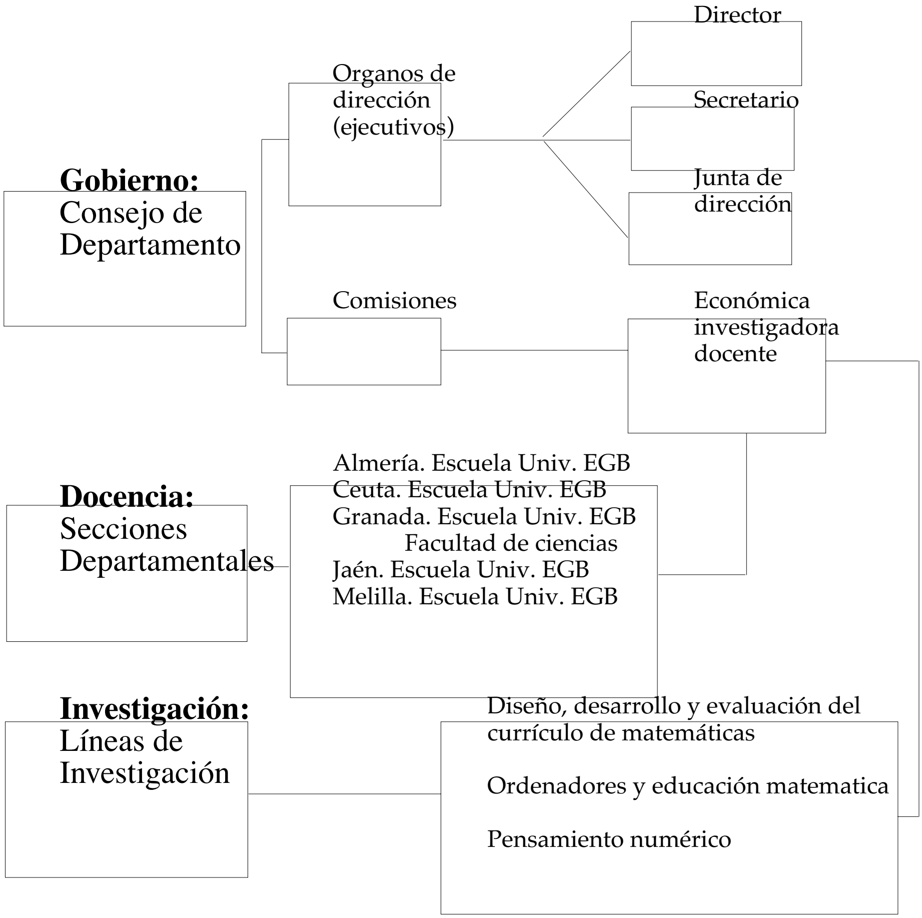
Las diferentes modalidades no suponen diferentes calidades o rendimientos. La modalidad no está ligada con que algunos departamentos trabajen mejor que otros. Hay departamentos de la primera modalidad magníficos, donde están haciéndose investigaciones serias en educación matemática y donde están trabajando considerablemente, mientras que hay otros departamentos que todavía no terminan de arrancar.

Quiero entrar un poco en el detalle de lo que ocurre en mi universidad. En este mapa topológico, les pido que reconozcan el perfil de la Península Ibérica y el perfil del norte de Africa.



He incluido los 2 continentes porque nuestra universidad, junto con la de Estambul, tiene un privilegio importante: ser una universidad bicontinental, cuyo campus se extiende por 2 continentes. El distrito universitario de Granada abarca —en este momento— el Campus de Jaén, el campus de Granada, el campus de Almería, el campus de Ceuta y el campus de Melilla (como saben Ceuta y Melilla son 2 ciudades españolas del norte de Africa, que formaban parte del estado español incluso antes de que se incorporase a la corona de España el Reino de Granada).

La organización de una universidad con 5 campus es compleja, y nosotros —el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada— tenemos docencia en estos 5 campus. Nuestro departamento está constituido por un total de 30 profesores, y es importante tener en cuenta esta amplia dimensión para entender la estructura del departamento, con unos órganos de gobierno, unas competencias en docencia y unas competencias en investigación. Los órganos de gobierno son personales y colectivos si bien, en definitiva, es el Consejo de Departamento (constituido por todos los profesores, el personal de administración de servicio y una representación del alumnado) el que gobierna delegando competencias en el Director, el Secretario, la Junta de Dirección y las Comisiones.



Quisiera explicar qué es lo que hace un departamento de didáctica de la matemática en una universidad española como la nuestra y, para ello, voy a destacar cuatro dimensiones.

En primer lugar, consideraré las funciones docentes. ¿Qué funciones docentes realiza un departamento como el nuestro? La docencia está dirigida hacia la formación inicial de profesores de primaria en todo el distrito —prioritariamente—. También hay asignaturas que corresponden a la formación inicial de profesorado de educación secundaria (en la Facultad de Ciencias); adicionalmente, se dedica a impartir cursos de formación permanente, tanto para el profesorado de educación primaria como de secundaria, en programas del Fondo Social Europeo; contribuye también a la formación permanente de profesores de primaria y secundaria en los cursos del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, en centros de profesores de la Comunidad Autónoma y en cursos especializados de la Consejería de la Junta de Andalucía. Las competencias y funciones generales docentes de nuestro Departamento son pues la formación inicial y permanente del profesorado de primaria y de secundaria.

Además de las funciones docentes, el departamento tiene funciones investigadoras. Para su desarrollo y para la formación inicial de personal investigador, el departamento tiene aprobado un Programa de Tercer Ciclo para el Doctorado en Didáctica de la Matemática, bajo el cual se lleva la dirección y realización de memorias de tercer ciclo y tesis doctorales. También se realizan y desarrollan proyectos de investigación aprobados en los planes nacionales de investigación o los planes autonómicos de la Junta de Andalucía. Tenemos también becarios de investigación dentro de los planes nacionales de formación de personal investigador. Presentamos ponencias, comunicaciones y posters en congresos, fundamentalmente en congresos de la comunidad de educación matemática y no sólo en congresos nacionales (como los que cité anteriormente), sino congresos como el PME, ICME, la CIAEM, etc. Por otra parte, realizamos la publicación de memorias y resultados de investigación y mantenemos una biblioteca especializada en educación matemática —importante ahora mismo en nuestro país— que abarca mas de 3.000 volúmenes y una hemeroteca con unas 40 suscripciones a revistas profesionales y de investigación relacionadas con didáctica de la matemática. Finalmente, dentro del departamento hay constituidos y se mantienen equipos de investigación interniveles y se realizan visitas de trabajo a centros de investigación de la Comunidad Económica Europea o de otros países.

Una dimensión importante son las actividades de extensión universitaria. El profesorado y el propio departamento están comprometidos en la publicación de libros y artículos de divulgación, en la publicación de libros y manuales para escolares y profesores, en la participación en cursos y conferencias, en la participación en consejos asesores y de redacción de revistas profesionales y en la participación en las sociedades de profesores de matemática para que no sean dos mundos independientes —uno las sociedades profesionales de profesores matemáticos y otro el mundo de los investigadores de la universidad—. Hay un compromiso y una participación en las sociedades de profesores de matemáticas y en sus órganos directivos; colaboramos en la organización de congresos y jornadas; mantenemos una ludoteca matemática y de materiales didácticos y también mantenemos un fondo de películas y de videos sobre educación matemática, como trabajos de extensión universitaria.

En cuarto lugar, y no menos importante, el profesorado de nuestro departamento está comprometido en el gobierno y en la participación institucional para el funcionamiento de nuestra universidad. En el momento actual hay 5 profesores miembros del claustro de la universidad, al cual no pertenecen todos los profesores, sino solamente el 10%. La Junta de Gobierno, que es el órgano máximo de responsabilidad de la universidad, tiene entre sus miembros a 2 profesores de didáctica de la matemática; hay una profesora miembro de la junta personal de la representación sindical en la universidad; hay 2 directores de escuela universitaria, el director de Granada, 1 subdirector en la escuela de Almería y el secretario de la escuela de Melilla. Además, todos los profesores de nuestro departamento pertenecemos a las Juntas de Centro de nuestros centros correspondientes. Muchas de las decisiones políticas que hay que tomar se deciden en estos órganos de gobierno y es importante el estar comprometidos en el gobierno y en la participación institucional del centro al que pertenecen.

Como conclusión, quiero destacar que se dan unas circunstancias particulares en mi país especialmente importantes para el progreso de la educación matemática. Acaban de surgir las Facultades de Ciencias de la Educación. He hablado de las Escuelas de Formación de Profesorado (el status de Escuela de Formación de Profesorado responde a un centro que imparte sólo titulaciones de diplomatura, esto es, titulaciones de primer ciclo). El ubicar la formación inicial del profesorado en centros de primer ciclo crea una serie de disfuncionalidades, de manera que la formación permanente del profesorado dentro de la universidad tenía una serie de organismos competentes que interferían unos con otros. En el momento actual se acaban de crear las Facultades de Ciencias de la Educación con una dimensión más amplia, en donde se va a integrar no sólo la formación inicial de los diplomados, sino la formación inicial de los licenciados que se dediquen a la enseñanza. Este es un reto importante, que obliga a plantear nuevas cuestiones tales como ¿cuáles van a ser las componentes básicas en la formación inicial de un educador matemático? ¿Se podrá definir una titulación distinta de la titulación de licenciado en matemáticas, distinta de la de profesor general? ¿Alcanzaremos el título de educador matemático o de profesor de matemáticas? Y, si esa titulación se llega a establecer, ¿qué componentes, qué disciplinas serán las que tengan que estudiar esos profesionales? El profesor Kilpatrick nos ha indicado, dentro del cuadro de la educación matemática, que tendrá que saber psicología y epistemología, pero que tendrá que saber bastante de matemáticas y también algo de lingüistica y algo de sociología. Determinar el currículo para la formación inicial del educador matemático es un reto actual importante.

También es un reto actual que las sociedades de profesores de matemáticas tomen la responsabilidad sobre el control de la calidad del trabajo que realizan sus afiliados. Un reto concreto que tenemos va a ser la organización del gran congreso mindial, el octavo ICME, en el año 96, en Sevilla. Y, sobre todo, tendremos que dar respuestas claras, eficaces y directas a esta gran cantidad de ilusión al mismo tiempo que a esta gran cantidad de problemas con los que, en nuestra parcela concreta de la enseñanza de las matemáticas, debemos de contribuir a la mejora, al progreso y al aumento del nivel económico, cultural y social y de los valores democráticos de la sociedad que a cada uno nos ha tocado vivir y de la profesión que nos ha tocado ejercer que, en nuestro caso, es la enseñanza de las matemáticas. Encontrar respuestas para este compromiso ético y moral es una tarea común que puede mantener nuestra ilusión y entusiasmo por el trabajo concreto que a cada uno nos toca realizar.

Un panorama de la investigación en educación matemática en Colombia

Dr. Carlos E. Vasco

Universidad Nacional de Colombia

Introducción

Parece muy osado, desvergonzado quizás, hablar de la muy incipiente investigación en educación matemática en nuestro país, sobre todo si se intenta así sea una remota comparación con los Estados Unidos o con España.

Pero me voy a atrever a hacerlo ante Uds., más que todo como un compromiso personal mío y de Uds. para seguir apoyándola y ojalá haciéndola.

Más que en publicaciones, que desafortunadamente apenas existen, me baso ante todo en mi conocimiento de casi todos los grupos y personas que han iniciado este difícil camino de la investigación en educación matemática. Pienso principalmente en los encuentros de la incipiente red de investigadores en esta área en la Universidad Javeriana en septiembre de 1990 en Bogotá, y en la Universidad del Cauca en noviembre de 1991 en Popayán. Se tuvieron también algunas reuniones de investigación en aritmética en la Universidad Externado de Colombia, y en geometría en la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, además de un encuentro regional de matemáticas para el Occidente colombiano, que se realizó en la Universidad del Valle del 20 al 24 de abril de 1992 en Cali.

De esos encuentros he recogido en mi base de datos personal más de ochenta nombres de profesores interesados o ya comprometidos seriamente en la investigación en educación matemática en nueve ciudades diferentes. Esta conferencia tratará de recorrer a vuelo de pájaro el panorama de esta naciente disciplina en nuestro país. Pido de antemano disculpas a quienes por accidente no pude detectar oportunamente, o a quienes desde entonces han

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 41-49.

avanzado en esta área sin que yo me haya enterado todavía. Solicito a los presentes me proporcionen cualquier información que tengan al respecto, para ir completando este panorama y la base de datos respectiva, con la cual ojalá podamos empezar pronto una verdadera red nacional de investigadores en educación matemática, para conectarla internacionalmente con la ayuda del Dr. Kilpatrick y la Universidad de Georgia con otras redes de los EE. UU., y del Dr. Rico y la Universidad de Granada con las redes de Europa.

Antecedentes

En la década de los sesenta, el Dr. Carlo Federici y el P. Hernando Silva Mojica introdujeron al país las ideas de Piaget respecto a la educación en matemáticas y lógica, y con Germán Zabala empezaron a experimentar lo que llamaron el Método Educativo Integral MEI. Por razones más que todo políticas, esos experimentos fracasaron pronto.

Ya desde comienzos de la década de los setenta, la Misión Francesa encabezada por M. Jean Parot, hizo algunos intentos de investigar la posibilidad de aprendizaje de la "Nueva Matemática" en distintas escuelas del país. El Dr. Carlo Federici nos invitó a algunos colegas de las Universidades Nacional, Javeriana, Pedagógica y de los Andes a colaborar en ese trabajo, que se realizaba en el Instituto de Ciencias del Instituto Colombiano de Pedagogía ICOLPE, el cual se extinguió en 1976 sin publicar ninguno de los resultados. Sólo quedan algunas hojas mimeografiadas en nuestros archivos personales, y se dice que hay también un libro en francés escrito por M. Parot unos años después.

Pero por esos mismos años se estaba generalizando en el país la línea de diseño de instrucción y tecnología educativa inspirada en el análisis experimental de la conducta. La OEA y los Cuerpos de Paz, las Universidades de Stanford en California y de Tallahassee en la Florida propagaban estas técnicas de diseño curricular en toda Latinoamérica.

Se consideró por mucho tiempo que ya se sabía lo suficiente para que un buen tecnólogo educativo convirtiera cualquier objetivo general de cualquier área de la educación en objetivos específicos, tareas analizadas cuidadosamente, técnicas didácticas, materiales de apoyo e indicadores de evaluación. Esa falsa creencia, acompañada por el descrédito de toda metodología investigativa que no se ciñera al diseño experimental cuantitativo, bloqueó durante casi dos décadas la investigación en educación matemática.

De 1975 a 1985 tuve la oportunidad de asistir a algunos congresos internacionales de educación matemática, en donde se empezaron a presentar resultados de investigación desde otros paradigmas investigativos, más de tipo piagetiano, vygotskiano o cognitivo.

Comencé a dirigir algunas tesis de Magister en el programa de la Universidad de Nova y el Centro Internacional de Desarrollo Humano CINDE. Recuerdo el descubrimiento de un significativo y paradójico "efecto de pretest" por parte de Rafael Sabogal, y la investigación sobre proporcionalidad directa e inversa de Cecilia Mantilla.

Araceli de Tezanos hizo algunas investigaciones etnográficas sobre la manera de enseñar las matemáticas en primaria, publicadas en el libro "Escuela y Comunidad: Un problema de sentido" del CIUP en 1983.

El Dr. Alberto Campos de la Universidad Nacional en Bogotá empezó también a estudiar con sus alumnos de licenciatura el aprendizaje de la geometría, y publicó un interesante libro al respecto. El cierre de las licenciaturas en la Nacional interrumpió dichas investigaciones.

Con los colegas del grupo de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, Teresa León, Cecilia Casasbuenas, Celia Castiblanco, Virginia Cifuentes, Orlando Múnera, Gabriel Gutiérrez y Carmen Lucila Osorno, hicimos algunas observaciones, encuestas y pruebas sobre el efecto de los nuevos programas experimentales de matemáticas de 1978 a 1984, para iniciar oficialmente la renovación curricular con el Decreto 1002 de 1984; pero dicha experimentación y evaluación informales apenas pueden calificarse de verdadera investigación. Sinembargo, los primeros resultados de ese tiempo de exploración me permitieron escribir en 1985 un capítulo del libro de la Universidad de Harvard y la Fundación Bernard van Leer, "The Cultural Transition", y mi trabajo de ascenso a profesor titular de la Universidad Nacional en 1986: "El Constructivismo Genético".

A partir de ese momento se empiezan a aceptar por parte de los departamentos de matemáticas de las universidades los proyectos y artículos sobre educación matemática. Hasta entonces ni se aprobaban dichos proyectos, ni se asignaba puntaje para ascenso a esos artículos. Tal era la discriminación de los matemáticos contra los que intentábamos hacer algo por la educación matemática desde el punto de vista investigativo.

Líneas de Investigación

De 1986 hasta ahora se han ido consolidando algunos grupos y líneas de investigación, que son ya prometedores. Trataré de agruparlos en las siguientes líneas:

Aprendizaje de la aritmética elemental

En la Universidad Javeriana en Bogotá, el grupo de Juan Carlos Negret, Jorge Castaño y Angela María Robledo desarrolla con la DIE-CEP una cuidadosa investigación sobre el sistema aditivo natural, que ha llegado a analizar los problemas de situaciones aditivas a la altura de los mejores textos de Carpenter, Moser y Romberg.

En la Universidad del Valle en Cali, el grupo de Mariela Orozco, Evelio Bedoya y Luz Amparo Sepúlveda desarrolló primero una investigación muy cuidadosa sobre la multiplicación de tipo producto cartesiano, y siguió luego con problemas de razón y proporción, trabajo que completa actualmente Mariela Orozco en el IMIPAE de Barcelona para su tesis doctoral.

En la Universidad de Antioquia en Medellín, Orlando Mesa combina marcos Piagetianos, Vygotskianos e ideas de Mialaret en una conceptualización lógico-matemática de las habilidades aritméticas, que le ha permitido estudiar miles de niños de las escuelas de Antioquia, y dirigir la evaluación nacional de quinto grado con el Ministerio de Educación, el ICFES y el Instituto SER de Investigación.

Aprendizaje de la geometría

Ya mencionamos al Dr. Alberto Campos de la Universidad Nacional, quien es pionero en este tipo de investigaciones.

En la Universidad del Valle, el grupo de Carlos Soto, Jorge Arce y Gloria Castrillón, con numerosos profesores de primaria y secundaria del Valle, a partir de algunas ideas de investigadores franceses y de las propuestas de programas experimentales de matemáticas sobre geometría activa, desarrollaron materiales de enseñanza, los experimentaron y refinaron, y han recogido valiosísima información sobre la manera como se enseña y como se aprende geometría en las escuelas y colegios del Valle.

En la Universidad Industrial de Santander en Bucaramanga, el grupo de Arturo Martínez, Carmen Luisa Alvarez y Rosalba Osorio han investigado los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, basados también en las concepciones de geometría activa de los nuevos programas curriculares de matemáticas.

En la Universidad Tecnológica de Pereira, Julián Guzmán ha empezado a estudiar el aprendizaje del teorema de Pitágoras en los colegios y en la universidad.

En la línea de informática educativa mencionaré posteriormente a Carlos Rojas, pionero en el estudio del lenguaje LOGO, y a Marco Aurelio Cerón de la Universidad del Quindío, quien ha empezado a estudiar el tema del aprendizaje de la geometría apoyado por el computador.

Investigación básica sobre la psicología del aprendizaje de las matemáticas

Como Uds. saben, existe ya desde hace muchos años la sociedad de investigación en la psicología de la educación matemática PME. En Colombia la persona que ha adelantado alguna investigación básica en esta área es Rebeca Puche, de la Universidad del Valle en Cali, quien estudia la psicomotricidad infantil y su impacto remoto en el aprendizaje de las matemáticas. También podríamos ubicar en esta línea las investigaciones ya mencionadas en el aprendizaje de la aritmética de los grupos del Valle y la Javeriana. Finalmente, el estudio de estilos cognitivos y aprendizaje de las matemáticas que adelanta Christian Hederich del CIUP y el Ministerio de Educación Nacional pertenece claramente a esta línea de investigación básica en la psicología de la educación matemática.

Conocimiento matemático situado

Antes de que Teresinha Carraher, David Carraher y Ana Lucía Schliemann hicieran famosas sus investigaciones sobre las matemáticas de los vendedores callejeros del Brasil, ya en Colombia Germán Mariño había estudiado y publicado su librito "Cómo opera matemáticamente el adulto popular", seguido después de "Representación del Espacio en los Adultos Populares".

No sé de otras investigaciones en esta línea tan prometedora. Algunos discípulos de Emilia Ferreiro y Ana Teberosky han empezado a aplicar las teorías que guían sus estudios sobre lectura y escritura al aprendizaje de las matemáticas. Espero que esta línea, de la cual conozco el trabajo de Myriam Nemirovsky en México sobre el conocimiento matemático de adultos que se declaran analfabetos, se extienda también a Colombia.

Investigaciones de diagnóstico

El Anillo Pedagógico de la ADE, encabezado por Marina Ortiz, Santiago González, Héctor Orobio y otros, y asesorado por Jesús Hernando Pérez, ha empezado un diagnóstico de la educación matemática en el Distrito Capital.

En la Universidad Nacional, el Dr. Alonso Takahashi hizo una investigación de diagnóstico global de la educación matemática para la Misión de Ciencia y Tecnología.

En la Universidad del Valle, Jairo Alvarez y otros colegas de la Escuela Regional de Matemáticas están adelantando estudios paralelos.

Actualmente en la Universidad del Cauca en Popayán, Danilo Vivas ha retomado también este tema de diagnóstico global.

Investigaciones evaluativas

Muy relacionadas con el tema anterior, las evaluaciones iniciadas por el Ministerio de Educación Nacional, dirigidas por Christian Hederich en la parte matemática de tercer grado y por Orlando Mesa en quinto, séptimo y noveno grado, han adelantado mucho en información confiable sobre el rendimiento en aritmética en esos grados.

El ICFES, con Blanca Felisa Alarcón, Carlos Pardo y Ricardo Burgos, tiene mucho material de años de pruebas de quinto y de undécimo grado, que ellos han analizado en formas diferentes, y colaboran ahora también con la evaluación del Ministerio de Educación Nacional.

En Cali, Carlos Soto, Jorge Arce, Hernando Rivera, Carlos Díaz, César Delgado y otros colaboran con el TIMSS, el tercer estudio internacional sobre matemáticas y ciencia.

En Medellín, como lo mencioné antes, Orlando Mesa ha adelantado extensas evaluaciones de rendimiento en aritmética en las escuelas oficiales de Antioquia.

Integración de las matemáticas con otras áreas

Con las ciencias naturales: el Multi-Taller del Valle, dirigido por Ramiro Tobón, y el grupo de la Escuela Pedagógica Experimental EPE dirigido por Dino Segura. Ha iniciado su preparación para trabajar en esta dirección el grupo "enseñanza de la Ciencia" en la Universidad de Nariño.

Con la educación artística: el CINDE de Manizales está adelantando una investigación incipiente en esta línea.

Lenguaje y matemáticas

La Universidad Externado de Colombia, con el grupo de Gloria García, Olga Lucía León, Mirta Silva, y originalmente Fabio Jurado, ahora en la Universidad Nacional, adelantaron las primeras investigaciones sobre lenguaje y matemáticas, orientadas a desarrollar métodos más eficaces de capacitación docente y producción de materiales curriculares. El grupo continúa muy activo en esta línea, que incorpora marcos Bernsteinianos en socio-lingüística y otras ideas psico-linguísticas.

Razonamiento cuantitativo no-numérico

Con Eloísa Vasco adelanté una investigación sobre este tema en el Colegio CAFAM, con ideas de Patrick y Alba Thompson de la Universidad de San Diego State. El primer avance de investigación se acaba de publicar en el primer número de la nueva revista educativa del Colegio CAFAM, "Enfoques Pedagógicos".

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias

En la Universidad Nacional, José Gregorio Rodríguez, Carlos Ruiz y Víctor Manuel Gómez iniciaron una investigación al respecto, que fracasó por la resistencia de la mayoría de los profesores de matemáticas contra toda investigación de tipo pedagógico, y la consiguiente negativa a dejar observar sus clases.

También en la Nacional se ha iniciado un grupo de estudio en la enseñanza de la estadística bajo mi dirección, que ha empezado a diseñar proyectos de investigación sobre la enseñanza de la estadística en la universidad.

En la Universidad Antonio Nariño se ha recogido buena información sobre errores frecuentes en los estudiantes de primeros semestres de matemáticas.

En la Universiad del Valle, Alfonso Bustamante dirige una investigación sobre el ciclo propedéutico universitario, que incluye los primeros cursos de matemáticas, como pre-cálculo, cálculo y álgebra lineal. Ernesto Acosta y César Delgado están investigando las diferencias en la comprensión de las derivadas cuando se enseñan a la manera usual, y cuando se enseñan con la definición de Carathéodory.

En la Universidad Tecnológica de Pereira, Sara Isabel González, Gloria Obregón de Mora, Abel Enrique Pozo y otros profesores, están estudiando los errores comunes en el primer curso de matemáticas.

La Escuela Regional de Matemáticas del Occidente Colombiano, con las universidades de Pereira, Cauca, Nariño, Autónoma de Occidente, Valle y Santiago de Cali, ha iniciado también este tipo de estudios.

El maestro de matemáticas

En Bogotá, la Universidad Externado de Colombia con el mencionado grupo dirigido por Gloria García, ha estudiado al maestro de matemáticas de primaria.

En la Universidad Distrital, el grupo dirigido por Myriam Ortiz está estudiando la construcción del conocimiento matemático por parte de los maestros y futuros maestros.

En la Universidad Nacional, el Proyecto Universitario de Investigación en enseñanza de las ciencias tiene un grupo de matemáticas compuesto por Myriam Acevedo de Manrique, Crescencio Huertas, Mary Falk de Losada y yo. Se ha estudiado la demanda de capacitación por parte de los profesores de matemáticas de secundaria, y se ha presentado un proyecto de investigación sobre la interacción entre profesores universitarios y profesores de secundaria en los cursos mal llamados de "capacitación".

También debemos mencionar los intentos de sistematizar la larga experiencia de formación continuada de profesores de los Colegios alemanes de Colombia y países vecinos que ha adelantado el "Pädagogisches Zentrum" PZ del Colegio Andino de Bogotá.

Historia y enseñanza de las matemáticas

En esta línea podemos mencionar en la Universidad del Valle al Dr. Luis Carlos Arboleda, ahora en COLCIENCIAS, y a Luis Recalde.

Como investigadores independientes interesados en este tema, mencionaré también a los profesores Diego Pareja y Rafael Cardona en Armenia.

Matemática recreativa

Esta línea la inició Carlos Zuluaga en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, y el nuevo colegio experimental de COLSUBSIDIO.

También debemos mencionar la exploración del impacto del "Furgón de Matemáticas" que inician Daniel Arbeláez y Jorge Arce en la Universidad del Valle en Cali.

Implementación de currículos por grado

En esta línea, fronteriza entre la investigación y el desarrollo, podría mencionar el estudio sobre las matemáticas de sexto grado dirigido por Marina Ortiz. También podríamos incluir el estudio sobre manejo global de los errores de matemáticas en los alumnos de los grados décimo y undécimo del Colegio "Los Nogales" que adelanta Ramón Espinosa.

Estoy seguro de que muchos otros colegas adelantan estudios de currículos experimentales de matemáticas en uno o más grados escolares, que bien podrían contarse como investigaciones.

Informática y educación matemática

El pionero de esta línea fue Carlos Rojas, ahora en el Banco Mundial, quien con el Consejo Británico y el Instituto SER inició un estudio del lenguaje LOGO en algunas escuelas rurales de Cundinamarca.

En la Universidad de los Andes, el Servicio de Informática Educativa y el Boletín de Informática Educativa, dirigidos por Alvaro Galvis Panqueva, han concentrado la información sobre este tema. Estoy seguro de que él podrá completar brillantemente los vacíos que tengo respecto a esta línea.

Sé que Pedro Gómez en "una empresa docente" continúa con su investigación sobre el Hiperdidactigrama. Algunos colegios bilingües como el Rochester y el Santa Francisca Romana han hecho investigaciones sobre el uso de los computadores en la enseñanza de las matemáticas. También Rebeca de Yohai y Pilar Santamaría de Reyes comenzaron a sistematizar algunos resultados de enseñanza apoyada por computador, tanto en colegios privados como en escuelas públicas, en un proyecto conjunto con la DIE-CEP que ha tenido dificultades en continuar.

En Armenia, en la Universidad del Quindío, Marco Aurelio Cerón ha empezado a estudiar el aprendizaje de la geometría ayudado por computador. También podríamos mencionar bajo este rubro a Gustavo Lozano, quien estudia el uso de multimedia en el aprendizaje de las matemáticas financieras.

Conclusión

Con este panorama esquemático, tal vez demasiado informal, espero que los presentes hayan sentido el vigor, así sea incipiente, de esta nueva disciplina de la investigación en la educación matemática. Les agradezco cualquier información que pueda completar este panorama, y cualquier colaboración personal o institucional que pueda fomentar esta apasionante actividad.

Seminario de investigación

Introducción

El seminario de investigadores se realizó en dos sesiones de tres horas cada una, los días 9 y 10 de marzo. Asistieron alrededor de 40 investigadores en educación matemática, de todo el país. El seminario se inició con una breve presentación de los asistentes, seguida por un recuento que hicieron el Dr. Jeremy Kilpatrick y el Dr. Luis Rico sobre sus actividades en investigación. El seminario se centró en los temas de evaluación y de resolución de problemas. Además de las charlas que dieron los expositores, los investigadores presentes hicieron preguntas relacionadas con los temas del seminario y algunas áreas de interés personal.

El objetivo principal de este seminario era ofrecer un espacio a los investigadores en educación matemática del país, para darse a conocer y dialogar con los dos invitados sobre temas de actualidad en la investigación en educación matemática.

Las memorias del seminario se dividen en cinco partes. Las dos primeras hacen referencia a los datos biográficos de los dos expositores. En la tercera parte, el Dr. Luis Rico y el Dr. Jeremy Kilpatrick presentan algunos aspectos de la resolución de problemas y contestan preguntas del público referente a este tema. La cuarta parte hace referencia al tema de evaluación en educación matemática y está compuesta de las charlas de los dos expositores y preguntas del público. Por último, se agrupan las preguntas del público sobre diferentes temáticas de resolución de problemas y evaluación.

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 51-67.

Biografía del Dr. Luis Rico

La siguiente es la presentación que el Dr. Luis Rico hizo de su carrera académica e investigativa.

Soy licenciado en matemáticas y profesor de matemáticas. Obtuve un doctorado en matemáticas, centrado en el área del análisis. Actualmente soy profesor de la Universidad de Granada (España) en la Facultad de Ciencias de la Educación y en la Facultad de Matemáticas. Allí dicto cursos en la licenciatura de matemáticas y en el doctorado de didáctica de las matemáticas.

La línea investigativa que he seguido, desde los años setenta hasta finales de los ochenta, ha estado regida por los cambios en el currículo de matemáticas de la educación obligatoria. En los años setenta tuve la oportunidad de dirigir un equipo de investigación dedicado a la implantación curricular de las matemáticas modernas en la educación obligatoria. Más tarde, en la década de los ochenta, desapareció de los programas la matemática moderna; la modificación consecuente permitió recuperar el sentido de las matemáticas como herramienta, siendo iniciado entonces un programa de "matemáticas para todos" enfocado principalmente hacia la resolución de problemas. El grupo se disolvió más adelante, dando lugar a un nuevo grupo de investigación sobre la enseñanza primaria que planteó la necesidad de estudiar las posibilidades que tendría un desarrollo curricular basado en la resolución de problemas. Los trabajos que realizamos dieron lugar a diversas publicaciones en los años 86, 87 y 88. Este grupo continúa trabajando actualmente sobre competencias seminales en resolución de problemas aritméticos en alumnos de primaria del sistema español.

En los años 88 y 89 se creó el programa de doctorado en la Universidad de Granada, dando impulso a nuevos proyectos de investigación. En este momento existen seis trabajos de investigación en curso, cuyos temas son los siguientes:

- *Estimación de cantidades discretas en una estructura lineal*, trabajo en el cual se distinguen dos variables: *tamaño* (número de elementos de la cantidad) y *formato* (formato segmento, formato línea quebrada, formato polígono, formato línea ondulada). El estudio se realiza con alumnos de 6 a 14 años.
- *Resolución de series aritméticas*. Estudio realizado con alumnos de la escuela primaria. Sobre tareas de continuar cinco términos en progresión aritmética o geométrica.
- *Estudio sobre la solución de problemas de comparación y estructura en aritmética*. Esta investigación será descrita más adelante, en la parte de resolución de problemas.
- *Números relativos y errores en la traducción entre distintos sistemas de representación*.

- *Estudio de representaciones puntuales para secuencias numéricas lineales o cuadráticas.*
- *Iniciación o concepto de número real con alumnos de 15 años.*

Biografía del Dr. Jeremy Kilpatrick

El Dr. Jeremy Kilpatrick hizo la siguiente presentación de su carrera académica e investigativa.

Soy matemático con un máster en matemáticas y otro en educación. Me gradué en la Universidad de Stanford, con una tesis doctoral en el campo de la educación matemática, donde tuve la oportunidad de estudiar con dos grandes matemáticos: el Dr. George Polya y el Dr. Begle. Este último fue mi director de tesis. Mis temas de interés fueron entonces la resolución de problemas, el currículo y la evaluación.

Mi experiencia como investigador es larga. Desde 1955, año en el cual inicié mi máster, me he preocupado por mejorar la educación matemática. Desde hace 25 años estoy dedicado al estudio de métodos de investigación, pues he tenido la oportunidad de trabajar en diferentes planteles universitarios. Primero trabajé en la Universidad de Columbia en el Teachers College (Universidad de profesores) y desde hace 18 años trabajo en la Universidad de Georgia, como profesor de la Facultad de Educación en el Departamento de Educación Matemática. En esta facultad estoy encargado de dar cursos de pregrado (matemática para profesores) y de posgrado (investigación para máster y doctorado).

Cuando estuve en la Universidad de Stanford, inicié una serie de traducciones al inglés de trabajos soviéticos. En esta época, el método de investigación de los americanos difería del de los soviéticos. En Estados Unidos se tendía habitualmente a trabajar en dos grupos con diferente metodología de enseñanza, comparando los resultados en el aprendizaje de los estudiantes, imitando de alguna manera el proceder de la psicología experimental. En la Unión Soviética la metodología de trabajo era muy diferente. Se dedicaban a observar cuidadosamente el aprendizaje de los estudiantes bajo condiciones bastante típicas (clases normales de matemáticas), con un enfoque algo experimental. Este hecho es importante de mencionar, pues la investigación soviética tuvo en los Estados Unidos una influencia profunda en la forma de investigar.

Un trabajo importante, que he podido hacer durante todos estos años, ha sido el de realizar una síntesis de investigación alrededor de la resolución de problemas. En el primer trabajo, adelantado con Begle, me interesé por el estudio del proceso de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Esto lo efectué con los métodos heurísticos de Polya para analizar el proceso de raciocinio de los estudiantes y con una forma que yo mismo desarrollé para analizar los procesos que desarrollaban los alumnos al resolver los problemas matemáticos. Esta modalidad de trabajo, hoy en día no muy popular, influyó en varias personas que se interesaron por el tipo de heurística utilizado por los estudiantes y por la manera de mejorarla. El libro de Krutetskii, psicólogo soviético, que tuve la oportunidad de traducir, en donde se presenta un estudio sobre la capacidad matemática de los niños en distintas edades, y en el cual utiliza una variedad de técnicas para tratar de entender cómo los estudiantes resuelven distintos tipos de problemas matemáticos, aportó elementos valiosos a las líneas investigativas que se desarrollaron en los años sesenta.

Actualmente me encuentro vinculado a varios proyectos de investigación. Formo parte de un grupo de estudio sobre matemáticas y ciencia, estoy en el Comité Nacional de los Estados Unidos para la ayuda de "Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)", soy miembro del Comité de Asesorías Internacionales sobre Materias, y trabajo en un proyecto de pre-cálculo para el final de la escuela secundaria. Dirijo igualmente en la actualidad varios trabajos de investigación de estudiantes de doctorado de la Universidad de Georgia:

- Sistema de prueba computarizada (exámenes por computador).
- Transformaciones que sufre el conocimiento matemático al presentarlo a los estudiantes.
- Utilización de contra-ejemplos en las pruebas de geometría.
- Imágenes que tienen los estudiantes de las pruebas y su raciocinio sobre la prueba misma.

En el Departamento de la Universidad se adelantan igualmente varios proyectos, entre los cuales están el del Profesor Steffe, quien realiza un trabajo sobre el conteo en los niños, y el de el Profesor Cooney quien se ha interesado por el estudio de las creencias de los profesores de matemáticas.

Pregunta del público

Quisiera pedir al Dr. Jeremy Kilpatrick, que contara un poco más de su nuevo curso de pre-cálculo.

Respuesta de Jeremy Kilpatrick

Este curso, establecido por el College Board, está diseñado para facilitar la transición entre la secundaria y la universidad. Se está desarrollando con varios propósitos. En primer lugar, para preparar a los estudiantes que van a estudiar cálculo en la universidad; en segundo lugar, para estudiantes que van a otro tipo de carreras en las que no necesitan el cálculo y por último, se quiere preparar a los estudiantes que no entrarán a la Universidad sino que irán directamente al mundo del trabajo. Ha sido muy difícil para nosotros organizar este curso; pero en este momento tenemos un bosquejo del curso, y en septiembre ensayaremos los materiales. Desde el punto de vista de contenido, el curso presenta características tradicionales (funciones trigonométricas, crecimiento exponencial, matrices, vectores), pero la forma en que estos temas van a ser tratados es muy diferente. Muchas de las instrucciones se van a dar a través de trabajos de investigación que hacen los estudiantes. Se espera además que cada uno de los estudiantes que toma el curso tenga una calculadora gráfica, de manera que pueda explorar las propiedades de las funciones y mostrar cómo los datos del mundo real se pueden analizar. Cada salón deberá tener un computador. Los dos temas centrales del curso serán funciones y modelos matemáticos de situaciones reales. El gran problema que se presenta al cambiar el currículo por un currículo aplicado es que los profesores no conocen las aplicaciones. La mayoría de los profesores de matemáticas no han estudiado física, no han estudiado cursos de matemáticas en los cuales se hace investigación. Es así como se impone preparar a los profesores mediante un curso que realizan en el verano. La experimentación de este curso se llevará a cabo en varios lugares gracias a los aportes de una fundación.

Resolución de problemas

Presentación del Dr. Jeremy Kilpatrick

El Dr. Kilpatrick presenta en su charla un aspecto global de la investigación y la enseñanza de resolución de problemas.

Un trabajo muy importante en este campo es el de George Polya. Dos de sus libros más sobresalientes son *Cómo plantear y resolver problemas* (Polya, 1979) y *El descubrimiento matemático* (Polya, 1981). La idea de Polya era analizar los procesos de quienes resuelven bien los problemas matemáticos, con el fin de mejorar la resolución de problemas en la clase de matemáticas. Normalmente se le da crédito a este autor por la atención moderna que otorga a la idea griega de heurística. Se puede pensar en la heurística en contraste con los algoritmos. Los algoritmos son procesos bien definidos, que determinan o son determinantes, y garantizan una solución. Por el contrario, en la heurística, la solución no está garantizada (es posible o probable). Esto, naturalmente, genera muchos problemas en los estudiantes, quienes prefieren los algoritmos.

Me interesa presentar algunos ejemplos de la heurística de Polya. Una primera heurística sería cuando tratando de resolver un problema, surge en algún momento la pregunta sobre aquello que se está buscando: lo desconocido. Polya llegó a esta idea cuando estaba trabajando con uno de sus estudiantes. Para ayudar al alumno, Polya le presenta la metáfora del puente: el problema consiste en encontrar la ruta que lleva de donde uno se encuentra hasta donde uno quiere llegar, es decir, a lo desconocido. Un segundo ejemplo de heurística es el de dibujar una figura del problema que uno está tratando de resolver. En los Estados Unidos, a los estudiantes en clase de matemáticas no les gusta hacer dibujos para representar el problema que están tratando de resolver aunque, habitualmente, es una herramienta muy útil. La dificultad que encuentran los alumnos radica en que no se les ocurre lo que hay que pintar. Una de las heurísticas más poderosas que puede utilizar una persona en matemáticas, es pensar en un problema más sencillo que tenga las mismas características y brinde las pautas para poder solucionar el problema más complejo.

Los trabajos de investigación que continuaron la idea de Polya, y en los cuales yo participé, intentaron descubrir, a partir de observaciones, el proceso que realiza un estudiante para resolver un problema. Esta descripción tenía como finalidad la de mejorar dicho proceso, para luego enseñarlo en los colegios. Esta línea de investigación fracasó por una parte porque no era fácil enseñar tales procesos en tan poco tiempo y, por otro lado, porque los profesores convirtieron la heurística en un algoritmo que los estudiantes debían aplicar. Lo que el Profesor Polya hacía en sus clases era resolver un problema en voz alta, pudiendo de esta manera ver los estudiantes el tipo de heurística que él estaba utilizando. Esta técnica da muy buenos resultados.

Una obra importante y que complementa el trabajo de Polya, es el libro llamado *Pensar matemáticamente* de los autores John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey (Mason et. al., 1979). En éste se ofrecen ejemplos concretos sobre el cómo pensar, cómo hacer cuando uno se queda atascado y cómo proceder en la resolución de problemas; incluye además toda una serie de problemas matemáticos muy interesantes. Uno de los procedimientos que los autores utilizan es el de “HAGA, HABLE Y REGISTRE.” En primer lugar, los estudiantes trabajan el problema; luego se habla, se discute y se explican las soluciones entre las personas de un grupo para, finalmente, escribir lo que se ha hecho para llegar a la solución. Este es un procedimiento diseñado para mejorar no solamente su capacidad de resolver problemas sino también sus posibilidades de reflexionar sobre el cómo resolver problemas.

Esta línea de investigación desalentó mucho a las personas, dadas las dificultades encontradas al enseñar este tipo de heurísticas. El problema básico consiste en la cantidad de tiempo que se requiere para lograr una mejoría en los estudiantes. Schoenfeld, en su libro “Mathematical Problem Solving”, habla sobre sus esfuerzos en la enseñanza de resolución de problemas a nivel universitario. Concluye que no vale la pena enseñar heurísticas generales. Propone en cambio trabajar con procedimientos más específicos para clases específicas de problemas (por ejemplo, en una clase de geometría se enseñaría ciertas heurísticas características para esta área del conocimiento). El investigador Lesh llegó a una conclusión similar, tomando un camino diferente. A partir del estudio de problemas de la vida diaria o de situaciones abiertas, llegó a la conclusión de que los estudiantes mejorarían su capacidad para resolver problemas si se les dieran más oportunidades para formular y resolver problemas de investigaciones abiertas.

En los últimos años la investigación se ha centrado en el estudio del profesor. Se ha querido mirar de cerca lo que el profesor hace para mejorar el rendimiento de sus alumnos en la resolución de problemas. Los investigadores han observado que el contexto en el cual se desarrolla la clase, es importante. En efecto, se ha visto que los programas juegan un papel muy importante, y también el tipo de actividades que se realicen con los estudiantes.

En general, las tendencias en la enseñanza e investigación de resolución de problemas, se han desplazado de la enseñanza e investigación de la heurística hacia la investigación de problemas situados, en donde los estudiantes pueden mejorar su rendimiento porque el problema tiene algún significado para ellos. Existe una cierta tendencia en las clases de matemáticas a plantear a los estudiantes problemas artificiales. Este hecho ha llamado la atención de los investigadores, quienes han llegado a la conclusión de que el profesor debe dar a sus alumnos problemas más reales para que el estudiante se sienta comprometido de alguna forma.

Un ejemplo de esto es un problema planteado en una evaluación nacional de tipo selección múltiple en los Estados Unidos. Se tienen 130 soldados y son distribuidos en grupos de 21 soldados por bus; la pregunta era "¿cuántos buses se necesitan para transportar a estos soldados?" Muchos de los estudiantes escogieron la respuesta en la cuál se decía son tantos buses y tantas fracciones de bus. No pensaron en una situación que resultaría absurda en la vida real. No siendo la fracción de bus una solución a ese problema, no pensaron sin embargo en dar como respuesta el siguiente número entero. Varios tipos de interpretación fueron dados a esta situación. Para algunas personas ilustraba el hecho de que la matemática en los colegios no tiene un sentido real: para los estudiantes es un juego. Para otros, el problema radicaba en el tipo de evaluaciones donde el estudiante no tiene nada que perder, no hay nota, no le dan dinero y por lo tanto contesta cualquier cosa: no hay razón para tomarlo en serio. Otra manera de ver el problema es que los estudiantes estaban tratando de adivinar lo que tenía en la cabeza la persona que planteaba el problema: "tal vez quiere como respuesta una fracción". Ahora, si pensamos en el estudiante que respondió una fracción de bus y lo sacamos del contexto de clase y le planteamos el problema en una situación real en la que él se sienta implicado de alguna manera, se puede estar seguro de que no dispondrá de una fracción de bus para meter personas en ésta; ¡cualquiera se dará cuenta de que uno no puede contratar medio bus! En conclusión, los estudiantes saben mucho más sobre problemas de este tipo, que lo que se encuentra cuando se les dan pruebas tontas y ellos responden tontamente.

Presentación del Dr. Luis Rico

El Dr. Luis Rico da a conocer en su presentación, una investigación que se lleva a cabo actualmente en la Universidad de Granada, sobre resolución de problemas aritméticos.

Existe en la actualidad una buena cantidad de literatura sobre resolución de problemas y concretamente sobre resolución de problemas aritméticos; sin embargo, sigue siendo un campo abierto a la investigación. En este tipo de estudio, se mantiene un cierto grado de complejidad. Es decir, planteada o dada una situación experimental, lo que se está dando es simplemente un ejemplo. La situación experimental se vuelve de pronto muy compleja y son demasiadas las posibilidades que se tienen para estudiar. Esto puede presentar dificultades a la hora de detectar un problema. Una vez detectado el problema, ¿cómo controlar dicha complejidad?

Los problemas aritméticos escolares se han clasificado en dos grandes grupos: los de estructura aditiva (suma, resta) y los de estructura multiplicativa (multiplicación, división). Una de las variables fundamentales en el estudio de problemas en la estructura aditiva de una sola operación es lo que se llama la variable semántica. La investigación sobre resolución de problemas aditivos se ha consolidado recientemente como campo de trabajo con identidad propia. Tienen especial relevancia para los niveles terminales de enseñanza primaria obligatoria los problemas de estructura aditiva de dos etapas, con operaciones iguales o distintas. La investigación que adelantamos se centra en el estudio de las simetrías con respecto a la estructura semántica y el tipo de operaciones que se derivan de las 64 posibilidades obtenidas con la combinación de estas dos variables.

Uno de los enfoques de investigación más productivos es el enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas. Las categorías semánticas universalmente aceptadas son las denominadas:

- *Cambio*, que se refiere a los problemas en los que se produce algún evento que cambia el valor de una cantidad inicial.
- *Combinación*, problemas basados en una relación estática existente entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos.
- *Comparación*, que son problemas que implican una relación comparativa entre dos cantidades.
- *Igualación*, que son aquellos problemas en los que se plantea una acción para lograr que una cantidad sea igual a otra.

El interés de la investigación reside en su carácter exploratorio, intentando descifrar la idoneidad de estas estructuras y su contraste de rendimiento en un grupo de 51 alumnos granadinos de 5º nivel de primaria. La prueba recoge ocho problemas posibles que resultan de las combinaciones directas establecidas entre estructuras semánticas idénticas y tipo de operación duplicada. Manteniendo constantes las estructuras semánticas de los problemas, se han encontrado diferencias significativas con respecto a la variable operación duplicada solamente en los problemas de Cambio-Cambio y Combinación-Combinación, colocándose la suma por delante de la resta. Estos resultados se han invertido en el caso Comparación-Comparación, puntuando la resta por encima de la suma. La restante combinación ha mantenido un idéntico rendimiento para sumas y restas, abriéndose nuevas vías de indagación sobre estos dos últimos casos.

Pregunta del público

Planteamiento de problemas

En las dos intervenciones se ha hablado del planteamiento de problemas. Este es un tema que trasciende las matemáticas. En informática tenemos mucho éxito al enseñar a resolver problemas bien definidos, pero no cuando se enseña a resolver problemas mal definidos o a plantearlos. Cuando el Dr. Kilpatrick dijo que el nuevo método de enseñar pre-cálculo tenía mucho trabajo por parte del profesor en términos de la búsqueda de problemas de situaciones concretas y de situaciones de la vida real, la pregunta que surge es: ¿qué se esta haciendo para traspasar la barrera del problema y llegar al planteamiento del problema?

Respuesta del Dr. Jeremy Kilpatrick

En los Estados Unidos, se está tratando de llegar a unos conceptos de desarrollo curricular con los cuales se pueda tratar de mejorar la capacidad de los estudiantes para formular problemas. Actualmente en el currículo hay oportunidades para hacerlo, pero no se les han dado situaciones privilegiadas que permitan el desarrollo de tal capacidad. Los estudiantes tienen la capacidad para formular problemas, lo que sucede es que el currículo actual no les ofrece situaciones que puedan fomentar esto.

Las reglas de juego establecidas en clase hacen que los problemas que los estudiantes deben resolver vengan de los libros de texto o del profesor. El profesor da un problema, el estudiante lo resuelve. Estas reglas de juego hay que cambiarlas. Se puede proponer, por ejemplo, que los estudiantes busquen ellos mismos los problemas, o que planteen problemas en grupo para que sus compañeros los resuelvan.

Respuesta del Dr. Luis Rico

Dentro de la tradición americana de resolución de problemas, se encuentra el trabajo hecho por Bransford y Stein, sobre el método IDEAL de resolución de problemas (Bransford y Stein, 1986). Este establece cinco etapas en la resolución de problemas. La primera es la Identificación del problema, la segunda consiste en la Definición y Representación del problema, la tercera etapa consiste en Elegir un método, la cuarta en Aplicar un método y finalmente la quinta etapa se refiere a los Logros (Observación y evaluación de los efectos de las actividades). Si se les sustrae a los alumnos las dos primeras etapas, difícilmente se podrá obtener un buen resultado en la resolución del problema. Lo que sí se llega a formar es un buen aplicador de fórmulas, un buen resolutor de ejercicios pero no de problemas. La Identificación y Definición de problemas deben ser elementos constitutivos de cualquier programa que se quiera vincular al programa de enseñanza sobre resolución de problemas.

Yo he trabajado particularmente sobre estas dos etapas en los primeros cursos de secundaria española, con niños de 12 y 13 años. Con estos alumnos tenemos la experiencia en invención de enunciados en problemas de situaciones abiertas. En aritmética, estos alumnos han inventado enunciados dentro de un contexto significativo, como por ejemplo, levantar el plano del colegio o levantar el plano de un centro, o actividades de otro tipo. Los estudiantes seleccionan los datos y, a partir de estos, la pregunta que se les propone es "¿cuántas preguntas son capaces de plantear a sus compañeros?". Una vez planteada la pregunta, los compañeros deben solucionar el problema. Es importante señalar que alumnos entrenados en plantear problemas y en ver relaciones cuantitativas significativas, dentro de contextos significativos, son capaces de llegar más lejos de lo que el profesor está dispuesto a conceder. Dicho en otras palabras, éste no quiere perder el control de la clase, el dominio debe estar de su lado. Hay que aprender a manejar situaciones de este estilo, el profesor debe adquirir seguridad y entrenarse. Enseñar a los alumnos a plantear problemas es un campo en el que no se ha trabajado mucho, es un área abierta para la investigación.

Pregunta del público

Lógica común y elementos culturales

¿Las investigaciones hechas en formulación y resolución de problemas, hacen énfasis sobre todo en el manejo que los alumnos hacen de las operaciones vistas como algoritmos de sumas y restas, o también se ha mirado algo del desempeño de los muchachos en acciones que tienen que ver más con su lógica común, con sus elementos culturales o con sus actividades cotidianas?

Respuesta del Dr. J. Kilpatrick

Hay que entender que la mayoría de los problemas que se encuentran en el colegio, se utilizan no para enseñarles a resolver problemas sino para que apliquen lo que han aprendido en clase de operaciones aritméticas. Es por esto que existen muchos problemas. El tipo de problemas que se dan en la escuela, en la mayoría de los casos, no le dan a los estudiantes las oportunidades genuinas de razonar. Es un problema pedagógico y por esto se les llama problemas estereotipados. Se vuelven problemas rutinarios porque son parte de la cotidianidad del colegio, son problemas que no se encuentran en la vida real. Los estudiantes aprenden a utilizar las operaciones pero no aprenden el cómo resolver problemas.

Evaluación

Intervención del Dr. Jeremy Kilpatrick

En los Estados Unidos, actualmente, se está reaccionando fuertemente contra el tipo de evaluación que se hace en las clases de matemáticas. El tipo de pruebas que se realizan son de selección múltiple y esto hace que los profesores dediquen su tiempo en preparar a los estudiantes para que contesten este tipo de pruebas. En este momento se está haciendo un gran esfuerzo para que exista otro tipo de evaluación, en la que los estudiantes hagan proyectos y, por ejemplo, trabajen en grupo. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) acaba de comenzar un proyecto para establecer normas para la evaluación. Particularmente nos hemos interesado por el sistema que tiene el Reino Unido, donde, además de los exámenes que se toman durante el curso, el profesor hace una evaluación del alumno durante su trabajo en clase. El problema que existe en los Estados Unidos es que tenemos una larga tradición en psicometría y el tipo de pruebas que se hacen son muy objetivas y sencillas. Algunas investigaciones han mostrado cómo estas pruebas han afectado el desarrollo de las clases. Por ejemplo, muchas de las evaluaciones no permiten al estudiante la utilización de la calculadora, entonces los profesores piensan que no es necesario usar las calculadoras en clase. A la conclusión que se ha llegado es que el tipo de evaluación por selección múltiple ha llevado a un tipo de educación en la que los estudiantes reconocen las matemáticas pero no saben producirlas.

En la Academia Nacional de Ciencia, la junta sobre educación matemática, de la cual formo parte, está produciendo un documento sobre evaluación, en el cual se presentan tres principios. El primer principio es que la matemática debe tener que ver con contenido matemático importante. El segundo principio importante es que la evaluación que se haga debe ayudar al estudiante a aprender matemáticas. En efecto, muchas de las evaluaciones que se hacen en los Estados Unidos se apartan del aprendizaje, y, por el contrario, no son una ayuda para el aprendizaje. El tercer principio es que la evaluación se debe utilizar para ayudarle a todos los estudiantes a que tengan acceso a la matemática. En todas partes del mundo se utiliza la matemática como una barrera para que el estudiante no siga su educación.

Intervención del Dr. Luis Rico

Las investigaciones en educación matemática sobre evaluación son muy recientes, y esto hace que sea un poco difícil trabajar en este campo. El gobierno español está financiando actualmente un proyecto sobre evaluación en matemáticas del cual yo soy director. Serán publicados unos 320 trabajos que se organizaran de acuerdo a unos descriptores o categorías generadas. El primer descriptor hace referencia a la teoría; son trabajos sobre evaluación que la estudian desde el punto de vista teórico como un problema educativo general. El segundo descriptor, recibe el nombre de curricular, en donde hay que ver la manera de integrar el tema de la evaluación con los contenidos, los objetivos, la metodología, el papel del alumno, el papel de la escuela, el papel del conocimiento; etcétera; métodos y criterios que suponen un nivel más alto de concreción. Yéndose hacia otra dimensión, aparece otro descriptor más, el problema de validez y el problema del modelo (qué tipo de control estadístico o no, qué validez y habilidad se pueden aplicar a su instrumento, a su método y criterio). El sexto campo es el de valoración. Estos seis campos no son disyuntos, hay trabajos que abarcan dos o tres de estas categorías, pero nos han permitido tener una visión global y una clasificación, todavía no muy finas, sobre la producción actual y reciente en evaluación sobre matemáticas. Tampoco las categorías son uniformes. La mayor parte de los trabajos se encuentran clasificados en las categorías de métodos, criterios e instrumentos.

Pregunta del público

La evaluación como negociación

La escuela cumple con una función histórica de socialización del saber. Bajo esta perspectiva, la evaluación tiene ciertas características que hacen que el estudiante conteste a unas preguntas para mostrarle al profesor que sabe repetir lo que él dijo en clase. Es decir, que el estudiante está obligado a tomar el punto de vista del profesor. Esto realmente se aleja un poco de la realidad, pues estos estudiantes harán, después, lo que ellos realmente piensan. Bajo esta perspectiva, la evaluación debe plantearse de otra manera, como una negociación entre el profesor y el alumno. América Latina es un continente que necesita cambios y tal vez éste es uno de ellos. ¿Hasta dónde se han hecho planteamientos de este tipo en las investigaciones que se están realizando?

Respuesta Dr. Jeremy Kilpatrick

Es cierto que la evaluación es un proceso de negociación, pero es importante decir que la enseñanza también lo es, y no se puede separar la enseñanza de la evaluación. Tal vez el problema en América Latina no sea epistemológico, sino un problema de currículo. En Estados Unidos se ha encontrado que si el currículo cambia, la evaluación también lo hace. Por esto es imposible hablar de cambiar la evaluación sin cambiar también el currículo, para lograr una presentación menos formal de las matemáticas. Muchos países están cambiando su currículo de tal forma que las matemáticas sean más aplicadas, que se preocupen más por los problemas de la vida real de los estudiantes y por la matemática de la cultura de donde vienen sus estudiantes. Hay que situar las matemáticas dentro de un contexto histórico y cultural, y por lo tanto la evaluación también tiene que evolucionar en ese sentido.

La evaluación en Estados Unidos es utilizada para diferentes propósitos, actualmente se está tratando de unificar todo esto, de acuerdo a los principios que se mencionan arriba. Para hacer la evaluación más cercana al currículo y para que no se llegue a la situación de que el profesor diga: "esta es mi matemática", hay que cambiar el currículo. Si esto ocurre, se puede volver la matemática de todos, del profesor y del alumno, y es así como se podrá realmente evaluar.

Pregunta del público

Didáctica de la matemática y educación matemática

Es muy importante asistir a un seminario donde se plantea la existencia de la didáctica de las matemáticas como un campo específico del conocimiento y se plantea desde el punto de vista epistemológico. En Colombia no ha sido fácil hablar de didáctica de las matemáticas, sino más bien del problema de la pedagogía de las matemáticas y en esto se ha iniciado una discusión sobre las diferencias o posibles relaciones entre estos dos enunciados. ¿El Doctor Luis Rico establece una relación específica entre didáctica de las matemáticas y educación matemática o las identifica como una sola?

Respuesta del Dr. Luis Rico

El hecho de que haya dos denominaciones para el campo de trabajo docente, didáctica de las matemáticas y educación matemática, responde en principio, a dos tradiciones distintas. En la tradición anglosajona se habla de educación matemática y en la tradición continental europea (Francia, Alemania, España, Italia) se habla de didáctica de las matemáticas, y si no es necesario hacer más precisiones, todo el mundo identifica didáctica de las matemáticas con educación matemática. Pero en España, el uso diario no los hace equivalentes. Educación matemática es un término más general, más comprensivo, que abarca una comunidad más amplia, una problemática más compleja, menos técnica y menos académica y que incluye todo el sistema escolar, mientras que didáctica de las matemáticas se toma como el término académico formal universitario de trabajo de investigación y que toma la educación matemática como una de sus posibilidades.

Pregunta del público

Constructivismo y métodos de investigación

¿Hacia dónde van evolucionando los focos de interés en los Estados Unidos? ¿Hasta

dónde el enfoque constructivista está llegando a España y a Colombia, pero está pasando de moda en los Estados Unidos?

Respuesta Dr. Jeremy Kilpatrick

El enfoque constructivista está de moda en los Estados Unidos. Esto ha presentado algunos problemas. Es así como los cursos en los que se enseñan métodos cualitativos están llenos, y los cursos de estadística tradicional prácticamente no tienen estudiantes. Se ha pasado de un extremo al otro.

Yo pienso que este extremismo no ha dado buenos resultados. Los tipos de investigación que se están realizando en los Estados Unidos y, en algunos casos, en Francia y Alemania, tienden a volverse muy cualitativos, están orientados hacia estudio de casos y estudian el aprendizaje de las matemáticas en ambientes naturales. Se han dejado a un lado los experimentos. Para que la educación matemática pueda avanzar, necesita tener varios tipos de investigación, diferentes posiciones frente a los problemas. Se necesitan tanto métodos cuantitativos como cualitativos; ambos dan información necesaria.

Sin embargo, creo que los métodos de investigación evolucionarán hacia una integración de los dos métodos, el cualitativo y el cuantitativo. Lo que es difícil saber es cuánto se demorará este proceso. Por ejemplo, el conductismo duró mucho tiempo en los Estados Unidos. Sin embargo, la experiencia mostró que los educadores matemáticos, aun cuando hacían investigaciones que parecían conductistas porque eran cuantitativas y experimentales, su corazón nunca fue conductista. Los matemáticos entendían la diferencia entre la realidad y el modelo matemático.

Respuesta Dr. Luis Rico

La situación actual en España es la de un país que se está abriendo a la comunidad internacional de educadores matemáticos. La descripción que hizo el Dr. Carlos Vasco sobre el estado actual de la comunidad de investigadores en educación matemática, corresponde a la situación en la que se encontraba España hace unos diez o doce años. La educación matemática comienza a integrarse a un mundo de trabajo, que existía, pero no tan sistemáticamente ni con la terminología, la metodología y el soporte teórico con la que existía en otros países. Se hacían muchas experiencias con entusiasmo y dedicación.

La tendencia constructivista en investigación es muy fuerte, pero no es la única posición existente. Los elementos de la psicología cognitiva, del procesamiento de información constituyen un aporte a la idea constructivista que tiene gran peso en la comunidad de educadores matemáticos. Yo pienso que afectivamente se es constructivista pero que difícilmente en el aula, día a día, uno lo es. Muchas veces, nominalmente o intelectualmente se adopta una posición pero en la práctica es diferente.

Pregunta del público

Investigación en errores

¿Qué se ha hecho en investigación referente al tipo de errores que cometen los estudiantes con determinada escolaridad y cuáles pueden ser sus posibles causas? ¿Han aprovechado ustedes sus resultados de investigaciones para planear, de alguna forma elementos concretos, que permitan, por ejemplo, evitar que los estudiantes elaboren sus conceptos con estos errores y para ayudar a que las dificultades se aminoren?

Respuesta Dr. Luis Rico.

El tema central en relación con los errores y las dificultades es el análisis conceptual. ¿Cuántas piezas intervienen en cada concepto? Cuando hablo de raíz cuadrada, ¿cuántas cosas hay en la noción de raíz cuadrada? Hay un signo, hay una equivalencia, es una simplificación de la notación de la función exponencial, pero también es una función, además es un algoritmo, son los valores que toma una función y al mismo tiempo es una representación (puedo representar un cuadrado cuya superficie conozco y preguntar cuánto mide la longitud del lado). El hacer un análisis conceptual de todos los elementos que intervienen en cada una de las nociones fundamentales del currículo de matemáticas, me parece que es el mejor modo de aproximarnos al estudio de los errores y las dificultades.

En la escuela francesa, se ha trabajado la noción de obstáculo epistemológico, idea que tomaron de Bachelard (1923). Brousseau trabaja esta noción en matemáticas y la utiliza para hacer un análisis de la evolución histórica del concepto. El trabajo consiste en detectar cuáles son los errores y las concepciones inadecuadas que han aparecido históricamente del análisis de la evolución de un concepto matemático. A partir de este análisis, se fabrica una rejilla con base en los errores y dificultades que se encontraron en el análisis, y se observan si estos mismos elementos se encuentran en el aprendizaje de los estudiantes. Esta noción ha tenido ciertas dificultades. Efectivamente no es fácil identificar el tipo de errores y dificultades de los estudiantes con los errores y dificultades encontrados en el análisis histórico.

Este tema del análisis conceptual es muy importante, no sólo en la búsqueda de errores y dificultades sino en el tema de la evaluación. En el Handbook (Grouws, 1992) sobre investigación en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay un capítulo de Norman Webb (1992), en donde dice que lo específico y distinto de lo que es evaluación en matemáticas, es que el análisis del contenido, el análisis conceptual, es lo que le da su propia dimensión, su propia autenticidad. Es así como la escolaridad puede enfatizar unos elementos u otros, favorecer una u otra construcción de los conceptos por parte de los alumnos.

Es importante señalar que el error no es un virus o una enfermedad que se puede evitar, el error forma parte del proceso del conocimiento de las personas, es algo a lo que nos tenemos que habituar para detectar, controlar, valorar y corregir. Hay que enfrentar a los alumnos con los potenciales errores y, a partir del conflicto cognitivo, tratar de lograr la superación del alumno.

Pregunta del público

Investigación en demostración y argumentación.

¿Qué se ha hecho en investigación sobre el tema de demostración y argumentación en clase?

Respuesta Dr. Jeremy Kilpatrick

Esta es un área abierta en investigación. Actualmente se están llevando a cabo algunos proyectos. En los dos últimos congresos de Budapest y Quebec se presentaron trabajos realizados en secundaria y en universidad, sobre cómo se realizan las demostraciones en clase. En un estudio que realizó uno de mis estudiantes, sobre la utilización de contra ejemplos en la clase de geometría, encontró que los profesores recurren a varias formas para refutar un argumento y que los contra ejemplos son una parte muy pequeña de estos. Otras personas han trabajado sobre el tipo de demostraciones formales que se presentan en las clases de matemáticas. En lo que no se ha investigado mucho, es sobre el tipo de demostración informal que se hace en clase, en la cual los estudiantes están tratando de convencer a su profesor o a sus compañeros de algo, y en este momento se establece un tipo de negociación, que termina en una formalización de la demostración.

En los Estados Unidos, se tienen unos formularios especiales para que los alumnos hagan las demostraciones. Estos formularios están compuestos de dos columnas, la una con frases o declaraciones, y la otra con las razones. Para muchos de los profesores de matemáticas, este tipo de presentación se ha convertido en lo que es una demostración. Esto es un buen ejemplo de lo que los franceses llaman la transposición didáctica, en la que se utiliza un método para que los estudiantes comprendan lo que es una demostración, pero nadie, en matemáticas, ha dicho que las demostraciones deben presentarse en dos columnas. Hemos tenido que trabajar mucho en este sentido, pues ha sido muy difícil convencer a los profesores de que esto es simplemente un dispositivo pedagógico. Existen varios estudios que muestran que lo que los estudiantes hacen es utilizar una técnica, que se vuelve un procedimiento en donde se pierde la parte conceptual. En definitiva, lo que se hace es voltear un proceso de extremo abierto y heurístico, en un proceso algorítmico.

Pregunta del público

Relación con otras áreas del conocimiento

¿Se ha mirado la manera como los estudiantes transfieren las estrategias cognitivas que desarrollan con el aprendizaje de las matemáticas a la comprensión y el manejo de cuerpos conceptuales que pertenecen a otras áreas del conocimiento? ¿Se ha mirado si el hecho de mejorar la calidad del aprendizaje de las matemáticas tiene ingerencia o no en el aprendizaje de otras ciencias como las sociales, la lingüística y las ciencias naturales?

Respuesta Dr. Jeremy Kilpatrick

En los Estados Unidos, desde el trabajo de Thorndike, a comienzos del siglo, en donde supuestamente mostró que esa idea que tenemos todos —yo no conozco a ningún profesor de matemáticas que no piense lo mismo— de que el estudio de las matemáticas mejora la forma de raciocinio y de pensar no tiene esa calidad, o mejor dicho, que no se puede mostrar bajo las condiciones experimentales que él utilizó. El efecto que ha producido este trabajo es el de disminuir las investigaciones en este sentido.

A pesar de que pienso que los profesores creen esto, nosotros estamos empezando a estudiar algunas de las formas en que los estudiantes razonan en general por su trabajo en matemáticas. Pero hasta ahora no conozco ningún estudio en los Estados Unidos que examine la pregunta sobre si el estudio de las matemáticas mejora el desempeño en la física o en la química o en cualquier otra área o disciplina. Pienso que la experiencia que tuvimos al comienzo del siglo realmente convenció a la mayoría de las personas que no valía la pena estudiar esto, y yo pienso que sí.

Otra de las razones por la cual no se ha desarrollado la investigación en este sentido, es la aparición de las matemáticas modernas. En la época en que se instauró esta moda, no existía entonces el interés en combinar la enseñanza de las matemáticas y la de las ciencias. Se hicieron algunos esfuerzos pero fueron muy pequeños. Hoy en día en los Estados Unidos, como en la mayoría de otros países, el péndulo está yendo de las matemáticas puras a las matemáticas aplicadas. Pienso que, a medida que aparezcan las matemáticas aplicadas en el currículo, surgirán nuevos trabajos de investigación sobre los efectos del estudio de las matemáticas en otras disciplinas.

Referencias Bibliográficas

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

Bransford, J., & Stein, B. (1986). *Solución IDEAL de problemas.* Buenos Aires: Labor.

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Mason, J., Buron, L., & Stacey (1989). *Pensar matemáticamente.* Madrid: Labor

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley

Webb, Norman L. (1992). Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 661-683). New York: Macmillan.

Errores en el aprendizaje de las matemáticas

Dr. Luis Rico

Universidad de Granada

Presentación

Objetivos del curso

- Realizar una revisión y estudio sobre uno de los focos principales de problemas en Educación Matemática.
- Presentar un estado de la cuestión –survey– sobre un campo de trabajo en el que se ha realizado investigación previa suficiente y sobre el que se dispone de esquemas teóricos para interpretar resultados.
- Conocer un tópico en el que hay cuestiones importantes aún no resueltas y en el que la interacción entre reflexión teórica y obtención de nuevos datos empíricos es necesaria y productiva.
- Ofrecer a los profesores de matemáticas en ejercicio la organización de un campo de estudio e investigación cercano a la práctica escolar y a los fines de la Educación Matemática, susceptible de ser abordado desde la propia práctica escolar.

Motivación

- La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada.
- El error es conocimiento deficiente e incompleto. El error es una posibilidad, y una realidad, permanente en el conocimiento científico.

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 69-108.

- La ciencia es conocimiento verdadero. El desarrollo del conocimiento científico está plagado de errores.
- Objetivo del aprendizaje es la adquisición de conocimiento verdadero. Los procesos de aprendizaje incluyen errores sistemáticos.
- El error es un objeto de estudio para la Educación Matemática.

Fundamentos epistemológicos

La falibilidaddel conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Esta posibilidad no es una mera hipótesis, basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimiento válido multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que queremos destacar a Popper; Bachelard; Russell y Lakatos. En lo que sigue vamos a seleccionar algunas ideas de los autores mencionados, que sirven de fundamentación a este trabajo.

Popper

En *Conjeturas y refutaciones*, Popper pone a examen la siguiente cuestión: *¿cuál es la fuente última del conocimiento?*; a partir de ella deriva el papel destacable que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico. Para ello desarrolla la siguiente línea argumental:

1. Considera que hay, básicamente, dos respuestas clásicas a la cuestión anteriormente planteada, la proporcionada por el empirismo, que señala la observación como fundamento último del conocimiento; la proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico, que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas.

   Destaca en estas dos posiciones el optimismo epistemológico sobre las posibilidades humanas de conocimiento: todo hombre lleva en sí mismo las fuentes del conocimiento, bien en su facultad de percepción sensorial o en su facultad de intuición intelectual. El hombre es capaz de conocer; por lo tanto, puede ser libre.

Contrapone estas posiciones con la creencia según la cual, en ausencia de una verdad objetiva y discernible, hay que optar entre aceptar la autoridad de la tradición o el caos, posición a la que llama tradicionalista. El racionalismo epistemológico ha defendido el derecho de la razón y de la ciencia a criticar y rechazar toda autoridad cuando se encuentra basada en la sin razón, el prejuicio o el accidente. El rechazo del autoritarismo lleva a someter las propias teorías y conocimientos a un examen crítico minucioso.

2. Las posiciones clásicas se sustentan en lo que Popper denomina "teoría de la verdad manifiesta". La verdad es siempre reconocible como verdad; si no es así, sólo es necesario desvelar esa verdad o descubrirla. Esta doctrina de que la verdad es manifiesta plantea la necesidad de explicar la falsedad. El conocimiento no necesita ser explicado, pero ¿cómo podemos caer en el error si la verdad es manifiesta?

Una respuesta posible considera que la ignorancia es obra de poderes que conspiran para mantenernos en ella, que fomentan nuestros prejuicios para que no podamos ver la verdad manifiesta.

Popper sostiene que esta explicación conspiracional es, básicamente, un mito. La realidad es que la verdad es difícil de alcanzar y, una vez encontrada, se puede volver a perder fácilmente. Las creencias erróneas pueden tener un poder asombroso de supervivencia, en franca oposición a la experiencia y sin ayuda de ninguna conspiración.

La teoría de la verdad manifiesta puede conducir también al autoritarismo. Esto puede deberse a que la verdad, simplemente, no es manifiesta y por tanto necesita de modo constante de re-interpretación y re-afirmación, es decir, de una autoridad que proclame y establezca cuál es la verdad.

3. Aunque las epistemologías de Bacon y Descartes eran claramente antiautoritarias tienen una fundamentación de carácter religioso y no fueron capaces de renunciar a pensar en términos de autoridad; uno a la autoridad de los sentidos, el otro a la autoridad del intelecto.

La disyuntiva de tener que admitir que nuestro conocimiento es humano sin tener que aceptar que es mero capricho o arbitrariedad intelectual, no queda resuelta ni con el empirismo ni con el racionalismo.

Sócrates adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente; pero la idea del error y la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aun cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

4. Popper propone reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento como pregunta fundamental, por la pregunta totalmente diferente: *¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?*

   Una respuesta adecuada a la cuestión anterior es la siguiente: criticando las teorías y presunciones de otros y –si somos capaces de hacerlo– criticando nuestras propias teorías y presunciones. A esta posición la denomina *racionalismo crítico.*
5. Popper resume en nueve tesis los resultados epistemológicos de su reflexión:

> *1. No hay fuentes últimas del conocimiento. Debe aceptarse toda fuente y toda sugerencia y, en primer lugar, deben ser sometidas a un examen crítico.*
>
> *2. La cuestión epistemológica adecuada no es la relativa a las fuentes; más bien preguntaremos si la afirmación hecha es verdadera, si concuerda con los hechos. Esto se determina examinando o sometiendo a prueba la afirmación misma, de modo directo, o bien sometiendo a prueba sus consecuencias.*
>
> *3. En conexión con el examen y revisión críticas tienen importancia todo tipo de argumentos.*
>
> *4. La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayor parte de las cosas que sabemos las hemos aprendido por el ejemplo o porque las hemos leido u oído previamente.*
>
> *5. Toda parte de nuestro conocimiento por tradición es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado.*
>
> *6. El conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior.*
>
> *7. No hay ningún criterio que permita reconocer la verdad. Pero sí poseemos criterios que, con suerte, permiten conocer el error y la falsedad. La claridad y distinción no son criterios de verdad, pero la oscuridad y la confusión indican el error. Análogamente, la coherencia no basta para establecer la verdad pero la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.*
>
> *8. La función más importante de la observación y el razonamiento, y aun de la intuición y la imaginación, consiste en contribuir al examen crítico de las conjeturas con las que se sondea lo desconocido.*
>
> *9. La solución de un problema plantea nuevos problemas sin resolver, y ello es tanto más así cuanto más profundo era el problema original y más audaz su solución.*

Aunque la reflexión de Popper se refiere al conocimiento en general, y de un modo más explícito al conocimiento en las ciencias experimentales, lo que haría necesarias algunas matizaciones al referirnos a las matemáticas, hay algunas conclusiones importantes que queremos destacar. En primer lugar, señalar que **no hay fuentes últimas del conocimiento**, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios.

Esto lleva a **admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento**. Las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer. Aun así, no es válida cualquier conclusión, ya que hay una verdad objetiva a la que hemos de tratar de ajustarnos.

Idea complementaria de la presencia del error es la **necesidad de un ejercicio constante de la crítica**, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad. La búsqueda crítica del error para modificar nuestros conocimientos deficientes es un corolario inevitable de las consideraciones anteriores.

Bachelard

En otro orden de ideas, Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico como explicación para esa aparición inevitable de errores que, hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento. Así, al comienzo de su obra *La formación del espíritu científico* glosa las siguientes ideas:

> • *Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.*
>
> • *El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza.*
>
> • *La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.*

> *• El epistemólogo tendrá que esforzarse en captar los conceptos científicos en síntesis psicológicas efectivas; vale decir, en síntesis psicológicas progresivas, estableciendo respecto de cada noción una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro.*
>
> *• En educación, la noción de obstáculo epistemológico es igualmente desconocida; son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión.*

En otra obra, *La filosofía del no*, al tratar de diferenciar las funciones del filósofo de la ciencia de las del científico profesional, desarrolla algunas de las ideas anteriores:

> *Para el científico el conocimiento surge de la ignorancia, como la luz surge de las tinieblas. El científico no ve que la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. No advierte que las tinieblas espirituales poseen una estructura y que, en esas condiciones, toda experiencia objetiva correcta debe siempre determinar la corrección de un error subjetivo. Pero los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados. El espíritu científico sólo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico. A menudo, el hombre de ciencia se confía a una pedagogía fraccionada, mientras que el espíritu científico debiera tender a una reforma subjetiva total. Todo progreso real en el pensamiento científico necesita una conversión.*

Con esta noción de obstáculo epistemológico, retomada posteriormente por Brousseau para la Didáctica de la Matemática, Bachelard realiza una aproximación sistemática a los procesos de creación y constitución del conocimiento dentro de la comunidad científica y, al mismo tiempo, a los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento en el sistema educativo. La noción de obstáculo epistemológico, y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma, se ha utilizado como clave para el estudio, sistematización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

Constructivismo

Las ideas anteriores pueden completarse con los planteamientos constructivistas. Recordamos que hay un acuerdo general entre los constructivistas sobre los siguientes puntos:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.

- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
- Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.

Si, por otra parte, los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

Lakatos

En un plano diferente, este planteamiento es básicamente coincidente con el estudio realizado por Lakatos en *Pruebas y refutaciones* relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en matemáticas. Mediante la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen una respuesta a un problema o cuestión abierta; crítica de las conjeturas mediante contraejemplos globales y locales; y superación mediante un aumento del contenido y una limitación en la extensión de los conceptos, Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático.

Uno de los denominadores comunes entre Popper y Lakatos es la idea de que hay que considerar como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción. Se trata de un cuestión clave, que tuvo importancia en la segunda crisis de fundamentos (Gödel, 1930). En esencia, se cambia el estatuto positivo (epistemología positivista), que toma la verdad como patrón, por el vaciado en negativo de la verdad, la falsedad. Así, la verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a unos conocimientos, unos esquemas de interpretación y unas reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos.

Conclusiones

De toda esta reflexión concluimos haciendo referencia explícita a algunas consecuencias, importantes para nosotros, relativas a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En primer lugar, señalar que **los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje**; en segundo término, indicar que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente; en tercer lugar, argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción **modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes** de los mismos, reemplazándola por la **previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje**; y, finalmente, señalar que **todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores**, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

Hay que admitir como consecuencia de las reflexiones anteriores que, a partir de sus errores, un joven o un niño puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

Antecedentes en el estudio de errores

Una característica diferenciadora de las matemáticas escolares consiste en el carácter bien definido de las cuestiones y problemas que se plantean a los niños y jóvenes, independientemente del tópico tratado o del nivel de los escolares. Incluso cuando se incorporan tópicos relativos a estimación de medidas, cálculo aproximado o nociones de probabilidad, todas las cuestiones planteadas tienen una respuesta, o un rango de respuestas, adecuada(s); cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta.

Por ello, siempre resulta posible clasificar las contestaciones de los alumnos a cuestiones y problemas matemáticos en correctas o incorrectas; también hay una tercera opción que consiste en dejar sin respuesta la cuestión planteada. El grado de complejidad de una cuestión determinada nos puede permitir, en ocasiones, subdividirla en apartados o cuestiones parciales, cada una de las cuales a su vez puede ser correcta o incorrecta.

Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta.

Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas. Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos. Por otra parte, siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de todos los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo.

Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en Educación Matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.

En un trabajo ya clásico, Radatz (1980) señalaba tres rasgos característicos de los estudios aparecidos hasta la fecha:

1. La aritmética, el conocimiento numérico, constituye el área de contenidos dominante en la mayor parte de los estudios sobre errores en matemáticas escolares.
2. En USA ha habido un desarrollo teórico continuo desde comienzos de siglo para analizar los errores en educación matemática; en los paises europeos el desarrollo ha sido más esporádico y carece de continuidad hasta fechas muy recientes.
3. Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Siguiendo a este mismo autor, destacamos algunas de las contribuciones realizadas al análisis de errores desde comienzos de este siglo hasta finales de los 70, agrupando los autores por países.

Estudios en Alemania

El interés por el estudio de errores en Alemania en el periodo comprendido entre las dos guerras mundiales puede atribuirse a la importancia creciente de la pedagogía empírica, que empleaba técnicas de introspección propias de la psicología experimental. Se pueden reconocer en estos trabajos la influencia de las tres escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la teoría de la Gestalt, y la denominada psicología del pensamiento.

Se considera que Weiner (1922) es el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores; trató de establecer patrones de errores que explicasen las equivocaciones individuales en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares. Dentro del concepto general de "incorrecto", estableció la distinción entre equivocado, falsificación y error; también agrupó los errores en cinco categorías: errores familiares, errores persistentes, errores por similitud, errores mixtos y errores debidos a situaciones emocionales.

Seseman (1931) se preocupó por proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para una metodología didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Consideraba los errores como fenómenos que surgían de leyes que se habían formado mediante una incorrecta combinación de tendencias. Distinguió tres tipos de errores en aritmética: mecánicos, asociativos y funcionales.

Kiessling (1925) se ocupó principalmente de la denominada tendencia al error, especie de predisposición especial de algunas personas para equivocarse; también trabajó en el tratamiento teórico de la evaluación y tratamiento del error.

Rose (1928) trató de establecer una clasificación de las causas del error en educación matemática: inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer los rasgos característicos de un problema matemático.

Este interés en el estudio de los errores por parte de los educadores alemanes continúa a partir de los 60 con nuevas aportaciones, de las que recogemos algunas de las más destacables.

Schlaak (1968) ha observado algunos focos puntuales de error mediante el análisis de las producciones en la resolución de problemas en una prueba; entre ellos destaca la comprensión inadecuada de los enunciados, determinación incorrecta de los números, etc.

Glück (1971) ha trabajado sobre los errores de cálculo, llegando a diferenciar cinco tipos de errores: cambios de operación, aproximación aditiva o multiplicativa, resultados parciales, sólo el primer dígito correcto y errores de transcripción.

Pippig (1977) ha estudiado las deficiencias en el cálculo aritmético y ha tratado de interpretarlas desde una perspectiva psicológica, en especial los errores y dificultades que surgen cuando se trabaja en problemas aritméticos; logra describir causas de error en las diferentes etapas del proceso de solución.

Estudios en la Unión Soviética

A comienzos de los sesenta se consolidó un campo de investigación sobre educación matemática en la URSS, entre cuyos estudios se encontraba el análisis de los errores de los estudiantes y las dificultades individuales del aprendizaje escolar. De este modo se lograron nuevos conocimientos relativos a habilidades matemáticas específicas y sobre aspectos del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Estos trabajos de la escuela soviética recibieron una difusión considerable debido a la traducción realizada por Kilpatrick y Wiszurp, que fue editada en 1967 por el NCTM. Entre las contribuciones realizadas al estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas se destacan dos autores.

Kuzmitskaya determinó cuatro causas de error en el estudio de las dificultades: insuficiencia de la memoria a corto plazo; comprensión insuficiente de las condiciones del problema; errores debidos a la ausencia de reglas verbales para la realización de cálculos; errores por uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas.

Menchinskaya destacó la regularidad de los errores de los estudiantes en educación matemática y enfatizó la complejidad de los procesos que están entre las causas potenciales de error. Señala cuatro áreas de causas, no totalmente diferenciadas: errores debidos a una realización incorrecta en una operación; errores por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente; errores mecánicos por distracción o pérdida de interés; errores debidos a la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados.

Estudios en los Estados Unidos

La tradición investigadora sobre análisis de errores en educación matemática en los Estados Unidos se pone de manifiesto en el trabajo de Buswell y Judd (1925) donde se recogen 31 estudios, realizados hasta ese momento, que tratan explícitamente de errores en matemáticas. Thorndike (1917) con su *Psicología de la aritmética* realiza uno de los primeros trabajos más completos sobre determinación de errores.

Buswell (1925) logró identificar una multitud de errores tipo en las cuatro operaciones aritméticas, ampliando un método de análisis más complejo, en el que incluía no sólo los ejercicios escritos sino también observaciones en el aula y entrevistas para el diagnóstico.

Los planteamientos hacia enfoques más constructivos para la enseñanza de la aritmética recibieron un fuerte impulso del estudio sobre errores realizados hasta la fecha y de las deficiencias encontradas para clasificar e interpretar los errores detectados.

Brueckner (1935) y otros investigadores encauzaron sus trabajos en este campo sobre cinco objetivos:

- Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
- Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y a las operaciones con el cero.
- Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.

- Tratar de clasificar y agrupar los errores.

La última publicación de Brueckner (1984), traducida al castellano, nos presenta un tratamiento y desarrollo sistemáticos de los objetivos anteriores, que ha tenido influencia en la investigación hecha en España.

Esta corriente de investigación ha continuado en años recientes con los trabajos de Engelhard (1975), Lankford (1972 y Cox (1975).

Nuevas corrientes han surgido en los últimos años, así el análisis de errores ha recibido un impulso considerable por parte de los investigadores que han trabajado el diseño de actividades, tratamiento metodológico y organización curricular dirigidos a disminuir las frecuencias en los errores drásticamente. La enseñanza por diagnóstico en matemáticas, desarrollada por Ashlock (1975), Reisman (1972), Robitaille (1976) y el inglés Bell (1986), entre otros, tiene también en el análisis de errores uno de sus instrumentos más importantes. Los trabajos de investigación sobre las estructuras básicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollados por Ginsburg (1977) Erlwanger (1975) y otros, han empleado el análisis de errores como método de investigación, conjuntamente con entrevistas clínicas y estudio de casos. Para estos autores la mayor parte de los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas basados en experiencias particulares e interpretaciones realizadas en base a los conocimientos matemáticos iniciales.

Estudios en España

Por lo que se refiere a España, encontramos que el trabajo realizado en la *Revista Bordón* (1953) por diversos autores Villarejo A. y Fernández Huerta J. en 1953, dedica una reflexión considerable a determinar los errores más usuales en aritmética escolar, así como a presentar unas bases para la enseñanza correctiva en aritmética basada en métodos diagnósticos derivados de los errores detectados.

El interés por el estudio e investigación sobre los errores cometidos por los escolares se recupera en nuestro país en los últimos años, con el despegue producido en la didáctica de la matemática. La mayor parte de los trabajos publicados en la Editorial Síntesis se ocupan de los errores principales detectados en cada uno de los tópicos que integran el área temática correspondiente. Entre estos trabajos destaca el de Centeno (1988) en el que se plantea la necesidad de interpretar los errores para orientar el proceso de enseñanza.

Características de los estudios revisados

Haciendo un resumen de la revisión bibliográfica realizada encontramos que la mayor parte de los estudios sobre errores realizados con anterioridad a 1960 han consistido prioritariamente en recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas y en un análisis de los tipos de errores detectados para, en algunos casos, proceder a una clasificación que permita examinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.

Una de las metas usuales de estos estudios ha consistido en preparar listados de ejercicios en los que la cantidad de práctica propuesta para cada hecho o algoritmo numérico reflejase su dificultad intrínseca, medida por el rendimiento obtenido en poblaciones estándar. Para ello, los investigadores trabajaban con un gran número de niños a los que se pasaban pruebas; con posterioridad a su corrección se ordenaban los ejercicios de acuerdo con el porcentaje de alumnos que los realizaban mal; se trataba de intentos empíricos para descubrir simplemente qué problemas aritméticos eran intrínsecamente sencillos y cuales intrínsecamente difíciles. La influencia de la metodología psicométrica y de las evaluaciones con relación a norma están muy presentes en todos estos trabajos iniciales sobre el estudio de errores.

Brownell (1941) criticó ampliamente la técnica de ordenar combinaciones numéricas y ejercicios con base en los porcentajes de éxitos obtenidos y diseñó nuevos métodos para describir la naturaleza de los errores.

Los trabajos de Tyler en primer lugar, y los de Bloom posteriormente entre muchos otros, produjeron un cambio sustancial en la concepción del currículo y, en particular, en la evaluación de los alumnos. Surgen así las pruebas con relación a criterio en donde son los objetivos marcados para cada disciplina los que establecen inicialmente el estándar adecuado. Las necesidades de expansión de los sistemas educativos a toda la población escolar impulsan la democratización en las aulas, enfatizando la necesidad de abandonar los fuertes criterios selectivos que habían predominado hasta el momento. Los objetivos planteados para cada clase de conocimiento se diversifican en cognitivos, procedimentales y actitudinales y, lo que es más importante, cada uno de los objetivos empiezan a cualificarse como adecuados o inadecuados, para un determinado nivel, en función del rendimiento logrado por los correspondientes alumnos, completando así la tendencia general de evaluar a los alumnos por sus éxitos con una visión alternativa de valorar los objetivos por el porcentaje de éxitos que los alumnos de un determinado nivel logran sobre el mismo.

Esta nueva conceptualización obliga a un análisis más fino de las producciones de los alumnos. ¿Cuáles son las causas por las que determinados aspectos de un objetivo logran éxitos considerables mientras que otros presentan dificultades insuperables para los mismos alumnos?

¿Son las tareas propuestas las que producen los errores? ¿son los conceptos subyacentes? ¿por qué esos saltos bruscos y esas profundas diferencias entre tareas aparentemente muy similares?

La investigación sobre errores

Planteamiento y cuestiones generales

La reflexión actual sobre los errores en los estudios sobre aprendizaje de las matemáticas los considera como parte normal en los procesos de aprendizaje, Brousseau, Davis y Werner (1986) expresan claramente esta idea:

> *Observaciones hechas en el aula ponen de manifiesto que:*
>
> *Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores.*
>
> *Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera.*

Dentro de la pedagogía actual una dimensión importante consiste en considerar los procesos de enseñanza/aprendizaje como procesos de comunicación, pero esta comunicación debe fluir en ambas direcciones: desde los estudiantes hacia el profesor igual que desde el profesor hacia los estudiantes.

Tarea principal del trabajo del profesor consiste en dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante para el profesor conocer qué es lo que sus estudiantes se encuentran pensando, y no limitarse a hacer suposiciones sobre esas ideas.

Al comenzar una observación cuidadosa del trabajo de los alumnos, los profesores se encuentran con una serie de sorpresas que, de nuevo, Brousseau, Davis y Werner describen del siguiente modo:

> *1. Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente.*
>
> *2. Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas ("misconceptions") acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.*
>
> *3. Cuando es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos em-*

> *plean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.*
>
> *4. También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor.*

Esta serie de fenómenos se vienen observando desde hace muchos años, como hemos puesto de manifiesto en el apartado anterior, pero no es hasta fechas recientes cuando se tiene en cuenta la complejidad en la que se encuadran. Al estudiar los errores, de acuerdo con las dificultades encontradas por los alumnos, se debiera reconocer que los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas son, en nuestra consideración, el resultado de procesos muy complejos. Una delimitación clara de las causas posibles de un error dado o una explicación de cada error con la posibilidad de actuar sobre él, es con frecuencia bastante difícil debido a que hay una fuerte interacción entre las variables del proceso educativo y, a menudo, es muy difícil aislar relaciones.

Sin embargo, desde fechas recientes, se ha producido un avance considerable en la investigación sobre educación matemática y se aprecia un interés creciente por lograr un esquema claro de interpretación y previsión de errores y concepciones inadecuadas.

Ya en 1979 Radatz señaló varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación, eran importantes:

> *1. El desacuerdo y escepticismo tanto respecto de los tests con relación a norma como con los tests con relación a criterio para medir los logros en matemáticas han aumentado la atención por los aspectos diagnósticos de la enseñanza.*
>
> *2. Las reformas sucesivas del currículo de matemáticas probablemente no han conducido a nuevos errores y dificultades, pero con seguridad han surgido nuevos errores, debido a los contenidos específicos.*
>
> *3. La individualización y diferenciación de la instrucción matemática requirió, como posteriormente la socialización y las relaciones de comunicación en el aula, de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas; los profesores necesitan de modelos de*

actuación para diagnosticar la enseñanza en los que los aspectos del contenido matemático estén integrados con ayuda de la psicología educativa y la psicología social.

4. La crítica sobre los paradigmas tradicionales de la investigación educativa han estimulado otros métodos de investigación en educación matemática: investigación clínica, estudio de casos y fenomenología didáctica.

En el momento actual, la mayor parte de los investigadores y especialistas (Mulhern G., 1989) coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por los alumnos los siguientes:

- Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos surgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
- Los errores son a menudo extremadamente persistentes, debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular de reglas nemotécnicas. Son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
- Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son muchos más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
- Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Es claro que no pueden ignorarse las capacidades de los estudiantes; tampoco pueden olvidarse los errores que cometen. Brousseau, Davis y Werner[1] señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

[1]. Obra citada.

> *1. Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.*
>
> *2. Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.*
>
> *3. También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.*
>
> *4. Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.*

Estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes ha emergido recientemente como una gran línea de estudio e investigación en Educación Matemática, con implicaciones considerables en gran parte de los campos de estudio en nuestra área.

Principales líneas de investigación

Cuatro son los polos en torno a los cuales se articulan los estudios e investigaciones recientes relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas:

Primero: Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados. Estos trabajos proceden o conectan con alguna teoría psicológica o psicopedagógica que proporciona un marco explicativo y a la que el análisis de errores ofrece una metodología adecuada para aumentar su contenido empírico. También incluimos aquí las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico o estrictamente matemático, que tratan de establecer causas estructurales para los errores debidas a la propia naturaleza del conocimiento matemático, con exclusividad sobre cualquier otro argumento; los trabajos sobre obstáculos son un ejemplo potente de esta opción.

Segundo: Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. Se incluyen aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable. Una línea de trabajo es la denominada enseñanza diagnóstica o por diagnóstico, que trata de prever los errores, detectarlos y proponer los medios para su corrección. También incluimos en estos estudios las propuestas realizadas por otros autores que contemplan los errores como plataformas para incentivar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos. Igualmente quedan comprendidos en este apartado los estudios sobre evaluación y el papel que desempeñan los errores en las valoraciones que se deben realizar sobre las producciones de los alumnos.

Tercero: Se consideran aquí los estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos. Se trata de estudios relativos a la formación del profesorado y al papel que la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos tienen en este proceso de formación. Aunque con un carácter más restringido que los apartados anteriores se trata de un campo de trabajo delimitado que ha tenido cierto desarrollo recientemente.

Cuarto: incluimos en este apartado aquellos trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores. El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto para las producciones de los alumnos han permitido una utilización considerable de procedimientos estadísticos; gran parte de los trabajos de orientación psicométrica van dirigidos al estudio de errores en el aprendizaje. Los programas de ordenador elaborados para sustentar la interpretación de los errores como "bugs" y el desarrollo posterior que se ha hecho de los mismos, aunque tienen una fundamentación teórica clara en el procesamiento humano de la información, tienen igualmente un desarrollo técnico propio por lo que los consideramos en este apartado.

Finalmente, incluimos en este apartado técnicas de análisis puestas a punto por algunos equipos investigadores para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de un determinado error.

Aunque estas cuatro categorías no son excluyentes, las vamos a utilizar para organizar la presentación y realizar una breve descripción de los trabajos e investigaciones relativos a errores del aprendizaje en matemáticas más significativos para nosotros en estos últimos años.

Análisis, causas y clasificación de errores

Característica diferenciadora de la aproximación cognitiva al estudio del aprendizaje con respecto a los estudios conductistas es la necesaria postulación de procesos mentales en la realización de tareas. Sin embargo, los procesos mentales no son visibles; por ello, los investigadores deben recurrir a una variedad de métodos indirectos de observación que permitan hacer inferencias sobre los procesos mentales considerados.

El surgimiento de la teoría del procesamiento de la información ha resultado valioso para el estudio del pensamiento y, en particular, el trabajo de un número creciente de investigadores ha puesto de manifiesto que el pensamiento matemático es especialmente indicado para representarlo mediante modelos de procesamiento de la información.

El método de procesamiento de la información está basado en la suposición de que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento. Sin embargo, estos subcomponentes son, por su naturaleza, internos y, por tanto, hay que utilizar métodos indirectos de observación. Entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas.

Algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos mediante el procesamiento humano de la información se han encontrado estudiando los errores; la utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores. La consistencia puede considerarse a dos niveles, por un lado, a nivel individual, ya que los sujetos muestran una regularidad considerable en su modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares, con poca variabilidad en periodos cortos de tiempo. Por otro lado, también hay consistencias en los grupos humanos, de carácter colectivo; se trata de ciertos errores que personas diferentes cometen en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

Mediante combinación de resultados empíricos con algunos supuestos acerca de estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de error.

Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que se presentan de forma similar en distintos individuos que comparten las mismas experiencias, y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permiten tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas. Los esquemas postulados por Davis tienen las siguientes características:

1. Deben considerarse como esquemas para asimilar información, es decir, para organizar los datos de entrada.
2. Cada estructura de representación puede identificarse por los errores que presenta, con lo que revela parte de su modo interno de trabajo.
3. Cada estructura de representación tiene un origen legítimo, en un aprendizaje inicialmente correcto.
4. Cada estructura de representación necesita un tipo de información inicial y no funcionará correctamente si no se le proporciona toda la información inicial.
5. Los esquemas son persistentes. Es precisamente esta propiedad la que los hace reconocibles como entidades internas de procesamiento de la información: que pueden ponerse en correspondencia con ciertos comportamientos externos observables. Esto se observa porque funcionan de modo idéntico en una variedad de situaciones; producen alteraciones en los datos de entra-

da cuando no parecen encajar con el esquema; cuando se pretende enseñar contra un esquema interiorizado el aprendizaje apenas se produce.

6. La creación y el modo de operación de los esquemas sigue ciertas reglas ordenadas. Una de estas reglas es la denominada de sobregeneralización inicial; un segunda expresa que no se discrimina cuando no es necesario; una tercera dice que el procesamiento tiende a producirse según el esquema asumido y cuando encuentra algún inconveniente se producen modificaciones o adaptaciones que permiten continuar.
7. La recuperación en memoria de un esquema puede realizarse mediante términos clave breves y explícitos.
8. Un alumno que realiza una tarea matemática con éxito encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas que utiliza, que no suelen estar presentes en los enunciados de los problemas o tareas propuestas.

Al postular la representación interna de información, las estructuras de su procesamiento y algunas características de los componentes estructurales propuestos, Davis plantea un mecanismo mediante el que analiza el pensamiento matemático humano y algunos de sus errores.

Algunos de los errores clásicos explicados por el modelo de Davis son:

1. *Reversiones binarias. Ej.* $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$.

2. *Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Ej.* $2x - x = 2$.

3. *Errores por recuperación de un esquema previo. Entre los ejemplos que propone se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas tales como el de adición con dos entradas, el simétrico de la sustracción y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.*

4. *Errores producidos por una representación inadecuada.*

5. *Reglas que producen reglas. Así, de la implicación:* $(x-2)(x-3) = 0 \rightarrow x=2$ *ó* $x=3$*, se pasa a:* $(x-2)(x-3) = 2 \rightarrow x=4$ *ó* $x=5$.

Radatz[2] realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales.

1. *Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua*

[2] Obra citada.

extrajera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.
Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.
La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

- *Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.*
- *Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.*
- *Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.*

- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en matemáticas, Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace un lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

3. Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar

> *incorrectamente los cuantificadores; o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.*
>
> *4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.*
>
> *5. Falta de verificación en la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.*
>
> *6. Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.*

La categorización de estos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos, parece claro que la interpretación en base al procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

Otra aproximación diferente es la realizada por algunos investigadores desde un punto de vista epistemológico, que pasamos a comentar brevemente. Las ideas generales que sustentan este planteamiento son como sigue:

> *La reconstrucción y apropiación de conocimiento matemático exige una labor depurativa constante en la que se ponga en cuestión el conocimiento vulgar, empírico, parcial, falso en unos casos o superficial en otros, que tienen los individuos en cada momento educativo, para que se produzcan rupturas con los conceptos y representaciones necesariamente limitados, y que aparezcan en su lugar nuevas concepciones, teorías y procedimientos, como alternativas más amplias, profundas e integradoras.*

> *Este punto de vista caracteriza el proceso de aprendizaje como resultado de modificaciones cualitativas del conocimiento en la dirección del conocimiento científico y por tanto de un pensamiento más evolucionado. A grandes rasgos, el conocimiento matemático se construye paulatinamente mediante actos sucesivos de abstracción, a partir de la realidad, para desembocar en un nivel en el que el trabajo se realiza con entes y relaciones matemáticas con poca o nula conexión con la realidad en la mayoría de los casos. Se trata de un proceso en cadena con sucesivas rupturas y ampliaciones, en el que aparecen dificultades inherentes al salto cualitativo que supone el paso de la realidad concreta cotidiana a la realidad matemática formal. En este proceso, el individuo debe ir abandonando y sustituyendo progresivamente ciertos tipos de conocimiento por otros más evolucionados, venciendo las resistencias naturales que suelen presentarse ante modificaciones. Los conocimientos antiguos que funcionan no son desechados completamente sino que quedan integrados y valorados dentro de la nueva y más completa visión que surge del aprendizaje. En esta dinámica, los errores que cometen los individuos de forma persistente son manifestaciones de la presencia de un fenómeno más amplio, que algunos autores denominan inadaptación del conocimiento, provocada por obstáculo. El error dentro de esta interpretación es un hecho constatable que tiene su origen o es debido a la presencia de uno o varios obstáculos como fenómenos más generales y arraigados en el individuo* (González, 1992).

Aunque se han hecho serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores en base a una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, el hecho real es que, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas.

Tratamiento curricular de los errores

Siguiendo a Bell (1986) consideramos que la enseñanza diagnóstica surge a partir de los estudios actuales sobre comprensión de la matemática, que presenta dos rasgos principales.

En primer lugar, la enseñanza se basa en tareas críticas que exponen las ideas, correctas y equivocadas, de los alumnos. Proporcionan material para lecciones basadas en el conflicto cognitivo y la discusión. En segundo lugar, se esfuerza en basar la enseñanza directamente en tareas lo más cercanas posible a aquellas en las que se espera que los alumnos apliquen los principios que aprenden. Si se combinan estas dos ideas tenemos que, en su comienzo, hay que elegir una tarea realista que incorpore los conceptos erróneos y provocar así un conflicto cognitivo que desemboque en una discusión dirigida a resolver ese conflicto.

Los trabajos realizados o dirigidos por el profesor Bell orientan su investigación a descubrir y poner de manifiesto un número de áreas susceptibles de errores y equivocaciones graves y ampliamente desconocidas. El comienzo se ha hecho observando los errores de los alumnos al realizar tareas prescritas, aunque luego ha sondeado más profundamente en los errores de concepción que los sostienen y gobiernan. Una vez que se ha puesto de manifiesto que muchos errores no son simples fallos de memoria, sino que tienen raíces más profundas, se hace evidente que la enseñanza necesaria para remediarlos o evitar su aparición tiene que operar a un nivel profundo. El énfasis de la enseñanza se aparta de la adquisición de procedimientos algorítmicos y se dirige hacia el desarrollo de estructuras conceptuales correctas. Los estudios sobre estructuras multiplicativas y comprensión por los alumnos de las mismas, entran dentro de los ejemplos más conocidos de investigación sobre errores para producir un tratamiento curricular.

El material desarrollado se articula en torno a un modelo de lección diagnóstica a la que se incorporan algunos tipos de tareas. La lección diagnóstica típica utiliza uno o unos cuantos problemas críticos (casi siempre desarrollados originalmente como items de tests) para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación siguen problemas similares que se dan con algún tipo de retroalimentación inmediato en cuanto a la corrección, para consolidar la conciencia recién adquirida.

Se han desarrollado varios tipos de tareas que proporcionan diversas maneras de descubrir conocimientos erróneos, provocar la reflexión o activar los conceptos pertinentes. Estas tareas son: empleo de diagramas, sustitución de números fáciles, juegos, invención de preguntas, calificación de deberes y tareas colectivas. El desarrollo alcanzado en la ejemplificación de estas tareas con el material elaborado y editado por Shell Center de la Universidad de Nottingham (U.K.), que ha alcanzado un alto grado de difusión y una ejemplaridad didáctica sobresalientes, nos eximen de entrar en más detalles sobre estos aspectos.

Con posterioridad a las investigaciones del profesor Bell han sido muchos los especialistas que se han dedicado a estudiar, clarificar y tratar de eliminar los conceptos erróneos de los alumnos, abordando las dificultades de transferencia a aplicaciones realistas, incorporándolas desde el comienzo a la enseñanza.

Otra orientación curricular surgida en estos últimos años es la que vienen desarrollando Borassi (1987) y otros autores sobre la utilización de los errores como plataformas para explorar nuevos conocimientos matemáticos, en vez de un uso exclusivamente diagnóstico y preventivo.

Sobre la base de algunos errores usuales que se presentan en el estudio de las fracciones tales como:

$$3/4 + 6/7 = 9/11;\ 2/3 + 5/7 = 7/10$$

se plantean cuestiones como las siguientes:

¿Cuál es la regla alternativa que el estudiante está aplicando aquí?, ¿por qué está haciendo eso?, la regla de adición utilizada ¿puede tener significado en algunos casos? ¿bajo qué condiciones ocurre esto?

¿Hay un sistema matemático en el que opere esta nueva regla de adición? ¿qué propiedades tendría un tal sistema?

Escalonadamente, y mediante una serie de cuestiones con sentido, nos llega a mostrar que, aunque la operación $2/3 + 5/7 = 7/10$ puede considerarse como una equivocación, hay algunos contextos en los que esta regla puede resultar razonable. De este modo llegan a plantearse cuestiones más de fondo, como las siguientes:

¿Puede haber algo que sea cierto y falso a la vez en matemáticas?

¿Cómo se puede decidir si una regla es cierta o falsa en matemáticas?

¿Es siempre posible hacer esa determinación?

Llegando a un nivel de análisis como el que plantean estas otras cuestiones: ¿Cómo escoger reglas y definiciones para establecer un nuevo sistema en matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de la simbolización sobre el aprendizaje de las matemáticas?, ¿Cuál es el efecto de elegir diferentes simbolizaciones sobre el desarrollo de un tópico matemático?

Estas y otras reflexiones dan pie a plantear los errores como punto de partida para una nueva orientación de las clases de matemáticas, que superen el nivel simplemente diagnóstico. La línea argumental es como sigue.

La interpretación exclusiva de los errores como instrumentos de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error discutido. En primer lugar, con tal suposición solamente profesores e investigadores podrían estar implicados en el proceso de analizar el error. Los propios estudiantes quedarían privados de la oportunidad de implicarse en la actividad de explicar y dotar de sentido a sus propios errores, una actividad que puede resultar altamente motivadora y provocadora. Además, la propia creatividad de los investigadores al analizar el error se puede ver constreñida por el enfoque limitado a buscar las causas del error del estudiante de forma que se pueda eliminar. Esto sucede porque consideran el error necesariamente como una desviación de un cuerpo de conocimiento establecido al que no deben conceder la consideración de un reto para los resultados estándar.

Pero a la vista del ejemplo anterior, incluso los errores matemáticos más simples pueden proponer tales retos, sin necesidad de un conocimiento matemático sofisticado, ni tampoco un alto nivel de capacidad matemática.

Hay al menos dos direcciones principales que pueden seguirse en el uso de los errores para motivar la reflexión e interrogarse acerca de la naturaleza de nociones matemáticas: los errores pueden usarse para investigar la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales tales como "prueba", "algoritmo" o "definición". Debido a que utilizamos continuamente algoritmos, pruebas y definiciones cuando estudiamos matemáticas podría suponerse que sabemos muy bien lo que son esas nociones y si estamos cometiendo errores al trabajar con ellas. Por el contrario, es muy difícil explicar qué es lo que caracteriza una prueba matemáticamente buena (o un algoritmo, o una definición) e incluso es más difícil llegar a ser consciente de sus funciones o sus límites. Puede ser mucho más sencillo señalar por qué una cierta prueba no parece correcta, intentar arreglarla y a partir de este proceso concreto intentar abstraer qué propiedades deseamos que tenga una prueba matemática.

Los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía. De nuevo esto implica utilizar el contraste destacado por el error, al igual que de su contenido informativo, aunque con un enfoque distinto a un nivel superior de abstracción.

Utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes. Comprender una materia implica mucho más que simplemente "aprender con comprensión" su contenido básico. También incluye comprender su filosofía, la metodología empleada, el alcance y las limitaciones de la disciplina; debe incluir el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina. Este tipo de comprensión, por desgracia, no es muy común en especial en matemáticas, y tratar de mejorarlo debiera ser extremadamente importante tanto para los estudiantes como para los profesores de cada nivel y materia.

Para poder apreciar completamente el potencial educativo de los errores como plataformas para interrogar, en los dos niveles identificados, también es importante comprender la variedad de cuestiones y exploraciones que pueden motivarse por diferentes clases de errores matemáticos. De hecho, aunque la mayor parte de la gente parece identificar los errores con el uso o la comprensión deficientes de una regla, los errores matemáticos pueden presentar características bastante diferentes, al menos con respecto a:

- Grado de incorrección: además de resultados falsos, se pueden tener de hecho resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos ineficientes o inaceptables, resultados que se pueden tomar como correctos en un contexto determinado pero no en otro, problemas para los que no se ha llegado a una solución, etc.
- Contexto matemático: es decir, si estamos trabajando con problemas, algoritmos, teoremas, definiciones, modelos, etc.

El punto de vista elegido por estos autores puede resumirse diciendo que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. También los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza de las matemáticas.

Esta línea de estudio e investigación sobre el uso de errores en el desarrollo curricular está sólo en sus comienzos y necesita aún de esfuerzo investigador para llegar a propuestas más sistemáticas y completas.

Para concluir este apartado realizaremos algunas reflexiones en torno a las conexiones entre el estudio de errores y la evaluación.

Son muchos los investigadores que han cuestionado estos últimos años la naturaleza estrictamente psicométrica de la evaluación escolar. Los aspectos cuantitativos predominantes en los tests y otros métodos similares para medir el rendimiento no proporcionan criterios suficientes para procedimientos instructivos eficientes[3].

En los últimos años venimos asistiendo al desarrollo de nuevos modelos de evaluación que requieren de nuevos procedimientos de valoración; pero tan importante o más que la valoración que reciben los alumnos, está el hecho de que esas valoraciones sirvan para reorientar su comprensión ayudándoles en la superación de sus concepciones deficientes y en la supresión de los errores. La evaluación no debe reducirse a los aspectos puramente externos y formales sino que debe lograrse una interiorización de los juicios alcanzados para proceder a una modificación y avance en los conocimientos. Nesher (1987) nos aporta algunas consideraciones claves para una actualización del papel de la evaluación, diferenciando las pruebas de evaluación de los ejercicios o instrumentos para la investigación.

Las recomendaciones de Nesher, resumidamente, dicen:

> *1. El aprendiz deberá ser capaz, durante el proceso de aprendizaje de valorar las limitaciones e incomodidades de una pieza dada de cono-*

---

[3]. Radatz H. Obra citada.

cimiento. Esto puede ser enfatizado desarrollando entornos de aprendizaje que funcionen como sistemas de retroalimentación dentro de los cuales el aprendiz sea libre para explorar sus creencias y obtener respuesta específica a sus acciones.

2. En los casos en que el aprendiz reciba retroalimentación inesperada, si no queda bloqueado por ella, deberá ser estimulado y motivado para continuar e interrogar respecto a su tarea.

3. El profesor no puede predecir completamente el efecto del sistema de conocimiento previo del estudiante en un nuevo entorno. Más aun, antes de que complete su instrucción, debiera proporcionar oportunidades al estudiante para manifestar sus concepciones deficientes y así relacionar la instrucción subsiguiente a estas concepciones.

4. Las concepciones deficientes son, por lo general, una excrecencia de un sistema de conceptos y creencias ya adquiridos aplicados equivocadamente a un dominio. No debieran tratarse como cosas terribles que deben desarraigarse ya que ello puede confundir a los aprendices y destruir su confianza en el conocimiento previo. En vez de ello, el nuevo conocimiento debiera conectarse con el esquema conceptual previo del estudiante y situarlo en la perspectiva correcta.

5. Las concepciones deficientes no sólo se encuentran tras las realizaciones erróneas, sino que también se ocultan tras muchos casos de ejecución correcta. Una teoría de la instrucción deberá cambiar su enfoque de las realizaciones erróneas hacia la comprensión del sistema de conocimiento completo de los estudiantes, del cual se derivan sus reglas de actuación.

6. Los items diagnóstico que discriminan entre concepciones adecuadas y deficientes no son necesariamente los mismos que se emplean en los ejercicios y pruebas escolares. Un esfuerzo especial de investigación debiera hacerse para construir items diagnóstico que establezcan la naturaleza específica de las concepciones deficientes.

También Romberg (1989), insiste en la complejidad de las tareas de evaluación y en la necesidad de superar un tratamiento exclusivamente penalizador de las producciones erróneas o incorrectas de los alumnos.

Los errores y la formación del profesorado

Al comienzo de este apartado ya se hizo referencia a la función prioritaria de los profesores en dirigir y guiar el desarrollo de ideas matemáticas en las mentes de los escolares, razón por la cual era de importancia destacable el entrenamiento en pautas de observación cuidadosa sobre el trabajo de los alumnos con el fin de conocer en profundidad lo que los estudiantes están pensando. Este aprendizaje debe iniciarse durante el periodo de formación inicial. A la pregunta *"¿qué conviene que aprendan los profesores en formación al realizar la observación de los alumnos en su trabajo matemático?"*, Brousseau, Davis y Werner[4], contestan señalando algunas ideas directrices a tener en cuenta para esa observación:

> *1. Proporcionar a los estudiantes una oportunidad para ver lo que conocen y lo que pueden inventar o descubrir con antelación a enseñarles un método, técnica o concepto supuestamente novedoso.*
>
> *2. No dejar a la casualidad la creación de las representaciones mentales de los alumnos. Se pueden proporcionar experiencias para los alumnos que influirán considerablemente en las representaciones mentales que ellos construyan mentalmente.*
>
> *3. Mediante las relaciones de comunicación con los alumnos, el profesor puede conocer las representaciones mentales que los alumnos están empleando.*

Además del entrenamiento en la observación de las actuaciones de los alumnos y en una guía efectiva para ayudarles a superar las concepciones inadecuadas y los errores, los profesores en formación inicial y permanente deben tener un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación que hemos hecho en los apartados anteriores relativas a la clasificación de errores, determinación de causas, esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje. Todas estas cuestiones tienen interés intrínseco para la formación de profesores y deben ser objeto de estudio, reflexión y práctica explícitas.

Hay, finalmente, otras dos cuestiones de interés en relación con la formación de profesorado y el estudio de los errores. Por un lado, el análisis de los errores cometidos por los alumnos y la discusión en seminario de vías posibles para su corrección ponen de manifiesto las propias concepciones que tiene cada profesor en formación respecto del conocimiento matemático y la naturaleza de su aprendizaje. Esta comprensión sobre las propias creencias permite asumir críticamente los planteamientos profesionales de cada profesor en formación, observando las incoherencias y aspectos olvidados y promoviendo una concepción más completa de las tareas docentes.

---

[4]. Obra citada.

Introducir en el aula una consideración sistemática de los errores va más allá de introducir un nuevo tópico en el currículo, y hace necesario la enseñanza de estrategias adecuadas. Esto es debido a que tanto los profesores como los alumnos tienen fuertes concepciones previas sobre los errores y, por tanto, estas consideraciones influirán sus comportamientos en relación con las actividades que impliquen errores. Será pues importante que los profesores clarifiquen sus concepciones sobre las matemáticas, su aprendizaje y los errores para que puedan ayudar a sus alumnos a superar el sentimiento negativo que las personas tienen hacia los errores.

Por otro lado, también los profesores en formación cometen errores en la realización de tareas matemáticas, muchas de ellas similares o debidas a las mismas causas que las que cometen los escolares. Poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores cometidos es una tarea formativa ineludible para el profesor en formación; conviene aprovechar este tipo de actividades para proponer esquemas de trabajo correctivos y situaciones en las que el conflicto cognitivo entre las concepciones inadecuadas y las adecuadas se ponga fuertemente de manifiesto y obliguen a una reestructuración positiva de los esquemas previos.

Algunas investigaciones recientes han trabajado en esta línea (Tirosh y Graeber, 1989).

Técnicas de análisis

A lo largo de los estudios e investigaciones en educación matemática podemos encontrar una gran variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas. Mulhern[5] los agrupa en cuatro amplias categorías:

> *1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado es cercano al método psicométrico, y ha dominado la educación estatal hasta hace poco.*
>
> *2. Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.*
>
> *3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas, o bien al variar aspectos de las tareas los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre qué estrategias se han utilizado.*

5. Obra citada.

4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error realizados por los individuos; especula sobre las posibles causas de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

Ya hemos indicado, al considerar los antecedentes en el estudio de errores, que la mayor parte de los estudios hasta fechas recientes eran de la primera de las clases mencionadas, con una fuerte influencia de la metodología psicométrica. También hemos considerado en detalle diversas aproximaciones a la clasificación de errores. Vamos a presentar el planteamiento que están siguiendo algunos autores como Nesher[6] al realizar el análisis de patrones de errores como síntomas de concepciones deficientes o inadecuadas ("missconceptions").

La noción de concepción deficiente señala una línea de pensamiento que causa una serie de errores, todos ellos procedentes de una premisa incorrecta subyacente, en vez de errores esporádicos, desconectados y no sistemáticos. No siempre resulta sencillo seguir la línea de pensamiento de los niños y poner de manifiesto cómo es de consistente y sistemático. La mayor parte de los estudios, sin embargo, informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia, aunque ésto no explica su origen y por tanto no pueden tratarse sistemáticamente.

Parece que esta carencia de generalidad en los análisis podría evitarse si se mira en los niveles de representación más profundos en los que evoluciona un sistema de significado que controla las realizaciones superficiales. Cuando se detecta un principio erróneo en este nivel más profundo, es posible explicar no un caso sino toda una clase de errores. Denominamos a una tal regla para la guía de errores una concepción deficiente.

La aplicación de estos principios al estudio de dos tipos de errores detectados en la comparación de números decimales (Resnick et al., 1989), sirve para poner de manifiesto los esfuerzos de los alumnos por proporcionar sentido conceptual a nuevos conocimientos matemáticos recibidos mediante instrucción en términos de conocimientos previamente dominados; ésto es lo que explica la aparición de los errores. En este estudio, el diseño de una prueba en la que se tienen en cuenta todas las posibles actuaciones de los alumnos en términos de las concepciones deficientes que se hipotetizan, proporciona un modelo para analizar los patrones de error como categorías consistentes, de un modo más detallado y directo que en trabajos anteriores.

Las dificultades que se presentan usualmente para detectar estos errores, debido a que los alumnos pueden obtener buenas calificaciones en pruebas de

---

6. 'Obra citada.

comparación de decimales (que es el contenido que se estudia), aún cuando se encuentren afectados por algunas de las concepciones deficientes subyacentes, llevan a realizar las siguientes consideraciones de carácter general:

> *1. Para hacer el diseño sobre la instrucción relativa a un nuevo conocimiento, no es suficiente con analizar los procedimientos y sus requisitos previos, que es lo que se hace en muchos casos. Debemos conocer cómo este nuevo conocimiento se integra en un gran sistema de significados, que el niño ya posee, y del cual va a derivar sus directrices.*
>
> *2. Es crucial conocer específicamente cómo los procedimientos ya conocidos pueden interferir con el material que se está aprendiendo.*
>
> *3. Todos los nuevos elementos que se asemejan, pero son distintos de los antiguos, debieran discriminarse claramente en el proceso de instrucción, y el profesor debiera esperar encontrar errores en estos elementos. Es innecesario decir que, aunque produzcan mayor número de respuestas erróneas, tales elementos deben presentarse a los niños, y no tratar de evitarlos.*

Otro desarrollo técnico avanzado en el estudio de errores, ya comentado, es el realizado en el campo de la sustracción al aplicar el modelo de los bugs, considerando la metáfora de la mente humana como un ordenador. Maurer[7] nos explica los resultados más importantes de esta técnica de análisis. El conocimiento de los tipos de errores de sustracción que cometen los estudiantes es ahora tan detallado que se han escrito programas de inteligencia artificial que cometen los mismos errores que los estudiantes, proporcionando al programa sólo unos cuantos principios básicos. Otros programas sirven para diagnosticar rápidamente qué bugs tiene un estudiante determinado. Otros ayudan a diagnosticar los bugs de los demás mediante un entrenamiento en esta tarea. Practicando las destrezas de búsqueda de bugs, los estudiantes llegan a reconocer que sus propios razonamientos pueden tener bugs. También la teoría sobre la generación de bugs ha empezado a proporcionar ideas sobre las mejores y peores elecciones de ejemplos y sobre los métodos mejores y peores para seleccionar material. Esto era algo que no podía hacer el antiguo conocimiento sobre errores sistemáticos.

En cualquier caso, la investigación actual indica que muchas respuestas a problemas que han sido considerados descuidos son, de hecho, el resultado de concepciones inadecuadas sistemáticas sobre sustracción.

La figura muestra el trabajo de un estudiante con un bug. El bug se refiere a “llevarse” o “pedir prestado”, en este caso “llevarse” de 0:

---

7. Obra citada.

$$\begin{array}{r} a\ 0\ b \\ -\ \underline{x\ y\ z} \end{array} \qquad \text{donde z es mayor que b}$$

El estudiante transforma la sustracción en:

$$\begin{array}{r} (a-1)\ \ 0\ \ (b+10) \\ -\ \underline{\ \ x\ \ \ \ y\ \ \ \ \ z\ \ } \end{array} \qquad \text{en vez de:} \qquad \begin{array}{r} (a-1)\ \ 9\ \ (b+10) \\ -\ \underline{\ \ x\ \ \ \ y\ \ \ \ \ z\ \ } \end{array}$$

Procedimiento que conduce a su vez a una segunda dificultad:

0 - y = y (una versión)   0 - y = 0   (otra versión).

No hay nada aleatorio o chapucero en el trabajo del estudiante con bugs como estos. Está trabajando cuidadosamente, siguiendo un procedimiento preciso, aunque incorrecto.

¿Qué explican tales bugs? Imaginemos que el estudiante comprende el algoritmo de la sustracción de una manera muy mecánica. Lo ve como una mera manipulación columna por columna, excepto si el dígito de arriba de una columna es más pequeño que el de abajo, en cuyo caso se disminuye el dígito c de su izquierda en 1 y se sustituye d por 10 + d. Imaginemos además que el profesor nunca ha presentado el caso en que c es cero, o que el estudiante estaba distraído cuando el profesor lo hizo. ¿Qué hace el estudiante en un ejemplo en el que c vale cero? No se evade, sabe que debe dar una respuesta. Así, generaliza imaginando alguna versión del procedimiento que incluye todos los casos previos y también este. En este ejemplo, la idea del estudiante es que el dígito del que se pide prestado no necesita ser el que está inmediatamente a la izquierda, sino que puede ser el dígito no nulo más cercano a la izquierda. De este modo, ante una laguna en el algoritmo, el estudiante hace un "remiendo" incorrectamente, creando un bug. El estudio de tales correcciones se llama "Repair theory".

Si bien los críticos a la Repair theory han puesto de manifiesto las limitaciones de los análisis hechos sobre esta fundamentación, en especial por las características tan específicas que tienen los conocimientos a los que se puede aplicar, que le dan un carácter limitado y restrictivo, no cabe duda que, en su campo, la potencialidad del análisis logrado es bastante completo.

Conclusión

Hemos visto que el campo de estudio sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares se viene desarrollando y definiendo de manera crecientemente productiva durante los últimos años. Su interés para la mejora en la comprensión y conocimiento de los alumnos, así como para una realización eficaz de las tareas docentes, es indudable. Creemos que, en los próximos años, asistiremos a un mayor desarrollo de estos estudios al avanzar en la comprensión teórica y en sus implementaciones prácticas. Para nosotros constituye un campo de interés permanente en el que pensamos continuar desarrollando una parte considerable de nuestras investigaciones en el área.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1989). *Epistemologie et Didactique*. Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathematiques. París: University Paris VII.

Bachelard, G. (1978). *La filosofía del no*. Buenos Aires: Amorrortu.

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Baruk, S. (1985). *L'age du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris: Editions du Seuil.

Belll, A. (1976). *The learning of general mathematical strategies*. Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Bell, A. (1986). *Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas*.

Blando, J., Kelly, A., Schneider, B., Sleeman, D. (1989). Analyzing and modeling Arithmetic Errors. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20, pág. 301-308.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Borassi, R. (1986). Algebraic Explorations of the Error 16/64 = 1/4. *Mathematics Teacher*. Vol. 79, pág. 246-248.

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of Mathematics*. Vol 7 pág. 2-9.

Bordón, (1953). *Revista de la Sociedad Española de Pedagogía* . Tomo V, nº35.

Bouvier, A. (1987). The rigth to make mistake. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7 pág. 17-25

Brekke, G. (1991). *Multiplicative Structures at ages seven to eleven. Studies of children's conceptual development, and diagnostic teaching experiments*. Thesis for the Ph. D. degreé. Nottingham: University of Nottingam.

Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Ed.): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Brown, J., Burton, R. (1978). *Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematics skills.* Cognitive Science 2, pág. 155-192.

Brown, J., Vanlehn, K. (1982). Towards a generative Theory of 'Bugs', en Carpenter T., Moser J., Romberg T., (Edt.s). *Addition and Subtraction*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Brownell, W. (1941). *Arthimetic in grades I y II. A critical summary of new and previously research*. Durham: Duke University Press.

Brueckner, L., Bond, G. (1984). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*. Madrid: Rialp.

Buswell, G., Judd, C. (1925). *Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic*. Chicago: University of Chicago.

Castro, E. (1975). *El Cálculo Aritmético en la E.G.B*. Tesina de Licenciatura. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E., Rico, L. (1992). *Choice of Structure and Interpretation of Relation in Multiplicative Compare Problems*. New Hampshire. Proceedings XVI Annual Conference of the International Group of PME.

Cebulski, L., Bucher, B. (1986). Identification and remediation of children's subtraction errors: a comparison of practical approaches". *Journal of School Psychology*. Vol. 24, pág. 163-180.

Centeno J. (1988). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 11, pág. 1-21.

Cochran, W., Cox, G. (1990). *Diseños Experimentales*. México: Trillas.

Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

González, J. L. (1992) Pensamiento relativo. *Análisis de errores en tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación*. Tesis doctoral inédita.

González, E., Gutiérrez, J., Rico, L., Tortosa, A. (1985). La relación verbo-operación en la resolución de problemas aritméticos del Tercer Ciclo de E.G.B. *Actas II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*. Almería, pág. 258-267.

Graeber, A., Baker, K. (1991). Curriculum Materials and Misconceptions Concerning Multiplication and Division. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 13, pág. 25-37.

Graeber, A., Tirosh, D., Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, pág. 95-102.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of Mathematics 11-16*. Londres: J. Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Earlbaum Associates.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. En Hatfied L. y Brandbard D. (Ed.) *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: Eric-Smeac.

Kilpatrick, J. (1992). A history of Research in Mathematics Education, En Grouws D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lewis, A., Mayer, R. (1987). Students' miscomprehension of Relational Statements in Arithmetic word Problems. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 79, pág. 363-371.

Maurer, S. (1987). New knowledge about errors and New vievs about learners: What they mean to educators and more educators would like to know.

En Schoenfeld, A. (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 14, pág. 415-429.

Molina, F. (1989). *Propuesta de Innovación Curricular sobre Análisis Numérico en el Bachillerato*.Tesina de Licenciatura. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S., Zaslavsky, O. (1986). Students' distortions of Theorems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 8, pág. 49-57.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S., Zaslavsky, O. (1987). Sometimes Students' Errors are our fault. *Mathematics Teacher*. Vol. 80, pág. 191-194.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 18, pág. 3-14.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: making inferences about internal processes. En Greer B. y Mulhern G. (Eds.) *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.

Nesher, P. (1987). Toward an Instructional Theory: the Role of Students' Misconceptions. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 7, pág. 33-39.

Pinchback, C. (1991). Types of Errors Exhibited in a Remedial Mathematics Course. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 13, pág. 53-62.

Popper, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico*. México: Siglo XXI.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 9, pág. 163-172.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 1 (1), pág. 16-20.

Resnik, L., Nesher, P., Leonard, F. Magone, M., Omanson, S., Pelet, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, pág. 8-27.

Rico, L. y Col. (1982). Programación del Bloque de Fracciones en el ciclo Medio de la E.G.B. *Actas de las II Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Sevilla, pág. 612-640.

Ric,o L. y Col. (1982). *Guía del Profesor, Matemáticas 3º, 4º y 5º E.G.B.* Madrid: Ed. Anaya.

Rico, L., Castro E. (1983). Cero ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de Cero. Cádiz: *Actas I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*, pág. 152-161.

Rico, L. y Col. (1985). *Guía del Profesor, Matemáticas 6º,7º y 8º E.G.B.* Madrid: Ed. Anaya.

Rico, L. y Col. (1985). *Investigación "Granada-Mats". Un análisis del Programa Escolar para el Area de Matemáticas*.. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Rico, L. (Director) (1988). *Didáctica Activa para la Resolución de Problemas*. Granada: Universidad de Granada.

Romberg, T. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En Robitaille D. (Ed.). *Evaluation and Assessment in Mathematics Education*. París: Unesco.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on undertanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 10, pág. 24-36.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thorndike, R., Hagen E. (1989). *Medición y Evaluación en Psicología y Educación*. México: Trillas.

Tirosh, D., Graeber A. (1989). Preservice Elementary Teachers' Explicit Beliefs about Multiplication and Division. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 20, pág. 79-96.

Tirosh, D., Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 21, pág. 98-108.

Wollman, W. (1983). Determiming the Sources of Error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 14, pág. 169-181.

Técnicas de evaluación para profesores de secundaria

Dr. Jeremy Kilpatrick

Universidad de Granada

Presentación

El material que se expone a continuación tiene por objeto presentar algunos de los puntos más relevantes del desarrollo del curso, "Técnicas de evaluación para profesores de secundaria" dictado por el Dr. Jeremy Kilpatrick. Estos puntos fueron seleccionados conjuntamente por el profesor Kilpatrick y por el personal de "una empresa docente".

Se escogió una presentación muy particular: corresponde a las notas que un asistente pudo tomar durante el curso, aunque se mencionará de manera explícita el objetivo de cada sesión. Ocasionalmente se incluirán ejemplos concretos o descripciones de los procesos, así como diálogos en los que puede descubrirse la intención del profesor, para hacer énfasis en algún objetivo de la sesión. Somos conscientes de que esta forma de presentación tiene limitaciones; sin embargo, consideramos que, dada la metodología que se desarrolló, es la más adecuada. A lo largo del texto se darán referencias bibliográficas, las cuales se presentan al final de este documento.

Se ha organizado el material en las siguientes secciones:

- Introducción.
- Primera sesión a quinta sesión
- Muestra de trabajos entregados por los asistentes.
- Referencias bibliográficas.

J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), Educación Matemática, 109-131.

Introducción

El curso tuvo como propósito familiarizar a los profesores de secundaria con varias técnicas de evaluación en clase e invitarlos a reflexionar acerca de la evaluación que ellos realizan. Durante el curso se revisaron tópicos de medición originados por pruebas que se usan actualmente y se presentaron técnicas que no son usadas con frecuencia en la enseñanza de las matemáticas.

El curso iba dirigido a profesores de matemáticas de secundaria, aunque se contó con practicantes y con profesores universitarios. Se realizaron actividades en grupo e individuales; hubo exposición por parte del profesor y puestas en común sobre trabajos concretos. Los profesores, como conclusión del trabajo, aplicaron una evaluación en sus clases y produjeron un documento comentando qué había sucedido.

Primera sesión

Objetivo

Dar la oportunidad al profesor para que haga explícito lo que sabe sobre aspectos generales relacionados con el tema y que exprese qué hace en la práctica con esos puntos.

Notas de clase

Durante mucho tiempo en Estados Unidos se utilizó la palabra "Evaluation" para cualquier proceso de evaluación. Ultimamente se está utilizando exclusivamente para los procesos globales de evaluación de proyectos. Para la evaluación que el maestro realiza en clase, se utiliza el término "Assessment", el cual ha sido frecuentemente traducido como "valoración". Durante el curso se trabajará en "assessment", y se utilizará la palabra "evaluación" para referirse a él.

Tarea: hacer una lista para responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo realiza usted la evaluación de sus estudiantes? (How do you assess your students?)

Se produjo una lista por consenso general; sin embargo, en algunos casos en vez de decir cómo evaluamos, decíamos qué evaluamos: atención, organización, grados de asimilación, etc. El profesor Kilpatrick hizo énfasis en que diferenciáramos estos puntos. La lista que resultó fue la siguiente:

- Evaluación de la clase.
- Autoevaluación oral.
- Talleres (nuevos contenidos) en clase.
- Exámenes escritos: Falso-Verdadero con justificación, problemas y algoritmos.

- Talleres para la casa.

Observación del desempeño en clase: preguntas y reflexiones que hacen los estudiantes; cuando hay errores, volver a preguntar; uso del lenguaje oral, escrito y gráfico; razones para justificar; formulación de conjeturas e hipótesis.

- Trabajos en grupo: participación, persistencia.
- Participación en clase.
- Actividades para mirar rapidez.
- Problemas desafíos: cómo se aborda.
- Tablero.
- Pruebas de manejo de representación espacial.
- Problemas planteados por ellos.
- Entrevistas con estudiantes, en casos especiales.

¿Qué significa "evaluación"? (What does assessment mean?). en esta ocasión se observa mucha claridad en las respuestas que dimos:

- Instrumento que permite medir el cambio de un individuo sometido a un proceso de educación.
- Análisis de un proceso de actividad cotidiana.
- Determinación del logro de objetivos, detección de fallas del proceso de enseñanza-aprendizaje a nivel de alumnos-profesor-grupo.
- Proceso que juzga, valora y controla el desarrollo del conocimiento matemático. Proceso y resultados.
- Proceso que permite seguir el desarrollo del pensamiento matemático.
- Un "momento" para parar, mirar atrás y decidir sobre el logro de objetivos.
- Diagnóstico del estado alumno-clase con relación a los objetivos.

¿Porqué realiza usted evaluaciones? (Why do you assess?): también hubo mucha claridad en este punto. La lista resultante fue la siguiente:

- Seleccionar, promover y estimular a los alumnos.
- Observar los logros.
- Validar socialmente el saber matemático.
- Condicionar la continuación del curso o tomar nuevas decisiones sobre la modificación de la enseñanza.
- Verificar desarrollo de comprensión, aplicación del conocimiento, desarrollo de actitudes de comprensión, capacidad de compromiso, relación afectiva con el maestro.
- Verificar si los instrumentos son apropiados.
- Cumplir con normas administrativas.
- Informar a los padres del desempeño de los hijos.

- Mostrarle al estudiante lo que sabe.
- Corregir errores.
- Valorar el trabajo profesor-estudiante.
- Hacer seguimiento del estudiante.

Como conclusión, el profesor Kilpatrick planteó una cuestión acerca de la forma en que se relacionan el por qué y el cómo. Nos invitó a llenar una matriz que tuviese como filas las respuestas al porqué, y por columnas las respuestas al cómo. Tenemos que ver si todos los porqué tienen una evaluación y viceversa.

	Autoevaluación oral	Talleres en clase	Exámenes escritos	Tablero
Seleccionar			X	
Promover			X	
Estimular	X	X		
Observar logros		X	X	X
Validar el saber			X	X
Condicionar la continuación			X	

En este ejemplo no se utilizan todos los cómo y los exámenes escritos prácticamente se usan para todo. El profesor Kilpatrick nos invitó a estudiar la posibilidad de que cada evaluación pueda utilizarse en cada uno de los por qué y a revisar la propiedad de su utilización actual en cada por qué.

Finalmente, nos asignó una tarea que debíamos entregar el último día de clase. Debíamos escoger de la lista uno de los cómo y aplicarla en nuestra clase. A continuación debíamos escribir un reporte sobre lo que pudimos observar, con respecto al proceso.

Pidió igualmente leer para la siguiente sesión “Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions.” (NCTM 91).

Segunda sesión

Objetivos

- Confrontar lo que el profesor sabe y cree con lo que especialistas o teóricos han dicho con relación al proceso de evaluación.
- Presentar situaciones típicas de valoración de rendimiento.

- Hacer vivir al profesor situaciones de alumno de manera que pueda confrontar la teoría con lo que sucede en la realidad en dos niveles: el nivel del estudiante y los procesos que vive y el nivel del maestro que debe evaluar esos procesos y no sólo productos.

Con base en el texto "Concepto de evaluación", (Rico, 90) se vio que hay otros por qué para los cuales se puede utilizar la evaluación. Este grupo reconoció que no la usa con esos propósitos. La lista de puntos es la siguiente:

- Valorar la adecuación de un texto para adquirir determinados conocimientos.
- Valorar, en el desarrollo de una investigación sobre cogniciones iniciales, la habilidad de los niños de pre-escolar para captar determinadas relaciones matemáticas.
- Conocer la capacidad matemática de la persona o personas a las que se les va a ofrecer un empleo.
- Hacer una valoración global sobre el grado de madurez conseguido en el dominio de unos cuantos hechos, destrezas, conceptos o estrategias de una parcela de las matemáticas, al concluir un período de formación.

Los siguientes son los mitos que se tienen en Estados Unidos:

- Aprender matemáticas significa manejar un conjunto determinado de destrezas básicas. Por lo tanto las pruebas de matemáticas se deben centrar en qué tanto maneja el estudiante esas destrezas.
- Los problemas y las aplicaciones sólo pueden venir después del manejo de las destrezas básicas.
- Primero enseñamos y luego evaluamos.
- Los estudiantes aprenden únicamente por imitación y memorización.
- Casi siempre hay una sola respuesta correcta a un problema de matemáticas.
- Las pruebas objetivas de selección múltiple son los únicos indicadores válidos y confiables de la calidad del rendimiento matemático.
- El propósito de la evaluación es determinar cuáles estudiantes saben y cuáles no, para así poder dar notas y establecer un orden de puestos de acuerdo a ellas.
- Las pruebas objetivas de selección múltiple son las que miden mejor las ideas más importantes de matemáticas.
- La asignación de notas debe hacerse usando una distribución acampanada.

- Dentro del salón de clase el profesor es la única persona capaz de evaluar el progreso de los estudiantes.
- Las formas alternativas de evaluación son menos objetivas que las pruebas tradicionales y sólo éstas últimas dan la información para la "contabilidad educacional" (Educational Accountability).

Los siguientes son los mitos colombianos:

- Los estudiantes aprenden por memorización e imitación.
- En la educación primaria: memorización, imitación, repetición.
- En la educación secundaria: primero enseñamos y luego evaluamos; no hay un diagnóstico de la situación de los estudiantes cuando entran a la secundaria.
- El profesor de matemáticas no es accesible. El profesor de matemáticas es un monstruo.
- Las formas alternativas son menos objetivas que las tradicionales.
- Sólo el profesor es quien enseña.
- Los genes matemáticos existen.
- Se debe cubrir todo el programa de matemáticas.
- Cuáles estudiantes saben y cuáles no, y con base en eso dar notas para clasificarlos.
- Saber matemáticas es manejar las destrezas básicas.
- Las notas representan el saber matemático, el promedio es suficiente.

El profesor Kilpatrick presentó los principios que están rigiendo en este momento el proceso de evaluación en los Estados Unidos:

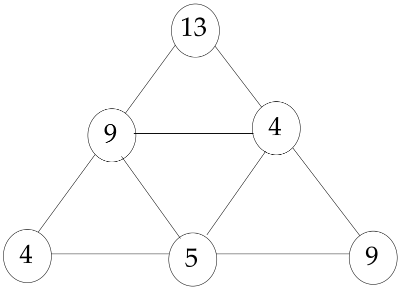
- *Principio de contenido*: cualquier evaluación del aprendizaje matemático del alumno debe reflejar lo que es más importante que él aprenda.
- *Principio de aprendizaje*: cualquier evaluación del aprendizaje debe aportar a las prácticas de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.
- *Principio de acceso*: cualquier evaluación de matemáticas debe permitir que todos los estudiantes tengan acceso al aprendizaje de las matemáticas.

A continuación se empezó a trabajar en 'evaluación de rendimiento' (performance assessment). En este proceso, se le da al estudiante algo para hacer; el profesor observa qué hace; realiza entrevistas para determinar la calidad de algunos procesos y ve qué produce. Esto último puede ser mediante un proyecto, un reporte o una discusión.

Esta evaluación permite averiguar qué saben y qué hacen realmente los estudiantes. No se asigna el ejercicio en que se escoge una respuesta de un conjunto posible; por lo general es un ejercicio que toma mucho tiempo para su solución; es el tipo de ejercicios en el que el estudiante puede realmente hacer matemáticas. Normalmente se impone una resolución en grupos. Algunos ejemplos son los siguientes:

Triángulo numérico. Observe la Figura. La resta de los números de los vértices de la base del triángulo exterior es el número que está en el vértice superior. Al triángulo se le asigna un valor, que es la suma de todos los números de los vértices. Los números que están sobre las aristas son la diferencia de los números de los extremos. Es posible crear un nuevo triángulo tomando como vértices los números de las aristas. Sucesivamente se van construyendo triángulos mediante estas reglas. Se formulan las siguientes preguntas:

- ¿Qué valor se le asigna al triángulo luego del paso 1500?
- ¿Qué sucede cuando se empieza con números diferentes?



Patrones de recubrimiento. Producir un patrón para recubrir un área utilizando un conjunto de triángulos azules y blancos.

Doblajes. Doblar una hoja de papel por la mitad y luego volver a doblarla por la mitad. Realizar un corte en un extremo. Dibujar cómo se verá el papel cuando se desdoble.

Trabajamos en el problema del triángulo. Paralelamente debíamos ver cómo íbamos a evaluar la actividad.

Tercera sesión

Objetivos

- Dar pautas para el proceso de evaluación de rendimiento.
- Distinguir aquellos puntos que son relevantes para realizar el proceso de evaluación.

- Crear la conciencia de que se requiere más que tener la respuesta correcta para tener una valoración del rendimiento de los estudiantes.

Iniciamos revisando nuestro trabajo en el ejercicio del triángulo. La respuesta a la primera pregunta fue 2. Es decir, cuando se empieza con los números 4, 5 y 13, el valor del triángulo en el 'limite' es 2. Alguien encontró un valor mayor a 2; con 3, 6 y 9 se obtiene 6. Alguien dijo: "Con n, n, 0 se obtienen $2n$". Esto hacía parte de la respuesta a la segunda pregunta. Lo que se hizo a continuación fue ver cómo habíamos evaluado nuestro trabajo y cómo evaluaríamos el rendimiento observado. Esto fue lo que respondimos:

1. Con un ejercicio análogo, es decir no evaluaría el ejercicio en sí sino que evaluaría el rendimiento a través de otro ejercicio similar.
2. Autoevaluación: los estudiantes califican su trabajo y se dan una nota; además justifican la nota que se asignaron.
3. Calidad de las preguntas, creatividad, organización-generalización, precisión.
4. Participación, cooperación, argumentación-justificación, comparación entre dos grupos con diferente rendimiento, entrevista.

Grado de generalización, estrategias empleadas, solución de problemas, variantes y generalización.

Sin embargo el profesor Kilpatrick nos hizo las siguientes observaciones:

No siempre es posible conseguir ejercicios similares. Es más fácil evaluar organización y precisión. Pero, ¿cómo se evalúa la creatividad?

Por otra parte, ¿qué es lo que esperamos que haga el estudiante cuando se le pide que "evalúe su trabajo"? Esto se ve en el siguiente diálogo entre el profesor Kilpatrick y uno de nosotros:

JK: ¿Cómo espera usted que el estudiante evalúe su propio trabajo?

Prof: Con una escala.

JK: ¿Qué significa un 10?

Prof: Una respuesta correcta.

JK: ¿Qué es en este caso una respuesta correcta? La respuesta: "con 13, 9, 4 se obtiene 2" es correcta.

Prof: Esperaría una respuesta perfectamente correcta. Al que generaliza le pondría 10.

JK: ¿Sin importar qué haya hecho?

En la lista y en el diálogo sostenido aún no es claro cómo es que se va a asignar la calificación; hubo otro diálogo interesante:

JK: ¿Qué pasa si la generalización no es correcta?

Prof: Haría que la verificara con números.

JK: Sí, pero, ¿cómo la evaluaría?

Prof: Le pido que explique.

JK: Y si explica mal, ¿qué le pondría?

Prof: Invitaría a participar a todo el grupo para que llegáramos a un resultado.

JK: ¿Le daría diferentes pesos a buenas y a malas explicaciones?

Prof: No; el mismo, porque el estudiante está trabajando.

Para zanjar esta dificultad nos sugirió establecer de antemano qué es un rendimiento alto, qué es un rendimiento medio y qué es un rendimiento bajo. Adicionalmente existen tres formas de asignación de puntajes:

- *Analíticamente*. Aquí se determina un conjunto de aspectos que se van a observar. A cada uno se le da un valor según el desempeño del estudiante. La nota final está directamente relacionada con cada uno de los puntajes de las partes (es la sugerencia 4).
- *Enfocadamente*. En este caso se mira únicamente un aspecto y con base en el desempeño observado en él, se da la nota del estudiante (es la sugerencia 5, que enfatiza en la generalización).
- *Globalmente* (Holísticamente). En esta forma se ha observado todo el trabajo, sin discriminar algún aspecto y se da una nota global.

Independientemente de cuál tipo de evaluación escojamos, debemos tener una idea de al menos tres niveles diferentes de rendimiento.

Con el fin de aplicar esto último, se nos asignó un nuevo ejercicio. Podíamos trabajar en grupos; parte de nosotros actuaba como profesores con el fin de evaluar lo que los estudiantes hacíamos. El ejercicio trabajaba con hexarrectos. Un hexarrecto es un polígono de 6 lados cuyos ángulos son rectos. Se nos pidió lo siguiente:

- Dibujar un hexarrecto cuyo perímetro sea 24 unidades.
- Dibujar el hexarrecto de 24 unidades de perímetro de mayo área posible.
- ¿Qué se puede decir de los hexarrectos de 24 unidades?

Los profesores relataron lo que sucedió en los grupos; los aspectos positivos del trabajo desarrollado: exploración, generalización, persistencia, organización, uso o búsqueda de estrategias. Con respecto a la evaluación del trabajo, si es holística, analítica o enfocada, no se hizo ninguna mención, aunque es claro que ésta, en todos los casos, fue holística.

Este ejercicio tenía otra intención. Ninguno de los asistentes teníamos conocimiento acerca del ejercicio. Esto nos colocó a "alumnos" y "profesores" en el mismo nivel. Naturalmente surgió la reflexión en torno a si es posible para el profesor evaluar el proceso que un estudiante sigue para resolver el problema cuando el profesor no conoce la "respuesta". Se suscitó el siguiente diálogo que planteó el interrogante:

JK: No sé si la enseñanza puede ser sólo protagonizada por el profesor.¿Es posible usar, en sus clases, un problema de matemáticas del cual ustedes desconocen la solución? ¿Es posible evaluar a los estudiantes que trabajan en un problema del cual no conocemos la solución? ¿Qué podemos evaluar? En el ejercicio anterior, ustedes hicieron una evaluación, sin conocer la respuesta del ejercicio. ¿Tenemos que conocer la respuesta antes?

Prof: Yo asigno un ejercicio sólo si tengo la sospecha de que puedo resolverlo. Si trabajo en un tema de matemáticas avanzadas, topología o álgebra abstracta, no.

JK: Estoy hablando de utilizar un problema de palabras, del que ustedes no conocen la respuesta.

Y para reflexionar en ese interrogante, intercambiamos roles y trabajamos en el siguiente ejercicio:

"Dado un polígono de n lados, quiero saber cuál es el número máximo de ángulos rectos que puede tener."

JK: ¿Quiénes de ustedes conocía la respuesta de este ejercicio? ¿Quién no pudo evaluar el trabajo de los estudiantes? ¿Por qué?

Prof A: Porque estaba teniendo las mismas dudas y me hice las mismas preguntas; yo ya no estaba en la posición de evaluador.

JK: ¿Qué vio usted? ¿Lo podría valorar?

Prof A: Vi cómo se hacía preguntas y cómo se las respondía él mismo.

JK: A usted, ¿le gustó eso?

Prof A: Sí.

Prof B: Surgieron muchas dudas acerca de si el polígono era cóncavo, o convexo; si los ángulos externos se contaban o no.

JK: ¿A ustedes les interesa el proceso que se sigue cuando se hace y se enseña matemáticas? (¿Do you care about processes in doing and teaching mathematics?) ¿Es o no es posible evaluar el proceso que usted sigue para resolver un problema, aún sin conocer cuál es su respuesta?

Cuarta sesión

Objetivos

- Proporcionar pautas y sugerencias prácticas para tener en cuenta en el momento de preparar preguntas para hacer evaluaciones.
- Presentar otras alternativas para la formulación de preguntas abiertas.
- Presentar pautas de evaluación de otros aspectos de desempeño de los estudiantes.
- Presentar otra alternativa de evaluación del trabajo de los estudiantes: portafolios.

Criterios para la realización de actividades de evaluación (NTCM, 90)

A continuación se presenta una adaptación de una lista elaborada por Steve Leinwand y Grant Wiggins, sobre algunas de las características importantes que deben tener nuestros ejercicios de evaluación. Encontraremos útil volver con alguna frecuencia a esta lista, para revisar la calidad del currículo y de las actividades de evaluación que damos a los estudiantes.

Esencial vs Tangencial	• La actividad se adapta al propósito del currículo • Contiene la "idea principal"
Auténtica vs Controlada	• La actividad requiere procedimientos apropiados con respecto a la disciplina • Los estudiantes valoran los resultados del ejercicio
Rica vs Superficial	• La actividad origina nuevos problemas • Origina nuevas preguntas • Tiene muchas posibilidades
Motivadora vs No interesante	• La actividad invita a pensar • Fomenta la persistencia
Activa vs Pasiva	• El estudiante es quien "opera" y quien "decide" • Los estudiantes interactúan con sus compañeros • Los estudiantes construyen conocimiento significativo y profundizan en su entendimiento
Realizable vs No realizable	• Puede hacerse en la escuela o en casa durante el tiempo destinado a las tareas • Su proceso de desarrollo es adecuado para los estudiantes • Es confiable
Equilibrada vs No equilibrada	• La actividad desarrolla el pensamiento en diferentes formas • Contribuye a crear actitudes positivas
Abierta vs Cerrada	• La actividad tiene más de una respuesta correcta • Tiene múltiples vías de aproximación, para hacerla accesible a todos los estudiantes

Desarrollo de un ejercicio para evaluación

He aquí un plan (adaptado del trabajo del Departamento de Educación del Estado de Conneticut) que se puede utilizar para desarrollar un ejercicio de rendimiento, una indagación o un cuestionario de preguntas abiertas para hacer una evaluación. Aunque aquí el plan se usa para el proceso de evaluación, también puede usarse para el proceso de construcción del currículo de la clase.

El plan no tiene que seguirse de manera lineal. Por ejemplo, querríamos tener en mente desde el principio, tanto el contenido como los comportamientos que queremos evaluar.

Lea todo el plan y modifíquelo para que se adapte a sus necesidades.

Empiece con una idea:

- De un libro de texto o de otros libros.
- De un periódico, una revista, un almanaque o un catálogo.
- De una conversación.
- De la vida.
- De pensamiento aleatorio.
- De inspiración divina.

Pruebe la idea:

- ¿Cumple con los criterios de la sección anterior?
- ¿Es importante en su entorno?
- ¿Tiene un contexto que sus estudiantes entiendan?

Empiece a materializar la idea:

- Defina sus objetivos.
  ¿En dónde se ubica dentro del currículo?
  ¿Qué le puede decir acerca de sus estudiantes?
  ¿Qué tendrían que saber sus estudiantes?
- Diseñe un plan.
  Describa el ejercicio.
  Establezca el propósito y los objetivos.
  Escriba las instrucciones para los estudiantes.
  Incluya preguntas "no dirigidas" que puedan incitar a los estudiantes a encontrar las estrategias que necesiten.
- Dé información a los estudiantes sobre los criterios de evaluación.

Tenga en cuenta los formatos de respuesta:

- Ejercicios o reportes escritos.
- Reportes orales o rendimiento.
- Discusiones y actividades en grupo.
- Carteleras.

Desarrolle sus anotaciones:

- ¿En dónde se ubica el ejercicio dentro del currículo?
- ¿Qué deben saber los estudiantes previamente?
- ¿Qué materiales y equipos se necesitan?
- ¿Qué problemas pueden presentarse?
- ¿Qué cantidad y qué tipo de guías y ayudas debe dar o no dar el profesor, y cuál es su relación con la calificación?

Diseñar un enfoque de la evaluación:

- ¿Es preferible evaluar globalmente (incluyendo un reporte de experiencias) o un sistema de evaluación en el que se analiza punto a punto cada aspecto?
- ¿Se van a evaluar procesos? ¿productos? ¿ambos?
- Tenga presentes las actitudes y atributos que espera observar: cooperación, persistencia y recursividad.
- Identifique qué es lo más importante que se debe evaluar y la relación de esa importancia con los puntajes que se deben asignar.
- Defina los niveles de rendimiento (logros).
- Esté preparado para hacer cambios o ajustes luego de ver el trabajo de los estudiantes. ¡Pueden sorprenderlo!

Pruebe el ejercicio:

- Pida a uno o más colegas que revisen y critiquen su propuesta.
- Administre el ejercicio en algunas clases.
  Pida la opinión de los estudiantes.
  Tome notas detalladas de lo que observa y de lo que dicen los estudiantes.
  Decida si debe hacer cambios o proponer nuevos ejercicios.

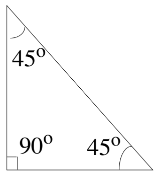
Revise lo que sea necesario:

- La actividad misma.
- Las notas del profesor.
- El sistema de evaluación.

Alternativas de formulación de preguntas abiertas

Jorge recolectó ruedas de bicicleta y de triciclo. Cuando ya había encontrado 6 ruedas, encontró 3 más. Haga un dibujo que muestre cuántas bicicletas y triciclos puede tener Jorge. Explique por qué podría haber más de una respuesta.
Usted quiere enseñarle a su primo cómo restar números de 2 dígitos. Escriba qué le diría y dé ejemplos de problemas.
Escriba todo lo que ha aprendido sobre fraccionarios hasta ahora.
Si usted mide un objeto con 5 reglas distintas y encuentra 5 respuestas distin-

tas, ¿cómo decidiría cuál es la respuesta correcta?
Con su grupo diseñe una actividad que le ayude a la clase a comprender cuán grande es un millón.
Kim no cree que sumando una constante (el mismo número) a la calificación del examen de cada uno de los estudiantes, el puntaje promedio de la clase cambiará sólo en esa cantidad. Escriba una explicación que convenza a Kim de que esto es o no es cierto. (En vez del tradicional: "es la afirmación, cierta? ¿Es falsa? ¿Por qué?"; en la nueva forma, se está invitando a hacer una reflexión acerca de la mejor manera de expresarse; de lo que se está o no se está entendiendo; se está haciendo una reflexión sobre el proceso mismo de pensamiento)
Haga una lista de todo lo que pueda descubrir acerca de este triángulo:



Para el siguiente problema, explique en palabras cómo lo iría resolviendo. Resuélvalo siguiendo sus propias indicaciones para estar seguro de que ha incluido cada paso necesario. Revise su lista si es preciso: "Juan compró 6 álbumes dobles y 12 sencillos por $210. Los álbumes sencillos cuestan $9 cada uno. Los dobles cuestan, cada uno, lo mismo. ¿Cuál es el precio de un álbum doble?"
Haga un ensayo acerca de lo que aprendió esta semana.
Usted está hablando por teléfono a uno de sus compañeros. Usted quiere que dibuje una figura que él no puede ver. Escriba un conjunto de instrucciones para que él lo realice.
Hay 30 cubitos de igual tamaño en una mesa. ¿Cuál es el cuadrado de mayor área que se puede construir con ellos? ¿Cuál es el cubo de mayor volumen? Cuando hay N cubitos, ¿cuál es el volumen del cubo resultante?

Descripción general de estándares de evaluación para preguntas abiertas

Cada pregunta de respuesta abierta contiene algunos factores particulares que deben evaluarse. Esta descripción general da ejemplos del tipo de factores que se pueden considerar. Los detalles varían según el nivel del problema.

Para asignar una calificación holística, clasifique primero los papeles en diferentes montones representando tres niveles: alto, medio y bajo. Incluya más niveles si lo desea. Los niveles se interpretan como evaluaciones de las repuestas a un problema particular, no como categorización de los estudiantes. Esto ayudará a los estudiantes a reconsiderar las cualidades de las respuestas de nivel alto.

Nivel alto

- Contiene explicaciones elegantes y sin ambigüedades.
- Incluye diagramas claros y sencillos.
- Indica comprensión de ideas y procesos matemáticos de las preguntas.
- Identifica todos los elementos importantes de la pregunta.
- Incluye ejemplos y contraejemplos.
- Va más allá de los requerimientos del problema.

Segundo nivel

- Contienen una buena y sólida respuesta con alguna de las características anteriores, probablemente no todas.
- Explica con menos elegancia y menos calidad.
- No va más allá de los requerimientos del problema.

Tercer nivel

- Contienen la respuesta correcta pero la explicación es confusa.
- Presenta argumentos pero incompletos.
- Incluye diagramas pero son inapropiados o poco claros.
- Indica comprensión de ideas matemáticas pero estas no se expresan claramente.

Cuarto nivel

- Omite partes importantes de la pregunta o de la respuesta
- Tiene errores graves.
- Utiliza estrategias inapropiadas.

Aspectos relevantes adicionales

Además del manejo de los conceptos involucrados en el ejercicio (por ejemplo rotación, medidas, cuadrado, círculo) se puede evaluar:

- Capacidad de seguir instrucciones.

- Capacidades de comunicación: riqueza del lenguaje; comprensión de lectura y habilidades de escritura.
- Calidad del proceso de asimilación.
- Manejo de lateralidad.

En uno de los ejercicios, era posible tener dos respuestas correctas. (Torneo de damas. Dos personas con igual desempeño y puntaje, van a jugar. Se pregunta quién ganará el torneo). Cuando se hace este tipo de preguntas, es fundamental la calidad del razonamiento. Aún así, es posible contar con dos razonamientos igualmente válidos y aceptables. No se intentará por tanto dar a alguno mayor puntaje que al otro.

Portafolios

Es un fólder o una caja que contiene los mejores trabajos de una persona; estos trabajos los escoge la persona misma que los hace. Representa una muestra de su trabajo. Se dieron pautas para su manejo:

- Hacer una recolección de trabajos cada 2 o 3 semanas: pueden ser tareas de la casa, dibujos, un reporte, un proyecto.
- Revisarlo periódicamente y usar tres de ellos para dar una calificación.
- Entrevistar a los dueños, con el fin de conocer las razones por las que eligió los trabajos. En este proceso, además de evaluar sus conocimientos, se le da la oportunidad de expresar sus sentimientos acerca de la calidad de su trabajo.
- Al mirar el portafolio de un año, puede conocerse cuánto ha evolucionado el estudiante. Es importante hacer énfasis en que se coloca sólo lo mejor.
- Se debe hacer explícito con los estudiantes este método de evaluación y los criterios que se seguirán. El estudiante va a ser partícipe de esa evaluación.

Este sistema tiene otras ventajas:

- Le permite al estudiante ser consciente de su propio progreso.
- Le da el espacio para comunicarse con su profesor.
- Le permite al profesor descubrir qué ha aprendido el estudiante y qué es lo que él considera que es importante de ello.
- Muestra a los padres la evolución de sus hijos.

Descripción de estándares de evaluación de portafolios

He aquí un ejemplo de una descripción de estándares de evaluación integral para la evaluación con base en un grupo de portafolios (archivo de trabajos de los estudiantes, recolectado por el profesor). Al igual que con las preguntas de respuesta abierta, muchos portafolios deben ser revisados antes de que sus propias descripciones de estándares de evaluación sean finalmente desarrolladas y aplicadas. Recolecte el trabajo del estudiante por un tiempo, luego tome un grupo de portafolios de la clase y clasifíquelos en varias pilas.

Una de las grandes ventajas de los portafolios es la oportunidad para los estudiantes y profesores de presentar sus mejores ideas y sus trabajos más creativos en lugar de las ideas o trabajos de otros. Se aconseja que esta descripción de estándares de evaluación sea usada sólo para comenzar a desarrollar su propia descripción de estándares de evaluación.

Nivel 4 (nivel alto)

Es interesante revisar el portafolio del nivel 4. Este nivel incluye una gran variedad de trabajos matemáticos escritos y gráficos, indicando trabajo individual y de grupo. Proyectos, investigaciones, diagramas, gráficas, tablas, fotografías, audiovisuales y otros trabajos, son prueba de un currículo amplio y creativo que lleva a los estudiantes a pensar por ellos mismos. Hay también evidencia del uso que hacen los estudiantes de varias fuentes como calculadoras, computadores, bibliotecas de referencia y conversaciones con adultos y estudiantes. Estos papeles son muestra de la organización y el análisis de la información por parte de los estudiantes. Aunque la pulcritud puede no ser un requisito primordial, la claridad en la comunicación es muy importante. La auto-evaluación del estudiante se muestra en la revisión de borradores, cartas que explican por qué el estudiante escogió ciertos informes, listas o reportes de evaluación generados por el mismo. El mejoramiento de la comunicación después de cierto tiempo se refleja a través de muestras tomadas al comienzo, mitad y final del período. El trabajo estudiantil refleja el entusiasmo hacia las matemáticas.

Nivel 3

El portafolio del nivel 3 muestra un sólido programa matemático y encontramos una gran variedad de trabajos similares al del nivel 4. Los estudiantes pueden explicar sin mucho problema sus estrategias y sus problemas en el proceso. Es evidente el uso de trabajos de investigación y de grupo. Los estudiantes muestran una buena comprensión especialmente de los conceptos matemáticos, se incluye también el trabajo realizado durante cierto tiempo. Por lo general lo que está ausente es el entusiasmo y la auto-confianza del estudiante, la investigación extensiva y el análisis de la información.

Nivel 2

El portafolios del nivel 2 contiene un programa de matemáticas apropiado, en cierta forma delimitado por los requisitos del texto guía. Hay poca evidencia de la originalidad del estudiante, lo que se refleja en los proyectos, investigaciones, diagramas y demás. Son mínimas las explicaciones que el estudiante puede dar acerca de los procesos utilizados para la solución de los problemas;

se puede ver una sobre concentración de aritmética o de temas similares y por lo tanto se refleja también una falta de trabajo en otras áreas de contenido.

Nivel 1
El portafolios del nivel 1 incluye poco trabajo creativo, consistente en fotocopias o textos copiados de libros; casi no existe reflexión del estudiante. Los trabajos son de preguntas con respuestas múltiples y no hay evidencia de la discusión en clase de ideas matemáticas. Los estudiantes no explican lo que piensan de las ideas matemáticas.

Quinta sesión

Objetivo

- Presentar sugerencias de nuevas formas de inducir a los estudiantes a redactar.
- Presentar pautas de evaluación del trabajo en grupos.
- Presentación de las tendencias actuales en los Estados Unidos.
- Presentación de una forma alternativa de evaluación de un curso.

Sugerencias para hacer que los estudiantes redacten

A continuación se dan sugerencias para ayudar a los estudiantes a escribir para ensayos, portafolios u otras formas de valoración.

- Explique en sus propias palabras el significado de …
- Piense en su participación en clase hoy y complete la siguiente frase: (El profesor o el estudiante elige una) "Aprendí que yo …"; "Estaba sorprendido de que …"; "Descubrí que yo…"; "Me agradó que yo …"
- Explique qué es lo más importante de entender acerca de …
- Escriba una carta a una compañera que no pudo venir a clase hoy, de tal manera que ella entienda tanto como usted lo que hicimos y aprendimos. Sea tan específico como sea posible.
- Describa cualquiera de los lugares donde se quedó "varado"; explique cómo se desvaró cuando resolvió el problema.
- Escriba una "Mategrafía" en la que describa sus sentimientos y experiencias respecto a las matemáticas, dentro y fuera del colegio. (Esto es de gran ayuda para revelar los sentimientos y actitudes de los estudiantes que pueden estar afectando su trabajo).
- Lo que más (menos) me gusta de las matemáticas es …
- Escriba una carta para un estudiante que va a tomar este curso el próximo año…

- Diseñe calcomanías serias y chistosas sobre matemáticas. Imagine que las va a colocar en el carro.
- Algo que realmente me gustaría saber de las matemáticas es …
- Lo más importante que aprendí hoy en matemáticas es…
- Si las matemáticas fuesen un sonido (una forma o un animal) sería …, porque …
- ¿Cómo explicaría … a un estudiante que no entiende?
- ¿Cómo sabe que su respuesta es correcta?
- Describa las imágenes que vienen a su mente cuando usted piensa en ….
- Describa algunos patrones o partes que son semejantes en esta investigación.
- Escriba un plan corto de lo que va a hacer mañana en su proyecto.

Trabajo en grupos

Cuando los estudiantes trabajan en grupos, se evalúan aspectos tales como:

- Liderazgo.
- Participación.
- Trabajo cooperativo: cada cual aporta las habilidades que posee.
- Diferenciación de habilidades.
- Organización del trabajo.
- Discusión.
- Exposición.
- Tolerancia con el ritmo de trabajo del grupo.
- Diferentes formas de agrupar.
- Evaluación individual del trabajo en grupo.
- Uso de estrategias.
- Argumentación.
- Interés en el trabajo.
- Cordialidad.
- Calidad de la comunicación.
- Capacidad de síntesis.
- Uso de método inductivo.

El profesor Kilpatrick nos asigna nuevamente un ejercicio. Es un problema difícil; ninguno de nosotros conoce la respuesta. Sin embargo, todos pudimos realizar la evaluación del desempeño de los estudiantes y del grupo. Un asistente explicó el proceso que él sigue en su colegio para la evaluación de trabajo en grupos:

- Empiezo clasificando la clase según el rendimiento.

- Hago los grupos con estudiantes de distintos rendimientos.
- Cada vez que asigno un trabajo, hago una valoración individual del rendimiento de cada estudiante (esta valoración no la conocen los estudiantes) y asigno una nota para el grupo, según el avance del trabajo realizado.
- El grupo debe ser responsable de que a medida que avanza el tiempo, la nota del grupo vaya mejorando.
- Al final del período, asigno una sola nota, con base en el progreso que ha tenido todo el grupo y tengo en cuenta la evolución que ha tenido cada integrante. Lo que importa es que todos los integrantes hayan logrado todos los objetivos.

Tendencias en los Estados Unidos

Una evaluación de rendimiento en matemáticas implica proponer a los estudiantes ejercicios, proyectos o investigaciones relacionados con temas matemáticos para luego observar, entrevistar y revisar los productos, con el fin de determinar lo que ellos realmente saben y pueden hacer.

Actualmente se tienen las siguientes prácticas de evaluación:

- El contenido es poco extenso.
- Se busca reconocimiento (sin memorización demostraciones, explicaciones, interpretaciones, creaciones).
- Hay presión de tiempo.
- Hay presión por eficiencia.
- Las pruebas estandarizadas se usan como modelos.
- Las pruebas se usan como símbolos.

Esto tiene dos efectos en la práctica de enseñanza, que se conocen como WYTIWYG(What You Teach Is What You Get): lo que usted enseña es lo que usted obtiene) y WYGIWICT(What You Get Is What I Can Teach): lo que usted obtiene es lo que yo puedo enseñar.

Se está empezando a contar con los siguientes patrones de evaluación:

- Uso de calculadoras y otros materiales.
- Trabajo en grupos.
- Ejercicios de respuesta libre (abierta).
- Ejercicios de rendimiento.
- Portafolios.
- Proyectos (con seguimiento y reportes).
- Entrevistas.
- Exámenes orales.
- Observaciones.

Las razones que han conducido a ello son las siguientes:

- El aprendizaje escolar enfatiza el conocimiento individual, mientras que el contexto cotidiano tiende a proponer tareas cooperativas.
- El aprendizaje escolar obliga a usar "razonamientos puros", en tanto que el mundo exterior requiere de un aprendizaje fuertemente apoyado en otras herramientas.
- El aprendizaje escolar enfatiza la manipulación de símbolos abstractos mientras que el razonamiento no escolar está fuertemente relacionado con objetos y eventos.
- El aprendizaje escolar tiende a ser generalizado, mientras que el aprendizaje que se requiere para un trabajo implica una situación concreta y específica.

Esto nos sugiere las siguientes pautas de trabajo en evaluación:

- Moverse más allá de las jerarquías de habilidades básicas.
- Colocar los ejercicios dentro de un contexto.
- Visualizar la evaluación como un proceso de comunicación.
- Hacer corresponder la evaluación con el currículo.
- "De la misma forma que necesitamos estándares para el currículo, necesitamos estándares para la evaluación. Debemos asegurar que las pruebas midan aquello que es valioso, no sólo lo que es fácil evaluar. Si queremos que nuestros estudiantes investiguen, que exploren y que descubran, la evaluación no puede medir únicamente un remedo de matemáticas". (NRC, 1989)

Modelo de formato para una evaluación con preguntas de respuesta abierta

Una de las quejas que se tienen de las pruebas que tienen preguntas con respuesta abierta es la dificultad de corregir.El siguiente modelo presenta una posibilidad para obviar esta desventaja.

Muestra de un examen de admisión de matemáticas para ingreso a la universidad en Japón (UECE: University Entrance Center Examination) 1990

Instrucciones: cada problema tiene varios espacios en blanco. Estos se representan con números subrayados encerrados entre corchetes. Cada blanco debe llenarse con un único dígito o signo. Observe el método que se muestra en los dos ejemplos siguientes y responda en el espacio correspondiente en la hoja de respuestas:

1. { $\underline{1}$ }, { $\underline{2}$ }, { $\underline{3}$ }, { $\underline{4}$ }, … representa cada uno un valor entre 0 y 9 o uno de los signos + ó -. Por ejemplo, si se quiere indicar que -8 es la respuesta para { $\underline{1}$ }{ $\underline{2}$ }, hay que marcar

{ 1 } - + 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
{ 2 } - + 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. Si la respuesta es una fracción, redúzcala a su mínima expresión e indique el signo en el numerador. Por ejemplo, para indicar -2/9 como la respuesta para { 3 }{ 4 }/{ 5 }, marque:

{ 3 } - + 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
{ 4 } - + 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
{ 5 } - + 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Sea a una constante. Considérese la parábola:

$$C_a: y = -x^2 + ax + a^2$$

Dado que las coordenadas del vértice de C_a son:

$$\left(\frac{a}{\{1\}}, \frac{\{2\}a^2}{\{3\}}\right)$$

El vértice está sobre la curva y= { 4 } x^2

2. 1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, … es una sucesión en la que $1/(2)^{k-1}$ aparece 2^{k-1} veces sucesivamente (k=1, 2, 3, …)

(1) Entonces, la suma de los 1000 primeros términos es:

{ 19 } + ({ 20 } { 21 } { 22 })/2 $^{\{ 23 \}}$

(2) Si la suma de los n primeros términos es 100, entonces, como

n = 2 $^{\{ 24 \} \{ 25 \} \{ 26 \}}$ - { 27 }

n es un número de { 28 } { 29 } dígitos, teniendo en cuenta que $\log_{10} 2 = 0.3010$.

Modelo de evaluación global de una actividad

Como parte final del curso, se hizo la evaluación. Este proceso es tal que podría aplicarse en cualquier momento. Se toma una hoja y se dobla en cuatro partes. En cada una de las cuatro casillas que se forman se coloca un título: empezar (Start); Parar (Stop); (No empezar) Don't Start y (No parar) Don't Stop. Los asistentes al evento colocan en cada casilla actividades según opinen que ellas deben iniciarse, dejar de hacerse, no iniciarse o no dejar de hacerse. Puede utilizarse la parte posterior para anotar allí otras sugerencias alrededor del trabajo. Esta fue la evaluación que el profesor Kilpatrick aplicó para su curso.

Referencias bibliográficas

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Mathematics assessment: Myths, models, good questions and practical suggestions*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.

National Research Council (1989). *Everbody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington: National Academy Press.

Rico, Luis. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: elementos y evaluación. En Llinares S. y Sánchez M. V. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*. Madrid: Alfar

Suydan, M. N. (1974) *Evaluation in mathematics classroom: From what to how and were*. Ohio: ERIC.

Webb, N. L. (1992). Assessement of Student's Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En D. A. Grows (Ed.). *Handbook of research on teaching and learning mathematics*. Nueva York: MacMillan.