INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

MICHÈLE ARTIGUE
RÉGINE DOUADY
LUIS MORENO
PEDRO GÓMEZ (EDITOR)

una empresa docente

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Bogotá, 1995

Primera edición, julio de 1995

INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza
y el aprendizaje de las matemáticas
Autores: Michèle Artigue, Régine Douady, Luis Moreno
Editor: Pedro Gómez

Diseño carátula: una empresa docente®

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Serapio Rendón 125. Col. San Rafael, 06470 México, D.F.
Apartado 5-192, C.P. 06500 Tel. 705-05-85
Reg. CNIEM 1382

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel. (57-1) 284-9911 ext. 2717. Fax: 284-1890
Servidor WWW: http: //ued. uniandes. edu.co
Bogotá. Colombia

ISBN
Impreso en México / *Printed in Mexico*

El Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática fue realizado gracias al patrocinio de las siguientes entidades:

- Avianca
- Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología Banco de la República
- Berol
- CDM de Colombia
- COLCIENCIAS
  (entidad que impulsa el desarrollo científico y tecnológico de Colombia)
- Fundación Alejandro Angel Escobar
- Fundación Corona
- Fundación Mazda
- Fundación Santillana para Iberoámerica
- ICETEX
- Industrial de Gaseosas -INDEGA-
- Nestlé
- UNESCO
- Universidad de los Andes

Contenido

Prefacio

En octubre de 1994, "una empresa docente" realizó en Bogotá, Colombia el Segundo Simposio Internacional en Educación Matemática. A este evento fueron invitadas las profesoras Michèle Artigue (Universidad París VI - IUFM Reims) y Régine Douady (Universidad París VII) de Francia y el profesor Luis Moreno (CINVESTAV) de México. Esta fue una oportunidad para que la comunidad colombiana de educación matemática entrara en contacto con algunas de las teorías, de las metodologías y de las realizaciones de la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas. Este libro es producto de los aportes hechos por estos invitados internacionales y del interés que investigadores y profesores de matemáticas colombianos manifestaron durante el evento.

En cambio de publicar unas memorias detalladas del Simposio, hemos preferido identificar un conjunto de textos (la mayoría relacionados con las actividades realizadas durante el evento) que fueran, al menos parcialmente, representativos de las ideas de la didáctica de las matemáticas en Francia y que pudieran aportar al desarrollo de la educación matemática en Colombia.

La historia del desarrollo de la educación matemática en México (Luis Moreno, capítulo 3), desarrollo que ha estado en contacto directo con la escuela francesa, sirve de contexto para los demás textos que permiten dar un vistazo general al desarrollo de la disciplina en Francia. Régine Douady (capítulo 1) describe el surgimiento de la didáctica de las matemáticas francesa, haciendo énfasis en el papel que han jugado los IREM en este proceso. Por su parte, Michèle Artigue (capítulo 2) presenta los esquemas de formación de profesores de matemáticas en Francia resaltando el rol de la didáctica en esta formación.

Este volumen profundiza en uno de los aspectos característicos de la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas: la ingeniería didáctica. "Se denomina con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo" (Artigue, p. 34). La ingeniería didáctica, desarrollada específicamente en el área de la educación matemática, tiene una doble función. "Ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (p. 36).

Michèle Artigue (capítulo 4) presenta el contexto de aparición de esta noción y describe el papel que ella pude jugar como metodología de investigación. Por su parte, Régine Douady (capítulo 5) se interesa en los diferentes factores que rigen la elaboración de una ingeniería didáctica y su interdependencia. Ella presenta dos ejemplos de propuestas de enseñanza que corresponden a selecciones didácticas analizadas, argumentadas y justificadas en investigaciones. En el último capítulo, Michèle Artigue estudia en detalle un campo de investigación específico: la enseñanza del cálculo. Allí es posible percibir el papel de la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

Pedro Gómez

Editor

1

Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM

Régine Douady

Introducción

Los IREM (Institutos de investigación en enseñanza de las matemáticas) han jugado un papel importante en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia. En este capítulo presento el contexto dentro del cual se originaron estos institutos, las causas que originaron su creación, las características del proyecto y la manera como han evolucionado hasta la actualidad. La historia comienza en los años sesenta.

Los años sesenta y setenta

Durante los años sesenta y setenta se dio una crisis social muy fuerte alrededor de las matemáticas en muchos países incluida Francia. Los currículos de matemáticas estaban bajo la responsabilidad de matemáticos de renombre. Estos currículos tenían una aproximación matemática y le daban prioridad a las estructuras. Era la época de Bourbaki. El objetivo pedagógico era el de poner a disposición de los alumnos un número reducido de herramientas matemáticas potentes respetando en todo momento el rigor matemático. Esta aproximación se basaba en una hipótesis: si los alumnos tenían este número reducido de herramientas potentes y generales, entonces ellos podrían aplicarlas en mu-

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

chas situaciones diferentes. Por otra parte, se pensaba que si había menos axiomas para enunciar, entonces era más fácil comprender.

Se introdujo entonces una serie de nociones nuevas. Es el caso de las relaciones de equivalencia sobre conjuntos. Esta noción es potente, puesto que si se hace el cociente de un conjunto por una relación de equivalencia, entonces se pueden construir nuevos conjuntos con sus respectivas estructuras. De esta forma es posible producir, por ejemplo, los negativos o los racionales a partir de los enteros.

Esta nueva posición generó la necesidad de dar una capacitación complementaria en matemáticas a los profesores. Y, dado que ellos no estaban acostumbrados a este tipo de matemáticas, necesitaban también documentos pedagógicos en los que se insinuaran nuevas formas de presentación, de trabajo y de evaluación.

Desde el punto de vista del aprendizaje había una influencia muy fuerte de los psicólogos de la escuela de Piaget y, por consiguiente, una gran difusión de sus teorías constructivistas.

La investigación sobre la enseñanza de las matemáticas

Desde el punto de vista de la investigación en la enseñanza de las matemáticas y en la relación entre la enseñanza y el aprendizaje se hacía cada vez más evidente la necesidad de una aproximación científica los problemas generados por la comunicación del saber matemático. Esta aproximación debería considerar la clase en su globalidad como un objeto de estudio en el que se tuviera en cuenta la interacción y la dependencia entre los tres polos profesor, estudiante y saber.

Se pensaba que era necesario diseñar proyectos de investigación de tipo experimental en los que se formularan hipótesis; se diseñaran experiencias que las pusieran en juego; se construyeran herramientas para el tratamiento de los datos recogidos o se adaptaran herramientas existentes en disciplinas cercanas como la estadística y la psicología cognitiva; y se cruzaran métodos para afinar los resultados. Todos estos propósitos hacían necesaria la existencia de espacios para la experimentación.

Los IREM nacen entonces como producto de dos problemáticas diferentes. Por una lado, y partiendo de la hipótesis implícita que era suficiente que los profesores aprendieran las "nuevas" matemáticas para que los estudiantes tuvieran una instrucción adecuada, el Ministerio de Educación Nacional ve la necesidad de ayudar a los profesores a enseñar estas nuevas matemáticas. Por otra parte, los investigadores necesitan problematizar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y desarrollar métodos de investigación como condiciones necesarias para mejorar la relación didáctica.

Los IREM

Se crean entonces los IREM como proyecto del Ministerio de Educación Nacional. Su primera característica fue la de ofrecer a personas con formación diferente la posibilidad de trabajar conjuntamente. De esta forma, en los IREM trabajaban profesores de primaria, secundaria y universidad, junto con inspectores, matemáticos, físicos, psicólogos, sociólogos, etcétera. Por otra parte, estas personas intervienen con dedicación parcial y mantienen una parte de su carga en su función de base.

La segunda característica del proyecto fue la organización de una red nacional de tales instituciones con misiones específicas, tareas y funciones en las que se buscaba participar en la formación inicial y permanente de los profesores; desarrollar investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas; y producir y difundir documentos para los profesores.

Se ofrecen descargas tanto para los profesores, como para quienes diseñan y desarrollan su formación. Hay gran cantidad de recursos financieros y las acciones pululan. Se ofrecen cursos de reciclaje complementarios en matemáticas y se producen y difunden numerosos documentos producto de las innovaciones.

Desde el punto de vista de la investigación, se hacen estudios de fenómenos provocados y se comienza un proceso de búsqueda de explicaciones. En 1972 se crea la escuela Michelet en Burdeos. Esta escuela, ingeniada por Guy Brousseau, es un lugar especial. Es un laboratorio dentro de la práctica misma, donde se encuentran gran cantidad de medios para el estudio de los fenómenos didácticos.

Durante varios años, hasta 1977, las dos lógicas, tanto la del Ministerio de Educación Nacional, como la de los investigadores evolucionan paralelamente.

1977: AÑO DE TRANSICIÓN

En 1977 estas dos lógicas se separan. El Ministerio considera que los profesores ya saben muy bien cómo enseñar los nuevos programas y decide suprimir las descargas de los profesores que venían a tomar los cursos, manteniendo únicamente las descargas de los animadores. A partir de 1980, el dinero y el tiempo de descarga para los animadores también se reduce. Se genera, entonces, una gran decepción.

Hay una gran incertidumbre por parte de los profesores porque ellos no sabían qué debían enseñar y tampoco sabían qué tanta libertad de acción le debían dejar al alumno. Se encontraban bloqueados entre varias alternativas. Se enfrentaban a la exigencia del rigor automático y al temor de hacer afirmaciones que no fuesen correctas desde el punto de vista matemático. Por otra parte, no sabían qué tanta distancia podían tomar con el texto que tenían. Esto generaba un esquema de enseñanza dogmática en la que se seguía estrictamente y se exigía de los alumnos lo que estaba escrito en el papel. Estos últimos enfrentaban también un conflicto. O respetaban la norma y decían exactamente lo escrito en el papel sin intentar comprender; o si querían comprender, no podían respetar las exigencias del profesor. Muchos alumnos miraban las matemáticas como algo puramente mecánico.

Del lado de los equipos IREM se reformula el trabajo y se genera una nueva problemática. Con respecto al aprendizaje se hace énfasis en el significado y, por consiguiente, en los problemas fuente de aprendizaje y de desequilibrio para los cuales los alumnos no tienen todos los conocimientos para su solución.

Se producen entonces nuevas preguntas. Estas preguntas son producto de la reflexión fundamental de algunos investigadores en didáctica y son puestas de relieve a través de una nueva gestión en IREM. Algunas de estas preguntas se refieren, por ejemplo, a los medios que es necesario darles a los alumnos para permitirles lograr un nuevo equilibrio a partir de los problemas que enfrentan, al papel del profesor dentro de este nuevo esquema, a la creación de un saber común en la clase que sea utilizable en otras situaciones y que pueda ser transformado en un saber cultural y a la explicación tanto de los errores persistentes de los alumnos, como de la distancia entre las expectativas del profesor y los hechos observados.

Los profesores de los equipos IREM deciden preparar conjuntamente sus clases con una cierta intención de aprendizaje; hacer observaciones mutuas de clase; analizar las observaciones recogidas; y tomar nuevas decisiones. La didáctica como campo científico entra en pleno auge. Se desarrollan metodologías de investigación propias de la tradición francesa. Este es el caso de la *ingeniería didáctica* que se encuentra particularmente en los trabajos de G. Brousseau, M. Artigue, R. Douady, M.R. Perrin y J. Robinet.

Por otra parte, también se desarrolla una aproximación histórica y didáctica de las matemáticas que da un carácter más humano de las matemáticas y hace énfasis en la evolución de algunas nociones. En este aspecto, aparece la necesidad de tomar en cuenta diferentes escalas del tiempo. En la escala histórica, la evolución de un concepto es algo que toma siglos. Desde el punto de vista de los alumnos, por fuera de los momentos de crisis, como fue el caso de la revolución de los programas con motivo de la introducción de las "matemáticas modernas", se puede considerar que las matemáticas ofrecen un dominio de saber estable durante la escolaridad del alumno. Esto no impide que, en un nivel dado y sobre varios años de escolaridad, puedan existir ciertas variaciones tanto en la selección de las nociones a enseñar, como en las formas de presentación, en sus reparticiones y en sus articulaciones en términos del programa.

Vemos entonces que existe una gran complejidad en el trabajo del profesor y, por lo tanto, en los requisitos que esta complejidad impone sobre su formación. Michèle Artigue, en el capítulo 2 de este volumen ataca este problema.

2

El lugar de la didáctica en la formación de profesores

Michèle Artigue

Introducción

Durante los últimos veinte años, la didáctica de las matemáticas se ha desarrollado en muchos países. En particular, en Francia, ella se ha desarrollado como un área de investigación al:

- Poner en primer plano la especificidad de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje ligadas a la especificidad del contenido a enseñar: las matemáticas
- Imponerse la ambición de comprender el funcionamiento de estas relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y de poner en evidencia las leyes que las gobiernan, haciendo explícita, al mismo tiempo, la necesidad de distanciar la voluntad de acción inmediata sobre el sistema educativo

En el espacio de veinte años, la didáctica ha acumulado resultados y ha construido teorías que permiten estructurarlos y pensar sobre ellos. Ella ha tenido efectos indirectos sobre la enseñanza a través de las modificaciones que se han introducido en el currículo y que ella ha inspirado parcialmente. Habiéndose convertido, a nivel universitario, en una disciplina reconocida por ella misma, su lugar en la formación inicial de los profesores continua siendo tema de intensos debates. Es so-

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

bre este punto que se hará una reflexión a continuación, rechazando la posibilidad de interpretar la resistencia del sistema educativo como la simple marca de un obscurantismo retardado.

¿Por qué continua siendo problemática la integración de una componente didáctica en la formación inicial de los profesores? ¿Qué preguntas genera esta situación? ¿Cómo deben responderse?

Para efectos de claridad se presentará en primera instancia, y de manera breve, el sistema francés actual de formación de profesores de secundaria. En segundo lugar, se precisarán algunas de las características de la aproximación didáctica francesa y las consecuencias que se deducen al nivel de los resultados didácticos obtenidos, así como las concepciones que los investigadores involucrados se han hecho de la "formación didáctica". En tercer lugar, se entrará en el fondo del asunto: la integración de la didáctica en la formación actual de los profesores de secundaria. Se mencionarán los debates que surgen a su alrededor, las estrategias que se utilizan usualmente, sus potencialidades y sus límites, para terminar describiendo los problemas que este tipo de integración debe afrontar. Finalmente, antes de concluir, se describirá cómo, en el IUFM de Reims, se intenta navegar entre las diversas dificultades para construir una formación que nos parece la más satisfactoria posible, cuando se tienen en cuenta todas las restricciones que se deben respetar.

La formación actual de los profesores de matemáticas de secundaria

La educación secundaria en Francia cubre dos períodos:

- El *colegio*, con alumnos de 11 a 15 años
- El *liceo*, con alumnos de 15 a 18 años

Los liceos pueden ser generales, tecnológicos o profesionales. Para simplificar, en lo que sigue se tendrá en cuenta esencialmente los liceos de enseñanza general o tecnológica. Se mencionarán los liceos profesionales solamente en aquellos casos en los que el sistema de formación de profesores es sensiblemente diferente, dado que, en este caso, los profesores enseñan ciencias, además de matemáticas.

La creación de los IUFM (que comenzó en 1990 y se generalizó en 1991) modificó la selección y la formación de los profesores. Actualmente está organizada como sigue. Existen dos posibilidades de selección asociadas a dos concursos nacionales diferentes: el CAPES y la "agrégation", siendo este último de un nivel más elevado. La mayor parte de la selección se hace a través del CAPES.

Para preparar el CAPES, los estudiantes deben obtener primero un DEUG y una licencia de matemáticas[1] que corresponden a una serie de cursos que duran teóricamente tres años. El CAPES que se prepara después, durante un año, es un examen que versa casi exclusivamente sobre las matemáticas (hay dos pruebas escritas: una de álgebra y geometría y una de análisis; y hay dos pruebas orales: una llamada de lección sobre un tema de la educación secundaria y otra en la que se debe proponer y comentar una serie de ejercicios sobre un tema dado)[2]. La preparación se ofrece conjuntamente por parte de la universidad y el IUFM (donde los estudiantes se inscriben en primer año). A lo largo de este primer año, el IUFM organiza períodos de prácticas (en total 15 días) en las escuelas e inicia la formación profesional. Dadas las características del examen y de su dificultad cada vez mayor debida al flujo de estudiantes, esta iniciación profesional puede ser difícil de negociar.

Si tienen éxito en el CAPES, los estudiantes se convierten en *profesores en práctica* y entran en el segundo año del IUFM. Tienen entonces la responsabilidad de dictar un curso de 4 a 6 horas semanales en la escuela con el apoyo de un consejero pedagógico que es profesor de planta dentro del establecimiento. Paralelamente siguen una formación profesional organizada por el IUFM. Esta formación, que varía de instituto en instituto comprende:

- Una formación didáctica (que se tratará más adelante)
- Cursos complementarios en la disciplina a enseñar (en este caso las matemáticas)

---

1. Aunque existen algunas excepciones al recorrido que se presenta aquí, éstas no serán consideradas en la exposición.

2. Con la creación de los IUFM se diseñó una prueba oral llamada profesional. Dos años más tarde se regresó a una prueba más clásica y más adaptada a las competencias de los jurados actuales. En la mayoría de las otras disciplinas, la prueba basada en los trabajos que reemplazó la prueba profesional ha mantenido su carácter profesional pero se basa sobre trabajos ahora propuestos por el jurado.

- Módulos de formación comunes a las diferentes disciplinas y, parcialmente, a diferentes niveles de enseñanza (primaria, secundaria general y profesional) concernientes a aproximaciones psicológicas (cognitivas y relacionales), institucionales y sociológicas de los problemas de enseñanza
- Un pequeño trabajo de investigación sobre un tema preciso ("mémoire")

En numerosos IUFM, se incluye un trabajo práctico en un nivel diferente al que corresponde al curso dictado por el profesor en práctica. Al final de este segundo año, si las evaluaciones son satisfactorias, el profesor en práctica obtiene su título y es nombrado en propiedad.

Los profesores "agregés", por su parte, después de su licencia universitaria, deben obtener una maestría para después presentar al concurso de "agrégation" en la universidad y, en caso de que tengan éxito, se reunen como profesores en práctica de segundo año del IUFM, con los estudiantes que han tenido éxito en el CAPES.

Por otra parte, los profesores de liceo profesional no tienen la responsabilidad de dictar un curso durante el segundo año, sino que alternan períodos de práctica con períodos de formación en el IUFM. Son asignados para los tres períodos de práctica (uno de 4 semanas y dos de 6 semanas) a la misma escuela e intervienen en las clases de un mismo profesor quien es, de hecho, su consejero pedagógico. Tienen, además, un período de práctica de 6 semanas en una empresa.

Acerca de la didáctica de las matemáticas en Francia

Esta didáctica se ha desarrollado prioritariamente, como ya se mencionó, como un campo de investigación que ha tomado una cierta distancia con respecto al campo de acción sobre el sistema educativo[3] (en particular, no se trata de una didáctica curricular o tecnológica). Esta di-

3. El sector de la investigación — acción ha en todo caso existido, en particular en el INRP (Instituto Nacional de Investigación Pedagógica), sin haber asumido, en el caso de las matemáticas, una posición central.

dáctica se ha desarrollado concentrando su atención en los contenidos a enseñar y reafirmando su especificidad con respecto a la pedagogía y de manera más general a las ciencias de la educación. Finalmente, se ha desarrollado con el deseo de constituirse en una disciplina científica autónoma, ligada pero independiente de las disciplinas vecinas como lo son, por supuesto, las matemáticas, pero también las ciencias de la educación, la psicología, la sociología, para citar solamente algunas de ellas.

Si se compara, de hecho, la didáctica que se ha desarrollado en Francia con aquella que se ha desarrollado en numerosos países, en particular en los países anglosajones, la didáctica francesa aparece, sin duda, como más unitaria y más teorizada (Kilpatrick, 1994; Grouws, 1992). También se caracteriza por el hecho de que ella ha adoptado, desde sus comienzos, una aproximación sistémica relativamente global a los fenómenos de enseñanza, aproximación centrada en la noción de sistema didáctico: sistemas abiertos al exterior en los que tienen lugar las relaciones entre los profesores, los estudiantes y el conocimiento.

De hecho, y de manera muy esquemática, hay tres aproximaciones principales, complementarias entre sí y parcialmente articuladas que existen en la actualidad (Artigue et. al., 1994):

- Una aproximación "cognitiva" que se ha desarrollado alrededor de los trabajos de G. Vergnaud en el área de la teoría de los campos conceptuales
- Una aproximación a través de los "saberes" que se ha desarrollado alrededor de lo trabajos de Y. Chevallard en el área de la teoría de la transposición didáctica, en un principio, antes de extenderse a una aproximación antropológica más global del campo didáctico
- Una aproximación a través de las "situaciones" que es finalmente la que ha tenido, sin duda, la influencia más determinante y cuyo padre fundador es G. Brousseau

Esta última aproximación ha puesto a la situación de enseñanza en el corazón de la didáctica, como unidad de análisis necesaria, minimal en cierto sentido, para acceder a una comprensión del funcionamiento del alumno. G. Brousseau se sitúa claramente dentro de una perspectiva constructivista con aprendizaje por adaptación a un "medio" que aparece como problemático. No obstante, él afirma que el análisis del comportamiento del alumno y de sus adaptaciones no puede tener sentido sino a través de aquellas variables de la situación dentro de las cuales se produce ese comportamiento. Estas variables incluyen, por supuesto, aquellas que corresponden a la tarea propuesta al alumno, pero incluyen además otras. Dentro de la teoría de las situaciones didácticas, por ejemplo, un concepto central es el de contrato didáctico[4]. El análisis del funcionamiento cognitivo del alumno no se puede llevar a cabo de manera independiente, sin tener en cuenta el contrato didáctico que se pone en juego.

La teorización de las situaciones didácticas ha tenido también consecuencias metodológicas. Es así como ella ha conducido a desarrollar, en oposición con las paradigmas comparativos clásicos de experimentación en clase, una metodología específica: la "ingeniería didáctica"[5].

Esta metodología de la ingeniería didáctica se basa en un control *a priori* de las situaciones que se ponen en juego dentro del proceso experimental. Este control se efectúa a través de un análisis *a priori* que busca precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores. En seguida, en el análisis *a posteriori*, este análisis *a priori* se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado.

Estas características de la didáctica francesa se expresan tanto al nivel de los resultados obtenidos, como al nivel de lo que, de manera natural, se juzga como importante para ser transmitido en una formación.

Es así como, al nivel de los resultados, la didáctica francesa ha producido, de manera clásica, numerosos conocimientos sobre las concepciones de los alumnos, los obstáculos y dificultades que intervienen en el aprendizaje de una noción, de un dominio o de un modo de funcionamiento matemático dado (estructuras aditivas y multiplicativas, números decimales y fracciones, álgebra, geometría, demostración, para

4. El contrato didáctico es aquello que rige de manera más o menos explícita las expectativas respectivas del alumno y el profesor en relación con el conocimiento.

5. La ingeniería didáctica se opone igualmente, por su carácter de control, a las metodologías asociadas a las aproximaciones antropológicas (ver el capítulo sobre la ingeniería didáctica en este volumen).

citar solamente algunos ejemplos). Por otra parte, sus orientaciones específicas también la han conducido a producir orientaciones más globales que analizan la ecología de los saberes enseñados y de sus prácticas usuales, tratando de medir los márgenes de maniobra de la enseñanza y de producir ingenierías didácticas que, al jugar sobre el espacio de las restricciones reales o supuestas del sistema, deben permitir un funcionamiento más adecuado de la enseñanza.

En este punto es importante enfatizar que la posibilidad de transmisión de los diferentes tipos de resultados, por fuera de la comunidad estricta de los investigadores, no implica los mismos problemas. Mientras que es posible imaginar la transmisión relativamente eficaz de los resultados relacionados con las concepciones y los obstáculos, no sucede lo mismo con los resultados de la ingeniería. Diversos estudios han mostrado los obstáculos que se oponen a la transmisión correcta de las ingenierías (Artigue & Perrin, 1991). Estos obstáculos están ligados a diferentes factores:

- La falta de adecuación entre las concepciones sobre el aprendizaje de quienes reciben los resultados y aquellas que subyacen a la teoría de las situaciones didácticas sobre las que se basan las ingenierías
- La complejidad de los productos de la ingeniería y el nivel de conocimiento y experiencia que se requieren para su gestión apropiada (tanto en el plano pedagógico, como en el plano matemático)
- La ruptura entre las características de estos productos y el funcionamiento usual de la enseñanza (por ejemplo, actividades abiertas concebidas a lo largo de varias sesiones)
- El nivel mismo de la descripción de los productos que pone el énfasis sobre los puntos claves de la ingeniería y sobre las rupturas cognitivas y que tiende a dar menos importancia a aquellos aspectos que corresponde al funcionamiento más continuo y común del aprendizaje

No obstante, resulta paradójico que sean los productos de ingeniería los que, para quienes no lo saben, aparezcan, dentro de los resultados obtenidos, como aquellos que se encuentran más próximos a la utilización directa.

Se ha hecho énfasis en las implicaciones que, a nivel de los resultados, tiene la orientación de las investigaciones francesas. Esta orientación también tiene implicaciones sobre la concepción misma de lo que es importante transmitir en una formación. Esto se expresa, de manera evidente, en la importancia que se le da a lo que proviene de la teoría de las situaciones didácticas y, en particular, a las herramientas conceptuales y a las técnicas de análisis *a priori* de las situaciones didácticas: nociones de variable didáctica, de devolución e institucionalización, de contrato didáctico, la distinción entre situaciones a-didácticas y didácticas, entre status útil y status objeto de los conceptos matemáticos, entre los cuadros de funcionamiento de un mismo concepto, etcétera.

LAS FORMACIONES EFECTIVAS • DEBATES • ESTRATEGIAS • PROBLEMAS

Como se mencionó al comienzo de este artículo, la integración de una componente didáctica en la formación inicial de los profesores, aún si ésta ha sido institucionalizada con la creación de los IUFM, continua provocando intensos debates. Estos debates son la expresión de una cierta desconfianza que se basa en argumentos muy diversos:

- El rechazo de la didáctica, que es percibida como una falsa ciencia que desea imponer su dogma en la enseñanza y que va a contaminar a los profesores jóvenes
- El rechazo de una formación profesional que está asociado a una visión de la enseñanza como un arte y, de manera más general, a la idea de que el profesor se forma dentro de su propia práctica y que no hay saberes específicos que puedan aportar a este aprendizaje
- El temor de que la formación didáctica se haga en detrimento de la formación matemática de los futuros profesores quienes saben muy pocas matemáticas y quienes tendrán muy pocas ocasiones de aprenderlas
- La convicción de que una reflexión didáctica no puede adquirir significado con profesores jóvenes que acaban de dejar su status de estudiantes y que, por consiguiente, debe ser reservada para la formación permanente

No sería razonable poner todos estos argumentos en el mismo saco y calificar a todos los oponentes de obscurantistas retardados. De hecho, estos debates, por más virulentos y de mala fe que sean, nos enfrentan a preguntas esenciales:

- ¿Por qué una formación didáctica dentro de la formación inicial? ¿De qué manera puede ella ayudar a los futuros profesores y cuáles son sus límites?
- ¿Cuáles pueden ser la formas de una formación eficaz si ésta se juzga como útil y si se tiene en cuenta que la ambición no es formar especialistas en didáctica, sino formar profesores capaces de utilizar de manera pertinente los aportes de la didáctica?
- ¿Cómo controlar las transposiciones que se harán de los saberes didácticos en la formación y cómo asegurarse que ellos no sufrirán transformaciones peligrosas?

Antes de intentar responder a estas preguntas, quisiéramos profundizar sobre un sector particular de la formación de los profesores: aquella de la formación de los profesores de la escuela primaria. En efecto, dentro de este sector particular, la formación profesional tiene una historia que se construyó, antes de la creación de los IUFM, en el seno de las Escuelas Normales. Y esta historia ha dejado huellas visibles, especialmente través de las actas de los coloquios anuales de los PEN (Profesores de Escuela Normal).

A. Kuzniak (Kuzniak, 1993) presentó recientemente una tesis dedicada al análisis de estas prácticas de formación profesional y a su evolución. Su estudio lo ha llevado a distinguir cuatro tipos principales de dispositivos:

Las estrategias culturales. Que ponen el énfasis en el contenido de la disciplina y se preocupan poco de sus aplicaciones pedagógicas (que se dejan al trabajo privado del profesor).

Las estrategias basadas sobre la "mostración". Que constituyen el modelo más arcaico de la formación profesional puesto que están basadas sobre la simple imitación, pero que pueden asumir formas más elaboradas (integradas, por ejemplo, con una práctica de observación apoyada en una teoría didáctica).

Las estrategias basadas en la homología. Que proceden por analogía entre la formación del adulto y aquella del niño. "Sus defensores insisten acerca de la necesidad de hacer coincidir las metodologías utilizadas en la formación de profesores con aquellas que se ponen en práctica en las clases".

Las estrategias basadas en la transposición. Que se basan en un saber teórico que organiza y estructura la práctica pedagógica y están centradas en la transposición de este saber con un propósito de enseñanza explícita.

Hace unos veinte años, la formación ofrecida por los PEN de matemáticas era de carácter esencialmente matemático. Se trataba de reconciliar a estos futuros maestros con las matemáticas y de llenar sus vacíos. La formación pedagógica, que era responsabilidad de los consejeros pedagógicos, se hallaba separada de la formación matemática. Se encontraba entonces una formación de tipo cultural en matemáticas con una formación profesional basada en la ostensión.

Ante el fracaso e ineficacia de este tipo de estrategia, y teniendo en cuenta el desarrollo de los trabajos didácticos, se busca entonces integrar las preocupaciones pedagógicas a la formación matemática, a través de estrategias que combinan la homología y la "mostración". No hay una didáctica explícita; la didáctica se utiliza para seleccionar situaciones interesantes y para, desde un punto de vista ideológico, mantener el deseo de los formadores de modificar las representaciones de la enseñanza y del aprendizaje que tienen los futuros maestros y que parecen estar lejos del constructivismo en el aire del tiempo.

De nuevo, los resultados son parcialmente decepcionantes. Las estrategias de homología, junto con las de "mostración" tenían ciertamente un impacto sobre las prácticas efectivas de los profesores debutantes, pero aparecían deformaciones, particularmente en la forma de un pseudo-constructivismo: el alumno era activo, pero matemáticamente poco activo; las situaciones abiertas de investigación se transformaban en situaciones en las que el alumno era guiado paso a paso y se convertía en un simple ejecutor. Los nuevos profesores no eran conscientes de estas deformaciones.

Así es como se percibe, al menos por algunos didactas, la necesidad de hacer explícitas en la formación las herramientas didácticas necesarias para analizar correctamente las situaciones propuestas a los alumnos y los roles respectivos de los alumnos y del profesor; para prever los comportamientos de los alumnos, teniendo en cuenta los conocimientos sobre el aprendizaje y las características de las situaciones; y para preguntarse en qué medida los comportamientos deseados serán muestra, si se producen, de la presencia de los conocimientos que la enseñanza quería producir.

Pero, al mismo tiempo que describe la imposibilidad de hacer una economía de la explicitación didáctica necesaria para análisis y construcciones pertinentes, A. Kuzniak muestra que la elaboración de transposiciones adaptadas y eficaces del saber didáctico en la formación inicial de los profesores no es evidente, más aún dado que se trata de saberes nuevos, aún poco estabilizados y fácilmente sensibles a deformaciones ideológicas.

De hecho, la integración de una componente didáctica en la formación de los profesores de secundaria, se encuentra, al menos parcialmente, con problemas similares. Antes de hacer la descripción de las prácticas establecidas en Reims, se presentarán algunas preguntas que parecen ser esenciales para las decisiones que se deben tomar en este dominio.

La formación didáctica de los profesores de matemáticas en el IUFM de Reims: problemas y principios

Esta formación ha evolucionado desde de la creación del IUFM. Paulatinamente, como la mayoría de los formadores del IUFM, nosotros hemos tomado conciencia de las restricciones que rigen esta nueva formación, de las dificultades que debe afrontar, de las posibilidades que tenemos y de los riesgos que debemos evitar. En retrospectiva, nos parece esencial tener una sensibilidad particular hacia los siguientes problemas.

En primera instancia, se trata de una formación inicial. Se dirige a profesores en práctica que, en la mayoría de los casos, conocen el ambiente escolar únicamente a partir de su experiencia como estudiantes. Al darles la responsabilidad de dictar un curso, se les impone brutalmente la responsabilidad de asumir una nueva posición para la cual no están preparados: aquella de profesores. Como consecuencia de esta situación, ellos sienten la necesidad de una ayuda inmediata que les aporte a la gestión de su actividad cotidiana en la que los problemas de disciplina y de administración de la clase tienen una gran importancia.

La formación didáctica no aparece naturalmente como una respuesta a esta necesidad y debe tenerla en cuenta.

En segundo lugar, los profesores en práctica no reconocen fácilmente el interés que pueda tener una formación didáctica. Por un lado, los problemas que ellos tienen que enfrentar no pertenecen, en su gran mayoría, al campo de la didáctica. Por otra parte, aún si ese fuera el caso, los saberes didácticos no ofrecen un aporte inmediato. La visión didáctica se vive frecuentemente al comienzo como una visión que desestabiliza. Ciertamente ella ayuda a comprender el funcionamiento del alumno. Sin embargo, ella favorece más la crítica de la enseñanza tradicional que la oferta de soluciones inmediatas.

La formación didáctica debe, por un lado, privilegiar dentro de la didáctica aquellos aspectos que se pueden explotar más fácilmente; y, por el otro, debe permitir sobrellevar este carácter desestabilizante, situación que es aún más difícil de soportar en el caso de profesores en estado de inseguridad.

Tercero, las estrategias que promueve la didáctica exigen frecuentemente mucho conocimiento y experiencia por parte del profesor. Para que la autonomía que se desea dar al alumno sea realmente eficaz, se requiere, por un lado, que él tenga un mejor manejo matemático. Por otra parte, la gestión de un aprendizaje de tipo constructivista requiere que el profesor sea capaz, en tiempo real, de anticipar y de desarrollar sistemas de recolección de información, de interpretación y de toma de decisiones que se encuentren adaptados a las nuevas situaciones. Este tipo de sistemas se encuentran en un estado incipiente de desarrollo en los profesores debutantes. No se puede buscar, por lo tanto, que se utilicen estrategias de expertos y resulta mejor poner el énfasis en la construcción de sistemas de interpretación y toma de decisiones dentro de situaciones comunes.

En cuarto lugar, dado que la búsqueda de un ambiente satisfactorio en el seno de la clase es un objetivo prioritario, es posible suponer que, si este objetivo parece haber sido logrado, entonces las decisiones que lo permitieron serán difícilmente cuestionadas. Manteniendo, entonces, este objetivo de comodidad, es importante lograr, a través de un cuestionamiento didáctico, que los profesores en práctica sean cada vez más sensibles a las cuestiones relacionadas con la calidad de la vida matemática en la clase.

Finalmente, la formación didáctica puede caer fácilmente en un cierto número de trampas:

- Imponer una didáctica que busca responder a preguntas que el profesor en práctica no se hace y que no está en absoluto preparado para hacerse
- Limitarse a una didáctica que no puede constituirse en una herramienta real, ya sea porque es completamente implícita, o porque se encuentra poco descontextualizada
- Explicitar o institucionalizar el saber didáctico a partir de actividades que el profesor en práctica ha vivido en un nivel completamente diferente, lo que correspondería a un cierto efecto didáctico de tipo Jourdain (Brousseau, 1986)

Dado que es un saber relativamente joven y poco estabilizado, dentro de un mundo en el que el discurso ideológico es dominante, la didáctica es particularmente propicia a las deformaciones.

Resulta, por tanto, particularmente importante dentro de este tipo de formación, poner en relevancia los resultados obtenidos, pero también los límites de los saberes didácticos, de tal forma que se delimiten claramente los diferentes niveles de discurso que se encuentran ligados a la profesionalización.

La formación didáctica en Reims: prácticas efectivas

Las reflexiones y los análisis precedentes nos han llevado a concebir la formación didáctica como una espiral.

Al comienzo se favorece una formación didáctica en la que se busca principalmente el buen vivir en el salón de clase. Se propende por un mayor conocimiento del funcionamiento del alumno; se desarrollan herramientas para analizar los libros de textos; para escoger en ellos actividades adecuadas y transformarlas si es necessario; y para manejar situaciones de clase sencillas y bastante clásicas que no necesitan profesores verdaderamente expertos. Se enfatiza una didáctica en acción, en contraposición con una didáctica presentada como objeto de saber académico.

Más tarde, se profundiza la reflexión y se entra en una didáctica más explícita. Unos temas tratados de modo empírico y pragmático en la primera fase se vuelven objetos de trabajo didáctico. Se desarrollan herramientas más complejas para el análisis de situaciones didácticas y se trabaja, por ejemplo, la noción de contrato didáctico. A esta profundización, contribuye mucho el pequeño trabajo de investigación llamado "mémoire" que deben realizar los profesores, partiendo de preguntas planteadas por su práctica. En particular, este trabajo requiere de la lectura y de la discusión de textos didácticos. Paralelamente se favorece el uso de estrategias de enseñanza más desarrolladas y, por ejemplo, los profesores deben elaborar y experimentar situaciones de enseñanza que incluyen la resolución de problemas abiertos, el uso de técnicas de trabajo en grupos y la organización de debates científicos dentro de la clase.

Cada día de formación (17 días) comienza por un intercambio de experiencias del salón de clase. Este intercambio se hace en grupos y, en él, nosotros participamos con nuestras convicciones propias y nuestra experiencia docente. Ayudamos a los profesores a analizar sus problemas y a buscar empíricamente soluciones. Si nos parece interesante, damos algunas informaciones didácticas identificándolas como tales. Pero la mayor parte del tiempo de intercambio se utiliza en discusiones informales basadas en una reflexión empírica sobre las cuestiones y los datos que los profesores ponen sobre la mesa y se marca bien el status empírico e incluso la subjetividad de este tipo de trabajo.

El trabajo llamado didáctico, lo comenzamos con trabajos sobre temas matemáticos (geometría del plano y del espacio, estadística, álgebra, etcétera) que van a hacer parte de su práctica. Este trabajo incluye siempre, con equilibrios diversos, las siguientes componentes:

- Análisis curricular
- Análisis de las concepciones de los alumnos y de sus procesos de evolución, de las principales dificultades y obstáculos que se pueden prever en el aprendizaje
- Trabajo sobre los libros de textos que utilizan: análisis crítico, selección de actividades sencillas que esperamos que

los futuros profesores sean capaces utilizar en sus clases, con motivaciones explícitas de las selecciones

- Presentación de unas situaciones más abiertas y ricas con estrategias que combinan homología y transposición. Buscamos que los futuros profesores reflexionen sobre las variables didácticas; sobre el análisis de la situación desde el punto de vista del alumno y desde el punto de vista del profesor; sobre las adaptaciones compatibles con el significado de la situación; y sobre las maneras de prolongar el trabajo en clase con trabajo privado o semi-privado del alumno

Más tarde en el año, abordamos temas transversales como el papel del error en el aprendizaje, la demostración, los procesos de validación (temas que muchas veces se han ya discutido de modo informal dentro de los grupos de intercambio), el uso de nuevas tecnologías (retro-proyector, calculadoras, computadores, etcétera). Cuando se trabaja el tema de la demostración, se incluye una dimensión epistemológica e histórica explícita al trabajo didáctico. Este enfoque epistemológico nos parece un medio adecuado para que esos profesores salgan de su relación escolar con la demostración y tomen la medida de lo que separa la noción de demostración como vive en el mundo matemático y la noción de demostración como vive en las instituciones de enseñanza media.

Un punto esencial es el de la relación entre lo que se hace dentro del IUFM (llamado teoría) y lo que se hace en la clase (llamado práctica). Tratamos así de ligar teoría y práctica por medios diversos. Los grupos de intercambio participan de esta dimensión. Participan también la co-elaboración y luego co-experimentación de situaciones de enseñanza por parte de pequeños grupos de profesores en práctica. Al inicio del año se trata de situaciones sencillas y clásicas como se ha señalado anteriormente. Al final del año se trata de situaciones abiertas. Participa también en esta dimensión la tutoría: cada profesor tiene su tutor que hace parte del equipo de formadores IUFM. El va a visitarlo en su clase y esas visitas son oportunidades para hacer funcionar los instrumentos didácticos de análisis introducidos en la formación teórica y marcar su utilidad.

Conclusión

He tratado en este capítulo de discutir el lugar de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores. Tengo la convicción de que la didáctica tiene un papel importante que jugar, incluso en la formación inicial y que se debe presentar de modo explícito. Tengo también la convicción, dada la experiencia de estos últimos años, que esta didáctica no puede ser enseñada como un objeto académico de saber que va a convertirse después en conocimientos aplicables a situaciones diversas de enseñanza. Los conocimientos didácticos se deben construir partiendo de problemas que encuentran los profesores debutantes en la realidad, teniendo en cuenta su poca experiencia profesional y la relativa accesibilidad de las aproximaciones didácticas, con el objetivo de hacer de esa didáctica un verdadero instrumento de desarrollo del profesor. Tratamos de hacerlo en Reims mejorando poco a poco esa formación didáctica. Es un camino nuevo que se debe inventar.

Bibliografía

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., Tavignot, P. (Eds.). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage.

Artigue, M., Perrin, M. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*. 11(1), 13-18.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), 33-115

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (1994). Vingt ans de didactique française depuis les USA. En Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., Tavignot, P. (Eds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. 84-96. Paris: La Pensée Sauvage.

Kuzniak, A. (1993). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* (Thèse de doctorat). Université Paris VII.

Robert, A. (1995). Professeurs de mathématiques de collège et de lycée formation professionnelle initiale ou comment désaltérer qui n'a pas soif. *Document de travail pour la formation des enseignants n°14,* IREM Paris VII.

3

La educación matemática en México

Luis Moreno

Introducción

La educación matemática como disciplina profesional tiene en México una historia muy corta. Desde luego, no pueden desconocerse los esfuerzos que desde siempre se han hecho a favor del mejoramiento de la educación. Sin embargo, vamos a referirnos en este relato a la toma de conciencia por una comunidad de investigadores de aquellos problemas que iban a marcar un rumbo distinto al desarrollo de una disciplina nueva y de profundo carácter interdisciplinario. Debo aclarar que centraremos nuestra descripción en lo ocurrido en el seno del CINVESTAV porque es la parte de la historia que conocemos mejor por haber sido testigos privilegiados del proceso que condujo a la creación de la Sección de Matemática Educativa, primero, y luego al Departamento de Matemática Educativa. Además, hay que decirlo, los esfuerzos desarrollados en nuestra institución han sido los centrales en este campo de la educación en el país.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

Los comienzos

La Secretaria de Educación Pública, al comenzar la década de los 70, dio al Cinvestav, la tarea de escribir los textos gratuitos de matemática para las escuelas primarias del país. Un grupo entusiasta de profesores investigadores del departamento de matemática hizo suya esta tarea. Quienes en aquel momento eramos recién llegados a la institución fuimos sorprendidos por la pasión pedagógica que el proyecto había despertado en nuestros profesores. Además de la estabilidad estructural, de los anillos de cohomología, de procesos estocásticos y de los desarrollos de Taylor, las conversaciones estaban llenas de referencias al mejor método para introducir los números negativos en la escuela primaria, las fracciones o la noción de ángulo. Para muchos de nosotros no había duda: allí estaba un grupo destacado de matemáticos profesionales poniendo su talento y sus conocimientos al servicio de un proyecto educativo: solo cabía esperar lo mejor. Esta esperanza se veía fortalecida al ver la actividad desplegada en la institución y en los seminarios que entonces se organizaron en diferentes partes del país con profesores – quienes serían los portadores del nuevo texto al salón de clases. Reflexionando en todo este proceso, con la perspectiva que nos da el tiempo, no es de extrañar lo que entonces ocurrió. Confrontados con los problemas reales de la enseñanza, fuera del ámbito privilegiado de un Centro de Investigación, este grupo de investigadores entendió que su preparación académica anterior no era suficiente para capturar la complejidad de los fenómenos educativos que tenían frente a si. Habían descubierto una nueva problemática que exigía, para ser comprendida, algo más que sus esfuerzos entusiastas de los primeros tiempos. Para muchos de ellos, esto implicaba una decisión de fondo: dedicarse de tiempo completo a los problemas que planteaba la educación matemática. Fue así como en septiembre de 1973 se preparó un anteproyecto para la creación de la Sección de Matemática Educativa. Vale la pena subrayar que en ese momento aún no se había terminado la elaboración de los libros de texto. Sin embargo, ya eran reconocidas la dispersión y la falta de metodología con que se abordaban los problemas educativos. En marzo de 1974, los mismos investigadores hicieron una solicitud formal ante la dirección de la institución para que se creara la Sección de Matemática Educativa. En su exposición de motivos se señalaba el interés de estos investigadores en abordar el estudio de la nueva problemática y su percepción del estado de la educación matemática en el país. Para referirse a su estado se acudió a un término: caótico.

La Sección de Matemática Educativa

La Sección fue creada, finalmente, en marzo de 1975. El segundo semestre de ese año vio el inicio del programa de maestría en la especialidad. Originalmente, el programa de estudios estuvo articulado alrededor de los contenidos matemáticos que se consideraban básicos, entre otras cosas porque constituían los ejes organizadores del currículum de matemáticas a diferentes niveles. Nos referimos específicamente al análisis matemático, al álgebra moderna y a la geometría. Además, se intentaba dar a los estudiantes del programa –profesores en servicio– una visión de la matemática dentro de un contexto cultural y científico más amplio. De allí que existieran cursos de "matemática y conocimiento científico" y "fundamentos e historia de la matemática". Las experiencias anteriores con la escritura de los textos y el trabajo con los profesores había dejado claro que la componente matemática si bien era necesaria, no sería suficiente para estructurar un programa de maestría para los profesores, a los que se intentaba dar mejores elementos teóricos y prácticos para incidir mediante su trabajo docente, en una eventual mejora de la educación del país. De modo que las teorías del aprendizaje, la experimentación educativa y el estudio del método clínico se constituyeron en partes importantes del programa, que buscaba así dar al egresado armas de diagnóstico y diseño de soluciones en su trabajo.

Profundización de la maestría

El programa inicial de la maestría constituyó, para quienes eramos integrantes del cuerpo docente, una oportunidad de profundizar en nuestras concepciones originales sobre la educación matemática. Esto permitió el rediseño permanente de los contenidos de los cursos, la toma de conciencia de la dimensión histórica del conocimiento matemático, de la importancia del análisis epistemológico y la naturaleza de las rupturas conceptuales en el proceso de formación del conocimiento. Al mismo tiempo, en el plano de la enseñanza fue entendida, cada vez mejor, la diferencia esencial entre la enseñanza y el aprendizaje; no era suficiente considerar el proceso histórico de construcción del conocimiento matemático, había también que volverse atentamente al proceso cognitivo del alumno.

Ampliación del programa

El proceso que llevó gradualmente a la identificación de la dimensión cognitiva de los problemas educativos nunca estuvo apartada del interés por los problemas propios del sistema educativo nacional. El diagnóstico inicial había llevado a la conclusión que su estado era caótico. ¿Qué podía ofrecer la Sección como parte, al menos, de una solución? Hacia 1977 se inicia el programa de maestría semi-abierta que con el tiempo se instalaría en alrededor de 17 instituciones de educación superior en el país. Viendo el mapa de la república se observa que la cobertura territorial ha sido extraordinariamente amplia. Iguales los esfuerzos físicos e intelectuales desplegados. El programa de maestría no ha tenido sólo el propósito de capacitar a los profesores para su trabajo en el aula. También ha sido importante el propósito de formar personal capacitado para diseñar, estructurar y coordinar sistemas educativos. Con base en los recursos humanos formados mediante el programa de maestría a lo largo y ancho del país, se puso en marcha en 1984 el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (PNFAPM). El programa se ofrece a nivel regional en los Centros de Investigación y Docencia (CIDME) creados para este objeto.

El Programa de Doctorado

Para 1984 y 1985, el personal académico de la Sección de Matemática Educativa tenía ya una idea muy clara de los alcances del proyecto de maestría en sus modalidades abierta y tradicional. Había acumulado una gran experiencia en su trabajo con profesores en todo el país. Resultaba natural entonces la creación de un programa académico mediante el cual se pudiese articular y sistematizar toda esa experiencia. Había además una serie de antecedentes académicos para apoyar la creación de un proyecto propio de doctorado. Veamos:

- Desde tiempo atrás los profesores de la Sección habían estado participando activamente en congresos internacionales en donde habían presentado sus trabajos de investigación
- Por otra parte ya desde 1978 se había recibido la visita de distinguidos investigadores en el campo de la educación matemática proveniente de los IREM de Francia
- Se había organizado en 1980 el XXXII encuentro internacional de la CIEAEM, con la participación de investigadores venidos de diversos países europeos y de Norteamérica
- Desde 1985 se generó un convenio de colaboración académica con el Instituto de Educación de la Universidad de Londres, que incluía la puesta en marcha de un proyecto conjunto de doctorado para estudiantes mexicanos en aquella institución

Con estos antecedentes no es difícil comprender que la Sección de Matemática Educativa tenía una idea clara sobre el trabajo de investigación, a nivel internacional, que se realizaba en el campo. Se creó entonces el programa de doctorado que a la fecha ha producido ya 10 doctorados. A partir del convenio con la Universidad de Londres han obtenido allí su grado tres profesores. Vale la pena mencionar que de los intercambios con los IREM franceses obtuvieron su grado de doctorado 5 profesores más (antes de 1985). A la fecha, más del 50% de los profesores del ahora Departamento de Matemática Educativa, son ya profesores titulares y un número apreciable están incorporados al Sistema Nacional de Investigadores.

AREAS DE INVESTIGACIÓN Y PERSPECTIVAS

Durante muchos años los métodos de enseñanza y el diseño de las estructuras curriculares han estado inspirados por las experiencias en el salón de clases y por las concepciones que sobre las matemáticas poseían los educadores. Casi siempre, estas concepciones veían a las matemáticas como un cuerpo ya elaborado de conocimientos y por lo tanto, el papel del profesor y de quienes elaboraban los planes de estudio consistía en diseñar estrategias –de lo simple a lo complejo– que permitieran a los estudiantes "asimilar" tales conocimientos. Lo que no se intentó mediante estos acercamientos, fue organizar el proceso educativo alrededor de los procesos de aprendizaje del estudiante. La educación matemática ha estado, desde sus comienzos, en la intersección de una ciencia: la matemática, y de una práctica: la enseñanza. Múltiples han sido las razones que han hecho necesaria una indagación sobre esta actividad; de este modo se ha abierto un campo de investigación nuevo que ya no trata sólo de optimizar el proceso de enseñanza sino de conocer la estructura, funcionamiento e interrelaciones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La disciplina que llamamos "Matemática Educativa" tiene su origen en la necesidad de caracterizar con el mayor grado de rigor que nos sea posible, la actividad, tanto práctica como teórica que aparece vinculada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Uno de los puntos de partida de la Matemática Educativa es la matemática misma. El conocimiento matemático es necesario pero no suficiente para la caracterización de la disciplina. La matemática tiene una componente heurística y también un marco axiomático como partes centrales de su actividad, y de la sistematización de sus resultados. La disciplina se organiza alrededor de núcleos conceptuales denominados "teoremas". Por otra parte, la forma de conocimiento que se genera en la Matemática Educativa es diferente. Se construye mediante la interacción continua con un sistema educativo. Es una disciplina, ya lo hemos mencionado, que se encuentra en la intersección de la matemática –como conocimiento socialmente generado– y la práctica de la educación. Es, en esencia, el resultado de una actividad de carácter interdisciplinario. Las formas de conocimiento que allí se generan siempre tienen características del sistema educativo que ha sido parte de la interacción. El desarrollo de la metodología y de la normatividad de la disciplina se debe proponer la ampliación de la validez de los resultados, con el objetivo obvio de poder aplicarlos en ámbitos diferentes a aquel en donde fueron obtenidos. En la actualidad, la investigación que se realiza en el departamento de matemática educativa comprende estudios cognitivos sobre la formación del concepto de número; la constitución del lenguaje algebraico; las teorías de la comunicación, el estudio curricular del cálculo y su desarrollo histórico y valor epistemológico y la intervención y valor epistemológico de las representaciones computacionales del conocimiento matemático. Desde luego, de cada una de estas áreas puede decirse mucho más que lo que aquí hemos insinuado.

El reto actual

La actividad que dio origen al departamento de matemática educativa estaba anclada en la realidad profunda del sistema educativo. Ha sido largo y sinuoso el camino que nos ha llevado hasta la investigación. Es fundamental entender que el reto que siempre hemos tenido por delante es regresar todo este saber generado en la investigación –en la ciencia básica– al sistema educativo, donde cobra su pleno sentido.

Y una nota final

Nuestra descripción ha sido intencionalmente breve y con casi total ausencia de nombres propios de personas y lugares. Hemos hecho esta elección para invitar al lector a reconocer en lo narrado sus propias circunstancias: como es posible, en un contexto latinoamericano, con personas como las que él conoce y con quienes trabaja, desarrollar investigación de relevancia internacional. No se vea en esto un gesto de autocomplacencia. Tan sólo es una invitación al desarrollo de los mejores esfuerzos de todos nosotros.

4
Ingeniería didáctica

Michèle Artigue

Resumen

Este texto corresponde a un curso dado en Plestin les Grèves, en Agosto de 1989, durante la quinta Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas. En su primera parte, estudiamos el contexto de aparición de la noción de ingeniería didáctica, al principio de los años ochenta. La segunda parte se dedica a la ingeniería didáctica vista como metodología de investigación. En la tercera parte titulada "La ingeniería didáctica, un motor de progreso en la didáctica" investigamos los problemas de transmisión y de replicabilidad.

Introducción

La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

En los años ochenta esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales, dado el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas en la época:

- Las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza
- El papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica

Estas preocupaciones se manifestaron, por ejemplo, en el texto que preparó Y. Chevallard para la Segunda Escuela de Verano en Didáctica de las Matemáticas que se celebró en Orléans en 1982 (Chevallard, 1982). Allí escribió, de forma notoria, con respecto al primer punto:

> *Definir el problema de la ingeniería didáctica es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, **el problema de la acción** y de los **medios** para la acción, **sobre el sistema de enseñanza.*** (p. 28)

Y, a continuación, critica con vigor la manera como estas relaciones se conciben tradicionalmente en términos de innovación o de investigación-acción:

> *Se ve así dentro de una lógica terrible, dentro de un implacable determinismo, que la ideología de la innovación tiende a reducir el acercamiento al sistema educativo. La innovación como valor ideológico tan sólo cobra impulso porque la ausencia de una historia científica en el terreno de la educación otorga libertad a todas las pretensiones (y dentro de ellas a algunas carencias de posición, como por ejemplo que el innovador se autoriza únicamente por sí mismo). Junto a lo anterior, pero en un sentido contrario, el peso de la obsesión innovadora sobre las conciencias y las prácticas impide el "despegue" de una historia en el campo en cuestión. Con esto no se fomenta que los objetos se constituyan en parte de un saber progresivo.* (p.13)
>
> *Lo esencial es que, al enlazar sin articular dos momentos del proceso científico-técnico (investigación y acción), **se reduce***

> ***el significado de cada uno.*** *Uno se deshará de las restricciones que normalmente encuentra todo proceso de investigación, al responder que la acción, entendida ante todo como una buena acción, prima. La acción "implementada" se presentará como "investigación" y, por lo tanto, se escapará al juicio de valor al que sometemos a la más banal de nuestras acciones.* (p. 20)

En lo concerniente al segundo punto, el lugar de las realizaciones didácticas en clase dentro de la investigación, él articula su argumento sobre dos puntos:

1. Las metodologías que en este artículo calificaré como *externas* (en tanto son externas a la clase) como cuestionarios, entrevistas, tests, sobre las cuales se basa la mayor parte de las investigaciones publicadas en esa época, son insuficientes para atrapar la complejidad del sistema estudiado. Su éxito se puede explicar, sin ninguna duda, por el hecho de que se pueden utilizar de una manera cómoda y se pueden hacer reconocer como productoras de resultados científicos. Pero privilegiar estas metodologías sería un riesgo mayor para la didáctica, dada su juventud teórica:

   > *Lo que identifica hoy en día a la realización didáctica en clase, de una forma actualmente necesaria, es el débil desarrollo de nuestra teoría del sistema didáctico. Esto implica un control teórico débil de las operaciones de investigación. Yno nos permite ponernos en contacto con nuestro objeto de conocimiento, por fuera del control empírico del objeto real cuya elaboración teórica nos ocupa. Abandonar el sistema didáctico en su funcionamiento concreto por mucho tiempo, para adoptar metodologías auxiliares,* ***parciales****, significa tomar el riesgo de* ***desatender*** *aquello que de ninguna manera se puede desatender, y que podría, por lo tanto, borrarse de nuestro campo de consciencia por no estar presente en él, empíricamente* (p. 50)

2. La realización didáctica en clase tiene otra función esencial, permanente, en cuanto no se asocia con la juventud teórica del campo. Se trata de la puesta en prueba de las construcciones teóricas elaboradas en las investigaciones, a través de involucrar tales construcciones en un mecanismo de producción:

> *La realización didáctica también es el lugar de esta etapa crucial de la actividad científica a la cual Bachelard da el nombre paródico de **fenomenotecnia**.* (p. 55)

En conclusión, se trata de:

- Por un lado desprenderse de relaciones entre investigación y acción, pensadas sea en términos de innovación, sea con la intermediación de la noción de investigación-acción, para afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos
- Y del otro, resaltar la importancia de la "realización didáctica" en clase como práctica investigativa, tanto por razones vinculadas al estadio de juventud de la investigación didáctica, como para responder a necesidades permanentes de poner en práctica las construcciones teóricas elaboradas

Y efectivamente, la noción de ingeniería didáctica trazó su camino en el edificio de la didáctica con esta doble función. Ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica. En el apartado siguiente nos centraremos en las características de esta última.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación

Algunas características generales

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica. Sin embargo, si bien ellas permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no la dejan unir con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Tampoco permiten necesariamente distinguir de forma coherente los objetos de conocimiento. Las investigaciones de macroingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales que imponen, se hacen indispensables.

La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Sin embargo, los objetivos de una investigación de ingeniería didáctica pueden ser diversos. R. Douady, en su conferencia del Congreso PME 11, llamada "La ingeniería didáctica, un instrumento privilegiado para tener en cuenta la complejidad de la clase" (Douady, 1987), distingue por ejemplo las investigaciones que abordan el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado y en particular la elaboración de génesis artificiales para un concepto determinado, de aquellas que no se ciñen a los contenidos, así su sustento sea la enseñanza de un dominio preciso. Ella cita al respecto los trabajos de M.C. Marilier, A. Robert y I. Tenaud sobre el aprendizaje de métodos y el trabajo en grupo (Marilier, Robert, Tenaud, 1987). Sin embargo, se podría mencionar otros como los trabajos que apuntan al dominio paramatemático (Chevallard, 1985) es decir, aquel de las nociones que, como aquellas de parámetro, ecuación, demostración, guardan un estatus de herramienta en la enseñanza, al menos en un nivel determinado, o incluso trabajos que abordan el estudio y la aplicación de estrategias didácticas globales como por ejemplo "el problema abierto" (Arsac et al., 1988), o "el debate científico" (Legrand, 1986; Alibert, 1989).

Por lo tanto, la ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico. En las páginas siguientes presentaremos los rasgos característicos que en la actualidad posee esta metodología. Tales características se desprenden de las investigaciones que se reivindican como ingenierías didácticas y cuyo número, valga la pena enfatizarlo, se ha multiplicado en los últimos años. En este punto de la exposición, me limitaré a mencionar los dos trabajos que constituyen, en mi opinión, los clásicos incuestionables en este dominio, a saber, las tesis de G. Brousseau (Brousseau, 1986) y de R. Douady (Douady, 1984). Estos trabajos son excepcionales tanto por la amplitud de las realizaciones didácticas involucradas, como por la importancia del aporte teórico al cual condujeron dichas realizaciones.

Las diferentes fases de la metodología de la ingeniería

Continuamos en este apartado con la descripción de la metodología de la ingeniería didáctica, por medio de una distinción temporal de su proceso experimental. Delimitaremos en este proceso cuatro fases: la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación.

Los análisis preliminares

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación

Esta presentación merece algunos comentarios. Por lo general, a pesar de que esta serie de análisis no se evidencia en las publicaciones, los trabajos que el investigador ha realizado como pilares de su ingeniería se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma, en función de las necesidades sentidas. Por lo tanto, los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de "preliminares" en un primer nivel de elaboración. Además es claro que las exigencias de un análisis preliminar no son las mismas para una investigación cuyo objetivo es la construcción de una génesis artificial del conocimiento en un campo conceptual determinado, como por ejemplo la realizada por B. Parzysz (Parzysz, 1989), que para una investigación que, por ejemplo, pretenda implantar una estrategia global de enseñanza como aquella del debate científico citada con anterioridad.

En los trabajos que se han publicado antes, con frecuencia no intervienen de manera explícita todas las diferentes componentes de análisis mencionadas arriba. Un excelente ejercicio de didáctica puede ser el identificar, en un trabajo específico, las dimensiones privilegiadas y tratar de buscarles su significación didáctica a posteriori.

Me limitaré aquí a dar un ejemplo tomado de mis trabajos personales, tratando al mismo tiempo de precisar los puntos en que éste es o no particularmente representativo del funcionamiento metodológico de la ingeniería. Se trata de un artículo sobre la investigación que he venido realizando hace tres años en el tema de las ecuaciones diferenciales en primer año de universidad (Artigue, 1989). Con respecto a las preocupaciones de este apartado, el texto tiene el interés de centrarse justamente en las dos primeras fases de la ingeniería. La primera fase se estructura en torno al análisis del funcionamiento de un sistema, un equilibrio que por mucho tiempo fue estable pero que ahora se percibe como obsoleto. El siguiente fragmento evidencia las selecciones hechas en este nivel y cómo tales selecciones se vinculan con la perspectiva sistémica que constituye el asidero teórico del análisis:

> *La investigación aquí presentada se sitúa dentro de una perspectiva de ingeniería didáctica clásica: se considera un punto del sistema didáctico cuyo funcionamiento parece, por razones de diversa naturaleza, poco satisfactorio. Se analiza este punto de funcionamiento y las restricciones que tienden a hacer de él un punto de equilibrio del sistema. Posteriormente, al jugar con estas restricciones, se busca determinar las con-*

diciones de existencia de un punto de funcionamiento más satisfactorio.

Este análisis de restricciones se basa en la identificación, en el campo matemático en cuestión, de tres cuadros de desarrollo y de funcionamiento. Por lo tanto, la noción de cuadro (Douady, 1984) juega aquí el papel de base teórica didáctica general. Estos cuadros son los siguientes: el cuadro algebraico de la resolución por fórmulas, el cuadro numérico de la resolución numérica aproximada y el cuadro geométrico del estudio global cualitativo de las curvas soluciones de la ecuación.

Una vez introducidos estos cuadros, el análisis de las restricciones se efectúa distinguiendo tres dimensiones:

- La dimensión *epistemológica* asociada a las características del saber en juego
- La dimensión *cognitiva* asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza
- La dimensión *didáctica* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza

Hay que resaltar que esta clasificación no tiene nada de original. Ella se deriva naturalmente de la perspectiva sistémica adoptada explícitamente. Entonces, no es sorprendente constatar que nos encontramos de nuevo con una clasificación paralela a la propuesta por G. Brousseau para el estudio de los obstáculos (Brousseau, 1976).

La enseñanza tradicional se centra en el funcionamiento dentro del cuadro algebraico. Por lo tanto, parece natural pretender, teniendo en cuenta el objetivo preciso de la investigación, estudiar la viabilidad de un enfoque epistemológico más satisfactorio y las restricciones que se oponen a la extensión de la enseñanza a los otros cuadros. Esto fue lo que se hizo efectivamente y, por ejemplo, se identificaron las siguientes restricciones que se oponían a la extensión al cuadro geométrico:

- En el plano epistemológico, la larga predominancia del cuadro álgebraico en el desarrollo histórico de la teoría, la dificultad de los problemas ligados al surgimiento y desarrollo de la teoría geométrica, y el desarrollo reciente de los procesos de transposición didáctica de aquella hasta un nivel de enseñanza relativamente elemental
- En el plano cognitivo, la exigencia de movilidad permanente entre los cuadros que se necesitan para el estudio

cualitativo (la movilidad es aquí mucho más delicada ya que se acompaña del desfase de niveles: el paso del nivel de las curvas en el cuadro gráfico al de las derivadas en el cuadro algebraico de la ecuación), y el nivel de manejo de los objetos elementales del análisis requerido por las justificaciones

- En el plano didáctico, la fuerza de la enseñanza basada en algoritmos (tal recurso se encuentra bloqueado aquí, ya que el estudio cualitativo puede dar lugar al desarrollo de métodos pero no puede convertirse en algoritmos), el status inframatemático del cuadro gráfico en la enseñanza, y el mito de la resolución completa (el estudio cualitativo va a colocar la mayoría del tiempo al profesor en la posición de tener que detenerse en el camino y admitir que no puede responder a todas las preguntas que se formulan de forma natural)

Hay que subrayar el hecho de que, contrariamente a lo que se puede constatar en otros trabajos de ingeniería, y en particular en aquellos ya mencionados de R. Douady y G. Brousseau, aquí no se enfatiza un cuadro teórico didáctico general. Esto se explica ampliamente ya que, para el problema propuesto (un estudio de condiciones de viabilidad), la teoría didáctica constituye un apoyo que el investigador utiliza tal y como lo haría un ingeniero. El investigador no pondrá en primer lugar esta faceta de su actividad en un artículo de investigación dirigido a su comunidad científica sino que, más bien, consciente o inconscientemente, privilegiará aquello que él percibe como su obra de investigación. Esto no impide que la investigación realizada pueda tener como consecuencias profundizaciones teóricas generales, sino que no se pueden manifestar en esta fase, a menos de que se pretenda falsificar la problemática inicial. Entonces, estas consecuencias teóricas generales, se encontrarán más naturalmente en el nivel de las fases de análisis a posteriori y evaluación. La tesis de D. Grenier (Grenier, 1988) es un buen ejemplo de esto. La tesis incluye una parte de ingeniería clásica que explora la enseñanza de la simetría ortogonal en sexto grado, y desarrolla en los últimos capítulos un estudio más teórico de las fases de evaluación y de institucionalización. Tal estudio se hizo necesario como resultado del proceso de experimentación.

El análisis detallado de este texto también evidencia la predominancia de las entradas epistemológica y didáctica con relación a la dimensión cognitiva. No hay un estudio preliminar de las concepciones de los estudiantes y las restricciones identificadas en este nivel se deducen de resultados más globales concernientes a la didáctica del análisis en conjunto, o a partir de consideraciones generales como la complejidad cognitiva engendrada por la movilidad necesaria del enfoque. De otra parte, se insiste en la dificultad que se encontró para identificar las restricciones relevantes sin ambigüedad del registro cognitivo, ya que aquellas que podrían considerarse como tales siempre aparecían mezcladas con, o reforzadas por, las restricciones didácticas (situación que tal vez se presenta por las maniobras de evasión que elabora el sistema de enseñanza frente a las restricciones cognitivas con que se topa). La poca importancia que se le otorga a lo cognitivo no es típica de los análisis preliminares de la ingeniería. Por el contrario, a menudo uno de los puntos de apoyo esenciales de la concepción reside en el análisis preliminar detallado de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los errores más frecuentes. Así, la ingeniería se diseña para provocar, de manera controlada, la evolución de las concepciones. Es el caso, por ejemplo, de las tesis ya citadas de D. Grenier y B. Parzysz. El punto de vista sistémico adoptado al igual que el nivel de enseñanza involucrado no dejan sin duda de influir en las dimensiones que aquí se privilegiaron.

La concepción y el análisis a priori

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las *variables de comando* que él percibe como *pertinentes* con relación al problema estudiado. Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando:

- Las *variables macro-didácticas* o *globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería
- Y las *variables micro-didácticas* o *locales*, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase

Tanto unas como otras pueden ser en sí variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Sin embargo, en el nivel micro-didáctico esta segunda distinción es clásica, ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de las variables asociadas con la organización y la gestión del "medio" (Brousseau, 1986). Y entre estas, las variables didácticas son aquellas cuyo efecto didáctico se ha corroborado.

Para no aumentar la cantidad de ejemplos, seguiré con la investigación sobre las ecuaciones diferenciales tal y como aparece en el texto citado. Después del análisis de restricciones, las primeras selecciones que se hacen son globales. Estas tienen que ver con decisiones como recurrir a las herramientas informáticas, desarrollar los prerrequisitos adaptados al nivel de la función, limitar la complejidad al nivel de la resolución algebraica, transformar el trabajo en actividades autónomas de la parte algoritmizada de esta resolución, y enseñar explícitamente métodos para el estudio cualitativo. Estas selecciones preceden la descripción fase a fase de la ingeniería donde van a intervenir las selecciones locales.

Este tipo de dispositivo se encuentra por lo general en los textos de macro-ingeniería, pero con una terminología eminentemente variable.

En su artículo sobre la enseñanza de los decimales, G. Brousseau presenta desde un comienzo las selecciones macro-didácticas y las califica como "selecciones principales", ligadas en su mayoría con el contenido (Brousseau, 1981):

> *a. La adquisición de los decimales-medida seguirá un proceso distinto a la de los decimales-aplicación. Y éstos se sucederán en este orden.*
> *b. En los dos casos, los decimales se presentarán como racionales, por medio de la simple reescritura de las fracciones como decimales […].*
> *c. Los estudiantes escogerán las fracciones decimales-medida para aproximarse a los racionales ya que presentan facilidades para calcular […].*
> *d. Este enfoque topológico no se reproducirá en el estudio de las aplicaciones lineales racionales […].*
> *e. Trataremos de hacer adquirir o funcionar, si son adquiridas, los modelos implícitos antes de propiciar su formulación y análisis […].*
> *f. Las sumas y las diferencias de las aplicaciones racionales, a*

> *pesar de haberse logrado, no se teorizarán ni se institucionalizarán.*
> *g. Explicitaremos las otras opciones a lo largo de la exposición de las situaciones.*

A continuación Brousseau entra en la descripción del proceso de enseñanza donde van a intervenir las selecciones locales, presentadas en el lenguaje "canónico" de la teoría de las situaciones didácticas, es decir, en términos de variables, saltos informacionales, costos, etc.

D. Grenier, en su tesis ya citada, titula un apartado "Nuestras selecciones didácticas para la aproximación a la noción" que aparece antes del análisis de las diferentes fases del proceso. Ella distingue en este apartado un "cuadro didáctico" que de hecho corresponde con las decisiones macro-didácticas específicas del contenido y un "cuadro teórico", donde se ubica con relación a la teoría de las situaciones didácticas, que prescinde entonces de la macro-didáctica general.

Quisiera resaltar, antes de pasar al análisis a priori, que estas selecciones globales, aunque se presenten separadas de las selecciones locales, no son independientes de ellas. En particular, como lo enfatiza Brousseau (1981):

> *Hay que asegurarse constantemente de la capacidad de la concepción general para permitir la invención, la organización y el devenir de las situaciones locales* (correspondientes a los cuadros teóricos generales en los que se basa la ingeniería).

Una de las originalidades de la metodología de la ingeniería didáctica, como lo habíamos señalado antes, reside en el modo de validación que es en esencia interna. Desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última.

Este análisis a priori se debe concebir como un *análisis de control de significado*. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. Nótese que la palabra teoría se toma aquí en un sentido amplio, puesto que incluye las construcciones teóricas elaboradas por G. Brousseau durante más de veinte años (como referencia de una de las primeras versiones de la teoría se podría citar a Brousseau, 1972), como también construcciones elaboradas, en conexión más o menos estrecha, por diversos investigadores, entre los cuales R. Douady es unas de las más sobresalientes.

Por lo tanto, el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor
- Se preven los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje

El texto que prepararon como ejemplo los investigadores del IREM de Bordeaux para la Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas de Orléans, en 1986, titulado “Algunas preguntas para el control a priori de una situación determinada” es una fiel muestra de estas características del análisis a priori. Los títulos de los diferentes rasgos del análisis son en efecto los siguientes:

> *1. ¿Cuál es el problema que cada uno de los estudiantes tiene a cargo para resolver?*
> *2. ¿Es posible explicitar este problema en términos de la teoría de juegos?*
> *3. ¿Qué conocimientos debe poseer el alumno o qué debe poder hacer para comprender el enunciado (entrar en el juego)?*
> *4. ¿Qué conocimientos debe poseer el alumno o qué debe poder hacer para tener éxito (ganar el juego)?*
> *5. ¿Qué control tiene el alumno sobre su acción?*
> *6. ¿Hay numerosas fases?*

A pesar de que aquí aparece de manera explícita, hay que enfatizar que a menudo los investigadores tienen en cuenta la teoría de juegos en un nivel puramente metafórico. Se trata de las estrategias, del juego, pero no hay una evaluación precisa de los costos de esta o aquella estrategia, como lo han podido hacer G. Brousseau y algunos investigadores de su equipo, entre ellos H. Ratsimba Rajohn (Ratsimba Rajohn, 1982). Se tiene la impresión de que el investigador percibe una utilización distinta a la metafórica, aún si ésta es posible, como costosa con relación al beneficio que se obtiene en términos de la fineza del análisis y/o de la validación.

Tradicionalmente, el profesor está poco presente en el análisis a priori y se considera en esencia por sus relaciones con la devolución y la institucionalización. El hecho de dejar relativamente a un lado al profesor tiene razones históricas evidentes, si se considera el desarrollo de la investigación didáctica. La didáctica de las matemáticas se construyó en Francia sobre la base de la teoría constructuvista del conocimiento. La influencia profunda de los trabajos de la psicología genética de la escuela de Ginebra (las frecuentes referencias a Piaget y en particular a (Piaget, 1975) en las publicaciones es una prueba contundente de esto), se opone por lo tanto a las teorías empírico-sensualistas o conductistas del aprendizaje que sustentan, de manera más o menos explícita, las teorías ingenuas de la enseñanza. En esta perspectiva, la primera urgencia era, sin duda alguna, restituir el lugar del alumno. En el desarrollo naciente de la didáctica, que imponía de antemano una limitación relativamente estricta a la complejidad susceptible de ser abordada científicamente, el profesor tuvo que pagar de alguna manera el precio de que el estudiante se haya tenido en cuenta en el nivel del modelaje y de la teoría.

De tal forma, no es coincidencial que, si bien las situaciones de acción, formulación y validación se hicieron presentes desde los primeros embriones de la teoría de las situaciones, las situaciones de institucionalización se introdujeron mucho más tarde, ya que no se prestaban al modelaje usual de las situaciones. De ahí que se convirtieran en fases de institucionalización, es decir, los momentos donde un análisis en términos de juego del profesor debe necesariamente redireccionarse con el análisis en términos de juego del estudiante. En el análisis a priori, no se le ha otorgado tradicionalmente un lugar al juego del profesor. Aunque el estudiante se toma en cuenta en un doble nivel, descriptivo y predictivo, el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo, como si la situación lo determinara por completo como actor del sistema.

Tal vez existen otras razones, aparte de las económicas que ya habíamos expuesto, para la reticencia de muchos investigadores a utilizar la teoría de los juegos en un nivel distinto del metafórico antes mencionado. ¿Acaso no se puede ver en esto también un síntoma de evasión frente a las restricciones fuertes concernientes a las relaciones entre la dimensión a-didáctica y la dimensión didáctica, que impone una utilización no metafórica? La conclusión del artículo ya citado de R. Ratsimba Rajohn nos incita a pensar esto. De hecho, él escribe:

> *Pero esta teoría de juegos que hemos considerado no nos permitió prever a priori los comportamientos de los estudiantes y del profesor en el momento de la producción de las etapas intermedias del juego.*
>
> *En efecto, a lo largo del estudio teórico hicimos abstracción del juego del profesor, del juego de los estudiantes que tienen algunas ideas para resolver el problema, y del juego de aquellos que no encontraron nada. De tal forma, el trabajo que acabamos de realizar demostró que era imposible desatender el juego del profesor con los estudiantes.*

De alguna manera, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte al profesor como actor de tiempo completo en el sistema. Sin embargo, no se puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica. Entonces como no se le puede considerar apropiadamente, los fenómenos didácticos que lo involucran tienden a percibirse como ruidos en relación con el funcionamiento cuyo estudio se privilegia: aquel de las relaciones estudiante/medio con respecto al saber.

La cuestión de las relaciones entre las dimensiones a-didáctica y didáctica, en la teoría didáctica y en la metodología de la ingeniería, constituye un problema mayor, ya que involucra de hecho la validación de la metodología. Si el análisis a priori es principalmente a-didáctico y si una parte esencial de los procesos pertinentes se escapan de este registro, ¿qué permite entonces validar o invalidar en realidad la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori? O aún más: si para adaptarse a esta metodología, las situaciones de ingeniería están por necesidad fuertemente restringidas, ¿qué nos permiten tales situaciones "captar" como fenómenos didácticos?

Experimentación, análisis a priori y validación

No voy a extenderme en la explicación de la fase 3 de experimentación puesto que ya es bien conocida. A esta fase sigue una de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

El proceso de validación interna que se encuentra en juego aquí no cae en las trampas de los esquemas usuales de validación estadística asociados con las experimentaciones en clase, que consisten en fundamentarse implícitamente en el principio de que las diferencias mesurables constatadas se relacionan con las variables de comando sobre las cuales se ha influido para diferenciar clases experimentales y clases de control. Esto no deja de ser problemático. En el párrafo anterior hemos formulado algunos interrogantes al respecto. Nos parece que éstos se asocian más con el estado epistemológico de la didáctica que fundamentalmente con el proceso en sí. Quisiéramos, para terminar este apartado, señalar algunas otras dificultades de este nivel de la validación que se nos han hecho evidentes en la lectura de los trabajos de ingeniería didáctica publicados.

Un análisis a priori, debido a su extensión, y a fortiori ya que se trata de un trabajo de macro-ingeniería, es prácticamente incomunicable en toda su extensión. Lo que se publica y se ve desde el exterior no es, salvo como ejercicio académico, un producto que se ciñe a la descripción teórica que se ha presentado aquí. Más bien es una condensación de tal producto. Las selecciones ya se hicieron y el control exterior que puede aportar la comunidad se encuentra necesariamente afectado por ello.

En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación.

Las hipótesis mismas que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación.

LA INGENIERÍA DIDÁCTICA, MOTOR DEL PROGRESO EN LA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica logró que el investigador se sumergiera en el seno de la complejidad del sistema que estudiaba. Por las restricciones de su construcción, esta metodología corría el riesgo de dejar escapar algunos fenómenos identificables por observaciones "naturalistas" de clase. Sin embargo, a pesar de estas limitaciones, era natural que permitiera evidenciar fenómenos didácticos que se habían escapado a las metodologías más externas. En efecto, tal fue el caso si se considera el desarrollo de la didáctica. Las nociones de institucionalización y más recientemente aquella de la memoria de la clase estudiada por J. Centeno (Centeno, 1989), por ejemplo, deben a ella su existencia. Hemos escogido analizar en este texto ese rol de motor de la ingeniería y nos vamos a centrar particularmente en los problemas de la transmisión y la replicabilidad.

Obsolecencia y replicabilidad

La ingeniería didáctica plantea estos problemas de manera novedosa ya que, de un lado, la realización experimental en sí supone de antemano una "transmisión" en dirección del o de los profesores que serán los actores; y del otro, porque no se puede, como en el cuadro de las metodologías externas, importar libremente el "significado" de la replicabilidad de las disciplinas científicas vecinas.

G. Brousseau, el primero en enfrentarse al problema de la replicabilidad de su ingeniería didáctica sobre la enseñanza de los decimales, atrajo la atención de los investigadores sobre los *fenómenos de obsolecencia*. En (Brousseau, 1981) escribió a ese respecto:

> *La hipótesis de la replicación del mismo proceso debe contrastarse con las dos siguientes:*
> *1. Aquella de la mejora al menos local*
> *2. Aquella de la obsolecencia de las situaciones didácticas*
> *Entendemos por obsolecencia el siguiente fenómeno: los maestros, de un año al otro, tienden de mal en peor a reproducir las condiciones susceptibles de engendrar en sus alumnos, puede ser a través de reacciones diferentes, una misma comprensión de la noción enseñada. En lugar de reproducir las condiciones que al mismo tiempo de generar el mismo resultado dejan libres las trayectorias, reproducen al contrario una "historia", un acontecer similar al de los años anteriores, por las intervenciones que, aunque discretas, desnaturalizan las condiciones didácticas que garantizan una significación correcta de las reacciones de los estudiantes. Los comportamientos obtenidos son en apariencia los mismos, pero las condiciones en las que se obtuvieron le modifican el sentido, que se acerca más al comportamiento cultural.*

De hecho, aquí se hace frente a dos tipos de replicabilidad: una *replicabilidad externa*, dinámica, que se sitúa en el nivel de las "historias" y una *replicabilidad interna*, que sin duda es menos fácil de identificar y que se sitúa en el nivel del significado. Al respecto, G. Brousseau elabora la hipótesis de que la obsolecencia, si se produce, tiene la tendencia a hacer evolucionar las situaciones didácticas de la ingeniería, del registro de las situaciones de adaptación del estudiante a aquel de las situaciones de comunicación de un saber institucionalizado y que, de este hecho, ella va a conllevar "de una parte, una evolución de las preguntas escogidas por el maestro en el sentido de un aumento del número de problemas cerrados, y de otra, una disminución del escrito a preguntas más abiertas". En estos criterios indirectos se basó para decidir, en el caso que le ocupaba, que no se había presentado obsolecencia, es decir, desviación significativa hacia una replicabilidad puramente externa.

En mi tesis (Artigue, 1984), me volví a centrar en estos problemas de replicabilidad al tratar de determinar, en un primer momento, qué modelos implícitos o explícitos de la replicabilidad se transmitían en los escritos didácticos. Se concluyó que se transmitía, de manera esencialmente implícita, un modelo de tipo externo que se podría caracterizar en un primer momento de la siguiente manera:

> *En el transcurso de experimentaciones repetidas, se le encontrarán las siguientes características a las situaciones replicables:*
> *1. Los mismos procedimientos deben aparecer (al menos aquellos que no son marginales) con jerarquías comparables*
> *2. La historia de la clase debe poderse describir con un número reducido de órbitas*
> *3. Las regularidades observadas en el nivel de los procedimientos y de las órbitas deben ser en esencia el resultado de regularidades individuales. Estas no deben depender de acciones repetidas de reubicación o de desbloqueo que realice el profesor*
> *4. Las perturbaciones leves que no dejan de presentarse de una clase a otra no deben tender a amplificarse*

El modelaje matemático de estas características y un estudio probabilístico elemental me permitieron demostrar que el campo de validez de un modelo como ése era muy reducido en términos teóricos, aun si se satisface con una replicabilidad muy aproximada como la que definí a partir de la noción de "vecindad de historias de clases". En otros términos, se probó que el tamaño de la muestra de la clase era demasiado pequeño para permitir que las regularidades individuales pasaran al nivel colectivo.

En una segunda fase, el estudio detallado de la dinámica de una situación experimentada en una investigación anterior permitió demostrar que la integración al modelo de los fenómenos de interacción entre los estudiantes observados en clase no permitía por sí solo garantizar teóricamente una replicabilidad externa de la situación. De hecho, de un lado las regularidades externas que se podía esperar garantizar, con el simple juego de las variables identificadas en el análisis a priori de esta situación y en el estudio de su funcionamiento, se sitúan no en el nivel de las "historias de clase" en sí, sino en un nivel más complejo de las estructuras de dichas historias. Del otro lado, en la aparición de las regularidades mismas, el maestro se reveló como un actor decisivo. Pues ellas no eran consecuencia de un funcionamiento semi aislado.

Lo anterior conduce de forma muy natural a elaborar la hipótesis de que las replicabilidades constatadas en términos de historia, en particular aquellas a las que se refería G. Brousseau en el extracto concerniente a la obsolecencia que se citó arriba, están casi necesariamente forzadas por las acciones de control de la dinámica y dirigidas por el profesor de manera más o menos consciente y discreta. Si vamos un poco más lejos, me parece razonable formular en la actualidad la siguiente hipótesis con respecto a la noción de replicabilidad: conviene pensar las relaciones entre replicabilidad interna y replicabilidad externa en términos de una *relación de incertidumbre*. En otras palabras, *una exigencia fuerte de replicabilidad externa no puede satisfacerse sino sacrificando otro tanto la replicabilidad interna* (que es de hecho la puesta en cuestión).

Algunos trabajos recientes, como los de (Arsac, 1989), por ejemplo, al tratar de demostrar el efecto macroscópico de decisiones aparentemente microscópicas en los funcionamientos de clases (los términos macro y micro se utilizan aquí en referencia a los niveles de descripción), entran en el sentido de este análisis al evidenciar que el objeto clase se acerca más a un punto de vista dinámico de sistemas caóticos que a los sistemas estables a los cuales se refiere el modelo ingenuo. Sin embargo, estos trabajos también muestran la dificultad que puede afrontar la didáctica al integrar estos fenómenos de control detallado en el modelaje, si no es, como ya lo había hecho G. Brousseau en su trabajo sobre la obsolecencia, al buscar indagar indirectamente sobre su existencia por medio de un cierta cantidad de indicios, en medio de los cuales debería figurar, si las hipótesis formuladas arribas tienen fundamento, una muy buena replicabilidad externa.

Para concluir este apartado, quisiera subrayar la importancia de la puesta en escena de estas preguntas. En la actualidad nos es difícil encontrar niveles de descripción que no caigan en ningún momento en los ámbitos de lo "externo". En particular, cuando describimos las secuencias de enseñanza con miras a su transmisión fuera de la investigación, el hecho de dirigirnos a un público potencial de no didactas, nos incita a reducir la parte didáctica en la descripción. Por el temor clásico de no ser comprendidos, dejamos a un lado el registro de la comunicación científica y adoptamos el del pensamiento natural. De ahí que casi inevitablemente sacrifiquemos las características internas de las situaciones didácticas en beneficio de las características externas, más fáciles de describir. Con esto obstaculizamos la replicabilidad interna.

Estas son justamente las dificultades que se encuentran en la transmisión didáctica, con respecto a las necesidades de la investigación y, aún más, a la transmisión de ingenierías didácticas, como productos para la enseñanza que han llamado la atención de los investigadores sobre otro problema que es el de las representaciones que los profesores se forman sobre las matemáticas y de la influencia de dichas representaciones sobre las opciones que escogen y las decisiones que toman en su práctica docente.

LOS PROBLEMAS DE TRANSMISIÓN Y DE REPRESENTACIÓN METACOGNITIVAS

D. Grenier, por ejemplo, termina su tesis ya citada con el párrafo siguiente:

> *En conclusión, defendemos la idea de que un proceso no es comunicable si no comprende no sólo un estudio de las concepciones de los estudiantes sobre la noción, lo cual es clásico en la didáctica ya que el proceso se construye generalmente a partir de tal estudio, sino también un estudio de las representaciones que tiene el profesor del contenido del saber en juego, por un lado, y de sus estudiantes, sus conocimientos anteriores y su forma de construir conocimiento, por el otro.*

Por su parte, G. Arsac escribe en (Arsac, 1989):

> *El investigador se queja del hecho de que el profesor que experimenta una situación concebida por el primero "interpreta" la situación. Dicha interpretación del profesor, que se traduce de manera concreta en las iniciativas imprevistas durante el desarrollo de la secuencia de clase, nos parece que debe tomarse como objeto de estudio en sí misma y no como un tipo de "ruido" inevitable en la experimentación.*

La investigación de Arsac, conducida en el marco del problema abierto, apunta justamente a este hecho. El análisis minucioso del papel del profesor durante la fase de investigación le permitió evidenciar notablemente la desproporción entre el carácter aparentemente anodino de algunas intervenciones del maestro y sus efectos reales. Para intentar de incluir este tipo de fenómeno en el análisis a priori de las situaciones, él propone entonces introducir paralelamente a la noción de variable didáctica aquella de la *escogencia didáctica.* Una escogencia didáctica es una decisión situacional que toma el profesor que motiva un cambio cognitivo en el estudiante, y que cambia "el sentido y la función" del conocimiento. A continuación formula el problema de la integración de este nivel de descripción con el análisis a priori, al enfatizar justamente la dificultad asociada al hecho de que las escogencias didácticas que a posteriori parecen decisivas entran a menudo en el ámbito de la microdecisión didáctica.

El estudio de las fases del debate colectivo se explora para intentar esclarecer las motivaciones de estas escogencias didácticas del profesor. G. Arsac llega a la conclusión de que la influencia del profesor en el debate tiene por origen, en la situación particular estudiada, muchas causas:

> • *la concepción del profesor sobre la demostración en geometría y de su vínculo con el dibujo [...]*
> • *la concepción del profesor sobre el papel que él debe tener en la clase [...]*
> • *la representación que él se ha formado del escenario que debe construir en clase [...]*
> • *el tiempo*

El trata de teorizar estas influencias, con referencia a diversos trabajos, al hacer intervenir "la epistemología del profesor", a saber, su concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, su concepción de la enseñanza y su concepción del aprendizaje. Aquí se encuentran las tres categorías introducidas por A. Robert y J. Robinet en su definición de las representaciones metacognitivas (Robert y Robinet, 1989) y G. Arsac hace referencia a ellas en su escrito.

A. Robert y J. Robinet, en sus trabajos recientes (Robert y Robinet, 1989), parten en efecto de la hipótesis de que la transmisión está condicionada por las conductas de los profesores en clase. Basta decir que esas conductas no son improvisadas, sino que revelan rasgos de algunas decisiones instantáneas, guiadas por lo que sucede en el momento, pero que dependen también de decisiones más globales relativamente estables, determinadas por la personalidad del profesor y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. A. Robert y J. Robinet formulan la hipótesis de que debe existir una cierta compatibilidad entre los investigadores que dieron origen a una ingeniería y los profesores que van a experimentarla o a tratar de utilizarla, para que haya un buen funcionamiento de la transmisión didáctica.

Para indagar y estudiar estas concepciones, ellas se refieren a los trabajos de los psicólogos sociales sobre las representaciones. Dichos trabajos han demostrado que, en efecto, "las representaciones sociales, vistas como un sistema de interpretación que rige nuestra relación con el mundo y con los otros, orientan y organizan las conductas y las comunicaciones sociales" (Jodelet, 1989). La exploración del concepto las llevó a particularizar el sentido de las representaciones en el dominio profesional del maestro, y fue de esta manera como introdujeron la noción de *representación metacognitiva* para referirse a:

> *las concepciones de los profesores sobre las matemáticas, sobre la manera como se enseñan y aprenden, junto con las consecuencias de éstas sobre su práctica docente.*

El análisis y la categorización de estas representaciones metacognitivas se efectúa con base en la noción de *núcleo central*, introducida también por los psicólogos sociales (Abric, 1987). Se define como un conjunto de elementos que juegan un papel privilegiado en la representación. A partir de este núcleo se organiza el conjunto de la concepción y además tiende a fortalecerse con las experiencias que vive el individuo.

Hay tres componentes que se distinguen en este núcleo que corresponden con las tres entradas: epistemológica, social y cognitivo-pedagógica. Esta categorización permitió a las investigadoras elaborar una tabla que sirve para el análisis de los rasgos directos e indirectos de las representaciones indagadas (con entrevistas, cuestionarios, transcripciones de secuencias de enseñanza, manuales de ejercicios, libros de texto, ...). Los primeros resultados obtenidos parecen permitir indagar sobre los polos donde se cristalizan las diferencias constatadas entre las representaciones sin que se pueda por lo tanto hablar más de perfiles. A. Robert escribe al respecto (Robert, 1989):

> *Por ejemplo, el tiempo de silencio del profesor en clase, la utilización que hace del registro metamatemático, el rol que otorga a sus explicaciones de un lado, y a los errores de los estudiantes del otro, la escogencia que hace de las actividades de los alumnos (tipos de actividades -ejercicios de aplicación/ problemas abiertos, la duración de las actividades/duración del curso, el lugar respectivo en el tiempo de las actividades/ del curso, la adecuación de los controles/actividades) son algunos de los elementos de las representaciones a los cuales se tiene acceso y que, de hecho, nos parece que diferencian sustancialmente las prácticas ya que inciden en el aprendizaje. De allí su interés.*

Quisiéramos enfatizar aquí que todos los trabajos citados en este último apartado son trabajos que inician un tema de investigación. Su explotación didáctica para el estudio de la transmisión o de la replicabilidad no tiene por el momento mucho de evidente. En particular, uno podría preguntarse:

- ¿En qué las representaciones metacognitivas de los profesores así definidas determinan las decisiones que toman en su enseñanza, global y localmente?
- ¿En qué influencian las representaciones metacognitivas de los estudiantes en sí y sus aprendizajes?

No se puede esperar tener respuestas confiables a estas preguntas en el corto plazo, y es pertinente anotar que los trabajos en curso muestran con mayor intensidad problemas metodológicos bien delicados. Sin embargo, participan de esta mejora en la atención que se le presta al profesor, cuya necesidad ya se había expuesto en el apartado anterior, y teniendo en cuenta que, a pesar de las dificultades que manifiesta, constituye, nada más y nada menos, uno de los pasos obligados del avance de la didáctica en la actualidad.

BIBLIOGRAFÍA

Abric, J. C. (1987). *Coopération, compétition et représentations sociales*. Suisse: DelVal.

Alibert, D. (1989). *Sur le rôle du groupe-classe en situation a-didactique: étude de deux phases fondamentales*.

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation problème*. IREM de Lyon, publication n°64.

Arsac, G. (1989). Le rôle du professeur - aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: IMAG-LSD.

Artigue, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques*. Thèse d'Etat (première partie). Paris: Université Paris VII.

Artigue, M. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(1), 5-62.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: IMAG-LSD.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *Bulletin de l'APMEP*.

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques, XXVIIIème rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve. Reproduit dans (1983). *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2) 164-198.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3) 37-127.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I.

Centeno, J. (1989). La mémoire du milieu didactique. *Actes de la Vème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. Août 1989: Plestin les Grèves.

Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la deuxième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Orléans, Juillet 1982.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques - Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Thèse d'Etat, Université Paris VII.

Douady, R. (1987). L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe. *Actes du Congrès PME XI.* Montréal, juillet 1987, 222-228, Ed. J.C. Bergeron, N.Herscovics, C.Kieran.

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse, Université de Grenoble I.

Jodelet, D. (dir.). (1989). *Les représentations sociales*. Paris: P.U.F.

Legrand, M. (1986). Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique: le débat scientifique en situation d'enseignement. *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l' Informatique*. Grenoble: La pensée Sauvage.

Marilier, M.C., Robert A. & Tenaud, I. (1987). Travail en petits groupes en terminale C. *Cahier de Didactique des Mathématiques N°40.* Paris: IREM Paris VII.

Parzysz, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse, Université Paris VII.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris: P.U.F.

Ratsimba Rajohn, R. (1982). Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(1), 65-113.

Robert, A., & Robinet, J. (1989). Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM Nº 1*. Paris: IREM Paris VII.

Robert, A. (1989). *Ingénieries didactiques, transmissions et représentations*. Texte préparé pour la Vème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Août 1989, Plestin les Grèves.

5

La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento

Régine Douady

Introducción

En este capítulo me intereso por la relación entre aquello que el profesor se propone enseñar en matemáticas y aquello que los estudiantes, a quienes él se dirige en clase, son susceptibles de aprender efectivamente. Las palabras *enseñanza, aprendizaje y conocimiento* pueden tomar diversos significados. A continuación precisaré el que les doy.

La elaboración de un problema es un paso de una *ingeniería didáctica*. En este contexto, el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un **producto**, resultante de un análisis a priori, y un **proceso** en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. Me interesan los diferentes factores que rigen la elaboración de una in-

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación*

geniería didáctica, y su interdependencia. Vale anotar que cada uno de dichos factores se someten a restricciones a menudo contradictorias.

La ingeniería didáctica designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase. Este método se desarrolla mucho en las investigaciones francesas. Para mayores detalles aconsejamos al lector remitirse al capítulo de M. Artigue en este volumen.

En el presente capítulo no pretendo dar cuenta de una investigación, sino más bien describir dos ejemplos de propuestas de enseñanza que corresponden a selecciones didácticas analizadas, argumentadas y justificadas en investigaciones. Todo el trabajo de construcción, análisis y previsión se basa en un cuestionamiento didáctico. También pondré de manifiesto los conceptos didácticos que utilizo. Espero que los ejemplos expuestos no sean tomados como modelos de enseñanza, sino como un apoyo para comprender el sentido y la funcionalidad de las herramientas didácticas propuestas. De igual forma, espero poder ponerlas a disposición de otros profesores para construir y administrar en clase otras ingenierías, y para ayudarles a indagar y administrar mejor sus márgenes de maniobra. En este capítulo, más bien, nos vamos a ocupar de las relaciones entre la *construcción de significado* y la *capitalización o apropiación del conocimiento* por parte de los estudiantes, de su importancia para el profesor y del papel que él les hace jugar a través de las realizaciones didácticas que los estudiantes van a vivir bajo la dirección del profesor.

No obstante, con respecto a los análisis y proposiciones anunciados surge una pregunta crucial, de orden sociológico, que condiciona el sentido de las acciones didácticas posibles: ¿Cuál es el lugar del conocimiento escolar para el profesor y para los estudiantes? ¿Se trata de una manifestación de la relación didáctica? En la vida real, se sabe claramente que la respuesta a estos interrogantes es compleja y no se puede expresar en términos de "todo o nada" o de "sí o no". Sin embargo, a continuación escogí indagar y presentar los diferentes casos según la tendencia principal.

En la primera parte, examino los efectos sobre las selecciones y decisiones de los profesores que tiene el hecho de que el conocimiento matemático sea o no la principal manifestación de la relación didáctica. En la segunda parte, describo un ejemplo de realización didáctica en el transcurso de la cual la relación con el conocimiento matemático evoluciona. Finalmente, presento un ejemplo de elaboración de un problema de álgebra sobre la factorización y el desarrollo de expresiones. Como conclusión, reagrupo los elementos esenciales de la evolución del conocimiento en los estudiantes.

El conocimiento matemático en la relación didáctica

¿Qué significa saber matemáticas? ¿Qué significa aprender?

En el momento en que un profesor se encuentra con sus alumnos en el salón de clase, se estipula que el maestro está allí para enseñar un conocimiento determinado y los estudiantes para aprender este mismo conocimiento. A continuación preciso el significado que doy a las palabras *conocimiento, enseñanza y aprendizaje*.

Saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de **herramientas**. Las herramientas están inscritas en un contexto, que a su vez está influido por *alguien* (o un grupo) en un *momento determinado*. Las situaciones o los problemas en los cuales evolucionan las nociones matemáticas generan **significado** para esas nociones desde un punto de vista que llamaremos *semántico*.

Saber matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de **objeto**. Están descontextualizados, despersonalizados (a pesar de que tengan un nombre propio) y son atemporales. El trabajo de descontextualización y despersonalización participa en el proceso de **capitalización o apropiación del conocimiento**.

El trabajo de recontextualización y el tratamiento de los problemas que de allí se desprenden permite expandir el significado. Este no impide que se capitalicen prácticas o conocimientos particulares, así sean provisionales. Las nociones, al igual que los teoremas, se pueden trabajar y modificar según las situaciones donde se necesitan. De allí se puede desembocar en nuevas nociones, que a su vez se convierten en materia de trabajo, interpretación, modificación, generalización, etc. En el caso de los teoremas, se puede explorar el dominio de validez al imaginar las variantes, demostrarlas, o, por el contrario, construir los contra-ejemplos para asegurarse de que eso no es posible... En todos los casos se llega a relacionar nociones diferentes. El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan.

Este trabajo matemático puede hacerse tanto sobre las herramientas en el marco de un problema, como sobre los objetos para expandir en ellos el hecho de haberlos traído a escena sin una finalidad precisa o por placer estético. Se necesita respetar un conjunto de reglas internas de las matemáticas y *diferentes modos de expresión*. Esto se refiere a una componente del significado que llamaremos *sintáctica*.

Para un profesor, *enseñar* se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para un estudiante, *aprender* significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble status de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial de la interacción entre el profesor y sus alumnos, es decir, que el conocimiento sea una manifestación importante de los "juegos" de la escuela.

La realidad puede ser efectivamente esa, y en ese caso el trabajo del profesor consiste en escoger formas de presentación del conocimiento aceptables para los estudiantes y eficaces con relación al objetivo del aprendizaje. Varias formas de hacerlo son posibles. Sin embargo, la realidad puede ser otra. El conocimiento puede ser una manifestación de la interacción mencionada para el profesor, pero no del todo para un cierto número de estudiantes o, al contrario, ser una manifestación para algunos estudiantes y puede no serlo para el profesor. Entonces, dos elementos van a influenciar las decisiones del profesor y de todas maneras, modular sus logros:

- ¿Qué representa para esos estudiantes el hecho de ir al colegio? ¿Qué esperan ellos del colegio? ¿Qué significa aprender?

- ¿Cuál es la proporción de estudiantes para quienes el conocimiento no es una manifestación de las relaciones escolares? (¿Y para cuáles sí lo es?)

En una misma clase se puede presentar el caso de que algunos estudiantes vengan al colegio para adquirir conocimientos, mientras que otros buscan pasar de clase en clase y llegar lo más lejos posible para tener una buena carrera profesional. Otros llegan a clase para aprender a vivir, a socializarse y a desenvolverse en la vida. Poco importa lo que se haga allí con las matemáticas o con cualquier otra cosa. La disciplina es el sustento de la comunicación con el profesor para responder a sus exigencias, con el mínimo esfuerzo posible (B. Charlot y E. Bautier, 1993).

Sin embargo, sin importar cuáles sean las intenciones al llegar al colegio, cada alumno va más o menos a tener éxito o a fracasar en su proyecto. Del otro lado, según la historia personal del profesor, su propia representación y su propio conocimiento de las matemáticas, su concepción del aprendizaje de las matemáticas, su voluntad de convencer y la fuerza de las restricciones a las cuales está sometido, él intentará defender y hacer valer sus convicciones o, por el contrario, tratará tan sólo de sobrevivir. ¡Y en algunos casos no lo hará del todo mal!

De esta manera, el profesor cuenta con dos posibilidades que podrá utilizar efectivamente o que podrá moldear según las circunstancias: mantener su exigencia sobre el conocimiento como manifestación de su relación con los estudiantes, o renunciar a ella. Esta última es la situación que contemplaremos en el apartado siguiente.

El conocimiento matemático no es una manifestación de las relaciones didácticas ni para el profesor ni para los estudiantes

En este caso, para que el profesor pueda realizar su práctica docente y para que los estudiantes puedan cumplir su papel de alumnos, la clase se restringe a la vivencia de una *ficción didáctica* donde el profesor "enseñará" cualquier cosa y los estudiantes la "aprenderán". Estos últimos tendrán evaluaciones y notas aceptables en su conjunto. Pero ¿dónde se encuentran las matemáticas? ¿Qué puede hacer el profesor? Una respuesta usual es la siguiente: proponer a los estudiantes ejecutar tareas, que se dividen en sub-tareas más elementales, algoritmizadas según las necesidades de los estudiantes. Esta labor continúa hasta el momento en que un porcentaje aceptable de estudiantes haya respondido de manera satisfactoria.

La consecuencia de una opción de este tipo está en que el sentido de la actividad matemática se sacrifica. Los estudiantes no cuentan con otro medio de controlar su producción que con la reelaboración del trabajo en los mismos términos. La experiencia de los profesores muestra que un control así definido es poco confiable. Por otro lado, la legitimidad misma del control se pone en cuestión. Como la función del maestro es corregir, entonces el aspecto mágico se torna racional. Cada vez más se apela a la memoria, pero con pocas posibilidades de estructurarla. El hecho de recurrir a ejercicios repetitivos se vuelve un problema inmanejable. Los estudiantes comprenden cada vez menos por qué se les obliga a hacer matemáticas. Sin duda, en estas condiciones hay que parcelar el conocimiento y algoritmizarlo cada vez más. A pesar de esto, el profesor podrá hacer avanzar sus lecciones. Si se escogen adecuadamente las pruebas de evaluación (compuestas por preguntas pequeñas como de costumbre) más estudiantes podrán pasar al curso superior. Tanto para los estudiantes como para el profesor, está asegurada la supervivencia. Falta por considerar la suerte de los estudiantes que se niegan a entrar en este juego o la de aquellos que fracasan a pesar de su buena voluntad.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para el profesor pero no para los estudiantes

En este caso se pueden presentar dos eventualidades, al menos al comienzo del año escolar: el profesor acepta entrar en la lógica de los estudiantes y, al menos provisionalmente, se empeña de forma progresiva en hacer evolucionar el contrato; o el profesor aborda desde el comienzo el conflicto con los estudiantes.

En este caso se trata de que el profesor obtenga una modificación de la relación de la mayoría de los estudiantes de la clase con las matemáticas. Por lo tanto, esto puede convertirse en un gran desafío para el profesor quien va a verse involucrado, a través de las matemáticas, en un proceso de modificación de las relaciones con el colegio, entre profesor y estudiantes y entre estudiantes mismos.

En efecto, una modificación de las relaciones de estos estudiantes con las matemáticas implica que los contenidos de esta disciplina y la disponibilidad de herramientas de manejo bajo su control tomen un significado diferente. Esto requiere que los estudiantes puedan entrar en una actividad intelectual y que ellos estén convencidos de que esto vale la pena, no sólo desde el punto de vista de su inserción en la escuela, sino también desde un punto de vista social y cultural. Lo anterior quiere decir que el profesor involucra a los estudiantes en una situación donde tienen opciones entre las cuales elegir, que tienen que probar sus efectos, controlarlos, y eventualmente volver sobre las primeras opciones y reelaborar otras, etc. El profesor debe, por lo tanto, asegurarse de que sus estudiantes dispongan de un mínimo de medios para hacer esto. Lo anterior significa que en el nivel del contrato, los estudiantes aceptan involucrarse en el papel de actor y no se refugian en el papel único de ejecutores. En este contexto de aprendizaje, el profesor no puede definir el *juego de la devolución* (G. Brousseau, 1990). Para Brousseau, *"La devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema, y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia"*.

Más adelante volveré sobre las condiciones favorables para la realización de un contrato de este tipo. En particular es importante hacer caer en cuenta desde muy temprano y durante varios años *la interacción necesaria entre la toma de significado y la capitalización del conocimiento*. M.J. Perrin trabajó en particular este problema con estudiantes de sectores populares en dificultad. Por el momento digamos que este caso impone una situación difícil de manejar y de hacer avanzar con estudiantes que han adoptado la costumbre, en el transcurso de años de fracaso, de rechazar el juego matemático.

Entonces, el profesor puede intentar jugar en la dimensión afectiva. Esto puede funcionar momentáneamente, tal vez un año, con éxito relativo dependiendo de las edades de los estudiantes. Sin embargo, no existe la estabilidad suficiente para asegurar la construcción de una masa crítica de conocimientos adecuados para fijar una nueva relación con las matemáticas. La tentación de renunciar al conocimiento y de caer en un aprendizaje de técnicas más o menos memorizadas es atractiva para el maestro. Empero, esta opción aleja a los estudiantes de aquello que podría tener significado para ellos.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para algunos estudiantes, pero no para el profesor

No hay que pasar por alto el riesgo de decepcionar a algunos estudiantes que vienen al colegio a aprender algo, interesados en las matemáticas por ser el objeto de la enseñanza. Estos alumnos pueden rechazar el curso de matemáticas y también el colegio, ya que resienten implícitamente que no cumpla con su función. Ellos pueden buscar el conocimiento u otros centros de interés si tienen la posibilidad, para bien o para mal, o pueden entrar en conflicto con los profesores. Esta situación no es utópica.

El conocimiento matemático es una manifestación de las relaciones didácticas para el profesor y para los estudiantes

Esta es una situación favorable desde el punto de vista de las matemáticas. Sin embargo, la construcción de significado no implica necesariamente la apropiación del conocimiento. Bajo algunas condiciones, tal construcción favorece la estructuración, que es la condición para que se pueda memorizar. Entonces, todo el trabajo debe encaminarse hacia el logro de tal efecto.

La teoría de los campos conceptuales (G. Vergnaud, 1991), la teoría de las situaciones (G. Brousseau, 1987, 1990), la dialéctica herramienta-objeto, los juegos de cuadros y ventanas conceptuales (R. Douady, 1984, 1987, 1992), las representaciones metacognitivas (A. Robert y J. Robinet, 1989) son las herramientas para la comprensión y organización de las relaciones con el conocimiento matemático de los diferentes actores del sistema didáctico, y para ayudar a los estudiantes en su esfuerzo por conceptualizar la realidad.

Algunas de las muchas preguntas didácticas quedan abiertas y los problemas de adecuación entre lo que se enseña, de una parte, y lo que se aprende efectivamente, de la otra, distan de estar reglamentados. Lo anterior conduce a mirar los estudios realizados y los resultados obtenidos con modestia y optimismo a la vez.

Los dos ejemplos de ingeniería que se presentan a continuación se realizaron en distintas clases. Su construcción y realización, los análisis preliminares y los análisis a posteriori fueron objeto de estudio en una situación de formación de profesores y de formación de formadores. Es así como se encontrarán en las páginas siguientes los elementos del análisis a priori y, de vez en cuando, referencias a las realizaciones didácticas.

CÁLCULO MENTAL EN SEGUNDO ELEMENTAL

CRÓNICA

Las *circunstancias*

La historia tiene lugar en una escuela en las afueras de una urbanización de interés social, donde habitan en su mayoría familias en situación social y económica difícil. El profesor acaba de ser nombrado en esta escuela. Sin embargo, es un profesor experimentado, miembro de nuestro equipo de investigación en didáctica de las matemáticas en la escuela elemental, desde hace algunos años. El entró en contacto con su nueva clase en septiembre y comenzó a relacionarse con sus 24 estudiantes de la forma como comúnmente lo hacía. Se dio cuenta muy pronto de que 11 de los 24 estudiantes no podían leer un texto relativamente sencillo, pues no habían comprendido el principio de la articulación de las sílabas. Asociado a esto, ellos también tenían dificultades para escribir. En estas condiciones, ¿cómo hacer matemáticas?

Un buen punto de partida posible era el cálculo mental. Esta es una actividad matemática esencialmente pensada, cuyas secuencias son, en general, cortas y periódicas (todos los días cerca de 10 minutos). En efecto, éste es un proceso que en realidad evoluciona con el tiempo. Su expresión es principalmente oral, con un pequeño espacio para lo escrito, el cual podría obviarse desde el principio en algunos casos particulares. Esta es de antemano una buena estrategia de acceder a lo escrito, como veremos más adelante. El profesor cuenta con una experiencia previa considerable sobre cómo las operaciones mentales son un método para contribuir a la conceptualización de los números y de sus propiedades para hacer operaciones. Es un camino que nos parece muy adecuado para las dificultades de la clase, y que daba esperanzas a la experiencia.

El *método*

El profesor utilizó el siguiente método:

- El profesor propone oralmente una operación a realizar
- Los estudiantes escuchan, memorizan la pregunta y efectúan mentalmente la operación
- A la señal del profesor, escriben en sus cuadernos la respuesta y en seguida los levantan para que el profesor pueda ver la respuesta de todos. Algunas son correctas otras no. Esta es la situación estándar
- El profesor pregunta a varios estudiantes (tanto a los de respuestas acertadas como a los de respuestas falsas) sobre el proceso de cálculo que siguieron
- Cada uno debe estar en capacidad de describir la sucesión de cálculos. En los casos de falla, el estudiante a quien se le pregunta puede notar su error y corregirlo oralmente si explica lo que no estaba bien y por qué. Los otros estudiantes escuchan y están listos a intervenir en caso de no estar de acuerdo
- El profesor motiva a que otros estudiantes con otros métodos de cálculo intervengan (ellos levantan la mano) para expresar su opción
- Los estudiantes, de manera colectiva, en el transcurso de las interacciones verbales (entre estudiantes) reguladas por el profesor, comparan los métodos, sus ventajas o inconvenientes, la rapidez y las posibilidades de control

En el transcurso de este trabajo se manifiestan, de manera explícita en las aplicaciones pero sin una denominación teórica, muchas de las propiedades de los números y de las operaciones, de las propiedades de orden y de la compatibilidad con las operaciones. Estas propiedades intervienen con el status de herramienta para guiar los cálculos, seleccionar, justificar las respuestas o corregir las incoherencias. Aquí se desarrollan prácticas explícitas de cálculo y de control de resultados. Por ejemplo:

> *Estoy seguro de que su resultado es falso porque 12 x 11 es mayor que 12 x 10, y él encontró un número menor que 120.*

De otro lado, se desarrollan y se necesitan de manera intensa la atención y la escucha mutuas más que la memorización. Sin embargo esta situación tiene una duración que, por lo general, no sobrepasa los 10 minutos o el cuarto de hora.

La *realización*

De hecho, este bello programa tuvo obstáculos desde la primera etapa. Para un gran número de estudiantes no hacía parte de su contrato y por lo tanto no se sentían con el deber de escuchar al profesor mientras se dirigía a ellos. La única relación con el profesor que percibían en esos momentos era una relación de autoridad. El profesor tenía la opción de aceptar su lógica y establecer una relación de autoridad o intentar convencerlos con palabras que los hiciera cambiar de lógica.

Esta última opción, por muchas razones que no voy a mencionar aquí, estaba destinada al fracaso. Finalmente, las decisiones del profesor demuestran que se inclinó por la primera opción. Como se puede ver, ya no se trata de una opción sino de la única vía posible de comunicación con la mayoría de los estudiantes.

Los objetivos principales del profesor son los siguientes:

- *Escuchar y respetar* en la relación entre el profesor y los estudiantes, o en las relaciones entre estudiantes. Cuando el profesor se dirige a los estudiantes o cuando uno de ellos se dirige a los demás, aquellos que permanecen en silencio escuchan y tratan de comprender lo que dice quien habla
- *El contenido de las interacciones* es esencialmente matemático. Aquí el tema del cálculo mental remite a trabajar con los números y las operaciones

Los conocimientos del estudiante que en un principio son suficientes para el profesor son los *nombres* de los números y de las operaciones.

Primera afirmación del profesor o el ejercicio de su autoridad

> *P (el profesor): Voy a proponerles algunas operaciones y voy a pedir a algunos de ustedes que* ***repitan*** *lo que dije. No les pido calcular o encontrar un resultado, sino repetir exactamente.*

Cualquier estudiante puede responder a la demanda del profesor, salvo si niega el juego de la escuela. Se escuchan murmullos y la protesta de algunos estudiantes. El profesor insiste y señala.

> *P: 14 multiplicado por 4, Pedro; 5 multiplicado por 22, Pablo; 40 dividido entre 8, María...*

Algunas preguntas análogas se repiten los días siguientes, pero cada vez los enunciados se hacen más complejos. Las variables de situación a disposición del profesor son, para las matemáticas:

- el rango de números solicitados (entre 0 y 100 al comienzo)
- la naturaleza de los números: enteros o no enteros
- las operaciones: familiares o no familiares
- la complejidad del enunciado (una operación, varias operaciones)

Y para la gestión en clase:

- el número de estudiantes a quienes le pregunta
- la duración de la actividad cada día
- el número de secuencias

Segunda afirmación del profesor y cambio de contrato

> *P: Voy a proponerles algunas operaciones y les voy a pedir a algunos de ustedes que las* ***repitan de otra forma.*** *Por ejemplo, para 15x3 ustedes pueden proponer 5 x 3 x 3 o (10 + 5) x 3 o cualquier otra expresión que tenga el mismo resultado si hacemos el cálculo, pero no vamos a hacer el cálculo en este momento. No se puede repetir dos veces la misma expresión.*
> *• Quien responda tiene la posibilidad de pedir ayuda a otro compañero si no tiene ideas*
> *• Los demás deben escuchar atentamente para decidir si podemos o no aceptar la expresión propuesta, y por qué*

La nueva variable a disposición del profesor es el hecho de sugerir o no a los estudiantes que escriban sus proposiciones. De esta forma, después de algunas secuencias controladas por completo por el profesor, aquéllos que tienen conocimientos numéricos tienen la oportunidad de expresarlos en un contexto relativamente poco restrictivo, pero en todo caso delimitado. También tienen una opción que se enmarca dentro de un campo establecido y seguro. Del otro lado, deben responder a una pregunta del profesor, y por esto no corren el riesgo de ser tomados como "profesorcitos" y ser rechazados por sus compañeros que cuentan con menos herramientas matemáticas. En varias secuencias, durante dos o tres semanas, se seguirán utilizando este tipo de afirmaciones.

Tercera afirmación del profesor y toma de responsabilidad por parte de los estudiantes: hacia un nuevo objeto de estudio

> *P: Una vez más les voy a proponer algunas operaciones y voy a pedirles que las* ***repitan de otra forma****, pero esta vez cada uno tiene la opción de proponer su respuesta. La única condición es que no se haya dicho. Quiero una nueva cada vez.*

El profesor quiere orientar el trabajo de los alumnos, de un lado hacia lo escrito, y de otro hacia el estudio explícito de las propiedades de los números y de las operaciones. Para esto, cuenta con la evolución del juego **de lo oral hacia lo escrito** y con una interacción entre los dos modos. Le resta organizar esta evolución. El análisis siguiente explica sus decisiones.

La expresión oral basta mientras la información que los estudiantes deban recoger y manejar no sobrepase su capacidad de memoria. Para que la expresión escrita sea necesaria, hay que evidenciar las fallas de la expresión oral cuando se sobrecargan ampliamente las capacidades para memorizar. Existen por lo menos dos razones para esto: cubrir la diversidad de los estudiantes y hacer inoperante un esfuerzo de memoria. De esta forma y para obtener la evolución deseada, el profesor juega con la variable "numero de estudiantes a quienes se les pregunta". La hace sufrir un salto al cambiar la regla de juego: cada uno tiene derecho a proponer su respuesta.

El profesor cuenta con la familiaridad que se ha desarrollado con esta práctica del cálculo mental para obtener *muchas* proposiciones. Para que los estudiantes puedan responder a la petición del profesor, necesitan saber escribir las diferentes expresiones numéricas, tomando como base un rango "razonable" de números que incluye los signos operatorios y los paréntesis. De forma paralela y a partir del trabajo oral desencadenado con la segunda afirmación del profesor, y también con el trabajo de lectura y escritura por fuera de las matemáticas, se ha podido ubicar y desarrollar progresivamente otro objeto de otra parte del aprendizaje.

Del lado de los estudiantes, la reacción esperada se produce al finalizar dos o tres secuencias: "uno no se puede acordar de todo, hay que escribir". "Hay que ponerse de acuerdo sobre las proposiciones que son parecidas y sobre aquellas que son nuevas".

Las propiedades operatorias se toman aquí como unas *herramientas implícitas* de clasificación, expresadas en términos de acción en un contexto determinado. La *explicitación* oral que se le pidió a cada estudiante en condiciones de "escucha activa" por parte de los otros tiene por objetivo favorecer la despersonalización de los procedimientos y avanzar en la conceptualización de las propiedades subyacentes.

Cuarta afirmación y cambio de la problemática

> *P: Encontrar las reglas para separar las proposiciones semejantes de las diferentes.*

Desde el punto de vista matemático, los objetos de estudio siempre se ubican en el campo numérico. Sin embargo, los números y las relaciones entre ellos y las operaciones ya no son tan directamente el objeto de estudio, sino más bien las propiedades de la operaciones.

La *evaluación*

La *devolución* del cálculo mental tal y como el profesor la concibió y las interacciones entre lo oral y lo escrito demoraron dos meses en llevarse a cabo. Esto tomó de 10 a 30 minutos según el día, cinco días por semana. Esta práctica se desarrolló y enriqueció en sus modalidades con la evolución de los conocimientos de los estudiantes a lo largo del año. Algunos problemas que se consideraron casi imposibles para abordar pudieron estudiarse: problemas de geometría y de medidas junto con la introducción de los números racionales, por ejemplo.

En lo concerniente a los objetivos del profesor, se puede decir que múltiples factores se conjugaron para hacer evolucionar las relaciones sociales en el interior de la clase de un lado, y las relaciones de conocimiento, por el otro. Entre estos factores, la actividad del cálculo mental, tal y como se vivió, jugó un papel clave. Otro factor que tuvo un papel importante fue el hecho de que se hicieran cargo de la clase dos profesores quienes, gracias a una estrecha coordinación, abordaron el problema de la simbolización. El profesor se encargó de las disciplinas científicas, y una profesora, con una formación psicológica y con experiencia con alumnos que tienen dificultades de lectura, se hizo cargo de los otros campos disciplinarios (para respetar las reglas institucionales, los dos profesores tomaron las dos clases que les correspondía, con la misma repartición de tareas).

El calculo mental y la resolución de problemas

Con respecto a las perspectivas que ofrece el cálculo mental, se formula una cuestión más amplia: aquella del vuelco hacia el estudio de un problema, y de las competencias numéricas objeto del cálculo mental. Hemos observado en el marco de nuestras investigaciones que la práctica regular del cálculo mental, tal y como se describió, generaba en la gran mayoría de los estudiantes una gran rapidez de cálculo. Más aún, la facilidad de algunos estudiantes para calcular mentalmente intervenía en múltiples ocasiones en tres momentos a lo largo del estudio cuando se les enfrentaba a un problema.

Al inicio del estudio, los estudiantes mostraban facilidad para el cálculo mental cuando se necesitaba recoger información suficiente para hacerse una idea de la situación a tratar. Por ejemplo, para responder a esta pregunta "a partir de este rectángulo, encontrar otro de perímetro más grande y de área menor", se observó un primer método. Consistía en escoger varios rectángulos de perímetro mayor y calcular su área, o varios rectángulos de área menor y calcular su perímetro, antes de poder considerar las variaciones conjuntas. La posibilidad de hacer cálculos mental y rápidamente era un triunfo en este estudio. En el transcurso del estudio, la misma facilidad se utilizaba para evitar enunciar operaciones simples e ir más rápido; por ejemplo las multiplicaciones o divisiones por 2, o incluso para optimizar las selecciones numéricas en las situaciones de delimitación. Al final del estudio, tal facilidad se empleaba para controlar los resultados de un algoritmo. Por ejemplo, resolver una ecuación al aplicar un algoritmo y después verificar la validez del resultado al sustituirlo en la ecuación.

De aquí surge un interrogante. ¿Se puede sustituir la calculadora con el cálculo mental? Si no es así, ¿qué tiene de específico cada una de las formas de cálculo (el mental, escrito, con calculadora) y cómo se pueden conjugar en un trabajo donde lo numérico es importante?

El cálculo algebraico en la articulación entre la educación básica secundaria y la educación media

El juego didáctico del problema que se presenta pretende trabajar con las factorizaciones y desarrollos de expresiones algebraicas.

El estado de los escenarios

Si se miran los programas de enseñanza de las matemáticas en el colegio, el cálculo literal, es decir, el cálculo que se realiza sobre expresiones que tienen letras y números, se introduce en 9º. El aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita se realiza en 8º. La introducción de las *expresiones frecuentes,* la práctica de los *desarrollos* y *factorizaciones* se desarrolla progresivamente en 6º, 7º y 8º.

Desde el punto de vista matemático, se trata de calcular polinomios con una variable numérica, escritos en forma de combinaciones lineales de monomios con coeficientes reales o de productos de factores. Por supuesto, estos términos matemáticos no hacen parte del discurso de la clase, ni por parte del profesor ni por parte del estudiante.

En la práctica tradicional dentro del salón de clase, por lo general este tipo de temas se trabaja al nivel de la simbología, sin problemas que los hagan interesantes o les den sentido. Es un asunto de cálculo literal y no de cálculo algebraico presentado y tratado, bien como prolongación del cálculo numérico ("es parecido pero con letras"), o como una serie de reglas a aplicar ("basta con aprenderse las reglas"). Esta descripción es un poco caricaturezca; sin embargo, la situación real se asemeja a la descrita en ambientes alejados de la reflexión didáctica, que por fortuna se expanden cada vez más.

Del lado de los estudiantes, son numerosos los errores persistentes y recurrentes, que escapan a los esfuerzos de los profesores por evitarlos o corregirlos. Tanto los profesores mismos, como los investigadores que se han dedicado a este tema, han elaborado un amplio inventario de dichos errores.

Con respecto al significado

Como muchos otros investigadores, profesores y formadores, también estoy de acuerdo con la gran importancia que tiene la construcción de significado de las nociones matemáticas en los estudiantes, para que ellas puedan estar disponibles cuando necesiten enfrentarse a una situación novedosa. Como se mencionó antes, el significado tiene al menos dos componentes: la componente *semántica* y la *sintáctica*. Para tener en cuenta su componente semántica, se ha enfatizado el status de herramienta de las nociones y las relaciones con nociones diferentes internas o externas a las matemáticas. Para resaltar su componente sintáctica, se acentuaron los sistemas de representación simbólicos, la manera como funcionan y como son tratados por los estudiantes. El trabajo de modelaje algebraico ofrece una oportunidad en particular favorable para que el profesor y los estudiantes se enfrenten a estas dos componentes y a la importancia de su interacción en la evolución de la relación didáctica.

Sin embargo, en lo concerniente al álgebra, al menos, el significado no basta. La manera como un tratamiento algebraico se lleve a cabo proviene justamente del *olvido* de la contextualización que se encuentra en su origen. Por esto, se hace necesario tener en cuenta la influencia del significado en la elaboración de algoritmos y, simultáneamente, trabajar en apartarse de ellos. Yo concibo el aprendizaje del cálculo algebraico como *el equilibrio o la interacción entre la construcción del significado y la familiaridad técnica con los algoritmos*.

Y surge entonces una pregunta: ¿Si se toman las anotaciones anteriores como hipótesis, cómo se podrían ellas traducir en una ingeniería didáctica?

Hay que precisar las evidencias. No basta con uno o varios problemas para que los estudiantes manejen a plenitud de responsabilidad una competencia algebraica. Esta es una cuestión de larga duración que requiere una vigilancia intelectual permanente. Por ejemplo, las interconexiones entre diferentes cuadros o los cambios en el punto de vista o de registro al interior de un cuadro realizados para avanzar en un problema son medios a través de los cuales se manifiesta la sutileza del pensamiento. Ellos ofrecen la oportunidad de confrontar ideas, indagar las coherencias y controlar los resultados. Sin embargo, poner en la práctica tales procedimientos no se logra espontáneamente; para ello se necesita una verdadera educación. Más adelante volveré a mencionar las condiciones para ello.

Elaboración de un problema de álgebra

Me ubico en un contexto donde el profesor y los estudiantes están reunidos en la clase de matemáticas para hacer esencialmente matemáticas. En el ejemplo siguiente se trata del álgebra. Primero describo el contexto escolar involucrado y a continuación los objetos de estudio en cuestión. Después propondré un problema construido para poner en práctica durante su resolución los objetos de estudio escogidos. Por último haré un análisis matemático y didáctico del enunciado, donde expondré las variables sobre las cuales el profesor puede influir, las escogencias hechas y las razones de tales selecciones, y también los resultados que se esperan de los estudiantes.

El contexto escolar

Me interesan los estudiantes que finalizan la educación básica secundaria e ingresan a la educación media. Todos esos estudiantes ya han tenido la oportunidad de manipular expresiones algebraicas generales de grado pequeño. Ya han realizado desarrollos de escritura según las reglas del cálculo literal: desarrollos (de la forma "producto" a la forma "suma"), y algunos casos limitados de factorización. También se han resuelto algunas ecuaciones de primer grado y una incógnita. Las ecuaciones se han formulado bien sea directamente en el cuadro algebraico, o como resultado de colocar en forma de ecuación pequeños problemas de geometría, medición, vida cotidiana u otros. Los estudiantes han utilizado en diversas ocasiones las calculadoras. También tienen cierta experiencia en marcar puntos sobre un plano con dos ejes ortogonales graduados.

Los objetos algebraicos que nos interesan aquí son esencialmente los polinomios de una variable y de grado pequeño: de grado 1 en la resolución de ecuaciones, y de grado 2 o 3, con menor frecuencia, en las factorizaciones o desarrollos de expresiones algebraicas.

Se descubrieron muchos errores de los estudiantes en la práctica escolar del cálculo algebraico (resolución de ecuaciones, desarrollo de productos en sumas y factorización de sumas en productos). Salieron a relucir errores recurrentes y persistentes que revelaban obstáculos más profundos. Por ejemplo:

- Según las "necesidades" de cálculo, pasar números que estaban en posición de coeficiente a la posición de potencia o viceversa. El efecto logrado era poder reagrupar en un solo término, términos con grado diferente
- Colocar mal los paréntesis
- Cambiar de signo sistemáticamente al pasar una expresión (eventualmente reducida a un número o a una letra) de un miembro al otro de la ecuación, aún si se trataba de efectuar una multiplicación o una división

También hay que mencionar las fallas en el desempeño de los estudiantes si en vez de pedirles resolver una ecuación, se les preguntaba si un número determinado era la solución a la ecuación.

A partir de estos hechos, me pregunto sobre la pertinencia y disponibilidad de conocimientos (algunas veces adquiridos de manera costosa en términos de esfuerzo y tiempo tanto para el profesor como para los estudiantes), en contextos donde serían herramientas adaptadas.

Los objetos de estudio

En el cuadro algebraico, el estudio versa sobre la factorización y desarrollo de funciones polinómicas. Se van a estudiar las relaciones entre las formas de escritura y los asuntos que se manipulan, como la búsqueda de los valores de anulación de un polinomio o la resolución de ecuaciones.

En el cuadro gráfico, el estudio aborda la representación gráfica de funciones polinómicas y trata de evidenciar algunas de sus propiedades.

Objetivos para la selección del problema

- *Coordinar* temas que se abordan y se tratan de forma separada, pero que desde el punto de vista matemático sostienen relaciones de significado

El punto de partida es el siguiente: *la escritura* es un medio privilegiado *para comunicarse* en matemáticas; pero también es un medio *para progresar.* Aquí, la escritura factorizada y la escritura desarrollada facilitan el acceso a las diferentes propiedades de los polinomios. El problema debe resaltar este punto. Se espera que los estudiantes tengan los medios para darle significado a la forma escrita de las expresiones algebraicas y para avanzar en la comprensión y conocimiento de las propiedades que tales formas tienen.

Para responder a esta exigencia, se decidió que en el problema intervinieran los objetos de estudio como *herramientas adaptadas* para resolverlo. Esto conduce a la ampliación del campo matemático al cual se lleva el problema. En particular, se hace interactuar y no yuxtaponer los estudios que se ubican en los cuadros algebraico y gráfico e, implícitamente, se introduce un punto de vista de "función".

- *Dar a los estudiantes medios* para *ejercer un control de tipo científico* sobre lo que hacen o dicen
- *Crear* nuevos objetos. La resolución debe desembocar en un nuevo conocimiento que tenga significado para los estudiantes y que el profesor pueda institucionalizar en la clase

Los objetivos que acabo de enunciar se centran en un punto del álgebra: las factorizaciones y los desarrollos. De hecho, su puesta en práctica conlleva una ampliación de la situación didáctica de tal manera que muchos otros elementos matemáticos (nociones, métodos) de cuadros diferentes se trabajen desde el punto de vista del significado y de la técnica. Las interacciones entre los cuadros y los cambios entre cuadros juegan un papel clave en este trabajo.

Las selecciones matemáticas y sus justificaciones

En términos algebraicos, para anular una expresión polinomial de grado superior o igual a 2, por lo general es más interesante que dicha expresión esté formulada como un producto de factores de primer grado, ya que al anular cualquiera de los factores se anula el producto. Por esto, el problema enunciará una pregunta exterior al cuadro algebraico. Para responderla será necesario anular una expresión polinomial. Para calcular el valor numérico de una expresión como esa, la forma desarrollada puede resultar más cómoda. Para resolver una ecuación de segundo grado que tiene una parte escrita en forma desarrollada y otra en forma factorizada, hay que transformar una de las formas para homogeneizar la escritura: todo debe estar desarrollado o factorizado. Si la técnica de resolución con ayuda del discriminante no está disponible, entonces la factorización es la única esperanza para resolver la ecuación.

Resolver una ecuación $A(x) = 0$, por ejemplo $ax + b = 0$ ó $(ax + b)(cx + d) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$, significa encontrar los valores de la incógnita x para los cuales la expresión $A(x)$ es igual a 0; también significa encontrar los valores de la variable x para los cuales la función $x \rightarrow A(x)$ se anula. Haremos mención, según el caso de manera explícita o implícita, a estos dos puntos de vista en el problema.

En términos gráficos, anular un polinomio o resolver una ecuación se traduce en la búsqueda de los puntos donde la representación gráfica de la función en cuestión se corte con el eje de las abscisas. Se pueden formular las preguntas en el cuadro gráfico, pero para responderlas hay que trabajar en el cuadro algebraico bien sea para hacer cálculos numéricos después de haber escogido un valor numérico para x, o bien para resolver las ecuaciones, trabajo para el cual la selección de la escritura puede ser determinante.

Selección de la presentación del problema

Se decidió proponer un enunciado que casi todos los alumnos pudieran abordar con sus conocimientos del momento, y que no impusiera ningún procedimiento.

El problema

En un plano formado por dos ejes graduados, ortogonales,

A. Interesan los puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) están definidas por la relación: $y = (x + 3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$. Se denomina E al conjunto formado por estos puntos.
   - Proponer 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos de E, y 5 pares de coordenadas correspondientes a puntos que no pertenezcan a E.
   - Representar gráficamente la mayor cantidad posible de puntos de E.
   - Hay puntos de E sobre el eje de las abscisas? ¿Y sobre el eje de las ordenadas? Si es así, dar las coordenadas de esos puntos. Si no, decir por qué.
   - ¿Hay puntos de E que tengan la misma abscisa? ¿Y otros que tengan la misma ordenada? Si sí, dar ejemplos; si no, decir por qué.

B. Interesa ahora el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) estén definidas por la relación: $y = x^2 - 9$. Se denomina F al conjunto formado por estos puntos (Responder a las mismas preguntas que se formularon al punto A).

C. ¿Hay puntos comunes entre E y F? Si sí, dar las posibles coordenadas de estos puntos.

Como se puede percibir con la lectura del enunciado, el problema involucra diferentes cuadros. Para abordarlo, los estudiantes tienen que hacerlos interactuar, *ponerlos en juego*. Esto requiere que ellos tengan *suficientes* competencias en cada uno de esos cuadros. Por esto, las competencias se enuncian y clasifican a continuación, teniendo en cuenta cada cuadro de referencia. Para el profesor que ha escogido o construido un problema también surge de manera regular una pregunta que versa sobre el hecho de si el problema pone en juego de manera adecuada las nociones que él quiere tratar en las condiciones donde él colocó el problema (aprendizaje, familiarización, prueba de conocimiento). Más aún, el profesor necesita saber con qué variables puede jugar y cuál es la incidencia de sus selecciones en los comportamientos de los estudiantes. En ellas se encuentran los elementos importantes de su margen de maniobra. Sus preocupaciones explican las descripciones siguientes.

Las competencias

Las competencias que entran en juego en el problema son de dos tipos: las competencias que se supone tienen los estudiantes para abordar el problema en cada uno de los cuadros que intervienen en él, y las competencias que efectivamente deben tener los estudiantes para poder resolver el problema. Con respecto a las primeras, *las competencias que supuestamente deben poseer los estudiantes* para abordar el problema son, en el cuadro gráfico:

- Trazar ejes ortogonales y saber graduarlos
- Ubicar los puntos cuyas coordenadas se conocen
- Leer las coordenadas de puntos marcados
- Utilizar correctamente las palabras marca, ejes ortogonales, graduación, coordenadas, abscisa, ordenada

En el cuadro algebraico:

- Sustituir los valores numéricos por letras en la expresión algebraica y calcular su valor

Y en el cuadro numérico:

- Calcular correctamente con enteros naturales
- Calcular de forma más o menos adecuada con los enteros, los decimales y las fracciones
- Utilizar una calculadora como ayuda para los cálculos

Por el otro lado, *las competencias algebraicas que sin duda deben estar disponibles* y que, según el caso, ayudarán u obstaculizarán, son:

- Desarrollar expresiones algebraicas polinomiales de primer o segundo grado donde intervienen los productos de factores
- Factorizar en casos muy particulares
- Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita

Los cuadros del problema

Las preguntas se formularon en el cuadro *gráfico*, pero en los datos, los puntos se seleccionan por medio de una relación *algebraica*. El cuadro *numérico* sirve de ambiente.

Las herramientas

Las herramientas conceptuales que entran en juego son:

- Las nociones subyacentes a las competencias que se presuponen como herramientas explícitas, en especial el expresar como productos de factores
- El teorema "para que un producto de factores sea nulo, es necesario y basta con que uno de sus factores sea nulo", como herramienta implícita

Y las herramientas tecnológicas se refieren a:

- Una vez se ha decidido el método de trabajo (sustituir los valores numéricos por letras en las expresiones algebraicas y calcular su valor), la calculadora, en lo posible programable, permite programar y obtener las coordenadas de una gran cantidad de puntos de E y después de F, y tener una visión geométrica de estos conjuntos

LAS VARIABLES DEL PROBLEMA

Las variables que intervienen en el problema pueden presentarse teniendo en cuenta cada uno de los cuadros. Las variables asociadas con las relaciones *algebraicas* son:

- El grado: 2 o 3
- La expresión escrita: factorizada o desarrollada
- El orden de los monomios: en una lectura de izquierda a derecha, primero el término en x o primero la constante
- Los coeficientes numéricos: enteros, no enteros, positivos, negativos, etc.
- Los valores de anulación

Las asociadas con el cuadro *gráfico* son:

- El número de puntos a marcar: finito o infinito
- La posición de los puntos a seleccionar: no importa dónde, sobre uno de los ejes dentro de los límites materiales de la gráfica o fuera de esos límites, por fuera de los ejes pero con una condición restrictiva

Y las asociadas con el cuadro *numérico* son:

- Recopilación y tratamiento de una información numérica pertinente
- Uso o no de una calculadora. Si se usa, de una calculadora sencilla o programable. Esto determina qué tan diferente pueda ser el tratamiento de un problema

Las selecciones didácticas que fijan las variables y las intervenciones del profesor

Tales selecciones, en la parte A del problema, son:

Lo primero que el profesor espera es que los estudiantes den significado a la expresión " (x, y) están definidas por la relación...". Para probar esto, se pide ubicar 5 puntos cuyas coordenadas verifiquen la relación y 5 puntos que no. En caso de dificultad, el profesor puede iniciar una discusión en la clase sobre el significado que se le da a la expresión.

Lo segundo se relaciona con el menor o mayor conocimiento de los puntos de E. La calculadora programable permite, una vez se ha decidido el método de trabajo (sustituir los valores numéricos por letras en las expresiones algebraicas y calcular su valor), programar y obtener las coordenadas de una gran cantidad de puntos de E y de F. Como resultado se puede tener una visión geométrica de estos conjuntos. Esto permitirá más adelante concebir los puntos comunes a E y F como puntos de intersección de dos curvas.

La escogencia de dos parábolas cuya concavidad es de sentido opuesto y los vértices no están muy alejados uno del otro obedece a la voluntad de facilitar a los estudiantes la convicción de la existencia geométrica de los puntos de intersección. Resta hacer un trabajo técnico con ayuda de las herramientas algebraicas y saber calcular las coordenadas de esos puntos para probar efectivamente su existencia.

Acabo de describir aquello que denomino un *juego de cuadros* entre los cuadros algebraico y gráfico, y exploté en cada uno aquello que es fácil y que, por traducción al otro, permite avanzar en el problema.

Lo tercero que se espera es que los estudiantes relacionen los siguientes elementos:

1. *Tal punto está sobre el eje de las* x con *su ordenada* $y = 0$.

2. *Buscar los valores de* x *que anulan* y con *resolver la ecuación* $y = 0$ y que deduzcan de esas relaciones un medio para encontrar los puntos de E sobre el eje de las abscisas. La relación algebraica escogida está escrita en la forma de un producto de dos factores de primer grado para facilitar la búsqueda de los valores de x que anulan y. Sin embargo, debido a la familiaridad de los estudiantes con las expresiones desarrolladas, se puede pensar que un cierto número de ellos tenderá a desarrollar el producto de factores. Por lo tanto, estos estudiantes no saben resolver los trinomios de segundo grado. La expresión desarrollada los conduce a un impasse de donde algunos logran salir gracias a algunas "amalgamas audaces".

Los coeficientes se escogen de tal forma que una de las raíces sea igual a un entero pequeño y pueda encontrarse después de algunos ensayos de valores enteros de x; y que el otro tome un valor lo suficientemente grande como para escaparse a los ensayos y corresponda a un punto por fuera de la hoja donde está dibujado el gráfico. En este momento toca necesariamente resolver una ecuación de primer grado.

Lo cuarto que se espera es que los estudiantes transformen el método "escojo un valor para x, no importa cúal, el que yo quiera, hago el cálculo siguiendo la fórmula, y encuentro el valor de y" en una propiedad de la relación "a cada valor de x corresponde uno y un solo valor de y", y después en una característica del conjunto E "a todo valor de x corresponde uno y un solo punto de E".

Las selecciones para la parte B del problema son:

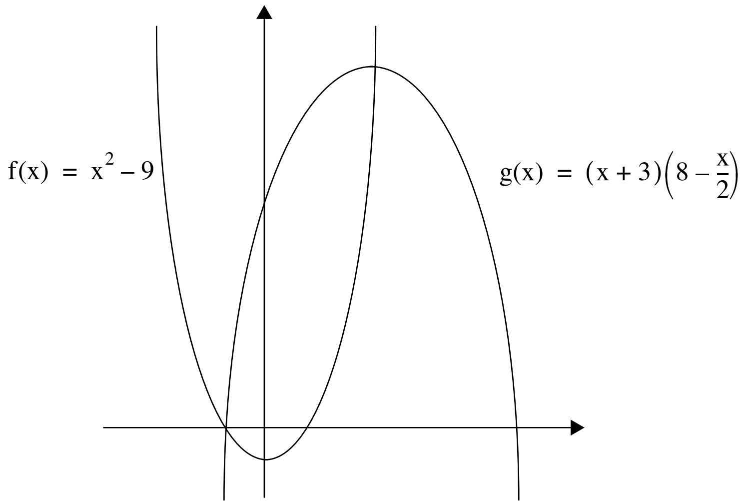
Se pide algo análogo a lo anterior, pero a partir de una relación algebraica que es una expresión frecuente como la "diferencia de dos cuadrados". El profesor espera una solución rápida a esta parte. Su interés es doble:

1. Evaluar a los estudiantes sobre aquello que aprendieron en la parte A), y en todo caso darles la oportunidad de hacerse las mismas preguntas y, en caso de haber fallado, comprenderlas mejor.

2. Preparar la parte C), donde en verdad se manifiesta el problema.

Y para la parte C son:

Se pide a los estudiantes encontrar los puntos comunes a los dos conjuntos descritos respectivamente en A) y B). Desde el punto de vista gráfico, un punto común a E y F tiene coordenadas (x, y) tal que y se expresa de manera diferente en función de x si se le considera como punto de E o de F (denominémoslos y_E y y_F). El trabajo precedente debe en principio conducir a los estudiantes a la traducción algebraica de la pregunta. Por lo tanto, algebráicamente, será indispensable que el signo "=" tome otro significado diferente al que ha tenido en el estudio de las partes precedentes. De hecho, la ordenada y era el resultado de un cálculo y el signo "=" quería decir "tiene por resultado". La referencia gráfica (un punto tiene un par único de coordenadas) sugiere que se escriba $y_E = y_F$ para expresar que la ordenada de un punto común entre E y F puede escribirse de dos maneras, lo cual no tiene nada que ver con el resultado de un cálculo. Es más, esta igualdad tan sólo puede expresarse para los puntos comunes entre E y F. En otras palabras, hay tantos puntos comunes como valores que satisfacen esta igualdad. En términos algebraicos, esto se traduce en la resolución de una ecuación de segundo grado que tiene términos de x a ambos lados. Por lo tanto, se trata de una dificultad que tanto profesores como investigadores han notado en el tema, aún si la ecuación es de primer grado. Para facilitar la tarea, escogimos uno de los puntos sobre el eje de las x de tal forma que hiciera parte de los puntos ya señalados gráficamente en los dos conjuntos. Ese punto corresponde a $x + 3 = 0$. Una vez vistas las selecciones descritas anteriormente de las posiciones relativas de las parábolas, el otro punto se puede ver gráficamente



Para que la resolución algebraica sea necesaria, hay que escoger las coordenadas de este punto, es decir los coeficientes de las ecuaciones, de manera que ellas no puedan encontrarse con algunos ensayos empíricos. Así, para resolver la ecuación $x^2 - 9 = (x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$ el desarrollo y el reagrupamiento de los términos del mismo grado llevan al impasse, si las reglas del cálculo algebraico se respetan. La expresión del primer miembro bajo la forma de un producto $(x-3)(x+3)$ no se puede manejar. La factorización es una herramienta. La resolución de $x - 3 = 8 - \frac{x}{2}$ es otra herramienta. El valor de $x = \frac{22}{3}$ no se puede encontrar por azar.

Una mirada desde el lado de los estudiantes

En el transcurso de este trabajo, los estudiantes pueden cometer muchos errores. Ellos pueden producir cálculos que matemáticamente no son válidos, como reagrupar los términos de grado diferente si eso les puede conducir a una respuesta. En ese momento la referencia gráfica se torna interesante si se acostumbra en la clase buscar la coherencia entre los resultados a una pregunta obtenidos por dos procedimientos diferentes.

En efecto, buscar esas coherencias puede tomar mucho tiempo. Si un estudiante se mete en ese trabajo y no encuentra un resultado convincente y si el profesor no reconoce oficialmente el trabajo que el estudiante realizó, este estudiante tendrá pocos ánimos para comenzar de nuevo. Por lo tanto, el hecho de que los estudiantes se hagan cargo, al menos de manera parcial, del control de sus producciones puede convertirse en un motor para el avance del aprendizaje. Un trabajo de este estilo requiere unas competencias matemáticas, al igual que el reconocimiento en el contrato didáctico.

Volvamos al problema. Como ya lo explicamos, el conocimiento gráfico de la situación puede servir de *guía* y también de *control* de la situación algebraica. Uno de los puntos comunes ya se conoce, falta descubrirlo por medio de la resolución algebraica. Al otro se puede tener acceso si se resuelve una ecuación de primer grado con coeficientes pequeños $x - 3 = 8 - \frac{x}{2}$ para calcular x. Falta entonces calcular el valor correspondiente de y. Las coordenadas deben coincidir con valores aceptables gráficamente.

Una mirada del lado del profesor

Al hacer variar los coeficientes de los polinomios, el profesor puede cambiar sus objetivos. Si el objetivo es ante todo de orden conceptual, él puede facilitar la tarea técnica de los estudiantes para conservar la fuerza y el significado de los conceptos en juego. Esto se traducirá bien sea en la selección de los datos para reforzar el significado, o en la introducción de tecnologías (calculadoras o computadores) que ayuden a los estudiantes a manejar las dificultades técnicas, o también en el uso de las dos estrategias anteriores. Si el objetivo es más bien familiarizar o evaluar la capacidad para reutilizar las herramientas en situaciones más complejas donde lo que se acaba de aprender es tan sólo un elemento de la situación, entonces lo que se pone en juego puede ser técnico.

Institucionalización local teniendo en cuenta el contexto

Después de todo el trabajo en clase sobre el problema, al profesor le toca seleccionar aquello que para los estudiantes ha tomado sentido, aquello que es matemáticamente interesante y que se puede volver a utilizar, y aquello que hace parte bien sea en forma directa de sus objetos de enseñanza, o en forma preliminar, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa. Al hacer esto, el profesor organiza explícitamente el saber de la clase. Si este saber está ligado a la clase, me referiré a la *institucionalización local*. Si se encuentra relativamente descontextualizado y despersonalizado y como tal es susceptible de ser comunicado y comprendido en el exterior sin necesidad de conocer la historia de su producción, los conocimientos en juego tienen más bien un status de objeto y entonces me refiero a la *institucionalización*. Para resumir, el profesor hace un poco de la clase.

En el caso que se está estudiando, se va a hacer esencialmente institucionalización local de varios aspectos.

Del vocabulario. $y = (x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right)$ se llama la ecuación de E, $y = x^2 - 9$ es la ecuación de F. Se podrá decir que estas son ecuaciones de grado 2 y explicar de dónde viene el 2.

De las relaciones entre la gráfica y el álgebra. Por un lado, los puntos de E sobre el eje de las abscisas son los puntos de coordenadas $(x, 0)$. Por lo tanto x es la solución de $(x+3)\left(8 - \frac{x}{2}\right) = 0$. Por otro lado, los puntos de F sobre el eje de las abscisas son los puntos de coordenadas $(x, 0)$ donde x es la solución de $x^2 - 9 = 0$.

Un nuevo conocimiento en álgebra. Hay casos donde se sabe resolver ecuaciones de segundo grado: cuando no hay términos en x como en la ecuación de F, o cuando se puede escribirlo en la forma de un producto de factores, por ejemplo al señalar un factor común o una expresión frecuente. Entonces, si uno de los factores es nulo, el producto es nulo. De manera recíproca, si un producto $A \cdot B = 0$ es porque $A = 0$ ó $B = 0$. Pero también la institucionalización se hace sobre un método: para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $A \cdot B = 0$, se resuelven dos ecuaciones de primer grado: $A = 0$ y $B = 0$. Cada una de estas ecuaciones tiene una solución que al mismo tiempo es solución de la ecuación de segundo grado que se propuso.

Se puede notar que, del lado del profesor, la institucionalización es un proceso que hace su aparición con la selección del problema, con las decisiones que organizan la situación didáctica y que el curso no es sino una etapa del proceso. Pero del lado de los estudiantes, el proceso de pronto no se ha vivido como tal, es decir, como un conjunto de etapas articuladas de manera coherente en relación con un objetivo de aprendizaje. En particular, el profesor puede encontrar dificultades con algunos grupos de estudiantes que tienen que realizar la situación que él ha concebido con unos fines didácticos. Realizar quiere decir hacer la devolución del problema: los estudiantes van a encontrarse en interacción científica con el problema durante un momento donde no hay mediación del profesor para decir lo que se puede hacer. Esto quiere decir que estos estudiantes son conscientes de que la situación (a-didáctica) que el profesor concibió y que acaban de vivir constituye el significado de algo que se institucionalizará después. M.J. Perrin (1992), en su investigación sobre los estudiantes de estratos populares, evidenció el hecho de que la mayoría de ellos no establecía ninguna relación entre el trabajo que se hacía para resolver un problema que el profesor había propuesto, y el desarrollo siguiente que elaboraba el profesor, con base en las acciones que los estudiantes habían efectuado. Las condiciones de esta articulación no son sin duda siempre fáciles de establecer. Las palancas apropiadas no están necesariamente disponibles para el profesor. Por esto mismo, ésta es una cuestión que debe tenerse en cuenta desde el inicio mismo de la reflexión sobre la organización de la situación didáctica.

LAS CONDICIONES PARA QUE UN PROBLEMA SEA LA FUENTE Y LA OPORTUNIDAD DE APRENDIZAJE

La situación de aprendizaje que acabamos de presentar se centró en la investigación de un problema que responde a ciertas condiciones. Nombremos las más importantes.

Con la ayuda de sus conocimientos anteriores, el estudiante no puede comprender el enunciado. Esto quiere decir que no puede dar un significado determinado a las palabras y a las oraciones empleadas. El puede tener algunas ideas para abordar el problema y con eso puede arrancar.

Con sus conocimientos, no puede solucionar completamente el problema. No se trata de una simple aplicación de las nociones o métodos conocidos. Las razones pueden ser diversas. Es posible que las nociones matemáticas no hagan explícitamente parte del conocimiento del estudiante. Esto es lo que sucede en la pregunta 2) de las parte A) y B), donde función es la noción apropiada. Puede suceder que el estudiante disponga de estas nociones, pero en otro contexto y pueda tener dificultades para adaptarlas al nuevo. Esto sucede en la parte C) donde la factorización de los dos miembros de la ecuación es la herramienta adaptada para resolverla.

Los objetos de enseñanza, aquello que el profesor quiere que los estudiantes aprendan y retengan, son herramientas adaptadas a la resolución de un problema. En el problema propuesto, la factorización es la herramienta de resolución de ecuaciones de segundo grado.

El problema se expresa en al menos dos cuadros. Aquí, los cuadros gráfico y algebraico interactúan para hacer avanzar el estudio porque sugiere procedimientos y controla los efectos.

Familiarización y reutilización

Aún si la situación de aprendizaje se desarrolla según las expectativas del profesor, surge la pregunta de saber lo que los estudiantes habrán aprendido efectivamente y lo que serán capaces de reutilizar en problemas con un contexto similar pero más complejo, o en problemas con un contexto completamente diferente, de complejidad similar o mucho mayor.

De hecho, antes de poder reutilizar lo aprendido, los estudiantes necesitan familiarizarse con su nuevo conocimiento. Un medio para lograr esto es proponerles primero abordar ejemplos de problemas cercanos al que ya han estudiado. Por ejemplo, se plantea una serie de problemas como:

- Resolver la ecuación $x^2 - 4 + (x+2)(2x-5) = 0$. Aquí la factorización sigue siendo una herramienta adaptada; sin embargo, el texto no dice nada sobre esto. Empero, $x^2 - 4$ es una diferencia visible de dos cuadrados
- Resolver otras ecuaciones del mismo orden
- Desarrollar sistemáticamente los productos en sumas y algunas sumas bien escogidas en productos

Reutilización en problemas más complejos

Para lograr esto se puede proponer preguntas donde la factorización es menos evidente y donde la representación gráfica sea muy útil:

- ¿Hay puntos comunes entre los conjuntos cuyas ecuaciones son $y = x^2 - x - 6$ y $y = (x+2)(8x-7)$?
- La misma pregunta para los conjuntos cuyas ecuaciones son $y = 5x^2 + x - 18$ y $y = (x+2)(8x-7)$

En estos casos el contexto no ha cambiado. Con estas dos últimas preguntas se aborda un problema nuevo. ¿Cómo factorizar una expresión que no tienen un "factor común" aparente o casi aparente, como $x+2$ en la primera ecuación? La herramienta adaptada que los estudiantes desconocen es el teorema "si la expresión se anula con $x = a$, entonces es posible factorizar por $x - a$".

Justamente, la proposición recíproca fue la tratada en los ejercicios de resolución de ecuaciones de segundo grado que se trataron con anterioridad. Para avanzar, es necesario hacer explícita la relación entre los factores de primer grado de la factorización y las soluciones que se encontraron a la ecuación. En seguida se puede intentar deducir de allí un método válido para algunos casos:

- Para factorizar una expresión de segundo grado, se busca de todas las formas y por todos los medios (cálculo o gráfico) los valores de x que la anulan
- Si se encuentran dos, mucho mejor porque se pueden escribir los dos factores dependiendo de lo que se necesite para ajustar el coeficiente de x^2
- Si se encuentra uno, se puede escribir el factor correspondiente a tal valor y arreglárselas para encontrar otra de manera en que al desarrollarla de nuevo, se encuentre otra expresión de partida con una constante cercana
- Si no se encuentra nada, no se puede hacer nada

Nótese que la ingeniería descrita con anterioridad puede llevarse a la práctica durante un período largo de algunos meses. En el transcurso de este período, se estudia la pregunta, se deja un tiempo de descanso y se retoma en diferentes problemas. A lo que se apunta es al estudio ulterior de los polinomios, un objeto importante en las matemáticas. Para un estudio similar, el trabajo propuesto permite que se presenten saltos que tienen significado para los estudiantes.

Acabo de describir un ejemplo de desarrollo de la *dialéctica herramienta-objeto* con los *juegos de cuadros* (Douady, 1984, 1985, 1987) entre lo gráfico y lo algebraico. Tal dialéctica se inicia a partir de un problema que satisface ciertas condiciones que ya se han enunciado. Las *ventanas conceptuales* (Douady, 1991) que los estudiantes movilizan difieren de un estudiante a otro. De esta manera designo al conjunto de partes de cuadros que un estudiante hace interactuar o combina para estudiar el problema al cual se somete. Esas ventanas comprenden aquí las representaciones gráficas constituidas por conjuntos de puntos, los elementos del cuadro algebraico (algunas expresiones frecuentes, las ecuaciones, expresiones algebraicas diversas, algunas reglas operatorias), los números y los medios de cálculo, algunas funciones lineales o afines. Para un estudiante determinado, la ventana evoluciona en el transcurso del trabajo con relación a las preguntas y los métodos que su conocimiento le sugieren. Las ventanas constituyen el sustento de los juegos de cuadros. También se puede tratar de un conjunto de elementos de un cuadro que encuentra de antemano su pertinencia en el problema propuesto y las estrategias desarrolladas para estudiarlo (para un estudiante o para un grupo de ellos en un momento determinado). Durante el estudio, diferentes registros o diferentes puntos de vista pueden interactuar en este cuadro. Aquí, por ejemplo, intervinieron el registro de las ecuaciones y su resolución, el registro de las variaciones numéricas de una expresión algebraica y de sus valores de anulación y el registro de la factorización. Todo esto sucede dentro del cuadro algebraico.

CONCLUSIÓN

La ingeniería que se acaba de presentar es un ejemplo de la puesta en escena de la dialéctica herramienta-objeto. Ella también encarna elementos importantes de la teoría de las situaciones de G. Brousseau, como el contrato didáctico. Está organizada alrededor de problemas que dan significado a las nociones matemáticas implicadas. Ella concede un lugar importante a los procesos de contextualización, cambio de contexto, reformulación de los problemas, descontextualización y también a la personalización, difusión de procedimientos o conocimientos personales, y despersonalización. En otras palabras, el profesor tiene que organizar la transformación de las herramientas a objetos y viceversa. Su objetivo es permitir a los estudiantes apropiarse del conocimiento que, gracias a la situación, está disponible y puede tomar significado para ellos. En este trabajo, la explotación de los cambios entre cuadros o de cambios del punto de vista dentro de un mismo cuadro juega un papel clave. Todo esto requiere que el profesor esté en condiciones que le permitan asegurar la devolución del problema y, por lo tanto, la entrada de los estudiantes en una interacción directa con el problema. El papel del profesor no es ejercer la autoridad sino más bien ser un compañero científico. Sin embargo, esto no siempre es posible. Los estudios de A. Robert, J. Robinet y otros investigadores han mostrado la importancia de hacer explícitas y explotar las creencias o posiciones metacognitivas del profesor, y del uso de un discurso sobre las matemáticas para facilitar el acceso a ciertos conceptos o a ciertos dominios matemáticos.

Sin embargo, admitamos que esta etapa se realizó y que los estudiantes efectivamente trabajaron en el problema y produjeron los resultados esperados en el problema. Al profesor le falta todavía enfrentar la descontextualización y la despersonalización de algunos elementos que él escogió por razones asociadas con sus intenciones de enseñanza y con los comportamientos de los estudiantes frente al problema que les propuso. Dicho de otro modo, el profesor debe institucionalizar algunos elementos: las nociones, métodos, y la práctica basada en las realizaciones de los estudiantes. Pero otra vez en esta etapa, surgen grupos de estudiantes para quienes la relación entre estas dos etapas no son evidentes: trabajar en un problema no implica que se haga algo más tarde con ese trabajo. Por lo tanto, esta relación es una condición necesaria para que la situación de investigación en la cual un estudiante se involucró efectivamente tenga una función de aprendizaje para ese estudiante.

A lo largo de las experiencias didácticas que se realizaron con M.J. Perrin, pudimos notar situaciones particularmente interesantes para favorecer las relaciones necesarias que se mencionaron antes. Estas son las *situaciones de recuerdo*. Se denomina con este término al momento en el comienzo de una sesión donde el profesor pide a los estudiantes *acordarse* de los puntos esenciales de las sesiones anteriores sobre un tema determinado que todavía está en curso. Aquí se establece un control mutuo entre los estudiantes. El profesor repite algunas preguntas, de vez en cuando formula unas nuevas, retoma las informaciones expresadas, pero él en sí no aporta ninguna. Esta es una fase clave en la selección y memorización de los eventos importantes pues se establece la relación con las clases anteriores, se comienza a descontextualizar y a despersonalizar aquellas cosas que el profesor institucionalizará posteriormente. En efecto, la práctica de los recuerdos bajo la responsabilidad de los estudiantes es una situación interesante de instituir ya que el trabajo que se realice durante cada sesión se va a ubicar en relación con el trabajo, preguntas y resultados obtenidos con anterioridad. Así, cada estudiante sabe que debe retener los puntos esenciales de la evolución de una sesión como previsión para la siguiente. De hecho, las situaciones son a menudo complejas y un estudiante no puede llenar por sí solo el contrato. Pero el conjunto de los estudiantes de una clase sí puede hacerlo.

Hay que recalcar que si el profesor es impaciente o exigente con los recuerdos y él mismo reafirma su función, entonces los recuerdos se reafirman de manera conveniente; sin embargo, la situación no cumple con su papel didáctico para los estudiantes. Ella no va a participar en la descontextualización y despersonalización necesarias. Ya no es una presión para que los alumnos consideren el estudio del problema como una parte del proceso de aprendizaje.

Para concluir, enumeremos los objetivos centrales que M.J. Perrin enunció en la secuencia de su trabajo con estudiantes de sectores populares:

- Hacer la devolución de un juego general a través de juegos más puntuales
- Favorecer la creación de representaciones mentales de la acción que permitan el inicio de la descontextualización, y por esto dar a los estudiantes muchas oportunidades de construir tales representaciones
- Favorecer el trabajo personal del estudiante y en especial el trabajo en casa, y para esto, hacerlo de modo que sean capaces de utilizar el manual
- Hacer posibles y desarrollar formas de comunicación y de interacción entre los estudiantes en el trabajo colectivo o grupal
- Hacer evolucionar su relación con la evaluación para hacerla más compatible con un trabajo científico

Como se puede constatar, algunos de estos objetivos se han tratado de forma adecuada en la ingeniería presentada. Otra, como el trabajo en casa y el uso de manuales, se pueden integrar en el transcurso de la ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bautier, E., & Robert, A. (1988). Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de pédagogie, 84,* 13-19.

Brousseau, G. (1987). Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Charlot, B., & Bautier, E. (1993). Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des Mathématiques. *Repères IREM.* nº 10.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Cahier de Didactique nº 3*.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-32.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 387-424.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères - IREM.* nº 6.

Perrin-Glorian, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*(1).

Robert, A., & Robinet, J. (1989). Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM.* nº 1.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2.3).

6

La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos

Michèle Artigue

INTRODUCCIÓN

Es evidente que la enseñanza de los principios del cálculo es problemática. Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 97-140. © 1995 "una empresa docente" & Grupo Editorial

Después de una década, la evidencia de los problemas encontrados y la insatisfacción que generaban han tenido dos efectos notorios:

De un lado, se han convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en este campo. De hecho, la mayoría de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior se han concentrado en el campo conceptual del cálculo, tal y como lo demuestra el contenido de la obra "Advanced Mathematical Thinking" (Tall, 1991).

Del otro lado, tales problemas han motivado numerosos proyectos de innovación de la enseñanza (en especial en los niveles de la educación media y el ciclo básico universitario). Se pueden citar casos como la renovación global del currículo en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de cada vez mayor amplitud en los Estados Unidos (Artigue & Ervynck, 1992).

A pesar de esto, y en contra de lo que se podría pensar y desear, hay que enfatizar que el mundo de la investigación, por un lado, y el de la innovación, por el otro, están lejos de establecer vínculos estrechos. Como lo señala el informe intermedio de Tucker (1991), la mayoría de los proyectos inscritos en el área de la renovación del cálculo en los Estados Unidos se han aplicado de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

¿Qué resulta de esta actividad abundante de investigación e innovación? ¿Sobre cuáles problemas se ha avanzado en realidad? ¿Cuáles son las preguntas que permanecen abiertas? Es difícil intentar una síntesis, por múltiples razones:

Las investigaciones, por ejemplo, se han desarrollado con enfoques que difieren no sólo por el peso respectivo que se le ha otorgado a las tres dimensiones esenciales que son la epistemológica, la cognitiva y la didáctica, sino también por los marcos teóricos que las sustentan. La diversidad contribuye sin duda alguna a la riqueza de este campo de investigación; pero al mismo tiempo la ausencia de un paradigma dominante no facilita la comunicación entre los investigadores. Como escribía en (Artigue, 1992), aun si es posible hacer traducciones entre ellas, tales traducciones sólo permiten tener visiones simplificadas y reduccionistas de los trabajos en cuestión.

Con respecto a la innovación, existe otro problema que se suma a los asociados con la diversidad y difícil comparación de los diversos esfuerzos. Se trata de la obtención de hechos confiables. Los proyectos por lo general se realizan por el entusiamo de los pioneros militantes. La necesidad de convencer hace que se deje a un lado la importancia de un análisis riguroso del funcionamiento de la innovación y de sus efectos. Esto se ve particularmente en los casos concernientes a las tecnologías informáticas (calculadoras o computadores), que constituyen a menudo la base de proyectos de renovación. Las potencialidades se sobrestiman, mientras que los problemas de gestión eficaz se subestiman. Se cae entonces en el peligro de un discurso ingenuo, donde se toma con frecuencia como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que esas herramientas se constituyan en un buen catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores y para comprometerlas con un enfoque más constructivista del aprendizaje.

En este artículo no pretendo presentar un panorama exhaustivo de los diversos trabajos que se han realizado. Quisiera más bien, con ayuda de numerosos ejemplos de investigaciones que a mi modo de ver son significativas, tratar de expresar cómo hoy en día concibo la enseñanza de los principios del cálculo, los problemas que presenta y las opciones que se nos ofrecen como profesores, con sus fortalezas y debilidades.

Aquí nos interesa el presente y el futuro de la enseñanza del cálculo. Pero no sobra echar una mirada al pasado para comprender mejor la situación actual. Tampoco es inútil tratar de comprender de dónde se desprende nuestra enseñanza, y en función de qué limitaciones, internas o externas a las matemáticas, ella se ha establecido. Por esta razón, en la primera parte haré referencia a la historia de la enseñanza del cálculo en la secundaria francesa. La segunda parte la dedicaré a la presentación sintética de las principales dificultades y obstáculos que las investigaciones han evidenciado y han permitido analizar. En la tercera parte, me centraré en la descripción de algunas realizaciones didácticas a nivel de secundaria y de educación superior. Y en la última parte, antes de concluir, daré una mirada más global al campo, esta vez desde la óptica del análisis no estándar.

Una perspectiva histórica sobre la enseñanza de los principios del cálculo

En esta primera parte quiero traer a colación la puesta en práctica de la enseñanza generalizada del cálculo en la educación media a comienzos de este siglo al igual que las evoluciones principales que han llevado a la enseñanza actual[1].

La reforma de 1902 y la introducción del cálculo en el liceo[2]

En Francia, el inicio del siglo XX está marcado por una reforma en los liceos. Uno de los objetivos de esta reforma fue abolir la supremacía de las humanidades clásicas en la educación de las élites burguesas, introduciendo la idea de las humanidades científicas y dándole a estas últimas el mismo status que las humanidades clásicas. Los matemáticos más prestigiosos de la época (Poincaré, Hadamard, Borel, Darboux, entre otros) se comprometieron directamente con la ejecución de este proyecto. Ellos querían reformar los programas que consideraban obsoletos y adaptarlos a la evolución de las matemáticas y a las necesidades de la evolución científica y técnica. La introducción del cálculo en el primer grado del liceo en las secciones científicas y en el último año en todas las secciones fue un elemento clave de esta renovación. Se intentó enseñar un cálculo adaptado a las capacidades cognitivas de los estudiantes, como lo expresó muy bien Poincaré en una conferencia muy famosa sobre las definiciones en matemáticas (Poincaré, 1904). El hizo referencia a la continuidad y derivabilidad de las funciones, los aspectos engañosos de la intuición en este dominio y la concientización reciente del hecho de que el rigor en los razonamientos no es posible si no es con base en las definiciones. Sin embargo, él también enfatizó que este rigor no se puede alcanzar sino a través de hacer primar la lógica sobre la realidad y que sería catastrófico querer imponérsela de golpe al estudiante:

1. Para mayores detalles consultar (Artigue, 1994 b).

2. N.T.: Para tener una idea clara de la organización de los grados dentro del sistema educativo francés, mirar, en el capítulo 2 de este libro, titulado "Lugar de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores", el apartado "El sistema francés".

> *Nos encontramos obligados a ir hacia atrás. Sin duda es duro para el profesor enseñar algo que no lo satisface por completo; pero la satisfacción del profesor no es el único objeto de la enseñanza. Primero hay que preocuparse de lo que es el espíritu del estudiante y en lo que se quiere convertirlo.*

Y sobre el cálculo integral, él advirtió:

> *Para definir una integral, tomamos toda serie de precauciones. Distinguimos las funciones continuas de las discontinuas, y aquellas que tienen derivadas de las que no. Todo esto tiene un lugar en la enseñanza dentro de las Facultades, pero todo esto sería inadecuado en el liceo. La estudiante, no importa qué definición se tenga de ella, no sabrá nunca qué es una integral si no se le ha mostrado con anterioridad lo que es. Todas las sutilezas le serán indiferentes. El cree saber lo que es una superficie y comprenderá que no lo sabe sólo cuando sepa muy bien lo que significa el cálculo integral. Y no hay interés en decirselo en el momento en que se aborda este cálculo. Lo único que queda por hacer es muy simple: definir la integral como el área comprendida entre el eje de las x, dos ordenadas*[3] *y la curva, y mostrar que, cuando una de las ordenadas se desplaza, la derivada de esta área es precisamente la ordenada en sí. Este fue el razonamiento de Newton, fue así como surgió el cálculo integral. Gústenos o no, tenemos que pasar de nuevo por donde nuestros padres pasaron.*

Como lo probó el informe Beke que, en 1914, presentó los resultados de una encuesta de la CIEM (antecesora del ICME) sobre la introducción en todos los países miembros del cálculo diferencial e integral en la educación media (Beke, 1914), la reforma francesa no era un fenómeno aislado y había un fuerte consenso internacional para aprovisionar al estudiante con herramientas potentes para el trabajo científico, como aquellas del cálculo diferencial e integral. En la reforma primó la filosofía positivista que en esa época era dominante. Esta filosofía introdujo una concepción experimental de las matemáticas que pretendia que ellas, sin perder su especificidad deductiva, se vincularan de forma estrecha con el mundo real y fueran útiles a las otras ciencias. Por esto,

3. N.T.: Ordenada, para Poincaré, significa recta paralela al eje de las ordenadas.

los matemáticos se sentían los promotores de una ciencia moderna y eficaz, y la puesta en práctica efectiva de esta reforma les satisfacía. Las palabras de C. Bourlet (Bourlet, 1914) así lo confirman:

> *Mientras que hace quince años, después de haber experimentado con mis estudiantes, yo sostenía que los candidatos al bachillerato aprendían sin esfuerzo el cálculo de las derivadas; y mientras yo reclamaba que se suspendieran las especulaciones inútiles y la introducción de todo aquello que sirviera en la aplicación, muchos "sabios" de la época elevaban sus quejas hasta el cielo. Hoy en día nuestros futuros bachilleres aprenden la notación diferencial y ya hacen algunas cuadraturas. Y nuestros estudiantes de últimos años de bachillerato ya hacen malabares con las derivadas.*

Esos matemáticos no veían las dificultades particulares de esta introducción del cálculo que esencialmente se mantenía dentro del cuadro "algebraico", tanto en las prácticas, como en las aplicaciones. También se puede leer el informe Beke con respecto a la noción de límite:

> *La noción de límite interviene de forma tan frecuente en el transcurso de la enseñanza media al igual que en el ciclo básico universitario (fracciones decimales ilimitadas, área de un círculo, logaritmo, serie geométrica, etc.), que su definición general no debe presentar ninguna dificultad.*

El éxito de esta reforma de hecho se comprueba con la estabilidad de los programas de cálculo. Ciertamente, después de la euforia de los inicios, se vio la introducción de la noción de derivada más tarde y el estudio se quedaba en un primer momento en el cálculo de derivadas sin necesidad sentida del concepto de límite[4]. Después de la guerra de 1914-1918, el retorno fuerte de las humanidades clásicas perturbó por un momento el equilibrio; sin embargo, no se cuestionaron la existencia de una enseñanza del cálculo para todos en el liceo ni los contenidos globales de esta enseñanza.

4. Es decir, las derivadas de las funciones polinómicas u homográficas para las cuales, en el cálculo de $f(x + h) - f(x)$, h puede ponerse como un factor.

La renovación de los años 60

En los años 60, de nuevo se hizo insoportable el desfase entre las matemáticas enseñadas en la secundaria, de manera global, y las matemáticas que viven en la esfera de la comunidad de matemáticos[5]. La enseñanza del cálculo comenzó a cambiar desde inicios de los años sesenta (es por primera vez en esta época cuando el término en sí aparece en los programas). Se trató de una modernización leve que hoy en día tiende a olvidarse y a ocultarse en la memoria colectiva debido al cataclismo que vino después. En efecto, desde el comienzo de los años sesenta, entraron en los programas las notaciones de conjuntos, los cuantificadores y estructuras algebraicas y, en lo concerniente al cálculo, un apartado sobre las generalidades de las funciones con variables reales, organizado según la estructura "canónica": límites, continuidad, derivadas, primitivas, los teoremas generales hasta el teorema de Rolle, el teorema del crecimiento finito y la definición formal de la noción de límite[6]. Las funciones circulares reemplazaron a la trigonometría y las funciones exponencial y logarítmica a los viejos cálculos logarítmicos y cálculo de interés. Se presenta $\Re$ como un cuerpo y los reales asociados con los desarrollos decimales ilimitados.

La renovación, que tocó sobre todo el último grado del liceo, se reforzó en 1965, al parecer sin mayores problemas.

La reforma de las matemáticas modernas

La reforma de las matemáticas modernas estuvo poco relacionada con la enseñanza del cálculo. Como prueba de esto está la poca referencia que a él se hizo en las voluminosas instrucciones que acompañaban a los programas. La influencia de esta reforma fue en esencia indirecta, pues la enseñanza del cálculo sufrió del contagio formalista y conjun-

---

5. Para las matemáticas de la educación superior, esta toma de conciencia fue muy anterior. El grupo Bourbaki se fundó en 1934 con el objetivo de renovar la enseñanza del cálculo diferencial, que era la pieza maestra de la licenciatura en matemáticas. Los primeros cursos que privilegiaban las estructuras algebraicas datan de 1939-40 (Revuz, 1993). Los programas de primer ciclo se renovaron a profundidad en 1958, en 1964 y en 1972 para las clases preparatorias a las grandes Escuelas (Artigue et. al., 1989).

6. Se podrá encontrar en libros de esta época la coexistencia de definiciones "a la antigua", es decir, la definición de límite de una variable más la definición del límite de una función y de la formalización usual de ε, η.

tista, de la predilección por las definiciones, del estudio de las patologías y del rumbo algebraico que ella implicó. Esta visión, como toda la reforma, también se rechazó.

En esta reforma también intervinieron matemáticos eminentes. Al igual que sus predecesores, tuvieron por objetivo la modernización del currículo y pusieron atención al funcionamiento cognitivo de los estudiantes. Empero, debido a la influencia del ambiente estructuralista dominante tanto en las ciencias humanas y sociales como en las matemáticas, ellos no formularon de manera apropiada la cuestión de la cultura matemática necesaria para poder beneficiarse de un enfoque estructural. Tampoco se dieron cuenta de las restricciones que introdujo el hecho de abordar una enseñanza masiva y no una para las élites. Con prontitud, se dieron cuenta de que su reforma se les había salido de las manos.

LA CONTRA-REFORMA DE LOS AÑOS 80

Por oposición a las tres reformas precedentes, la contra-reforma de los años ochenta fue una reforma que surgió de la práctica, más precisamente de los profesores agrupados en el seno de la AMPEP[7] y de los IREM[8]. Con respecto al cálculo, el papel de la comisión inter-IREM llamada "Cálculo" fue sin duda alguna determinante. Para comprobarlo basta comparar el folleto publicado por esta comisión en 1981 (InterIREM Analyse, 1981) con los programas que la Inspección General, organismo gubernamental encargado de los programas curriculares, formuló poco tiempo después.

Las críticas que se hicieron a la enseñanza del cálculo de los años setenta son las siguientes:

- Introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos al estudiante

---

7. La APMEP es la Asociation des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public (Asociación de Profesores de Matemáticas del Sector Oficial).

8. IREM denomina al Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas). Los IREM se crearon durante el fervor de la reforma. Hoy en día son 25 y se encuentran organizados en forma de una red nacional. Ver capítulo 2 de R. Douady en este volumen.

- Construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas
- Predominio de lo cualitativo sobre lo cuantitativo
- Empleo muy precoz de un lenguaje formalizado, a veces hermético
- Interés muy precoz por la patología
- Enseñanza muy centrada en el discurso del profesor

Estas críticas demuestran una vez más un vuelco en la concepción de las matemáticas. Ya no son estructuras ni lenguaje. Las matemáticas más bien se perciben como una actividad humana, histórica, cuya finalidad es la resolución de problemas que han surgido en el desarrollo interno o externo de la disciplina. Ya no se trata de unas matemáticas que están ahí y que se tienen que descubrir, sino más bien unas matemáticas que el matemático construye en función de sus necesidades. De ahí que no sea extraño el interés creciente por la historia de las matemáticas. Estas críticas también testifican la búsqueda de un equilibrio más satisfactorio entre las exigencias que impone el saber matemático y las exigencias que impone el funcionamiento cognitivo del estudiante. Gracias a las investigaciones sobre el aprendizaje, se conocía un poco mejor la realidad del funcionamiento cognitivo del estudiante, en particular dentro del dominio del aprendizaje de las matemáticas. No se puede de manera tan fácil como antes imaginar esta realidad o reconstruirla un poco a voluntad y en función de las convicciones personales.

Las proposiciones que se instauraron en ese entonces fueron las siguientes:

- Modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes
- Equilibrar mejor lo cuantitativo y lo cualitativo
- Apoyarse en objetos típicos sencillos que más adelante servirán de referencia
- Teorizar únicamente lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes
- Promover un enfoque constructivista del aprendizaje

Estas proposiciones repercutieron directamente en los programas. El cálculo se vio como el campo de la aproximación y se trató de que los estudiantes de liceo entraran en él de manera progresiva. En esta inmersión, las exploraciones numéricas y gráficas por medio de las calculadoras en casos típicos simples (funciones y sucesiones de referencia) jugaron un papel fundamental. A dichas exploraciones subyace un enfoque intuitivo donde la formalización tiene un papel muy reducido. Se introduce el lenguaje de los límites a partir de ejemplos sin que la noción en sí estuviera claramente definida. El uso de los cuantificadores desaparece por completo del programa. La actividad se centra en la resolución de problemas y la noción de derivada, la que más problemas acarrea, es la noción central. La continuidad no se menciona sino en el último grado. Se dedica tiempo a un trabajo de búsqueda de mínimos, máximos y comparaciones con ejemplos de referencia básicos para la práctica de campo. En una época se llegó a rechazar cualquier álgebra de límites. Frente a las dificultades encontradas, la adaptación de los programas restableció el statu quo.

¿Se podría decir que se encontró la última palabra en la enseñanza de los principios del cálculo? No hay nada más incierto. A pesar de que la enseñanza parece más al alcance de los estudiantes en la actualidad, no por esto deja de ser problemática (Artigue, 1993). El sistema educativo acepta la administración del hecho de que es imposible enseñar de golpe los saberes del cálculo bajo su forma definitiva. Entonces opta por una aproximación intuitiva que pretende darle significado al cálculo por medio de la selección de problemas y por medio de la puesta en práctica de técnicas de aproximación que se encuentran en el centro de este campo. ¿Qué aprenden en realidad los estudiantes? ¿Cómo estructuran un campo que la enseñanza no estructura por ellos? ¿Qué concepciones se forjan de las nociones que manipulan sin jamás poder recurrir a sus definiciones precisas? ¿Qué influencia tiene sobre estas concepciones las actividades que se realizan con calculadoras y, en especial, con las calculadoras gráficas que día a día están más presentes? Para aquellos que seguirán estudios matemáticos en la universidad, ¿cómo se puede hacer la transición hacia una relación con el campo del cálculo universitario, un cálculo donde no se trabajará más con ejemplos particulares sino con enunciados generales cuya demostración requerirá de prácticas formales?

Por el momento no tenemos una respuesta indebatible a la mayor parte de estos interrogantes. Primero hay que reconocer que los trabajos que se han realizado en los últimos años han permitido identificar las dificultades y obstáculos que impiden el acceso a este campo conceptual, y también cercar los efectos de la enseñanza tradicional, formal y en esencia algebraica. Pero han hecho poco por ubicar en realidad las potencialidades y límites de los enfoques intuitivos, al igual que las transformaciones que han sufrido al salir del campo estricto de lo experimental que con frecuencia les ha dado lugar, para entrar a vivir en los ambientes ordinarios.

DIFICULTADES EVIDENTES EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan mutuamente en redes complejas. Por lo tanto es posible reagruparlas en grandes categorías. Esto es lo que haremos en este apartado al examinar sucesivamente tres grandes tipos de dificultades:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones)[9] y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo

DIFICULTADES ASOCIADAS CON LOS OBJETOS BÁSICOS DEL CÁLCULO

Cuando se inicia la enseñanza del cálculo, los números reales y las funciones no son objetos que los estudiantes desconocen del todo. El cálculo con los números irracionales, las situaciones funcionales ligadas a

9. Esta organización del campo en torno a la noción de función no es nada novedoso Ya que se encuentra en el tratado de Euler "Introductio in analysim infinitorum", de 1748.

las funciones lineales y afines se ha trabajado, por ejemplo en Francia, en los dos últimos grados del colegio. En el primer grado del liceo, el estudio de las funciones ocupa un lugar importante[10]. Pero se trata de objetos "en construcción" que no se pueden considerar "inertes" a medida que se efectúa el aprendizaje del cálculo. El aprendizaje del cálculo se convertirá justamente en uno de los motores de su conceptualización.

Los números reales

Numerosas investigaciones muestran, por ejemplo, que, para los estudiantes, las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números que se encuentran en el curso de las extensiones sucesivas empíricas del cuadro numérico distan de ser claras. Si para los estudiantes, $\Re$ comprende categorías diferentes de números (los enteros, las fracciones, los decimales, los números que se expresan con radicales y otros como π), todas estas categorías tienden a confundirse en la asociación entre número real y número decimal (con un número decimal reducido). Esta asociación tiende a reforzarse con el uso de las calculadoras[11]. De igual manera, si hay asociación de los reales con la recta numérica, esta asociación no corresponde necesariamente con nuestra visión del continuo numérico. Numerosos trabajos han evidenciado lo inadecuado de las concepciones topológicas de $\Re$ que los estudiantes se han formado (Robinet, 1986). Por ejemplo, los tests para la admisión a las universidades muestran claramente que para una mayoría considerable de estudiantes la propiedad $\forall n > 0, |a - b| < \frac{1}{n}$ no implica la igualdad de los reales a y b, sino sólo una gran proximidad entre ellos (Robert & Boschet, 1984). Esto confirma los resultados que había obtenido B. Cornu en su tesis (Cornu, 1983).

---

10. Nos referimos a los programas actuales que miran situaciones por medio de funciones definidas en $\Re$ o en intervalos de $\Re$. Se enfatiza el modelaje de funciones, la función como proceso de dependencia o de transformación, y la articulación de los registros de representación de las funciones. Se trabaja únicamente con ejemplos de funciones que pertenecen siempre a familias de funciones de referencia: $x \to ax + b$, $x \to |x|$, $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to \frac{1}{x}$, $x \to \sqrt{x}$ y no se da la definición general conjuntista.

11. Números como π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ son ejemplos frecuentes de números que se identifican con la aproximación decimal que de ellos hace la calculadora.

Las funciones

En lo concerniente a las funciones, los resultados obtenidos en numerosas investigaciones (para una visión sintética consultar Eisenberg, 1991; Leinhardt et. al., 1990; y Dubinski & Harel, 1992) evidencian un conjunto de dificultades en el aprendizaje que distan de ser solucionadas cuando comienza la enseñanza del cálculo.

El concepto de función. Se han detectado dificultades con la identificación de lo que en verdad es una función. Varias investigaciones se han concentrado en este aspecto. Las primera de ellas se desarrollaron con enfoques conjuntistas de esta noción. Ellas mostraron la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes, del otro lado (Vinner, 1983). Los criterios traducían en efecto una concepción de la noción de función organizada no en torno a la definición, sino alrededor de prototipos comunes encontrados, de la asociación entre función y fórmula o de la asociación función-curva regular. Estos criterios conducían a rechazar funciones y a admitir objetos no funcionales. Además, tampoco había coherencia global porque los criterios dependían fuertemente del registro de representación utilizado[12]. Como se podía esperar, la evolución de la enseñanza y la desaparición de las definiciones conjuntistas poco modificaron estos criterios que se encontraban inminentemente ligados a la relación dominante que mantienen los estudiantes de este nivel con el objeto función.

La flexibilidad proceso-concepto. Se han detectado dificultades para desarrollar la flexibilidad entre la función vista como un "proceso" y la función vista como una "entidad conceptual", flexibilidad que se necesita cuando se trabaja en el cálculo a partir de un cierto nivel. Las investigaciones en esta dirección (Dubinsky & Harel, 1992 y Sfard, 1989) se apoyaron en la distinción entre los dos status de los objetos matemáticos: el status operacional, dinámico y el status estructural, estático. A

12. La función real constante de valor 4 sería fácilmente rechazada si se presentaba en forma algebraica con la ecuación $y = 4$ (por la asociación función = fórmula dependiente de x, o por la asociación función⇒variación) que si se presentaba gráficamente (por la asociación recta = función).

través de estudios de orden cognitivo e histórico, estas investigaciones muestran que, con frecuencia en la historia de los conceptos, el primer status precede al segundo, aun si en la secuencia su desarrollo se vuelve más dialéctico; y que, parece ser, en el aprendizaje individual sucede lo mismo. También han descubierto el salto cualitativo, denominado "encapsulación" o "reificación", que se refiere al paso de una concepción de la función donde se pueden considerar y manipular procesos particulares, a una concepción donde la función puede percibirse como entidad conceptual, independiente de tal o cual proceso susceptible de engendrarla, que hace parte a su vez de procesos más complejos[13], o como un elemento de una clase de objetos (clase de los objetos solución de tal o cual ecuación funcional, clase de los objetos que poseen tal o cual propiedad –funciones derivables, lipschitzianas, etc.–).

Las articulaciones de los registros simbólicos. También se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función. Una vez más los trabajos son muchos y los resultados concordantes. Junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro[14], o en el trabajo dentro de un mismo registro, por ejemplo en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información (informaciones sobre la función y su derivada), estas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que en ella se le otorga al registro algebraico y el

---

13. El hecho de ser capaz de involucrar a las funciones corrientes en procesos como la composición, la derivación, o de resolver ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas son a priori funciones arbitrarias, no muestra necesariamente la realidad de este salto cognitivo. Estas operaciones pueden tratarse, en casos simples, en un plano de concepción estrictamente algorítmica. En oposición, las reticencias a identificar funciones iguales definidas por procesos diferentes cuya equivalencia no es inmediata (por ejemplo un proceso recursivo y un proceso explícito) pueden demostrar la dificultad para separarse de la visión procedimental, al igual que algunas dificultades en el tratamiento de funciones a trozos, o en la solución de problemas con funciones más generales para las cuales el estudiante no posee ningún tipo de algoritmos.

Los trabajos de Dubinsky ya citados se basan en la programación dentro de un lenguaje específico (ISETL) para favorecer la internalización de la acción en proceso y posteriormente la encapsulación de procesos en objetos.

14. Al respecto podrían citarse los trabajos de R. Duval y las nociones que él introdujo para estudiar las variables que hacen más o menos difíciles estas tareas de traducción: las nociones de congruencia semántica y sintáctica en particular (Duval, 1988; 1993).

status infra-matemático que se da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel.

En los últimos años se han desarrollado numerosos trabajos que han estudiado las posibilidades que ofrecen las herramientas informáticas, bien sea calculadoras gráficas o computadores, con capacidad para presentar varios tipos de representaciones por medio de sistemas de ventanas múltiples. Si bien algunos resultados son alentadores, hay que reconocer también que las investigaciones ponen al descubierto fenómenos de adaptación perceptiva global, cuya corrección y profundidad matemática no son fáciles de controlar y cuya capacidad de transferencia a otros ambientes no es evidente[15].

El status de herramienta y los cambios de cuadros. Finalmente se han encontrado dificultades para considerar las funciones como herramientas verdaderas del trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al cuadro de las funciones problemas que han sido planteados en otros cuadros matemáticos (numérico, geométrico, o externos a las matemáticas) y que necesitan de tal traducción para ser resueltos.

DIFICULTADES ASOCIADAS CON LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE LÍMITE

En las investigaciones sobre la enseñanza del cálculo, el concepto de límite tiene un lugar esencial, como era de esperarse dada la posición central del concepto en este campo. Entre los trabajos más interesantes, muchos han buscado conciliar una aproximación cognitiva e histórica y, con base en la noción de obstáculo epistemológico[16] introducida por G. Bachelard (Bachelard, 1938), han indagado sobre el desarrollo histórico de esta noción, y sobre los candidatos a "obstáculos" susceptibles de explicar las dificultades que en particular pueden encontrar los estudiantes (para una visión sintética ver Cornu, 1991).

Los obstáculos espistemológicos que aparecen en este dominio son:

El sentido común que evoca el término límite favorece una concepción del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, como

---

15. Al respecto se puede hacer referencia a diferentes trabajos como (Schwarz, 1989; Dagher, 1993) y a la investigación muy conocida de (Schoenfeld et. al., 1990).

una marca o como el último término de un proceso, que tiende al mismo tiempo a reforzar concepciones monótonas estrictas de la convergencia[17].

Cuando se trata el proceso del límite como un proceso algebraico "finito", el principio de "continuidad" (llamado así por Leibniz) consiste en transferir al límite las propiedades comunes de los elementos del proceso, y de forma más global, en no estar pendiente de aquello que diferencia esta operación particular de las operaciones algebraicas comunes.

Las concepciones muy dependientes de una "geometría de la forma" no obligan a identificar con claridad sobre cuales objetos con exactitud se lleva a cabo el proceso del límite y la topología subyacente. Esto causa dificultades en la percepción del juego sutil entre el cuadro numérico y el cuadro geométrico que subyace al proceso del límite, e introduce o refuerza convicciones erróneas como la creencia en que si

16. El concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Este quiere tener en cuenta el hecho de que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo, sino que necesita de algunos momentos de ruptura con los conocimientos anteriores. De esta forma, por ejemplo, la entrada en el dominio matemático del pensamiento sobre funciones requiere que uno se libere de la concepción "estática" de las matemáticas griegas que apartan de su propósito aquello que es susceptible de cambio, de variación. Los conocimientos aprendidos en la escuela pueden también transformarse en obstáculos. Así, en la extensión sucesiva de los dominios numéricos, los estudiantes generalizan espontáneamente las propiedades anteriores a los objetos nuevos, y les es muy difícil liberarse de eso. Por ejemplo, a través de la relativización de los conocimientos construidos sobre las relaciones entre orden y operaciones, les es difícil encontrar "natural" que el cuadrado de un número pueda ser inferior al número mismo, o que una división pueda producir un número más grande que el dividendo. Para mayores detalles sobre todos estos puntos, el lector podrá remitirse a (Brousseau, 1983), o a (Sierpinska, 1988).

17. Varios trabajos muestran en particular que este obstáculo no se puede erradicar tan fácilmente como podría pensarse que lo hiciera una enseñanza que esté atenta a encontrarlo, en particular en lo concerniente a la restricción de la convergencia monótona. De hecho, esta concepción se refuerza con la práctica: la mayor parte de las sucesiones estudiadas son monótonas a partir de un cierto rango, o se pueden separar con libertad en sub-sucesiones que sí lo son. Y aunque enuncien que la convergencia no es necesariamente monótona, los estudiantes no pueden dejar de pensar que una sucesión positiva que tiende a 0 debe ser decreciente a partir de un rango, o que la derivada de una función derivable que tiene una asíntota horizontal en el infinito debe tener un límite nulo.

"geométricamente" un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite[18].

En los trabajos sobre límites, también se pueden encontrar estudios que, con base o no en un enfoque histórico, identifican las dificultades relacionadas con el doble status operacional y estructural del límite, lo cual se traduce en la dificultad de separarse de una visión del límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo, para dotarlo de una identidad propia (esta dificultad claramente va de la mano con los obstáculos epistemológicos de la primera clase definida por Sierpinska). En muchas investigaciones, se le ha pedido a los estudiantes universitarios comparar los números 0.9999… y 1. La frecuencia de respuestas erradas al igual que la fuerza de las convicciones que se manifiestan en ellas, demuestra la dificultad que hay para percibir la notación 0.9999… como algo diferente a un proceso dinámico que no se detiene jamás, y para ver a cambio la designación de un número[19]. Es bastante interesante darse cuenta de que este tipo de respuesta puede coexistir con un tratamiento correcto de la pregunta ¿se puede calcular la suma $9/10 + 9/100 + \dots$, y si sí se puede hacer, qué valor tiene? En este caso, la pregunta evoca directamente al estudiante el objeto de la serie geométrica y, también, algunas actividades, como la fórmula de la suma o el algoritmo que permite calcularla. Tanto en la visión que tiene el estudiante, como en la resolución que el hace del problema, el proceso del límite en sí está relegado a un último plano. Esta situación no se conecta para nada con la pregunta precedente, aún si las dos aparecen de forma sucesiva en el mismo cuestionario.

---

18. En un estudio detallado, A. Sierpinska (1985) clasifica los obstáculos que encontró en cinco categorías que cubren parcialmente los presentados aquí. Estas categorías son: "Horror Infiniti" que agrupa el rechazo al status operacional que permite el paso al límite (también se incluye en esta categoría lo concerniente al principio de continuidad), los obstáculos asociados con la noción de función, los obstáculos "geométricos", los obstáculos "lógicos" y los obstáculos simbólicos.

19. D. Tall, en sus trabajos recientes (Tall & Thomas, 1991), insiste en lo que él llama el carácter "proceptual" de las notaciones matemáticas que representan a la vez a los objetos y a los procesos, en el papel que juega dentro de la actividad matemática la flexibilidad entre estos dos niveles de interpretación, y en las dificultades que hay para desarrollar esta flexibilidad en los estudiantes.

En fin, no se pueden dejar de subrayar las dificultades de la formalización estándar de la noción de límite. Por un lado, esta formalización funciona como un todo indivisible, mientras que el estudiante tiende a considerarlos como dos procesos distintos: uno que se efectúa sobre la variable y el otro sobre los valores de la función. La imbricación necesaria se opera más en un sentido que no es para nada natural: para expresar que el límite de la función f es 1 cuando x tiende al infinito, por ejemplo, no se escribe que para un x muy grande, $f(x)$ se acerca a 1[20]. Por el contrario, se establece una vecindad de 1 y se trata de garantizar que, si x es lo suficientemente grande, $f(x)$ estará en esta vecindad. Y esta imbricación, poco natural, induce a que en todas las definiciones estándar haya una alternancia de cuantificadores que, de antemano se sabe, va a ser mal manejada en este nivel de enseñanza.

De hecho, existe un salto cualitativo mayor, que se verifica en la historia misma del concepto, entre el manejo relativamente intuitivo de la noción de límite y la noción formalizada estándar. El concepto formalizado aparece, en el sentido de I. Lakatos (Lakatos, 1976), como un concepto hecho para "probar", lo cual rompe parcialmente con las formas de conocimientos anteriores. Y su función de concepto unificador del campo del cálculo es en este momento tan fundamental como su función en la producción matemática.

Se trata de un problema cuya transposición en la enseñanza no puede darse por sí misma, aun si esta última busca visiblemente acercarse al "sentido" de la evolución histórica. A pesar de la introducción de un enfoque intuitivo al cálculo y del deseo de que cuando se introduzca la formalización, ésta responda a las necesidades en realidad sentidas por los estudiantes, la enseñanza no logrará construir ese sentido facilmente.

Dificultades asociadas a la ruptura álgebra/cálculo

El cálculo es un dominio donde la actividad matemática se apoya bastante en las competencias algebraicas. Pero al mismo tiempo es un dominio donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de

20. No se puede dejar de precisar la proximidad de esta primera formulación con la propuesta por Cauchy. Tampoco se puede pasar por alto que las prácticas exploratorias que se desarrollan hoy en día con las calculadoras contribuyen a reforzar representaciones espontáneas.

prácticas algebraicas para acceder a él. Por lo tanto, hay que subrayar que, si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, la ruptura álgebra/cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco hasta el presente en las investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo.

M. Legrand (Legrand, 1993) es uno de los pocos investigadores que han apuntado a esta ruptura. El insiste en particular sobre las rupturas necesarias en el nivel del tratamiento de la igualdad, al igual que en el nivel de las formas de razonamiento. En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, los estudiantes acostumbran a razonar en lo posible por equivalencia, al transformar, por ejemplo, la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $a_i(x) = b_i(x)$, hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo sucede en el tratamiento de las ecuaciones y las inecuaciones.

Entrar en el campo del cálculo significa comprender que este manejo con frecuencia no se va a realizar, y que a cambio se va a hacer un rodeo con la demostración $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$ y que este rodeo satisfará lo pedido. Tal entrada significa comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto a, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver exactamente la desigualdad sino encontrar un intervalo de centro a, donde se pueda garantizar la desigualdad, por medio de sobre y subestimaciones. Más adelante también significará comprender que, para demostrar que una familia F_1 de objetos posee una propiedad, con frecuencia se va a seguir un camino análogo: demostrar la propiedad para una familia F_2 más simple y escogida de forma correcta, después demostrar que todo elemento de F_1 es el límite de los elementos de F_2, para una topología correcta, y por último demostrar que la propiedad considerada resiste el paso del límite.

Todo esto no tiene por qué ser natural. Y la ideología tradicional de la enseñanza no ayuda a los estudiantes a tomar conciencia de estos cambios que conducen a minimizar las rupturas y a mantener la ficción de un aprendizaje progresivo y continuo.

De igual forma esto es difícil porque los modos de razonamiento que subyacen a este trabajo son nuevos para los estudiantes y porque las técnicas matemáticas de trabajo son delicadas. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes. Para demostrar que a es menor que b, se construirá por lo general una sucesión de expresiones a_i tales que $a < a_1 < \ldots < a_n$ hasta poder demostrar que $a_n < b$. En cada etapa del proceso, hay a la vez que aceptar perder información sobre a_i para poder avanzar en la resolución, si se desea lograr el objetivo. En esto hay todo un juego sutil que supone una familiaridad con las expresiones y con los órdenes de tamaño respectivos que no pueden aprenderse sino en el largo plazo[21].

Con esto también se mide la distancia que va a separar necesariamente la capacidad de restituir las definiciones formales, aun si se ilustran de forma inteligente con imágenes que muestran una cierta comprensión, de la capacidad de operacionalizar estas definiciones en el tratamiento de un problema preciso.

INVESTIGACIONES Y REALIZACIONES DIDÁCTICAS

En este apartado no pretendemos adoptar un punto de vista exhaustivo. Más bien queremos centrarnos en algunas realizaciones didácticas que ilustren la diversidad de trabajos realizados en el área y la complejidad de los problemas a resolver cuando se busca no sólo el estudio del funcionamiento cognitivo de los estudiantes o el funcionamiento de los sistemas didácticos, sino también los medios de actuar más directamente sobre la enseñanza.

LOS PRIMEROS CONTACTOS CON EL MUNDO DEL CÁLCULO

En la primera parte describimos la evolución de la enseñanza francesa hacia una enseñanza donde se ponen en juego, por primera vez en el liceo, una entrada relativamente pragmática e intuitiva al cálculo. En esta entrada se aprovechaban las nuevas tecnologías para promover una aproximación experimental de los problemas centrales de este campo, donde la aproximación juega un papel crucial. Resaltamos igualmente que esta evolución no era exclusiva del contexto francés, como lo mostraron claramente las actas del grupo de trabajo sobre el Cálculo en el congreso ICME 7 realizado en Quebec en 1992. En todos lados se mani-

21. F. Praslon, en su tesis de maestría (Praslon, 1994) analiza de manera minuciosa todo el trabajo conceptual y técnico que se pone en juego al inicio de un curso de cálculo en la universidad y evidencia las rupturas existentes con el funcionamiento de un cálculo de tipo algebraico.

fiesta la inquietud de desarrollar una primera aproximación al cálculo adaptada a los estudiantes de hoy en día, menos algebraica y algoritmizada que los enfoques anteriores y también menos formal. Con esto se tiene la ambición de permitir a los estudiantes dar mayor significado a las nociones que van a manipular.

En un enfoque de este tipo, se trata de tomar como puntos de partida las intuiciones y concepciones de los estudiantes, de trabajarlas y hacerlas evolucionar por medio de situaciones adaptadas; no se trata tanto de alcanzar el objetivo de la enseñanza tradicional de llegar a las formalizaciones. Esta tendencia en el nivel de la investigación se ilustra después de una década, por ejemplo, con los trabajos que se han realizado en Lovaina la Nueva, con N. Rouche a la cabeza. Estos trabajos desembocarán muy pronto en un proyecto global de enseñanza (Rouche, 1992). El objetivo de estas actividades es justamente hacer nacer y estructurar progresivamente el cálculo a partir de nociones cotidianas y de los interrogantes que ellas plantean. Para ello se organiza la enseñanza alrededor de la resolución de conjuntos de problemas donde la formalización no interviene sino cuando se hace necesaria.

La tesis de N. Hauchart presentada en 1985 estudió una génesis posible de los conceptos de límite y de sucesión a partir de una serie de tales problemas cuidadosamente escogidos (fueron 25 problemas propuestos a estudiantes entre los 12 y los 20 años). La tesis analizó cómo puede efectuarse, a través de este conjunto de problemas de diversa índole, la maduración del pensamiento teórico (Hauchart & Rouche, 1987). Esta maduración, como lo señala el autor, va hacer sobreponer el desarrollo de los conceptos de sucesión y de límite a aquellos de serie y de número real (por medio del desarrollo decimal), y también al avance en el trabajo técnico de estimación, y de forma más global, a la progresión de la racionalidad matemática del estudiante. Al principio hay apoyo en las intuiciones perceptivas del estudiante para, a continuación y con la ayuda de situaciones paradójicas, mostrar las limitaciones de la intuición y de la percepción, engendrar la duda, único instrumento capaz de suscitar la necesidad de definiciones más precisas y de demostraciones, y progresivamente orientar el cuestionamiento para el estudio de situaciones particulares hacia problemas más generales.

La tesis de M. Schneider, sustentada en la misma universidad en 1988, se sitúa de forma global dentro del mismo enfoque, pero esta vez pretende analizar la conceptualización de las derivadas y primitivas a partir de objetos mentales[22] como el área y el volumen (Schneider, 1988). Los problemas utilizados son en esencia problemas que tienen una dimensión histórica. Sirven en particular para traer a colación la presencia de las concepciones espontáneas de los estudiantes sobre representaciones mentales de superficies (respectivamente volúmenes) como agrupaciones de segmentos (respectivamente superficies) comparables con aquellas ligadas con la teoría de los indivisibles introducida por Cavalieri en el siglo XVII. El autor muestra que estas representaciones pueden constituirse en obstáculo epistemológico: este obstáculo ella lo ha denominado el obstáculo de la "heterogeneidad de las dimensiones" (Schneider, 1991). Este obstáculo se asocia con los saltos implícitos e incontrolados entre el dominio de los objetos y magnitudes geométricas y aquel de sus medidas cuando se manipulan simultáneamente magnitudes de dimensiones diferentes (a la unión de magnitudes correspondería necesariamente la adición de medidas). Este error es susceptible de explicar ciertos errores clásicos en los cálculos de áreas y volúmenes. Los problemas sirven en primer lugar para introducir estas representaciones y su productividad en casos no problemáticos, y después, por medio de la adaptación de los problemas que en la historia generaron controversia, para abordar el obstáculo identificado.

Cuando se utilizan estos primeros enfoques intuitivos al cálculo, siempre surge el debate que toca el lugar que se le debe dar a la noción de límite. En los trabajos que acabamos de citar, así como en los programas franceses de secundaria, el concepto de límite no se formaliza y, sin embargo, está presente. Otras investigaciones se sitúan de forma más radical en la perspectiva de una primera aproximación al cálculo que no haga intervenir explícitamente el concepto de límite. Un primer paso en esta dirección ya había sido dado por D. Tall en su obra titulada "Graphic Calculus" (Tal, 1986). En este enfoque, basado en la noción de "organizador genérico"[23], el entorno informático empleado tenía por objetivo producir tales organizadores. De esta forma se trataba de, por

22. La expresión "objeto mental" se toma con la acepción que le dio Freudenthal, es decir: "toda noción como longitud, número, paralelas, recurrencia, etc. que, sin haber alcanzado el estado de formalización de un concepto matemático y sin inscribirse en una teoría axiomática, no obstante está dotada de propiedades que la convierten en instrumento de organización de un conjunto de fenómenos".

ejemplo, permitir al alumno asociar la derivabilidad de una función en un punto con la imagen de una función cuya representación gráfica, por acercamientos sucesivos, terminaba por confundirse con una recta, y la noción de tangente globalmente se asimilaba con la de "tangente práctica", recta que pasa por dos puntos muy cercanos de la curva representativa. Así, el concepto de límite permanecía implícito. Los resultados de la experimentación presentados en la tesis ponían a prueba las capacidades adquiridas, por este dispositivo, en el reconocimiento y el trazo gráfico de derivadas.

Investigaciones como aquellas conducidas por J. Kaput y sus colegas (Kaput, 1992) se ubican radicalmente en esta óptica de una introducción al cálculo sin la noción de límite. J. Kaput, al considerar que "el aprendizaje del cálculo [tiene] que basarse en el estudio del cambio y la acumulación cuantificables y en la relación entre los dos", enfatiza que este estudio puede llevarse a cabo en sistemas de representación muy diferentes y puede, por lo tanto, comenzar desde muy temprano (9 a 11 años) en los cuadros numérico y gráfico, incluso antes de que el cálculo algebraico se haya instalado de forma sólida (así lo demuestra, afirma Kaput, el desarrollo histórico con trabajos notables como los de N. Oresme). La investigación experimental que se realizó se apoyó en un entorno informático denominado "MathCars" en el cual el usuario controla con un acelerador la velocidad de un vehículo simulado y puede hacer un muestreo en tiempo real de diversas representaciones gráficas y de datos numéricos. Algunas gráficas de muestra pueden proponérsele al estudiante para que él trate de reproducirlas al pilotear él mismo el vehículo. Se trata de desarrollar una primera aproximación gráfica y numérica, dinámica e interactiva al cálculo, aproximación a la cual se añadirá posteriormente un enfoque más algebraico.

Experiencias como las vividas con este simulador actúan sin duda alguna sobre la noción de velocidad que se forman los estudiantes y sobre las relaciones que existen entre aceleración, velocidad y distancia recorrida. Sin embargo, la mayoría de las preguntas que legítimamente se pueden hacer al respecto siguen sin respuesta. Por ejemplo: ¿Cuáles

23. D. Tall define un organizador genérico de la siguiente forma: "un entorno que provee al usuario con las facilidades de manipular ejemplos (y, cuando no es posible, contraejemplos) de un concepto. A esto lo denomino un organizador genérico. La palabra 'genérico' significa que la atención de quien aprende se dirige a algunos aspectos de los ejemplos que encarnan el concepto más abstracto".

pueden ser los conocimientos que en realidad se construyen dentro de este ambiente? ¿Con qué invariantes cognitivas se pueden asociar, bien sea de manera autónoma por parte del estudiante, o por intermedio del profesor, los esquemas que se ponen en juego gracias a la acción? ¿Cómo preparan el terreno para el cálculo y qué obstaculos pueden también inducir? Estas preguntas son particularmente importantes porque las investigaciones llevadas a cabo en ambientes informáticos o con calculadoras gráficas, puesto que muestran, como ya lo habíamos señalado, la fuerza que en esos ambientes pueden tomar los procesos de adaptación perceptivos y globales, muy contextualizados, y el papel que van a tener que jugar las actividades explícitas de formulación y validación, como la institucionalización del profesor para pasar de competencias locales a conocimientos que se pueden hacer explícitos y que se pueden transponer a otros ambientes.

LAS REALIZACIONES DIDÁCTICAS A NIVEL UNIVERSITARIO

Las investigaciones en didáctica del cálculo distan de estar únicamente centradas en esta dimensión intuitiva y poco formalizada del aprendizaje del cálculo. Muchas de ellas, en especial en Francia, de entrada se han ubicado en el nivel universitario, en ambientes matemáticos donde se tiene la ambición de guardar una relación formal operacional con los conceptos claves del cálculo. Citaremos algunas de ellas en las páginas siguientes.

La convergencia de las sucesiones numéricas (Robert, 1982; 1983)

En su tesis presentada en 1982, A. Robert se interesó por los modelos de la convergencia de sucesiones numéricas que expresaban los estudiantes de enseñanza superior (a través de discursos, ejemplos y representaciones) y por las relaciones que eventualmente podrían existir entre esos modelos y los procedimientos de resolución correcta o incorrecta utilizados por estudiantes en la solución de ejercicios diversos dentro de este dominio. Esto la llevó a distinguir 5 tipos de modelos:

Los modelos "primitivos" que correspondían a descripciones monótonas en términos de cotas o puntos estacionarios de la convergencia. Comprendía, dentro de una muestra de aproximadamente 1300 estudiantes, a 9% de la población y tan sólo a estudiantes de los dos primeros años de universidad.

Los modelos "dinámicos" donde la convergencia se asocia con la idea de aproximación dinámica. Este tipo comprendía a 37% de los estudiantes de todos los niveles.

Los modelos "preestáticos" y "estáticos", que correspondían respectivamente a 9% y 7% de la población. Ellos hacían una traducción al lenguaje natural de la formalización usual de ε ó N. Los modelos preestáticos corresponden más precisamente a formulaciones donde la cuantificación de ε no es evidente y se presentan con mayor frecuencia en el ciclo básico universitario.

Los modelos "mixtos" contemplaban el 18% restante de la población. Estos conjugan expresiones dinámicas y estáticas y se encuentran presentes de manera notoria en la mitad de la carrera profesional, en la licenciatura o al final de los estudios universitarios.

El análisis de los procedimientos de resolución muestra una asociación fuerte entre, de un lado, los modelos primitivos y los procedimientos erróneos, bien si los ejercicios propuestos requieren o no el uso de la definición formal. Del otro lado, una relación entre los modelos estáticos o mixtos y los procedimientos correctos. Entre los errores notados, A. Robert subraya la resistencia particular de los errores ligados con el olvido del carácter variable de n (errores que desaparecen en casos simples pero que persisten en los últimos niveles en los casos de dobles indexaciones, por ejemplo) y errores asociados con la aplicación indebida de procedimientos algebraicos (que se aproximan al obstáculo del principio de continuidad que se mencionó con anterioridad).

Los resultados obtenidos la condujeron, en una segunda fase, a la elaboración de una ingeniería didáctica para los estudiantes de ciclo básico universitario. Esta ingeniería pretendía provocar el rechazo de las concepciones primitivas y la relativización de las concepciones estrictamente monótonas, al igual que el paso hacia la formalización usual a través de la integración de representaciones estáticas con representaciones dinámicas. Justo sobre este plano, A. Robert pudo constatar el desfase existente entre los problemas susceptibles de necesitar la construcción de una formalización de tipo estático y aquellos en realidad accesibles a los estudiantes. Esto la condujo a enfatizar el carácter unificador y generalizador del concepto de límite, bajo su forma formalizada y su función esencial como herramienta de prueba, y a formular la hipótesis de que la puesta en escena de tales conceptos, teniendo en cuenta todas las restricciones de tiempo de la enseñanza superior[24], no puede darse de una manera completamente constructivista sino que necesita de una introducción magistral del profesor (Robert & Schwarzenberger, 1991), la cual puede sustentarse en intervenciones de tipo meta-matemático[25]. De esta manera, en la ingeniería realizada, el profesor dio una formalización después de varias exploraciones gráficas y numéricas de sucesiones particulares; después se acentuó su papel como herramienta de prueba en el estudio de conjeturas generales como, por ejemplo, las siguientes: si una sucesión tiene un límite estrictamente positivo, todos sus términos son positivos a partir de un cierto rango, o si una sucesión tiene un número finito de valores, ella converge si y solamente si es estacionaria.

Procesos diferenciales e integrales (Artigue, 1989), (Artigue, Ménigaux, Viennot, 1990)

Esta es una investigación que se realizó en conjunto por didactas de las matemáticas y de la física, motivada en particular por las dificultades encontradas para hacer vivir en este dominio una coordinación real entre la enseñanza de las dos disciplinas, en el marco de secciones experimentales del primer año del ciclo universitario. El objetivo de esta investigación, en primer lugar, fue comprender el funcionamiento de la enseñanza de este dominio en las dos disciplinas y sus efectos sobre las concepciones que los estudiantes desarrollaban. Después, progresivamente, la investigación pretendía elaborar dispositivos de ingeniería didáctica que permitieran ya sea desde el comienzo manejar secuencias de enseñanza adaptadas al nivel del ciclo básico universitario, o bien retomar con posterioridad los aprendizajes que se juzgaban como inadecuados.

En lo concerniente al primer punto, la comprensión del sistema de enseñanza y sus efectos, la investigación conjugó diversos enfoques:

24. También se encuentra un análisis de las consecuencias que generan las restricciones de la evolución rápida del status de los conceptos en la enseñanza superior, aun si se inicia con enfoques intuitivos. La tesis de Azcárate (Azcárate, 1991) sobre la noción de velocidad discute estos puntos.

25. Las consecuencias de este tipo de análisis se explotaron con particular interés en los trabajos posteriores de A. Robert, en colaboración con J. Robinet, M. Rogalski y J.L. Dorier, sobre la enseñanza del álgebra lineal en el ciclo básico universitario. Ver por ejemplo (Dorier, et. al., 1994).

Un estudio histórico que pretendía precisar cuáles problemas habían provocado la evolución de las relaciones con la noción de diferencial y de diferenciabilidad en las matemáticas a fines del siglo pasado y comienzos de éste. Este estudio se hacía necesario en la medida en que el problema del status de las diferenciales, definido en términos de pequeño crecimiento para unos o de aplicación lineal tangente para los otros, se había manifestado como el punto de cristalización de los debates entre matemáticos y físicos en la sección experimental.

Un estudio de la evolución de la enseñanza de las matemáticas y de la física en este dominio desde comienzos de este siglo, tanto a nivel secundario como universitario (programas y manuales), y de los debates que habían acompañado esta evolución, en especial aquellos reseñados en la revista *Enseignement Mathématique (Enseñanza Matemática).*

Un estudio de las concepciones de los estudiantes a través de cuestionarios de matemáticas y física distintos a los cuestionarios que usualmente se presentan a los estudiantes.

Este trabajo, que es muy difícil de reseñar aquí de manera detallada, mostró en particular que si los procedimientos diferenciales intervenían en el ciclo básico universitario, con dos funciones distintas:

- Una función de aproximación puramente local (estudio local de curvas, funciones, superficies, cálculo de incertidumbres, etc.)
- Y una función de aproximación lineal en el paso de lo local a lo global (investigación de leyes de variación, determinación o definición de magnitudes geométricas o físicas, etc.)

Estas distinciones no se marcan de forma clara en la enseñanza.

Los manuales de física de este nivel, por ejemplo, incluyen muy a menudo anotaciones matemáticas en los sitios donde se aborda este tema. Se centran en el nivel puramente local y recalcan más o menos tres ideas: el hecho de que el diferencial provea una aproximación que se mejora cuando el crecimiento de las variables disminuye; que ella es más fácil de calcular que el crecimiento real; y que, contrariamente al crecimiento, ella es lineal con relación al crecimiento de las variables. Sin embargo, se acentúa tanto una como la otra, sin una articulación verdadera y sin referencia explícita, por lo general, al orden de la aproximación diferencial. El paso de lo local a lo global en sí se trata en términos de recetas o de convenciones y se ilustra con ejercicios donde la lectura diferencial puede hacerse a partir de términos lexicales de la superficie[26]. Las matemáticas del ciclo básico de los problemas que requieren modelaje por ecuaciones por lo general no se consideran, ya que los problemas aparecen directamente formulados en un lenguaje diferencial (se estudia la velocidad de desintegración de un cuerpo radioactivo, o se buscan las curvas cuya tangente posee tal propiedad, etc.).

Uno puede preguntarse qué relaciones con estas nociones construyen los estudiantes, en estas condiciones, y cómo ellas repercuten en sus concepciones de las distorsiones existentes entre la enseñanza de las dos disciplinas. De hecho, en física parece que los estudiantes consideran todo lo concerniente a los procedimientos diferenciales e integrales como "aproximativo" y "cómodo", es decir, como un sector donde es mejor funcionar con base en mecanizaciones sin tratar de comprender. Los estudiantes se adaptan a su utilización y aprenden a reconocer las ocasiones cuando toca utilizarlos al mirar los términos presentes en los enunciados. Los cuestionarios que les fueron propuestos muestran claramente que si cortan en "pedazos" para calcular ciertas magnitudes, no saben el por qué ésto es necesario (en el caso de la presión atmosférica esto es evidente)[27]; que no diferencian claramente las aproximaciones de modelaje de las aproximaciones lineales como etapa del proceso integral (el caso de la represa)[28]; y que en general las preguntas del orden de aproximación no intervenían directamente para ellos en los procedimientos diferenciales (como en el caso del área y el volumen de la esfera)[29].

---

26. En un texto clásico como "La resistencia de un trozo elemental de una viga es proporcional al espesor del trozo", el término elemental se encuentra allí para indicar que no se trata de una proporcionalidad global a nivel del crecimiento, sino de una igualdad diferencial, es decir, de una igualdad de primer orden.

27. En un ejercicio propuesto sobre la presión atmosférica, más de 90% de los estudiantes consideraron necesario cortar en "pedazos" verticalmente. La mayoría (70%) atribuía esta necesidad al hecho de que la presión depende de la altitud y no diferenciaban entre el caso de la presión atmosférica y el caso de la presión hidrostática.

28. En la situación de la represa, un tercio de los estudiantes afirmó que el resultado final sería aproximado y mezcló en los comentarios aproximaciones del modelaje y aproximaciones asociadas con la utilización del procedimiento integral.

En matemáticas, a pesar de que el campo de la aproximación es explícito en las definiciones y se puede movilizar, de forma más o menos correcta, en las restituciones de definiciones, tal campo está poco presente en las prácticas y se oculta muy rápido con teoremas más potentes que permiten algebraizar de manera contundente el funcionamiento del cálculo. Por esto, justo después de haber explicado lo que es una función diferenciable en un punto, los estudiantes avanzados llenan hojas enteras con cálculos para responder a la pregunta siguiente: ¿la función de $\Re^2$ en $\Re$, definida por $f(x, y) = 2x + 4y + y^3(\sqrt{1 - \cos x} + 1)$ es diferenciable en (0, 0)? Los pocos que reconocen en la expresión una parte lineal y una especie de "resta" parecen no tener herramienta alguna para demostrar rápidamente que esa especie de "resta" es de orden superior a 1. De igual forma, el cuestionario sobre los desarrollos limitados evidencia un funcionamiento que separa con cuidado el examen de la parte en ε de la parte polinomial y, por lo general, los estudiantes consideran como una verdadera revelación final, cuando se corrigen los cuestionarios, el hecho de que las dos expresiones $f(x, y) = 2x + 3y + \varepsilon(x, y)$ y $f(x, y) = 5x + 4y + \varepsilon(x, y)$ son compatibles y nos muestran solamente que f tiene por límite a 0 en el punto (0,0).

Estos cuestionarios "especiales" (los temas y textos parecen ordinarios, pero las preguntas propuestas son poco usuales), que se elaboraron al inicio para permitirnos estudiar las concepciones de los estudiantes y que hacían dejar a un lado las mecanizaciones construidas con la enseñanza, mostraron con claridad regularidades muy fuertes en las respuestas a la larga. Sin embargo con los estudiantes más avanzados, en las situaciones más clásicas, los errores desaparecían (por ejemplo el elemento diferencial $d\rho$ no se reemplaza sistemáticamente por $\rho d\theta$, sin importar cuál sea la expresión de la función $\theta \to \rho(\theta)$), pero las justificaciones y las concepciones que ellas revelan sobre el status de los procedimientos diferenciales e integrales son casi invariables. Por esto, esos cuestionarios nos parecieron instrumentos apropiados para llevar a posteriori a los estudiantes a reflexionar sobre

29. Una situación donde se pide explicar por qué el mismo tipo de cálculo da un resultado correcto para el volumen y un resultado erróneo para el área de la esfera es sumamente desestabilizadora, aun para estudiantes avanzados que ingresan a un área de concentración en física o que finalizan sus estudios de matemáticas.

estos asuntos y para evitar que finalizaran sus estudios pensando, como lo manifestaron algunos, que:

> *para integrar, es esencial no pensar en lo que representa* dl *y proceder mecánicamente, de lo contrario uno está perdido.*

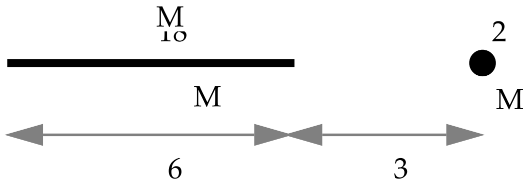
o que:

> *El físico tiene un reclamo: sus aparatos de medición y los errores cometidos con sus aparatos son de todas formas más grandes que los errores cometidos con las aproximaciones matemáticas.*

Además de estos instrumentos, la investigación también fue una oportunidad para puntualizar y experimentar numerosas veces secuencias de enseñanza sobre la integración en el nivel del ciclo básico universitario, donde se toma en cuenta el hecho de que los estudiantes que llegan a la universidad no son vírgenes en este dominio, sino que tienen una concepción de integral como operación inversa a la derivación, asociada a la imagen del área bajo una curva, y que la enseñanza en este nivel debe dar un sentido a la noción de "procedimiento integral"[30]. Hay que subrayar que esta parte de la investigación fue realizada en un contexto experimental particular, donde se pretendía enseñar marcando claramente la ruptura con las costumbres dominantes para promover el desarrollo en los estudiantes de una verdadera racionalidad científica. La forma fundamental de esta enseñanza es el "debate científico", debate organizado en torno a conjeturas propuestas por los estudiantes o introducidas por el profesor (Legrand, 1993). A continuación presentaremos de manera rápida una situación que correspondía a la introducción del procedimiento integral. La situación es la siguiente: se le pide a los estudiantes proponer valores para la fuerza que se ejerce entre dos masas M y M' ubicadas a 3 metros una de la otra. La masa de M está constituida por

30. Un sentido que no pueden garantizar las clases magistrales tradicionales sobre la integral de Riemann y los ejercicios que enfatizan sobre todo el cálculo exacto de primitivas e integrales.

una barra homogénea de 6 metros de longitud y de 18 kg. La masa de M' es de 2 kg. y se considera como puntual.



Las respuestas de los estudiantes al cabo de 15 minutos de trabajo individual son las conjeturas que van a someterse a debate. Tales conjeturas son siempre muy diversas, con una fuerte proporción de respuestas resultantes de la aplicación inadecuada del principio del centro de gravedad (se concentra la masa en el centro de la barra por medio de una técnica "clásica": aplicar el principio del centro de gravedad, para poder remitirse a una atracción entre masas puntuales). Las dudas existentes sobre la validez de esta solución, muy atractiva en primera instancia, cuando se sometía al debate conducen por lo general a los estudiantes a imaginarse, para verificar el principio, de aplicarlo en dos tiempos. Para ello cortan simbólicamente la barra en dos y concentran la masa de cada mitad de barra en su punto medio. Por este método no se obtiene el mismo resultado; de allí que el principio del centro de gravedad entre en conflicto con sí mismo. Esto lleva a hacer caer en la cuenta de que la "posición" influye. Sin embargo, las ideas de la concentración de la masa en un punto y de la partición se convirtieron en buenos puntos de apoyo para avanzar en el problema. Al concentrar la masa, no en la mitad sino en los extremos de la barra y después cortarla (combinando concentración y corte), los estudiantes se van a acercar cada vez más al valor de la fuerza, hasta llegar a convencerse de poder alcanzar una precisión arbitraria y poder concebir la fuerza como resultado del paso al límite en este proceso de corte y encuadre: el procedimiento integral. Esta situación fue seguida de otras que surgían en contextos diversos para traer a colación las invariantes del procedimiento integral y poderlas institucionalizar. A continuación se entró, siempre a partir de debates, en el estudio de las propiedades de la operación integral, en particular de la integral en función de su cota superior[31]. Como razonablemente podría esperarse, dado el lugar asignado a la construcción del concepto de integral en esta enseñanza, el lugar que se le otorga a las técnicas de cálculo explícitas de primitivas se reduce bastante. Hay que enfatizar que esta enseñanza, que se reprodujo numerosas veces, demostró ser efectiva.

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales (Artigue & Rogalski, 1990), (Artigue, 1992) y (Artigue, 1994a)

La investigación a la que haremos referencia a continuación es una investigación de ingeniería didáctica que se desarrolló con el objetivo de renovar la enseñanza tradicional de las ecuaciones diferenciales en el primer año del ciclo básico universitario. A pesar de que la resolución de las ecuaciones diferenciales puede abordarse desde diversos cuadros (el cuadro algebraico de la resolución exacta, el cuadro numérico de la resolución aproximada, o el cuadro geométrico de la resolución cualitativa), hay que reconocer que en Francia, la enseñanza de este dominio en el ciclo básico universitario se limita al cuadro algebraico y da a los estudiantes una visión limitada y falsa de este dominio. El objeto de la investigación fue, por lo tanto, elaborar una ingeniería didáctica que estuviera más acorde con la epistemología del campo por medio de la integración a la enseñanza de enfoques numéricos y cualitativos, y estudiar las condiciones de viabilidad de un producto de tal naturaleza en el transcurso de experimentaciones sucesivas en la Universidad de Lille 1.

Como es clásico en un trabajo de ingeniería, lo primero que se hizo fue tratar de precisar las restricciones que se imponían en la enseñanza de este dominio, restricciones que permitían explicar su resistencia. Identificamos restricciones de diversa índole: epistemológicas, es decir, vinculadas con la naturaleza del conocimiento en juego; cognitivas, es decir asociadas a las características cognitivas de los estudiantes; y didácticas, es decir ligadas a las selecciones y hábitos del sistema de enseñanza. Por ejemplo, el largo predominio histórico del cuadro algebraico, el hermetismo de las diferentes problemáticas de resolución, la dificultad de los problemas que dan origen a la resolución cualitativa son restricciones de carácter epistemológico que tienden a

31. Una de las situaciones en particular productiva al respecto, es la siguiente: "realizar conjeturas sobre el modelo: si f es…, entonces $\int_a^x f(x)dt$ es…"

obstaculizar la entrada de una dimensión cualitativa en la enseñanza de este nivel.

De igual forma, en el plano cognitivo, se presentan como restricciones la movilidad entre el registro de las ecuaciones y el de las gráficas, en el nivel de las funciones y las derivadas, requerido por el enfoque cualitativo, como el manejo apropiado del cálculo elemental requerido por las pruebas cualitativas. Y en el plano didáctico, hay que reconocer que la enseñanza tradicional, algebraica y muy algoritmizada, es una enseñanza que no plantea problemas y que corresponde a un nivel de exigencia mínima, tanto para los estudiantes como para los profesores, en este primer año de universidad (introducir un enfoque cualitativo que, si bien es susceptible de métodos, no es algoritmizable, aumenta el interés de la enseñanza y también su dificultad). A esto se une el hecho de que, en el enfoque cualitativo, el registro gráfico sea llamado a jugar un papel esencial que, en las condiciones de una enseñanza tradicional poco puede jugar.

Con base en la realidad de estas restricciones y tratando de actuar sobre ellas, se construyó el proceso de ingeniería basado en un cierto número de selecciones globales como las siguientes:

- Hacer explícito, en una fase preliminar a la enseñanza, el cambio deseado en el status del cuadro gráfico por medio de un trabajo adaptado sobre las curvas y funciones
- Apoyarse en la informática para manejar la dificultad cognitiva del enfoque cualitativo, por medio de la construcción de tareas de complejidad variada (trazos de soluciones sobre campos de tangentes dadas, asociaciones flujos con ecuaciones diferenciales, interpretación de flujos obtenidos con un computador, producción de flujos parcialmente asistida por computador, etc.)
- Enseñar de manera explícita métodos para organizar la resolución cualitativa
- Limitar la complejidad en el cuadro algebraico, restringirse principalmente al estudio de las ecuaciones lineales y a las variables separables y transferir la esencia del trabajo algorítmico a un trabajo autónomo

A continuación se procedió con el proceso de enseñanza en 7 fases, organizadas cada una en torno a situaciones claves: 1) las necesidades internas y externas a las matemáticas a las cuales responde la herramienta de la ecuación diferencial (taller de modelaje organizado con base en los resultados de la investigación anterior); 2) la introducción a la resolución cualitativa; 3) la resolución algebraica; 4) la complementariedad de los enfoques algebraico y cualitativo; 5) la introducción a la resolución numérica; 6) los métodos de la resolución cualitativa; y 7) la integración de las diferentes herramientas en la resolución de problemas más complejos (bajo la forma de proyectos).

Las experimentaciones sucesivas mostraron la viabilidad "teórica" de tal tipo de enseñanza y el interés que ella puede generar en los estudiantes, a pesar del aumento en la dificultad. Junto con esto se evidenciaron las dificultades que ese tipo de enseñanza debía superar para poder sobrevivir. El análisis en particular llevó a distinguir tres tipos de tareas en la resolución cualitativa y tres niveles de interacción entre los registros gráficos y algebraicos/simbólicos asociados: la interacción ligada a la interpretación, la interacción relacionada con la predicción y la interacción unida a la justificación. Desde el primer año, los resultados obtenidos mostraron que, para los estudiantes involucrados en la investigación, la interpretación no presentaba problemas particulares de accesibilidad y que la actuación de los estudiantes era satisfactoria a nivel de la predicción. Por el contrario, en el nivel de las justificaciones, así se tratara de probar el cruce o no cruce de curvas, o de demostrar o refutar la existencia de asíntotas, el porcentaje de éxito no sobrepasaba el 20%. Esto nos llevó, en un segundo momento, a introducir herramientas de justificación directamente formuladas en el nivel gráfico y más adaptadas a priori para el grupo de estudiantes en consideración. Estas nuevas herramientas sí permitieron a los estudiantes adquirir una autonomía razonable en las justificaciones. Sin embargo, esas herramientas plantearon problemas aterradores de integración didáctica. De hecho, ellas cuestionan con profundidad el status tradicional del cuadro gráfico, al presentarlo como un cuadro de justificación. Este cambio de status no se puede negociar tan sólo en el campo de un contrato local reservado a las ecuaciones diferenciales, sino que implica necesariamente a la enseñanza del cálculo como un todo. De igual manera, no es sorprendente constatar que las aplicaciones de esta investigación en las prácticas efectivas se limitaban con frecuencia a la copia de las primeras situaciones vinculadas al enfoque cualitativo.

DIDÁCTICA DEL CÁLCULO Y EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

En las páginas anteriores nos centramos en un enfoque estándar del cálculo. Esto obedeció a una decisión deliberada, motivada por el poco impacto real que en la actualidad tienen los enfoques no estándar, tanto a nivel de la enseñanza como de la investigación sobre la enseñanza. A pesar de esto, en esta última parte quisiera echar una mirada a las preguntas de la introducción del análisis no estándar. Teniendo como fuente de inspiración los trabajos que en el seno de nuestro equipo ha realizado A. Deledicq (Deledicq, 1994), presentaré una visión sensiblemente diferente en comparación con los textos clásicos a los cuales se hace referencia cuando se habla de la enseñanza del análisis no estándar (Keisler, 1976), (Sullivan, 1976).

A. Deledicq muestra en particular que una perspectiva no estándar permite distinguir en la introducción al campo del cálculo dos niveles que de hecho son inseparables en un enfoque estándar:

> *El primer nivel se basa en la manipulación numérica de órdenes de magnitud, lo cual conduce a una familiaridad con números pequeños y grandes y con su comportamiento con respecto a las operaciones elementales y las funciones [...]*
>
> *El segundo nivel está enfocado más hacia la introducción de las nociones fundamentales y, en particular, hacia las definiciones y resultados relacionados con la completitud de* $\mathfrak{R}$.

El primer nivel es el de la introducción de los órdenes de magnitud. Se distinguirán de hecho tres tipos de números, aquellos dentro de nuestra escala (limitados), otros mucho más grandes (i-grandes o infinitamente grandes) y otros mucho más pequeños (i-pequeños o infinitamente pequeños). Para mencionarlos no necesariamente se debe utilizar un lenguaje infinitesimal.

Se admite que dos de estos órdenes de magnitud existen en $\mathbb{N}$ (los enteros limitados y los enteros i-grandes) y que obedecen a las reglas siguientes:

- Un entero i-grande es más grande que todo entero limitado

- La suma y el producto de dos enteros limitado son enteros limitados
- Si n es limitado 2^n también lo es

Y con respecto a los números reales, un real será considerado como i-grande si es mayor a un entero i-grande, como i-pequeño si es nulo o si su inverso es i-grande, o como limitado en los otros casos.

Uno puede, como lo explica el autor, considerar que $\mathbb{N}$ o $\Re$ son incambiables y que, simplemente, se "colorearon" al introducirles los órdenes de magnitud. Estos órdenes han roto la homogeneidad de $\mathbb{N}$ y de $\Re$, pero ¿acaso esto no está más de acuerdo con la "realidad" del mundo de las magnitudes y las medidas de magnitudes que lo presentado por la visión homogénea estándar?

A partir de esta distinción, se puede poner en escena un cálculo sobre los órdenes de magnitud cuyas reglas son una reproducción de las reglas del cálculo infinitesimal de Leibniz y donde, por supuesto, algunas respuestas permanecen indeterminadas (no se puede decir a priori cuál es el orden de magnitud del producto de un i-pequeño y un i-grande). Este cálculo puede ponerse en juego en una primera aproximación a los límites ya que, por ejemplo, el hecho de que:

- La función f admite a l como límite en el infinito significa que: para todo x i-grande, $f(x) - l$ es i-pequeño
- El hecho de que la sucesión (u_n) sea convergente se expresará con: si n y n′ son dos enteros i-grandes, $u_n - u_{n'}$ es un i-pequeño
- El hecho de que la función f sea continua en 3, se expresará con: si $x - 3$ es i-pequeño, $f(x) - f(3)$ también es un i-pequeño

Se puede ver bien que aquí hemos cortado la parte inseparable de la definición estándar y reemplazado, de hecho, un cálculo sobre las funciones (N en función de ε) por un cálculo sobre los números. De igual manera se restableció el orden que de alguna forma es natural, al pasar de x a $f(x)$. Con esto se tocan de una sola vez dos ventajas esenciales de un enfoque no estándar y aquello que hace que las definiciones puedan constituirse en verdaderas herramientas de trabajo para una persona que comienza su trabajo en este campo.

El segundo nivel del análisis no estándar es el correspondiente a la puesta en escena del teorema de la completitud, lo cual corresponde, en la axiomatización no estándar, al axioma de la estandarización que va a garantizarnos que existen reales estándares tales que todo real limitado es i-próximo a uno y un solo real estándar (es decir, que existe en el halo de todo real limitado un número que cumple el mismo papel que el 0 entre los números i-pequeños). Como lo escribió A. Deledicq:

> *Entonces, uno se encuentra con el punto de vista original que tuvieron Cauchy y Dedekind, y a continuación podrá afirmar que toda sucesión clásica (es decir, aquella definida sin hacer referencia a la distinción entre órdenes de magnitud) convergente define un solo real estándar que se ubica en el halo dentro del cual acaban de acumularse los términos de índices i-grandes*

Y en este punto es donde en verdad comienza el análisis. En este nivel también intervienen la noción de sombra que juega un papel análogo de estandarización al nivel gráfico y permite darse cuenta de intuiciones o de propiedades gráficas que muy difícilmente podrían expresarse en el nivel estándar.

Como lo subraya A. Deledicq, se podría decir que la separación en dos niveles del análisis existe de hecho en la enseñanza actual, con la distinción que se realiza entre el cálculo intuitivo y el cálculo formal. Sin embargo, existe una diferencia esencial: en la separación no estándar existe, desde el primer nivel, una formalización simple pero eficaz que permite involucrarse en realidad en el juego de las pruebas y las refutaciones.

Por lo tanto, ¿es necesario lanzarse a la aventura de una enseñanza no estándar? Esto significaría hacer oídos sordos a la realidad de las leyes que rigen los sistemas didácticos. Sería pensar que un enfoque que tiene un reconocimiento tan débil en la comunidad matemática, muy poco presente en la cultura matemática, podría legitimar una enseñanza a gran escala.

Es más, si bien un enfoque no estándar como el que acabamos de presentar es seductor, sería falso pretender que gracias a él encontramos el camino de reyes para la enseñanza del cálculo. Se puede pensar que, en un comienzo, sí provee un equilibrio más satisfactorio entre la intuición y el rigor que el que vivimos actualmente en el liceo. Pero el análisis no estándar no nos garantiza un camino sin obstáculos y algún día tendríamos que afrontar las dificultades que le son inherentes. Por ejemplo, el hecho de que se pueda encontrar para cada definición clásica (como aquella de la continuidad de una función en un punto), un criterio no estándar que le sea equivalente, significa que tal equivalencia sólo existe para las funciones estándares y para los puntos estándares (una función tan simple como la función lineal $x \to \omega x$, con ω i-grande, continua en el sentido clásico, no verifica este criterio en 0). Desde el momento en que nos salimos del campo de los objetos estándares, lo no estándar es de hecho difícil de comprender.

Pero sin duda no sería inútil que los profesores supieran que detrás del lenguaje infinitesimal que utilizan constantemente, de manera imprecisa y a veces con un poco de mala consciencia, en sus explicaciones y comentarios informales, hay un rigor accesible que, no tiene nada que ver con la metafísica del infinito.

CONCLUSIÓN

En este artículo nos centramos en los inicios del cálculo, en los problemas que se le presentan a quien quiere hacer de esta enseñanza algo más que la enseñanza de técnicas de cálculo diferencial e integral, algo más que un simple “Calculus”; sino que quiere realizar una iniciación a los métodos, ideas y conceptos que constituyen el corazón de este campo, una iniciación a la vez rigurosa, operacional y adaptada a las capacidades cognitivas de los alumnos y estudiantes a los cuales va dirigida.

Es claro que no existe un camino de reyes que pueda hacer de esta introducción al campo del cálculo, un camino regular, continuo y sin trampas. Como lo demostraron con claridad los trabajos que se han desarrollado en didáctica del cálculo en el transcurso de los últimos quince años, las dificultades y obstáculos son múltiples y pretender evitarlos, los refuerza. Los conocimientos adquiridos de hecho nos ayudan en primera instancia a comprender mejor el funcionamiento de nuestros estudiantes, a anticipar sus dificultades, a buscar con paciencia medios de acción adaptados en vez de oscilar entre la búsqueda del método milagroso y la resignación fatalista.

Como también lo han mostrado esos trabajos, esta introducción no puede concebirse sino en el largo plazo, durante muchos años, y no puede efectuarse de golpe con conocimientos formalizados, “acaba-dos", que se nos han hecho familiares. Ella se realizará necesariamente por medio de aproximaciones provisionales que permitirán avanzar pero que, al mismo tiempo, engendrarán conocimientos o representaciones de conocimientos por necesidad erróneos parcialmente. Esto significa que nuestra enseñanza no debe vivir sobre la ficción de un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino sobre la imagen de un desarrollo más caótico donde no se excluyen las regresiones vinculadas con los desequilibrios.

Casi en todos lados, las aproximaciones intuitivas basadas en la exploración de fenómenos con frecuencia asociadas con la utilización de tecnologías informáticas, reemplazaron o tienden a reemplazar las aproximaciones formales que habían acompañado la reforma de las matemáticas modernas. Estos enfoques sin duda alguna proveen al estudiante una familiaridad, un contacto enriquecedor con un cierto número de fenómenos o de objetos relevantes en el campo del cálculo. Sin embargo, nuestra experiencia didáctica debe incitarnos a desconfiar un poco de los discursos muy entusiastas que acompañan con frecuencia las reacciones ante la caída de un orden tradicional. Me parece que en particular debemos estar atentos a aquello que en los enfoques intuitivos permite establecer una cierta distancia frente a las acciones locales, muy contextualizadas, a aquello que permite la capitalización y la estructuración de la experiencia, y a la forma como se distribuye en este nivel el trabajo del profesor y el trabajo del estudiante. También debemos estar atentos a la manera como se involucra en estos enfoques la racionalidad científica. Ciertamente, la formalización es limitada y provisional; sin embargo, debemos preguntarnos si permite fomentar de forma razonable el juego de las pruebas y refutaciones que es una de las componentes esenciales de la actividad matemática.

Finalmente, como universitarios, debemos ante todo minimizar el salto cualitativo que separa estos enfoques intuitivos de la relación con el cálculo que enfrentamos en la universidad dentro de ambientes científicos. Allí hay una ruptura para la cual es necesario encontrar los medios de marcarla y consumarla, sin esperar que ella se opere por sí misma. La mayoría de los estudiantes no sobreviviría a ella y seríamos, más que nunca, prisioneros de la trampa de una enseñanza que, creyendo tener grandes ambiciones, se encasilla en la evaluación de competencias mínimas.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. et. al. (1989). *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire* (Rapport de recherche). Paris: IREM Paris VII.

Artigue, M., Ménigaux, J., Viennot L. (1990). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics 11*, 262-267.

Artigue, M., & Rogalski, M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. En *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG SSM première année*, 113-128, IREM de Lyon.

Artigue, M. (199la). Analysis. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 167-198. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Artigue, M. (199lb). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of PMEXVI,* Durham 3, 195-216.

Artigue, M. & Ervynck, G. (Eds.) (1992). *Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus, ICME 7*, Université de Sherbrooke.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En *The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, N°25*.

Artigue, M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM, 11*, 115-139.

Artigue, M. (1994a). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En Bielher & al. (Eds.). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 27-39. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Artigue, M. (1994b). (en prensa). *Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée au XXème siècle en France.* Communication au Colloque Réformer l'enseignement scientifique: histoire et problèmes actuels. Paris.

Azcarate, C. (1991). Instantaneous speed: concept images at college students' level and its evolution in a learning experience. *Proceedings of*

*PME XV, A*ssisi, 96-103.

Farfán, RM. (Ed.) (1993). IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo. Monterrey, mayo 1993, México: CINVESTAV-IPN.

Beke, E. (1914). Rapport général sur les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. *L'Enseignement Mathématique Vol. 16*, 246-284.

Bourlet, C. (1914). La pénétration réciproque des enseignements de mathématiques pures et de mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. *L'Enseignement Mathématique 16*, 372-387.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

Commission interIREM Analyse (Ed.). (1981). *L'enseignement de l'analyse.* IREM de Lyon.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* (Thèse de doctorat). Université de Grenoble I.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Dagher, A. (1993). *Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions* (Thèse de doctorat). Paris: Université Paris VII.

Deledicq, A. (1994). (en prensa).*Teaching with infinitesimals*. Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, Ed y Harel G. (Eds.). (1992). The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy. *MAA Notes, N°25.*

Duval, (1988). Graphiques et équations. *Annales de didactique et sciences cognitives de Strasbourg, 1*, 235-253, IREM Strasbourg.

Duval, R. (1993). Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Sciences Cognitives et Didactique 5*, IREM de Strasbourg.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties, En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 14-152. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hauchart, N. & Rouche, N. (1987). *Apprivoiser l'infini - un enseignement des débuts de l'analyse*. Belgique: GEM, Louvain la Neuve.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning*. 515-556. New York: Macmillan.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Legrand, M. et al. (1986). *Introduction du débat scientifique dans un cours de première année de DEUG A à l'université de Grenoble I* (Rapport de recherche). Grenoble: IMAG.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères lREM, 10*, 123-159.

Lienhardt, G., Zaslavski, O., Stein, M.K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching, *Review of Educational Research,* Spring, *1990, 60*(1) 1-64.

Poincaré, H. (1904). Les définitions en mathématiques. *L'Enseignement Mathématique 6*, 255-283.

Praslon, J. (1994). Analyse du début d'un cours d'analyse en DEUG 1ère année. *Mémoire de DEA*, Paris: Université Paris VII.

Revuz, A. (1992). L'enseignement des mathématiques de 1934 à 195. *Gazette de la SMF, N° 54*, 4-9.

Robert, A. (1982). *Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur* (Thèse de doctorat). Paris:Université Paris VII.

Robert, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP.*

Robert, A. & Boschet, F. (1984) L'acquisition des débuts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année. *Cahier de Didactique des Mathématiques N°7.* Paris: IREM Paris VII.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathématiques N°21.* Paris: IREM Paris VII.

Rouche, N. (1992). Le projet AHA d'introduction à l'analyse élémentaire. En Artigue M. & Ervynck G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus*, ICME 7, Université de Sherbrooke.

Schoenfeld, A., Smith, J., Arcavi, A. (1990). Learning. The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En Glaser, R. (Ed.). *Advances in Instructional Psychology, vol 4.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "Aire" et "Volume" au calcul des primitives* (Thèse de doctorat). Louvain la Neuve.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11*(2/3), 241-294.

Schwarz, B. (1989). *The use of a microworld to improve ninth grade' concept image of a function: the triple representation model curriculum* (PHD Thesis). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Sciences.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII* Paris, vol. 3, 151-158.

Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics N° 22,* 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. *Actes du Colloque: Construction des savoirs: obstacles et conflits.* Montréal: CIRADE.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics* (PHD Thesis). University of Warwick.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics 2,* 125-147.

Trouche, L. (1994). Calculatrices graphiques: la grande illusion. *Repères IREM, N° 14,* 39-55.

Tucker, T.W. (1991). Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources. *MAA Series Notes N° 17.*