TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER

EDITORES
PATRICIA PERRY, EDGAR GUACANEME,
LUISA ANDRADE Y FELIPE FERNÁNDEZ

una empresa docente®

Bogotá, 2003

Esta publicación y el programa de desarrollo profesional de la que ella es resultado, fueron financiados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia a través del Fondo MEN-ICETEX para la formación, profesionalización y actualización de los docentes al servicio del Estado, en el marco del convenio número 111 de 1996.

TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER

Editores
Patricia Perry, Edgar Guacaneme, Luisa Andrade y Felipe Fernández

Primera edición: Junio de 2003
Tiraje: 300 ejemplares
ISBN 958-695-092-1

Diseño de carátula
Interlínea Editores Ltda.

Diseño de páginas interiores
“una empresa docente”

Impresión
Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

“una empresa docente”, Universidad de los Andes
Casita Rosada: Calle 18A # 0 - 29 Este
Tels.: 3394949 ext. 2717. Fax: 3394999 ext. 2709
Bogotá, Colombia
http://ued.uniandes.edu.co

Impreso en Colombia

TABLA DE CONTENIDO

Presentación v

Agradecimientos vii

ARTÍCULOS DE "UNA EMPRESA DOCENTE"

Un ciclo de tareas claves para el desarrollo profesional
del profesor de matemáticas 3
P. Perry, E. Guacaneme, F. Fernández, L. Andrade

¿Confía en sus conocimientos geométricos para
construir figuras semejantes? 55
E. Guacaneme, L. Andrade, P. Perry, F. Fernández

ARTÍCULOS DE PROFESORES

Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos
a la enseñanza de la razón como tópico matemático 95
A. Moreno, A. de la Barrera, M. Mantilla, N. Carreño

Introducir los conceptos de razón y proporción:
un asunto complejo 115
C. Pino

Exploración de la razón porcentual usada
como operador 125
L. Barreto, N. Garzón, V. Fonseca

Correlación inversa y directa:
¿dos caras de una misma moneda? 133
I. González, R. Cortés, W. Velásquez

La enseñanza de la proporcionalidad:
un camino largo por recorrer 147
A. Espinal, A. Suárez, T. Araque, H. Vanegas

De la cotidianidad a la proporcionalidad directa 164
G. Moreno, A. Otálora, L. Jiménez, F. Barón

Reconocimiento de la proporcionalidad directa
en una representación tabular 178
B. Oviedo, H. Burgos, J. González

Relato sobre una experiencia para iniciar
el estudio de la proporcionalidad 189
F. Farfán, S. Prieto, M. Molano

Aproximación a la proporcionalidad a través
de una situación de la vida cotidiana 199
T. Rincón, F. Naranjo

Resolución de problemas de proporcionalidad:
un estudio exploratorio 209
M. Salas, M. Martínez, L. Gómez, W. Vidal

Una propuesta para iniciar el estudio de la
proporcionalidad inversa 222
C. Baquero, N. Benítez, E. Naranjo, F. Rodríguez, E. Villamil

PRESENTACIÓN

> “A los profesores de matemáticas nos cuesta escribir sobre nuestra práctica de enseñanza porque sólo estamos acostumbrados a escribir y leer matemáticas”.

La anterior es una muestra del tipo de aserciones que hemos escuchado reiteradamente en los diferentes programas adelantados por “una empresa docente” para la formación de profesores cuando, con respecto a los primeros textos escritos por ellos como tarea, los participantes reciben nuestros comentarios críticos y sugerencias. En general, son comentarios tanto de forma como de fondo. Los textos, por una parte, suelen carecer de una estructura suficientemente clara y, ligado con tal hecho, no se puede reconocer su mensaje central; por otra parte, con frecuencia son conformados por oraciones cortas cuya secuenciación y articulación no contribuyen necesariamente a configurar párrafos bien delimitados y, en consonancia con esto, no se puede reconocer con precisión cuáles son las ideas que se pretende presentar y cuáles los argumentos con los que se desarrollan, explican y sustentan dichas ideas.

Teniendo como referencia la situación esbozada en las líneas anteriores, es para nosotros grato presentar esta publicación, resultado del “Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores”. El libro consta de dos partes: la primera, incluye dos artículos de los tutores del Programa y la segunda, incluye once artículos de grupos de profesores que participaron en el Programa en representación de sendas Escuelas Normales Superiores.

El Programa, dirigido por “una empresa docente” —centro de investigación en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes—, se desarrolló entre octubre de 2001 y mayo de 2003, con la participación de profesores de matemáticas de Escuelas Normales de cuatro entidades territoriales: Bogotá, Cundinamarca, Boyacá y Antioquia. Fue financiado por el Ministerio de Educación Nacional a través del Fondo MEN-ICETEX para la formación, profesionalización y actualización de los docentes al servicio del Estado, en el marco del convenio número 111 de 1996.

A grandes rasgos se puede decir que los profesores participantes en el Programa se involucraron en un proceso que les exigió: realizar el diseño y desarrollo curricular de una secuencia de tareas para dos o tres horas de clase sobre un tópico relativo a la proporcionalidad, llevar cabo un análisis de los resultados de la implementación de tal secuencia y finalmente reportar, de manera oral y escrita, la experiencia vivida.

Los artículos que componen el libro concretan y concluyen la tarea de reportar por escrito detalles de las experiencias vividas en el seno del Programa. Así, el primer artículo contiene un relato y una mirada crítica, desde la perspectiva de los tutores, sobre lo sucedido en la implementación del Programa y sobre la estrategia de desarrollo profesional empleada; el segundo presenta la respuesta que los tutores dieron a la misma tarea que hicieron los profesores y, en ese sentido, expone detalles del diseño y desarrollo curricular realizado en torno a una situación-problema relativa a la construcción de figuras geométricas semejantes, situación que se diseñó para generar reflexiones y aprendizajes acerca de la semejanza geométrica y fue abordada por un grupo de profesores de matemáticas no vinculados al Programa. De igual manera, los artículos de los profesores dan cuenta de aspectos y resultados de los respectivos proyectos de indagación en el aula que realizaron para abordar la enseñanza de asuntos muy puntuales como por ejemplo: la noción de razón como índice de comparación y operador; el carácter constante del cociente de valores correspondientes de dos magnitudes relacionadas, como criterio para determinar si son o no directamente proporcionales; el reconocimiento de magnitudes directamente proporcionales, usando la representación tabular; el reconocimiento de la relación de variación inversa entre dos magnitudes, la monotonía de dicha variación y la existencia de la constante de proporcionalidad inversa como criterio para determinar si dos magnitudes son inversamente proporcionales; las formas de representación verbal del orden relativo de magnitudes que varían de manera dependiente en dos eventos.

Cabe aclarar que, aunque los artículos de los profesores tuvieron un proceso detallado de edición a cargo de los tutores del Programa, los contenidos y resultados que allí se presentan son de autoría de los profesores. Con respecto a la escritura de dichos artículos, una vez se tuvo la versión primera, se realizó un proceso de interacción con los autores que si bien en principio presentó algunas dificultades en la interpretación y respuesta a los comentarios hechos, permitió aclarar cuestiones que eran confusas; posteriormente esta interacción se llevó a cabo con base en preguntas muy puntuales, mediante las cuales fue posible agregar o suprimir detalles acerca de la experiencia. Al final de dicha interacción se llegó a una versión definitiva que fue aprobada por los profesores. No obstante las deficiencias que se puedan detectar en estos textos, ya sean relativas a la realización del proyecto mismo o a la reflexión posterior para llegar a concluir los artículos, consideramos que en ellos se puede evidenciar un trabajo serio y comprometido de parte de sus autores que puede marcar el primer paso en el camino de los profesores hacia la necesidad sentida de escribir acerca de experiencias de su práctica en la enseñanza de las matemáticas y que en alguna medida desmitifica la tesis que subyace al enunciado con el que se inició esta presentación.

Al terminar de leer esta publicación, sin duda, el lector podrá reconocer la gran cantidad de trabajo que hubo detrás de cada uno de los proyectos realizados y tendrá elementos que le permitan explicar y justificar por qué el título de la obra ha sido bien elegido.

AGRADECIMIENTOS

La realización de este Programa fue posible gracias a la financiación del Ministerio de Educación Nacional de Colombia —a través del Fondo MEN-ICETEX para la formación, profesionalización y actualización de los docentes al servicio del Estado, en el marco del convenio número 111 de 1996— y al aporte de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes.

Nuestro agradecimiento se extiende de manera especial a Bernardo Recamán quien, en el año 2001, desde su posición en el Ministerio de Educación Nacional como Director de *Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media*, tuvo a bien confiar en el equipo de “una empresa docente”. Agradecemos así mismo a Luis Alberto Artunduaga, Coordinador del *Grupo Formación y Evaluación de Educadores*, por su atención y pronta disposición para resolver las dudas e inquietudes de carácter administrativo que fueron surgiendo durante el desarrollo del Programa.

También agradecemos a los directivos de la Escuela Normal Superior de Medellín y a su Rector, Luis Reinaldo Londoño, por habernos facilitado las instalaciones de la Escuela Normal para la realización de los seminarios y las asesorías presenciales llevadas a cabo en dicho lugar.

A los Rectores de todas las Escuelas Normales que estuvieron participando en el Programa, agradecemos la colaboración y el apoyo que le brindaron no sólo a los profesores de matemáticas de sus respectivas instituciones, sino también a nosotros.

Para terminar, mil gracias a los maestros que participaron en este Programa por haber aceptado el reto que les planteamos y que, en varios casos, a mitad del primer seminario parecía que no iban a poder o a querer asumir. Como se sabe, los discípulos son la razón de ser de los maestros, y en este caso, gracias a la interacción con los profesores que participaron en el Programa, podemos decir que hemos avanzado en nuestra comprensión de lo que es nuestro objeto de trabajo: la formación de profesores de matemáticas en ejercicio.

ARTÍCULOS
DE “UNA EMPRESA DOCENTE”

UN CICLO DE TAREAS CLAVES PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

PATRICIA PERRY, EDGAR GUACANEME,
FELIPE FERNÁNDEZ Y LUISA ANDRADE

Se presentan detalles de la tercera versión de una estrategia de desarrollo profesional, utilizada para involucrar a profesores de matemáticas en una experiencia de aprendizaje y acción sobre su práctica que se aleja de lo que es habitual en el quehacer docente y en la formación de maestros. Tal estrategia compromete a los profesores en acciones tales como diseñar, planear, observar, analizar, reportar, socializar, acciones estas que le permiten comprender mejor su práctica y reconceptualizar su conocimiento matemático y didáctico. Haber enfocado el trabajo en un mismo tema matemático para todos los participantes ayudó a sacar mejor provecho de la experiencia.

INTRODUCCIÓN

La calidad de la formación matemática que se logra como resultado de la escolaridad depende de manera directa y principalísima —aunque no exclusiva— de lo que sucede en el aula de clase y esto, a su vez, depende del conocimiento, creencias y visiones del profesor con respecto a diversos asuntos relacionados tanto con la naturaleza de las matemáticas como con su aprendizaje y enseñanza. En consecuencia, mejorar la calidad de la formación matemática de los estudiantes —asunto que preocupa a diversas instancias del sistema educativo— requiere de parte del profesor de matemáticas, conocimientos especializados y competencias bien desarrolladas que le permitan hacerse cargo, de manera autónoma y responsable, de la enseñanza y del aprendizaje de sus estudiantes. En lo que sigue se tratará de precisar e ilustrar lo dicho mediante un ejemplo.

Ser capaz de resolver problemas de manera autónoma, reflexiva y crítica, aplicando el conocimiento matemático conceptual y procedimental tratado en la escuela, puede verse, sin mayor discusión, como uno de los aspectos que definen la calidad de la formación matemática lograda. Aceptando que tal capacidad existe en potencia en los estudiantes, que es posible desarrollarla en mayor o menor grado y que tal desarrollo depende en alguna medida de las oportunidades que los estudiantes tengan de involucrarse en el ejercicio de resolver problemas y de reflexionar sobre sus acciones al respecto, se

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 3-54). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

colige que es responsabilidad directa y propia del profesor generar oportunidades que propicien el desarrollo de la mencionada capacidad.

Generar tales oportunidades le demanda al profesor acciones diversas y complejas, entre las que cabe mencionar: plantear situaciones en las que sea posible explorar, conjeturar, poner a prueba las conjeturas hechas, particularizar y generalizar; generar espacios donde los estudiantes puedan establecer conexiones entre los procedimientos y conceptos tratados, con otros ya estudiados; involucrar a los estudiantes en un discurso matemático acerca de la resolución de problemas, lo que incluye considerar estrategias de solución y soluciones diferentes para un problema dado, posibilidades y maneras de extender y generalizar una solución, y tipos de problemas que se pueden crear a partir de una situación dada; identificar las dificultades que se presentan y aprovecharlas para proponer situaciones alternas que cuestionen y propicien en los estudiantes el reconocimiento de su error; hacer un seguimiento lo más cercano y continuo posible a lo que los estudiantes hacen, de manera que esta información pueda servir para tomar decisiones, tanto a ellos como al profesor, sobre el trabajo a realizar.

Llevar a cabo tales acciones de manera pertinente, coherente y oportuna para que en efecto propicien para los estudiantes las oportunidades pretendidas, requiere de parte del profesor, entre otras cosas: el dominio de una gran cantidad de elementos (relativos tanto al contenido matemático como a su didáctica) que ha de articular para concretar una propuesta particular; la capacidad de implementarla de acuerdo con las intenciones y características esenciales con las que fue concebida; la capacidad de observar de manera crítica los resultados y efectos de la propuesta implementada; y la capacidad para analizar dichos resultados e inferir de ellos los cambios que se requieren para mejorar la propuesta o incluso para reemplazarla por otra.

De manera muy general, el anterior ejemplo permite vislumbrar, por una parte, la gran exigencia y responsabilidad que recaen sobre el profesor en lo que concierne a la formación matemática de los estudiantes, y por otra parte, que el profesor no puede enfrentar aquéllas de manera apropiada sin un conocimiento especializado, sin una actitud de búsqueda de soluciones, y sin una disposición positiva hacia su propio desarrollo profesional como medio para lograr una mejor comprensión de su práctica y un control mayor sobre los resultados de la misma.

Con la convicción de que la problemática de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes debe ser abordada a través de la formación de profesores en ejercicio —aunque de manera indirecta—, desde hace varios años “una empresa docente” ha dedicado esfuerzos con el fin de definir, poner a prueba y afinar una estrategia para involucrar a los profesores en una experiencia de aprendizaje y de acción sobre su práctica que se aleje sustancialmente de lo que les es habitual y, en consecuencia, pueda representarles el primer paso de su inmersión en un proceso de desarrollo profesional que sólo debería concluir cuando se retiren del ejercicio de su profesión.

En términos generales, la estrategia apunta a crear un ambiente de trabajo en el que cobran gran importancia actividades tales como:

- colaborar con pares en la realización de proyectos específicos relacionados con la práctica docente,
- someter a la crítica de colegas el trabajo realizado,
- mirar críticamente el trabajo de colegas con el propósito de comentarlo, criticarlo y/o hacer sugerencias,
- reportar oralmente y por escrito el trabajo realizado y sus resultados,
- autocuestionar el conocimiento y la propia práctica como consecuencia de involucrarse en la realización de tareas que propician el notar algo inadvertido, el llevar a cabo acciones que aunque propias de un profesor le son ajenas, el reflexionar sobre el trabajo realizado con base en los comentarios hechos por los tutores y/o los colegas.

Así, el “Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores” al que se refiere este artículo es la tercera versión de dicha estrategia[1].

EL PROGRAMA

DESCRIPCIÓN GENERAL

Iniciaron su participación en el Programa entre dos y cuatro profesores provenientes de veinte Escuelas Normales ubicadas en cuatro entidades territoriales (Bogotá, Cundinamarca, Boyacá y Antioquia), siendo esta la primera vez que trabajamos con profesores que no residen en el mismo lugar de nuestra sede. El Programa se implementó, de manera simultánea, en Medellín[2] y Bogotá con dos grupos de profesores, uno que reunió a docentes de Antioquia y otro, a docentes de las otras tres entidades territoriales. Los cuatro tutores, dos para cada grupo, trabajamos de manera colaborativa en el diseño curricular del Programa y aunque, con frecuencia, los dos tutores de cada grupo también trabajamos conjuntamente para atender

1. Para conocer detalles de las dos versiones anteriores de la estrategia de desarrollo profesional que hemos implementado, véase Perry, Valero y Gómez (1996) y Valero, Perry, Castro, Gómez y Agudelo (1998).
2. La Escuela Normal Superior de Medellín prestó su sede para la realización de las diferentes reuniones que se hicieron como parte del Programa.

la interacción con los profesores, en algunos momentos distribuimos responsabilidades.

En la ejecución del Programa se pueden considerar dos fases, contiguas en el tiempo, claramente diferenciadas por las actividades que llevaron a cabo los participantes. En la primera fase, cuya duración fue de un año, los profesores de una misma institución realizaron un proyecto de aula. En la segunda fase, cuya duración fue de seis meses, los profesores tuvieron, por un lado, la tarea de escribir un artículo sobre la experiencia vivida y, por otro lado, la tarea de elaborar una propuesta para un nuevo proyecto de indagación en sus instituciones.

La expresión "proyecto de aula" hace referencia al complejo de actividades conformado por: el diseño de una secuencia de tareas que se pudiera implementar en dos o tres horas de clase con una intención de aprendizaje determinada, la elaboración de sendos planes para la implementación y la observación de las producciones de los alumnos, la implementación del diseño curricular, el análisis de las producciones de los estudiantes, la escritura de un reporte acerca de la experiencia, y la socialización de la misma. Con respecto a las versiones anteriores, el Programa introdujo una modificación a la estrategia: todos los profesores debían trabajar en torno a un mismo tema matemático, con el fin de propiciar una profundización y cuestionamiento acerca de él y de su didáctica, lo que era posible por tener un foco común para consultar, discutir, compartir y comparar. Los tutores seleccionamos entonces el tema de la proporcionalidad.

Para apoyar la realización de los proyectos de aula se llevaron a cabo tres seminarios presenciales de tres días consecutivos cada uno; con el primero de ellos se inició el Programa y los otros dos estuvieron espaciados entre sí por un lapso de cinco meses. En los seminarios se trabajaron distintos talleres (ver Apéndices) diseñados con fines específicos relativos, en primer lugar, al tema matemático escogido para abordar en el Programa y a su didáctica y, en segundo lugar, relacionados con el desarrollo de las diversas tareas que propusimos a los profesores para que llevaran a cabo después de cada seminario. El desarrollo de las tareas propuestas en los talleres abrió oportunidades para trabajar en diversos esquemas: de manera individual, en grupos pequeños formados por los profesores de una misma institución o de varias, y con todo el grupo; sólo en este último caso no pedimos a los profesores que registraran por escrito su trabajo. Siempre se dio espacio para que en el grupo grande, se socializara el trabajo de los grupos pequeños. En pocas ocasiones hubo una exposición de parte de los tutores.

Para apoyar la escritura del artículo y la elaboración de una propuesta para realizar otro proyecto de aula, además de dedicar un tiempo del tercer seminario a tareas relativas a tales asuntos, hubo una serie de asesorías presenciales de los tutores con los profesores de cada Escuela Normal en las que siempre se trabajó con base en un documento escrito sobre el que los tutores teníamos comentarios y sugerencias; también aprovechamos esas reuniones para ayudar a reconstruir detalles de la experiencia vivida y a cuestionar ideas y conocimientos de los profesores, relacionados con los tópicos sobre los que versaron sus proyectos de aula.

En el transcurso del Programa estuvo abierta la posibilidad de hacer una interacción escrita entre profesores y tutores, vía el correo electrónico o el fax. En particular, esperábamos que los documentos de los profesores pasaran por un proceso de revisión y mejoramiento de dos o tres versiones apoyados por los comentarios y sugerencias que los tutores pudiéramos hacerles también por escrito, y a los que ellos deberían atender ya fuera pidiendo explicaciones, objetando, o introduciendo modificaciones en la versión preliminar.

Con base en la descripción general que hemos presentado, es probable que el lector haya podido entrever que la participación en el Programa constituyó una oportunidad real para involucrarse en una experiencia de aprendizaje y acción sobre la propia práctica, distante de lo que es habitual para los docentes de matemáticas, dado que tal experiencia estuvo caracterizada por rasgos tales como:

- el papel de los alumnos (en este caso, los profesores participantes) no es recibir información acerca del contenido matemático y su didáctica, y el papel de los tutores no es presentar información y decidir la validez de las producciones de sus alumnos;
- cada una de las tareas y actividades planteadas en el Programa o son novedosas para los profesores (por ejemplo, la escritura de un artículo, la elaboración de una propuesta) o su realización se hace de manera novedosa (por ejemplo, el diseño de una secuencia de tareas siguiendo pautas que contribuyen a que su implementación en la clase no sea un asunto improvisado, la observación detallada de las producciones de los estudiantes);
- la enseñanza y el aprendizaje tanto en el contexto escolar como en el de la educación de profesores, son prácticas sociales en la medida en que dan cabida al trabajo colaborativo entre pares, propician la comunicación oral y escrita como medio para avanzar en la construcción del saber y para dar cuenta del saber mismo, y promueven la mirada crítica hacia las propias producciones y hacia las de los colegas.

PARTICIPACIÓN EN EL PROGRAMA

“La participación en el programa es institucional” es uno de los lemas que ha caracterizado la estrategia de desarrollo profesional implementada. Ello quiere decir que la institución (directivos, profesores y estudiantes) entiende y acepta como asunto suyo la participación de algunos de sus miembros en el programa y, en consecuencia, asume la responsabilidad tanto de buscar y concertar mecanismos para que tal participación pueda ocurrir sin ocasionar traumatismos en la marcha de la institución, como de hacer el correspondiente seguimiento al desarrollo del proyecto que por razón de su participación en el programa realizan las personas implicadas.

En esta versión de la estrategia, la participación institucional se concretó en términos un poco diferentes a como se hizo en las dos anteriores, quizás por la conjunción de dos hechos. Por una parte, la convocatoria no la hizo “una empresa docente” como había sucedido en los dos casos anteriores; esta vez, se hizo a través de las Secretarías de Educación de cuatro entidades territoriales y no hubo un proceso para informar detalles de lo que sería el Programa, no hubo entrevistas ni tampoco algún proceso de selección de los participantes; en realidad, al primer seminario varios de los profesores asistentes llegaron sin tener mayor idea del tipo de actividad que iban a realizar o de lo que podían esperar del Programa. Por otra parte, en esta ocasión no se extendió el Programa a los directivos por considerar que podría ser relativamente difícil para ellos su participación.

Así que, antes de iniciar el Programa no hubo oportunidad de generar compromiso institucional alguno. Para suplir esta falta, dos integrantes del equipo de tutores, en calidad de coordinadores, buscamos —sobre la marcha— formas de mantener comunicación con los rectores; para ello al terminar cada seminario les enviamos un documento de informe sobre lo realizado y sobre la tarea planteada para el siguiente; también hubo comunicación telefónica frecuente para indagar sobre la información que al respecto del desarrollo de los proyectos iban teniendo los rectores y para solicitarles que estimularan y apoyaran a los profesores en el cumplimiento oportuno de las tareas asignadas.

En esta versión de la estrategia, la participación institucional se concretó en que: (i) la institución concedió permiso a un grupo de sus profesores de matemáticas para que pudieran asistir durante su jornada laboral a los seminarios y reuniones de asesoría organizados por el Programa; (ii) algunas instituciones apoyaron económicamente a los profesores en el cubrimiento de los costos de desplazamiento y estadía durante la realización de los seminarios; (iii) la institución concedió, en momentos determinados del proceso, algún tiempo de la jornada laboral para que los profesores pudieran adelantar sus proyectos de forma colaborativa; (iv) hubo comunicación frecuente entre los rectores y los coordinadores del Programa, en torno a la realización de los proyectos de los profesores; (v) en determinados momentos, hubo un acercamiento de parte del rector de la institución hacia los profesores para informarse de la marcha de su proyecto.

En repetidas ocasiones, los profesores no pudieron cumplir con los plazos acordados en el cronograma del Programa, aduciendo como razones la prioridad que para ellos tienen las diversas tareas institucionales que se les va encomendando sobre la marcha (por ejemplo, entregar informe para la acreditación de la Escuela, preparar y participar en actividades culturales de la institución) y la gran carga laboral generada por razón de los cursos que atienden. Con respecto al asunto del tiempo requerido para hacer un trabajo de diseño y desarrollo curricular enmarcado en un proceso reflexivo y fundamentado —como el que se pretende impulsar— creemos que es imprescindible que los profesores, a título personal y las instituciones, para las que ellos trabajan, tengan una disposición generosa para buscar condiciones que dependan de cada quien y posibiliten y propicien tal trabajo.

EXPECTATIVAS DE LOS PARTICIPANTES

Aun sin tener expectativas claras con respecto a lo que podría ser su participación en el Programa o de lo que éste les podría aportar, dada la poca información que al respecto tenían inicialmente, cuando en el primer seminario expusimos detalles de las actividades que esperábamos que hicieran, percibimos en varios de los profesores descontento o asombro pues les habría gustado "recibir información sobre nuevas metodologías de enseñanza", no podían encontrarle sentido a "dedicar tanto tiempo a diseñar una secuencia de tareas para dos o tres horas de clase" y no podían desarrollar el proyecto puesto que "no hemos enseñado nunca la proporcionalidad". En realidad, esta situación no nos sorprendió pues habíamos vivido algo similar en las versiones anteriores y, más bien, nos mostró la necesidad de alguna acción encaminada a lograr de parte de los profesores un compromiso serio con la experiencia para que ella pudiera representar un aporte valioso en sus vidas profesionales. Por ello, nos esforzamos en disuadir a los profesores que estaban dispuestos a abandonar su participación en el Programa, enfatizando el carácter novedoso de nuestra propuesta de desarrollo profesional; en este empeño, no tuvimos éxito con profesores de primaria quienes consideraron que el nivel del conocimiento matemático tratado era superior al de ellos.

LA COMUNICACIÓN ENTRE TUTORES Y PROFESORES VÍA EL CORREO ELECTRÓNICO

Para hacer posible, por fuera de los seminarios y las reuniones de asesoría presenciales, la interacción entre profesores y tutores en torno al desarrollo del proyecto de aula, se previó establecer comunicación a través del correo electrónico con base en archivos de computador que contuvieran los documentos de trabajo de los profesores y los documentos de comentarios de los tutores. No obstante haber hecho tal previsión con base en la información de que las Escuelas Normales participantes contaban con la tecnología correspondiente, la realidad de los profesores y las instituciones a ese respecto nos mostró condiciones algo adversas para lograr la comunicación pretendida: en algunas instituciones, la instalación del servicio de Internet ocurrió tres meses después de iniciado el Programa, en varias de las instituciones el servicio de Internet se interrumpió en los períodos de receso escolar; en dos Escuelas de Antioquia, el servicio telefónico e Internet dejaron de funcionar por lo menos durante dos meses debido a problemas de orden público. Por otra parte, una buena cantidad de profesores tenían poca experiencia tanto en el manejo de editores de texto como del correo electrónico, e incluso, percibimos en algunos de ellos reticencia para usar el correo, quizás por temor a explicitar que no se conocía la tecnología.

Aunque en ciertos momentos del Programa tomamos algunas medidas para propiciar el uso sistemático del correo electrónico, sólo con algunos grupos de profesores tuvimos éxito en este aspecto, siendo conscientes de que incluso en tales grupos, era siempre el mismo profesor quien utilizaba el correo.

DETALLES DE LA ESTRATEGIA Y DE SU IMPLEMENTACIÓN

REALIZACIÓN DEL PROYECTO DE AULA

Se esperaba que cada grupo de profesores realizara un proyecto de aula, para la enseñanza de un tópico muy puntual relacionado con la proporcionalidad, a través de cinco grandes actividades: la elaboración del diseño de una secuencia de tareas cuya implementación se pudiera hacer en dos o tres horas de clase, la elaboración de planes de implementación y de observación, la implementación de la secuencia y la observación, el análisis de los resultados encontrados, el reporte oral y escrito de la experiencia.

Elaboración del diseño de una secuencia de tareas

Hace referencia a la actividad requerida para llegar a tener por escrito una serie de tareas y preguntas secuenciadas y articuladas para proponer a los estudiantes con una determinada intención relativa al aprendizaje.

Como parte de esta actividad (ver parte final del Apéndice 1) se esperaba que, ante todo, los profesores determinaran el tópico sobre el que versaría su diseño y, más específicamente, un error o dificultad de los estudiantes, que quisieran abordar con la secuencia. Además, que establecieran los conceptos y/o procedimientos asociados al tópico, el propósito de las tareas de la secuencia con respecto a la comprensión de los estudiantes, la secuencia de tareas y las tareas mismas que le plantearían a los estudiantes junto con las consideraciones que sustentaban la pertinencia de dichas tareas, las soluciones posibles a las tareas que propondrían a los estudiantes y los conceptos y/o procedimientos matemáticos implicados en esas soluciones, las soluciones que podían prever de parte de sus estudiantes a las tareas propuestas, y los errores que podían prever en tales soluciones.

Para apoyar a los profesores en la realización de esta actividad, el primer seminario del Programa estuvo dedicado a crear un contexto rico en consideraciones relativas a la proporcionalidad, su aprendizaje y enseñanza (ver Apéndice 1). Con respecto al significado de magnitudes directa e inversamente proporcionales, a través de tres talleres se pretendía: explorar y explicitar las concepciones de los profesores al respecto, cuestionar dichas concepciones y finalmente estudiar unas definiciones formales, teoremas y propiedades y luego compararlas con las definiciones que habían explicitado los profesores (ver Talleres 2, 3 y 4 del Apéndice 1). Con otros dos talleres pretendimos generar una discusión y reflexión sobre aspectos relativos al desempeño de los estudiantes frente a problemas de proporcionalidad; uno de ellos enfocaba las diferencias en demandas cognitivas impuestas por diferentes formas de solución de un mismo problema de proporcionalidad y también enfocaba la diferencia de complejidad de diferentes problemas (ver Taller 6 del Apéndice 1); el otro, pretendía promover la reflexión acerca de la forma de solucionar distintas situaciones de proporcionalidad (ver Taller 5 del Apéndice 1). Dos talleres más tenían como propósito motivar la reflexión y discusión en torno a asuntos relativos a la enseñanza de la proporcionalidad; uno de ellos, indagaba por la ruta pedagógica usual para la enseñanza del tema en la institución y la identificación de algún problema específico de los profesores al recorrer dicha ruta (ver Taller 1 del Apéndice 1); el otro, pretendía despertar la consciencia con respecto a los resultados deficientes de los estudiantes colombianos en la prueba del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias —TIMSS— aplicada en 1997, en lo concerniente a la resolución de problemas de proporcionalidad, y al limitado conocimiento del profesor sobre el desempeño y saber de los estudiantes acerca del tema (ver Taller 7 del Apéndice 1).

Durante el seminario se evidenciaron indirectamente dificultades de los profesores relativas a la enseñanza de la proporcionalidad; en particular, fue manifiesta la poca precisión con la que ellos esbozaron la ruta pedagógica que siguen o conviene seguir para la enseñanza del tema, limitándose a hacer listas de nombres de tópicos (e.g., razón, regla de tres, proporción, propiedades de las proporciones, repartos proporcionales) sin que las conexiones y la organización pareciera ser un asunto importante. Con respecto a la solución de problemas de proporcionalidad, fue posible reconocer en varios profesores dificultades similares a las reportadas en la prueba del TIMSS. Al comparar sus hipótesis, acerca del desempeño de los estudiantes colombianos en la solución de problemas de proporcionalidad planteados en el TIMSS, con los resultados reales, los profesores quedaron sorprendidos pues en la mayoría de los casos habían sobreestimado los verdaderos resultados. Haber advertido estas cuestiones, llevó a los profesores a hacer afirmaciones con respecto a la necesidad de atender de manera más cuidadosa la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos y procedimientos propios del tema y a la pertinencia del mismo como objeto de estudio de sus proyectos de aula.

Consideramos que, en buena medida, el trabajo en los talleres planteados logró generar cuestionamiento acerca del conocimiento matemático y didáctico de los participantes y propició el inicio de una reconstrucción de algunos conceptos y procedimientos centrales al tema de la proporcionalidad, tales como: las condiciones que determinan si dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales; la diferencia entre magnitud, cantidad y medida; el papel que juega la regla de tres en la solución de un problema de proporcionalidad; las consideraciones iniciales que se requieren para establecer si un problema es o no de proporcionalidad. No obstante los logros mencionados, se requeriría que los profesores sigan profundizando en asuntos conceptuales como por ejemplo la relación entre proporcionalidad y razón; que utilicen y nombren las nociones de magnitud, cantidad y medida, de manera más acorde con las diferencias inherentes a sus significados; que exploren la proporcionalidad en contextos cuantitativos no numéricos.

En la elección del foco temático para los proyectos de aula reconocimos la influencia de las diferentes definiciones de proporcionalidad discutidas: en varios casos vimos la intención de aproximarse a la idea de proporcionalidad directa, a partir de alguna de tales definiciones o haciendo incluso una mezcla de ellas. Al terminar el seminario, el problema de estudio de los proyectos de aula se concretó, para varios de los grupos, en una primera aproximación a tópicos puntuales tales como la noción de razón como objeto matemático diferente a la fracción, la diferencia entre cantidad de magnitud y medida de la misma, significado para magnitudes directa e inversamente proporcionales, noción de correlación directa e inversa entre magnitudes.

En el segundo seminario se abrió espacio para revisar aspectos implicados en el diseño de las secuencias de tareas para los estudiantes, producidas por los profesores; en particular, se centró la atención en los enunciados de las tareas y preguntas propuestas, en las respuestas hipotéticas de los estudiantes a las tareas propuestas y en la intencionalidad de las tareas (ver Taller 1 del Apéndice 2); con ello, se pretendía, por un lado, aportar elementos a los profesores para que modificaran sus diseños y, por otro lado, propiciar oportunidades para que advirtieran la necesidad e importancia de considerar con más cuidado la elaboración de tareas para los estudiantes.

Para la revisión, cada grupo desarrolló la secuencia diseñada por otro grupo y luego se compararon las previsiones hechas por los diseñadores con las respuestas dadas por el otro grupo. Al hacer tal ejercicio, a los docentes les sorprendió que sus colegas hubieran dado respuestas no previstas al hacer el diseño y encontrar que desde la perspectiva de los diseñadores y la de los resolutores, la tarea tuviera intenciones claramente diferentes.

Hubo una revisión y afinamiento de las secuencias de tareas antes de implementarlas; en las versiones iniciales de dichas secuencias fue frecuente encontrar fallas en la coherencia (por ejemplo, las tareas planteadas no eran acordes con los objetivos propuestos) y en la organización y articulación de las preguntas formuladas. Por otro lado, en algunas secuencias fue notoria la dificultad de varios profesores para concretar cuál era el propósito de una pregunta; en este sentido, algunos docentes reconocieron que la tarea de explicitar a priori algunas de las posibles respuestas que podrían dar sus estudiantes —que fue una de las tareas que los profesores o no respondieron o le prestaron poca atención en sus primeras versiones de propuestas de análisis— les ayudó a reformular las preguntas que habían propuesto inicialmente y a encontrarles un propósito más definido. El proceso de refinamiento fue apoyado por los tutores, por fuera de los seminarios, a través del intercambio de documentos y, en algunos casos, en asesorías presenciales; en ambas circunstancias, les hicimos preguntas tales como: ¿qué esperan como respuesta a esta tarea?, ¿es posible esa respuesta para la pregunta tal como está planteada?, ¿qué les indica esa respuesta acerca del propósito que tiene la tarea?, ¿cómo se puede cambiar la tarea o pregunta para que la respuesta que dé el estudiante indique algo con respecto a lo que se quiere.

Elaboración de planes de implementación y de observación

Hace referencia a la actividad de explicitar cuáles son las acciones que esperan realizar durante el desarrollo de la clase (en calidad de profesores o de observadores) con el fin de lograr los propósitos que se han planteado, para lo cual es imprescindible imaginar circunstancias de actuación relativas a un grupo específico de alumnos.

Como parte de esta actividad, en lo concerniente a la implementación de la secuencia de tareas, se esperaba que los profesores precisaran detalles relativos a: el papel que asumiría cada uno de los profesores; el papel que dejarían tener a los estudiantes; si habría actividades adicionales al desarrollo del taller por parte de los estudiantes y en tal caso, qué contenido se trataría, cómo se llevarían a cabo, con qué propósito; cómo organizarían y manejarían las discusiones.

En lo concerniente a la observación (ver Taller 3 del Apéndice 2), se esperaba que los profesores precisaran detalles relativos a: cómo y quién observaría la implementación de la secuencia de tareas con los estudiantes; los aspectos relevantes a observar del trabajo y respuestas de los estudiantes que podrían indicar algo con respecto al cumplimiento o no de las intenciones del taller o de las tareas; la interpretación que podrían hacer del trabajo de los estudiantes en el desarrollo del taller, basada en las respuestas previstas y con relación a las intenciones del taller y las evidencias que fundamentan dicha interpretación.

En el inicio del proceso para construir el plan de observación, pocos profesores consideraron y concretaron elementos para la observación, y quienes lo hicieron, se centraron principalmente en el carácter correcto o no de las respuestas hipotéticas y no tuvieron en cuenta otros aspectos de dichas soluciones ni de los procesos que podrían estar implicados detrás de ellas.

Para apoyar a los profesores en la elaboración de los planes para la observación, en el segundo seminario del Programa se vivió un ejercicio de implementación de una secuencia de tareas y de observación de la misma (ver Taller 2 del Apéndice 2)[3]. Los profesores de cada institución formaron un grupo y uno de ellos asumió el papel de observador del trabajo de sus colegas mientras desarrollaban un taller preparado por nosotros. Los tutores nos habíamos reunido previamente con los observadores para sugerirles una serie de indicios sobre el desarrollo, que probablemente nos permitirían decir algo con respecto al logro de los objetivos del taller implementado. Una vez hecha la observación, se hizo una puesta en común con el propósito de contrastar las anotaciones de los distintos observadores y conocer y comentar las dificultades surgidas en el proceso de observación y considerar posibles recomendaciones para cuando los profesores hicieran la observación en sus clases.

Los profesores que participaron en calidad de observadores, en la puesta en común afirmaron haberse dado cuenta de manera más consciente de la diversidad de aspectos en los que es posible enfocar la atención durante la observación, hecho que les permitía ver la importancia de establecer previamente los focos más relevantes; también se refirieron a la problemática que experimentaron con respecto a si debían o no intervenir durante el trabajo de los miembros del grupo y, además, cuáles y cómo debían ser tales intervenciones. Además, todos los profesores estaban sorprendidos por la diversidad de aspectos que conformaban la lista de indicios que les presentamos (ver Taller 2 del Apéndice 2).

Al planear la agenda para el segundo seminario, creímos que con el trabajo que se realizara durante el mismo quedarían definidos y escritos los planes correspondientes a cada proyecto de aula; aunque esto no ocurrió así, cada grupo logró avanzar en la comprensión de lo que se les pedía hacer e, incluso, avanzaron en el desarrollo de las tareas que debían hacer. En particular, avanzaron en la producción de una lista de indicios que fue revisada y comentada por los tutores y que debían seguir afinando —indicios que les debían servir de fundamento para revisar eventualmente las tareas que conformaban las secuencias de tareas para los estudiantes—. Algunos de los comentarios que les hicimos al respecto de la lista de indicios, se referían a la relevancia de los mismos para los propósitos de aprendizaje planteados en sus secuencias, y a la posibilidad real de observarlos teniendo en cuenta el tipo de preguntas y tareas formuladas en tales secuencias.

Consideramos que el trabajo en torno a las intenciones de las tareas y preguntas que conformaban sus secuencias, les pudo dejar una idea más precisa con respecto al sentido que puede tener la formulación de objetivos de aprendizaje concisos y viables para tratar de alcanzarlos en espacios de tiempo determinados; la discusión con respecto a los indicios o evidencias de lo que hace el estudiante, pudo mostrarles el carácter tan general de sus acciones habituales relativas a la evaluación del trabajo de los estudiantes y confrontarlos con el hecho de que es usual que no se detengan a mirar qué es lo que comprenden o aprenden los estudiantes sino que se centran principalmente en ver si la respuesta es correcta o incorrecta.

3. Una secuencia de tareas muy similar fue el centro de un proyecto de aula realizado por nosotros con un grupo de profesores no participantes en el Programa; damos cuenta del respectivo diseño y desarrollo curricular en el siguiente artículo.

Implementación de la secuencia de tareas y observación

Hace referencia a la actividad de poner en acción los planes establecidos al utilizar con los alumnos la secuencia diseñada.

La implementación debía hacerse al cabo de seis meses de haber comenzado el Programa, tras un proceso de mejoramiento del diseño inicialmente presentado. Se les recomendó a los profesores estar en alerta durante la implementación con el propósito de que pudieran dar cuenta, entre otras cosas, del papel real de los diferentes actores, del contenido de las conversaciones de los estudiantes al resolver la secuencia de tareas, de la concreción de los indicios particulares previstos, de las decisiones que hubieran tomado sobre la marcha en la implementación.

En la mayoría de los casos, para la implementación de la secuencia de tareas se pidió a los alumnos trabajar en grupos de tres o cuatro, uno de los profesores estuvo coordinando el trabajo durante la clase y los demás profesores hicieron observación directa en diferentes grupos de alumnos.

Análisis de los resultados encontrados

Hace referencia a la actividad de concretar, por un lado, detalles relativos a la implementación y observación de la secuencia y, por otro, los resultados relacionados con las producciones de los alumnos, para lo cual los planes elaborados aportan elementos de análisis.

Después de la implementación de la secuencia de tareas, se daban dos meses para preparar un informe escrito, en el que se relataran detalles de lo sucedido y se presentara un análisis de las producciones de los alumnos de acuerdo con los planes de observación elaborados previamente. Con excepción de tres grupos de profesores, los demás se tomaron mucho más tiempo del previsto para entregar el informe, argumentando varios de ellos que habían tenido que retrasar la implementación y que habían contado con poco tiempo para trabajar colaborativamente en el proyecto de aula.

En general, en la primera versión de los informes, los profesores reportaron pocos detalles con respecto a la implementación y a la observación. Algunos, apenas dieron cuenta de la manera como se organizaron los profesores para la observación y mencionaron de manera vaga cuestiones generales en las que se fijaron durante la implementación; otros, aunque precisaron más las condiciones de la implementación, no concretaron suficientemente los indicios de actuación de los estudiantes con base en los cuales se podían dar cuenta del cumplimiento de los objetivos de la tarea propuesta. Sin duda, el trabajo de asesoría presencial y no presencial que con respecto a este asunto de la observación se realizó posteriormente, fue necesario y contribuyó a mejorar los reportes de los profesores en este sentido.

Reporte de la experiencia

Hace referencia a la actividad de revisar toda la experiencia con miras a precisar detalles que den cuenta de las acciones realizadas, de los resultados obtenidos, y también de las decisiones tomadas y las razones que determinaron dichas decisiones.

Como parte de la actividad de reportar oralmente detalles del proyecto de aula realizado, se esperaba que los profesores seleccionaran, organizaran y expusieran información relevante que permitiera al auditorio hacerse una idea clara de lo que se relataba; para ello era importante considerar el tiempo del que se disponía y planear cómo se distribuiría la exposición entre los miembros del grupo.

Para apoyar a los profesores en la realización del reporte oral que debían hacer ante sus compañeros del Programa, en el tercer seminario se les sugirió tener en cuenta una serie de pautas para preparar las transparencias que debían utilizar al hacer la exposición (ver Taller 1 del Apéndice 3). En términos generales, el balance de la socialización realizada fue positivo. Por un lado, varias de las presentaciones tuvieron un buen nivel de calidad: fueron claras y su organización contribuyó a dar una idea completa del proyecto, naturalmente con el nivel de generalidad impuesto por el tiempo disponible; por otro lado, las preguntas y comentarios formulados por el auditorio con respecto a cada proyecto, proporcionaron cuestionamientos y críticas constructivas a los trabajos. Cabe agregar que cuatro de los proyectos desarrollados en el grupo de profesores de Escuelas de Cundinamarca y Boyacá fueron expuestos en la séptima Reunión Anual del Club de Educación Matemática, evento organizado por "una empresa docente" y que convoca a profesores de matemáticas del país.

ESCRITURA DEL ARTÍCULO

Además del informe final escrito por cada grupo de profesores en el que se reportó toda la experiencia vivida en torno al proyecto de aula, se esperaba que enseguida los grupos elaboraran un artículo con base en dicho reporte, que pudiera ser publicado. Es decir, un artículo que cumpliera con ciertas normas de calidad compartidas en la comunidad de educadores matemáticos, tanto relativas al contenido como a la forma.

Mediante esta actividad, el Programa pretendía que la experiencia de desarrollo profesional que los profesores vivenciaban les permitiera entre otras cosas, acercarse a prácticas y formas de relación e interacción propias de una comunidad profesional, como lo son: construir y compartir formas de comunicar que, en lo esencial, fueran acordes con las formas que acepta y utiliza la comunidad internacional; comunicar y socializar el trabajo realizado y sus resultados; y someter tal trabajo a la crítica de la comunidad y de esa manera validarlo.

Es usual que la cultura en la que se inscribe el trabajo del docente de matemáticas de nuestro medio apunte primordialmente a la expresión oral; no es frecuente que los profesores de matemáticas lean o escriban acerca de asuntos relativos al quehacer profesional; por lo tanto, es natural encontrar que no han desarrollado su habilidad para expresar por escrito sus ideas, para argumentar una tesis, para sostener su posición frente a asuntos específicos. Además, la producción de un artículo publicable, así sea a partir de un reporte que documenta lo sucedido en una experiencia inscrita en un programa de formación de docentes, implica grandes esfuerzos y habilidades de parte de los autores, donde se ha visto que concurren tanto problemas relativos a la experiencia misma como a la comunicación escrita.

Dado lo anterior se tenía la expectativa de que la actividad de escribir un artículo fuera una oportunidad para contribuir en aspectos puntuales de la formación profesional y personal de los profesores participantes, especialmente para quienes se están iniciando en el proceso de elaborar escritos académicos. Se intentaba así que la obligación de revisar y repasar la experiencia vivida en el proyecto de aula les posibilitara avanzar en: el autocuestionamiento crítico y su reflexión en torno a asuntos de la práctica docente; la clarificación de la experiencia objeto del relato y su consciencia de otros puntos relativos a ella; la interacción y colaboración con los profesores de su grupo y de otros grupos participantes en el Programa; la aceptación de comentarios críticos a su trabajo por parte de compañeros y colegas; la consideración crítica del trabajo de los demás grupos con el ánimo de aportarles; y la reconceptualización de su conocimiento matemático y didáctico en torno al tópico que enfocara la atención de su proyecto de aula.

Los profesores participantes se debían involucrar en esta actividad durante los tres meses siguientes a la terminación del proyecto de aula y a la entrega del reporte final. Para comenzar el proceso, iniciar a los profesores en la actividad de escribir un artículo académico y suministrar una guía de lo que se esperaba como producto, en el tercer seminario se discutieron algunas ideas acerca del sentido de elaborar un artículo y publicarlo (ver Taller 2 del Apéndice 3). En general, todos los profesores manifestaron ver la importancia de escribir y, aun más, de poder publicar un documento. Surgieron comentarios en los que se destacó la satisfacción de los autores por el logro personal, la reflexión que suscita en el autor, el aporte a la comunidad en términos de transmitir tanto fortalezas como debilidades, el enriquecimiento que puede significarle al lector para su actuar pedagógico, y la consideración del trabajo realizado como marco de referencia para trabajos futuros.

Así mismo, en este seminario se presentó un texto con pautas y recomendaciones, para ayudar a definir la estructura y el contenido del artículo, que fueron discutidas entre todos. A continuación se propuso a los profesores la tarea de leer un artículo (ver Taller 2 del Apéndice 3) —elaborado por profesores que participaron en la segunda versión de la estrategia y asociada a la cual hay un libro publicado—, con el propósito de proporcionar un ejemplo del tipo de documento que se esperaba y, sobre tal texto, hicieran el ejercicio de determinar la estructura y el contenido.

En la parte final de este seminario, los profesores desarrollaron la tarea de elaborar un esquema inicial de su artículo, en el que debían identificar la idea principal y la estructura, y los asuntos primordiales de cada una de las secciones establecidas. De la experiencia vivida, los autores podían escoger cuál iba a ser el centro del artículo y dar cuenta de diferentes aspectos, a su elección. Esta tarea se les dificultó a los profesores posiblemente porque la estructura que definieron no se ajustaba a la idea principal sobre la que querían trabajar, o porque el nivel de elaboración del trabajo realizado no les permitía precisar tales ideas, o porque el artículo que se leyó, motivó a los profesores a proponer para sus artículos estructuras similares que no necesariamente se ajustaban a las características del trabajo o las ideas y resultados que querían presentar.

Aunque, en principio, algunos plantearon como idea principal asuntos que durante el trabajo se habían destacado por la cantidad de tiempo dedicado o por su efecto en ellos mismos —como por ejemplo, su cuestionamiento acerca del conocimiento matemático con respecto a la proporcionalidad, o la diferencia del análisis realizado para las respuestas de los estudiantes—, a la hora de concretar las secciones y su contenido, casi todos los grupos terminaron por proponer artículos que dieran cuenta de la experiencia completa. A pesar de todo, los esquemas elaborados en el seminario fueron el punto de partida para el trabajo que los profesores desarrollaron en los siguientes meses.

Para continuar apoyando la elaboración de los artículos, los tutores se reunieron en dos o más ocasiones con cada uno de los grupos de profesores de cada institución para realizar asesorías personales. Cabe señalar que su realización se facilitó mucho más en el caso de las Escuelas Normales de Bogotá, Cundinamarca y Boyacá dada la mayor cercanía de los profesores de estas Normales a la sede permanente de los tutores. En este caso, se pudieron realizar al menos dos y en algunas ocasiones hasta cuatro reuniones de asesoría presencial con cada grupo de profesores. En cambio, en el caso de las Escuelas Normales de Antioquia, sólo fue posible la realización de una reunión presencial con cada grupo de profesores, dado que, para realizar la reunión, los tutores tenían que desplazarse a la ciudad de Medellín. Además, también para contribuir a esta actividad de escritura del artículo, se realizaron en varias ocasiones asesorías no presenciales de los tutores a los profesores, por medio del correo electrónico y el intercambio de documentos digitales.

La interacción de los tutores con los autores alrededor de la edición académica de los artículos no fue tan efectiva como en principio esperábamos; por ejemplo, con respecto a los comentarios que les enviábamos por el correo electrónico o por fax, con frecuencia tuvimos la sensación de que no eran bien entendidos dado que eran parcialmente respondidos o que los respondían en un sentido diferente al que sugeríamos los tutores para mejorar el artículo. Tal situación puede estar relacionada con la diferencia entre las visiones y las habilidades de los tutores y de los profesores. Visiones respecto a lo que es importante del trabajo, a lo que pueda significar un determinado hecho en la enseñanza o el aprendizaje de un tema, a la información que pueda proporcionar un resultado obtenido, etc. Habilidades relativas a la escritura de documentos académicos y a la definición de lo que puede ser importante resaltar en éstos. Hacia el final del proceso de interacción para la edición, los tutores adoptamos la estrategia de hacer pocos comentarios en cada interacción y muy puntuales, consistentes en preguntas concretas que aludían a los puntos del artículo que se percibían como deficientes; el escrito se modificaba entonces con las respuestas. Se subsanaron así algunos de los problemas de interpretación sobre las objeciones que hacíamos los tutores a los textos. Fue una lástima que la decisión de poner dicha estrategia en práctica hubiera surgido tan tarde.

Las versiones de los artículos que se lograron en conjunto con los profesores fueron posteriormente revisadas por los tutores con el propósito de dar los últimos toques para alcanzar el nivel de calidad exigido en una publicación académica. Se hicieron en consecuencia modificaciones en cuanto a la redacción, presentación y organización de la información, conservando las ideas de los profesores, así como los énfasis destacados por ellos. En algunos casos se adicionaron consideraciones que fueron discutidas con los profesores por el correo electrónico. Aun así, vale la pena aclarar que no necesariamente las versiones finales de los artículos están libres de problemas, en especial, de aquellas dificultades que se relacionan con el trabajo mismo de indagación que se llevó a cabo.

En general, en las distintas versiones de los artículos se presentaron dificultades con respecto a lo que es importante presentar en el texto; a las síntesis hechas que se quedan en la generalidad; a la expresión de información poco relevante como las sensaciones personales y de gusto acerca de la experiencia; a la estructura pobre y confusa, con pocas o demasiadas secciones no relacionadas entre sí y cuyos títulos muchas veces no corresponden a su contenido; a la forma poco clara y coherente de exponer la información; al uso dispar de los tiempos de los verbos; a la utilización de múltiples adjetivos sinónimos para calificar un mismo sustantivo; a la repetición de una palabra en una frase; al empleo de frases retóricas y estereotipadas y de aseveraciones que no se explican o justifican. No obstante, cabe anotar que los tutores consideramos que una diferencia entre estos documentos y los elaborados por profesores participantes en las versiones anteriores, se refiere al análisis de las respuestas de los estudiantes. Definitivamente esta labor se percibe como más cuidadosa y profunda en este libro.

Al revisar tanto las notas tomadas sobre las interacciones hechas como el producto final del proceso de edición, materializado en las versiones finales de los artículos que se publican en este libro, se ve que la oportunidad que se abrió para que los profesores pudieran reflexionar sobre el proceso vivido, reelaborar a posteriori su experiencia y los resultados de ella, y clarificarla, fue fructífera en algunos casos más que en otros; infortunadamente, incluso algunos grupos no produjeron el artículo requerido y, en consecuencia, no participaron del proceso completo de desarrollo profesional que se proponía en el Programa.

ELABORACIÓN DE UNA PROPUESTA PARA REALIZAR OTRO PROYECTO DE AULA

En las dos versiones anteriores de la implementación de la estrategia, al concluir con la escritura y publicación del artículo sobre el proyecto de aula realizado, muchos de los participantes manifestaron su interés de continuar avanzando en su desarrollo profesional por la ruta abierta en el programa, lo cual no siempre fue posible por no poder satsfacer la necesidad de seguir contando con un apoyo similar al que habían recibido de parte de los tutores —situación supeditada a involucrarse en otro programa o proyecto específico—.

Como era entonces probable que algo similar sucediera con los participantes del Programa y dado que los tutores también consideramos indispensable que reciban un apoyo externo para continuar avanzando en este proceso, vimos la pertinencia de incluir como tarea para la segunda fase del Programa, la elaboración de una propuesta para llevar a cabo otro proyecto de aula con nuestro apoyo.

En el tercer seminario, tras haber abierto el espacio para que los profesores expusieran sus opiniones al respecto de la experiencia vivida y mencionaran los aportes que les había proporcionado su participación en el Programa, planteamos como tarea la elaboración de la propuesta antes nombrada e invitamos a desarrollarla, señalando que era opcional[4] y que en su realización podrían tomar parte no sólo los profesores que habían participado en el Programa sino otros profesores de matemáticas de la institución. Para apoyar la elaboración de tal propuesta, los tutores ofrecimos llevar a cabo una reunión de hora y media en dos o más ocasiones con cada uno de los grupos de profesores de cada institución para realizar una asesoría.

El inicio del desarrollo de esta tarea se formalizó también en el tercer seminario con la realización de dos talleres que tuvieron lugar el último día del mismo. Uno de los talleres pretendía sugerir temas matemáticos puntuales que podrían ser objeto de proyectos de aula similares a los realizados; para ello, los tutores presentamos una colección de situaciones y problemas[5] y

---

4. Los profesores de ocho Escuelas se involucraron en la realización de esta tarea. Al concluir el Programa, "una empresa docente" presentó al Ministerio de Educación Nacional un documento que recoge las propuestas de los profesores e incluye una propuesta para la respectiva asesoría.
5. Algunos de estos problemas y situaciones fueron tomados de fuentes tales como la revista *Mathematics Teacher*, publicada en los Estados Unidos por el *National Council of Teachers of Mathematics* y las pruebas del TIMSS de 1997; otros, fueron elaborados por los tutores.

luego propusimos que el grupo de profesores de cada institución respondiera a una serie de preguntas con las cuales queríamos generar una discusión y definición en torno a algunos aspectos que se pudieran utilizar para esbozar un primer borrador de la nueva propuesta de proyecto de aula. El otro taller pretendía centrar la atención de los profesores en el tipo de información que es necesario incluir en una propuesta que pretende buscar que alguna entidad se interese en financiar el respectivo trabajo.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta última sección exponemos consideraciones con respecto a tres asuntos implicados en la experiencia de formación que hemos llevado a cabo. En primer lugar, nos referimos a algunas características de la estrategia que alienta las acciones realizadas en el Programa; en segundo lugar, reportamos algunos hechos o planteamientos importantes con respecto a la proporcionalidad, reconocidos en la implementación del Programa; y para terminar, damos cuenta de los logros del Programa en los profesores que participaron en la experiencia y en los estudiantes con quienes se implementaron los diseños; de los logros ocurridos en nosotros como tutores, creemos que da cuenta indirectamente el contenido de esta sección en donde hemos tratado de plasmar la consciencia y el conocimiento logrado con respecto a las posibilidades y limitaciones, debilidades y fortalezas de la estrategia que hemos venido afinando.

SOBRE ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRATEGIA DE DESARROLLO PROFESIONAL

La participación en el programa es un asunto institucional

La vivencia que hemos tenido al implementar esta versión de la estrategia nos permite ratificarnos en la importancia y pertinencia que hemos dado siempre a la participación institucional en un programa como este y, sobre todo, al compromiso que pueda generar el rector con sus profesores. Consideramos que de no haber tenido el apoyo de las instituciones, la cantidad de proyectos que habrían llegado a su final sería notablemente inferior. Sin embargo, creemos que en general, el apoyo institucional debería ser más decidido en términos tanto del tiempo que se da a los profesores dentro de su jornada laboral para que puedan trabajar en el desarrollo del proyecto, como de la presencia, seguimiento y realimentación que da la institución al proyecto de los profesores. En particular, creemos que los directivos-docentes debieran jugar un papel importante en la resolución de conflictos que a veces se presentan entre profesores, ocasionados por la falta de experiencia en el trabajo colaborativo. Por otro lado, aunque con seguridad hay diferentes formas de lograr el compromiso institucional para la participación en un programa como este, creemos que en la medida de lo posible tal compromiso debe comenzarse a buscar desde la convocatoria misma.

¿Tiene sentido pedir a los profesores el diseño de actividades para los estudiantes?

Aunque con algunas variantes, en las tres versiones de la estrategia hemos formulado la tarea de construir por escrito una secuencia de tareas que se pueda implementar en unas pocas sesiones de clase. En términos generales, la realización de esta tarea demanda de parte de los profesores un esfuerzo arduo y las producciones a las que llegan no necesariamente representan propuestas con la calidad óptima requerida para la enseñanza. Así que nos hemos preguntado por la pertinencia de la tarea y hemos imaginado por lo menos una alternativa a ella: ¿no será más adecuado presentarles y estudiar con ellos una secuencia que cumpla las condiciones sobre las que quisiéramos insistir?

En las discusiones que los tutores hemos adelantado para debatir tal inquietud, ha sido evidente la necesidad de mirar el asunto a la luz de la intencionalidad del programa; éste, de alguna manera, tiene un carácter remedial y su objetivo primordial consiste en generar oportunidades para que los participantes vivan una experiencia que les permita cuestionar su práctica y su conocimiento; bajo ninguna circunstancia pretendemos darles la impresión de que hay recetas para hacer diseño curricular, ni tampoco esperamos que la experiencia de desarrollo profesional que viven incida significativamente de manera inmediata sobre el aprendizaje de los estudiantes. Más bien, nos interesa tratar y discutir con los profesores, en torno a alguna producción de ellos —que muy probablemente refleja características importantes de su práctica en el aula—, sobre aspectos claves para la enseñanza como por ejemplo, la relevancia del logro de aprendizaje que pretenden con la secuencia, la pertinencia de las tareas y actividades propuestas para el logro que pretenden, la claridad e intención de las preguntas y tareas formuladas, las previsiones que hacen con relación a las respuestas y reacciones de los estudiantes. Suponemos que involucrarse en un proceso de refinamiento de sus producciones, que atienda a los comentarios críticos de los tutores puede ser más efectivo para lo que se pretende que destacar los aciertos de un diseño ya hecho.

Por tanto, vemos que la tarea es útil para lo que nos proponemos aunque probablemente haya detalles que convenga revisar y modificar. De hecho, en esta versión de la estrategia hicimos modificaciones que consideramos fueron acertadas; una de ellas se refiere al tema matemático sobre el que se centraron los proyectos de aula y otra tiene que ver con las actividades realizadas en el Programa para apoyar las acciones de observar y analizar resultados de parte de los profesores.

Todos los proyectos abordan el mismo tema matemático

Tratando de afinar detalles de la estrategia para lograr con más éxito que los participantes vivieran una experiencia que les impactara fuertemente en su conocimiento y consciencia acerca de aspectos específicos de las matemáticas escolares y de su didáctica, en esta versión, tal como se señaló antes, se impuso la condición de que todos los proyectos de aula abordaran algún tópico de un mismo tema matemático, determinado por nosotros. Tal como lo habíamos previsto, este cambio enriqueció las oportunidades de aportar de manera directa al proyecto de cada grupo de profesores en la medida en que todas las actividades realizadas en los seminarios tuvieron como centro algún aspecto del tema en cuestión.

Somos conscientes de que restringir así el tema para los proyectos de aula puede tener consecuencias no del todo favorables con respecto al interés genuino de los participantes y a sus posibilidades de sacar adelante el proyecto. Tal como sucedió con los docentes de primaria que inicialmente quisieron participar en el Programa, la restricción impuesta se constituyó en un problema para profesores que consideraron muy abstracto el contenido de los seminarios por razón de que allí se estudiaron algunas definiciones formales de la proporcionalidad directa e inversa; también vimos que la restricción puede ser una limitante fuerte para profesores que no han tenido la experiencia de enseñar el tema en cuestión pues carecen del respectivo conocimiento práctico. No obstante ver estas posibles consecuencias que podrían incidir negativamente en la permanencia de los profesores en el Programa, consideramos que es el costo que se debe pagar para que quienes decidan permanecer puedan sacar un mayor provecho de la experiencia por razón de los aportes que hace el Programa.

SOBRE EL TEMA DE LA PROPORCIONALIDAD

La naturaleza escolar de la razón y la proporción

Sin duda alguna, los conceptos de razón y proporción se muestran como unos de los más elusivos a la comprensión en la teoría de la proporcionalidad; con la intención de hacerlos comprensibles se recurre a la idea de medida (o cociente) para referirse a la razón y a la idea de igualdad entre medidas para la proporción. Al parecer, como lo señala Freudenthal (1983), la naturaleza misma de dichos conceptos genera tal carácter elusivo; él sostiene, por ejemplo, que hacer un tratamiento de la razón en términos de un cociente, un número o una medida (lo que se logra al identificar la razón "tres es a cuatro" con el fraccionario "tres cuartos") desvirtúa y desconoce la naturaleza misma del concepto. Para no desatender su naturaleza, la razón debería ser tratada como una relación y no como el resultado de una operación; así mismo, la proporción debería ser tratada como una relación entre relaciones y no como una igualdad entre resultados de operaciones (Guacaneme, 2001).

En la matemática escolar, en general, la razón se presenta como una división indicada, como un cociente exacto o como un operador multiplicativo. En cualquiera de los tres casos, el tratamiento que se hace de la razón termina por identificarla con un número: en el primer caso, por ejemplo, no se hace un trabajo que permita establecer cuándo dos razones son iguales o cuándo una es mayor que otra sin recurrir al resultado de la división; en el segundo, el cociente exacto es un número resultado de la división "implícita" en la razón; y, en el tercer caso, el operador multiplicativo termina por asimilarse a un número que al ser multiplicado por el consecuente genera como resultado el antecedente. Tanto por la forma de simbolización de dicho número (es decir, mediante el símbolo $\frac{a}{b}$) como por la manera de trabajo matemático con el mismo (por ejemplo, a través de la aplicación de los algoritmos de las operaciones o de propiedades de las relaciones), dicho número termina siendo un fraccionario. En este sentido, en la escuela las razones terminan trabajándose como los números fraccionarios, la proporción termina siendo una igualdad entre fraccionarios y el cálculo de la cuarta proporcional termina reduciéndose al problema de resolver la ecuación del estilo $a \times b = c \times x$; de esta manera se hace desaparecer el problema del carácter elusivo de la razón y la proporción, y con ello la naturaleza misma de tales conceptos. Quizá en un intento de reconocer la diferencia entre la naturaleza de los números y la naturaleza de las razones, y entre la igualdad entre números y la proporción como relación entre relaciones, al estructurar el marco curricular del TIMSS se vio la necesidad de definir un área temática específica para la proporcionalidad, diferente de la que se refería a la aritmética.

Desde nuestra perspectiva, la naturaleza de estos conceptos reside en el hecho de ser relaciones. Consideramos que una razón es una relación entre dos números, entre dos cantidades[6], o entre un número y una cantidad; en este sentido una razón no es un número y por tanto, no es un número fraccionario. En general, la razón —en tanto relación— no parece tener utilidad alguna si para ella no se pueden definir operaciones y relaciones; para verificar la anterior afirmación, piénsese en la utilidad que tendrían las razones "tres niños es a cuatro niñas" o "50km/h" sin que exista la posibilidad de compararlas u operarlas con otras razones. Consideramos que, por ejemplo, definir una relación entre razones le da vida y utilidad a la razón; a este respecto vale la pena pensar en que la proporción es una de tales relaciones y

6. Usamos el término "cantidades" en el sentido de Schwartz (1988). Desde esta perspectiva el resultado de un conteo (e.g., 3 lápices), o el resultado de una medición (e.g., 5 libras) son cantidades extensivas; por su parte las cantidades intensivas definen una cualidad y no una cantidad extensiva, como es el caso de "1000 pesos por libra" ($\frac{\$1000}{1\text{lb}}$ o \$1000/lb).

que ésta permite establecer cuándo dos elementos que conforman una razón guardan la misma relación que otros dos que configuran otra razón.

No obstante esta consideración acerca de la naturaleza de la razón y la proporción, aún falta por explorar las posibilidades reales de concretar diseños curriculares que propicien el aprendizaje escolar de tales conceptos y la utilidad específica de los mismos para resolver problemas específicos y para promover el desarrollo de habilidades y competencias. Esta tarea compromete preguntas para las cuales aún no tenemos una respuesta contundente, tales como: ¿cómo es posible establecer si dos razones son equivalentes sin recurrir a igualar las medidas asociadas a aquéllas?, ¿qué tipo de problemas podrían resolverse con las razones y proporciones (en tanto relaciones) que no se puedan resolver con los números racionales, o con los cocientes o fracciones de reales?

Proporcionalidad en lo cuantitativo no numérico: un objeto extraño en la escuela

En la mayoría de los tratamientos escolares sobre la proporcionalidad aparece un trabajo con números y con cantidades adjetivadas que representan los valores de las magnitudes relacionadas. Con estos objetos es relativamente fácil elaborar tablas, hacer razones, calcular cocientes exactos o productos, establecer el resultado de aplicar una relación de orden, elaborar gráficas cartesianas de la función descrita entre las magnitudes, etc. Sin embargo, consideramos que estos tratamientos sólo atienden al carácter cuantitativo numérico de la proporcionalidad y, de este modo, dejan de lado su carácter cuantitativo no numérico.

Para expresar lo que es este carácter nada mejor que recurrir a la geometría no métrica. Allí es posible trabajar con segmentos (o más precisamente con la longitud del segmento[7]), con superficies, con volúmenes, con amplitudes, sin tener que recurrir a los números (es decir, a la expresión numérica de la cantidad de magnitud geométrica). Allí, por ejemplo, es posible realizar sumas de longitudes de segmentos, de amplitudes de ángulos y de superficies de regiones de manera geométrica no métrica, como se puede observar en la Figura Nº 1. En ésta se han sumado las longitudes de los segmentos *a* y *b*, ubicando de manera colineal, segmentos respectivamente congruentes con ellos, uno a continuación del otro. Para sumar las amplitudes de los ángulos se ha hecho corresponder uno de los lados de un ángulo congruente con el ángulo *c* con uno de los de un ángulo congruente con el ángulo *d*. Para sumar las superficies de las regiones cuadradas *e* y *f* se han dispuesto convenientemente las regiones para formar con dos de sus lados los catetos de un triángulo, se ha construido su hipotenusa y sobre ésta un cuadrado que defi-

7. La longitud del segmento es diferente de la cantidad de longitud del segmento; esta última es sencillamente la medida (por ejemplo, 3 centímetros). De manera similar, la amplitud del ángulo es diferente de la medida, o la superficie de una región es diferente del área.

ne la región cuadrada suma de las dos iniciales, es decir se ha hecho uso del teorema de Pitágoras.

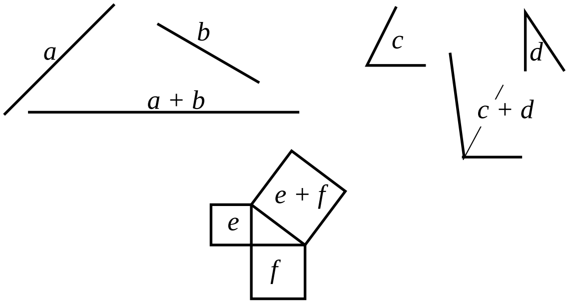


Figura Nº 1. Sumas de longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos y superficies de regiones cuadradas

Entre estas longitudes, amplitudes y superficies se pueden definir razones, establecer proporciones y verificar la existencia de proporcionalidad sin recurrir a sus medidas. Por ejemplo, se podría desarrollar un trabajo de proporcionalidad geométrica con los segmentos de tal suerte que sea posible establecer razones entre las longitudes de los segmentos, se puedan verificar si dos razones entre las longitudes de los segmentos forman una proporción, si dos conjuntos de longitudes de segmentos son proporcionales, etc. Para ilustrar lo anterior se podría representar una razón entre dos longitudes de segmentos ubicando uno de los segmentos horizontalmente y el otro verticalmente de tal suerte que el extremo derecho del primero coincida con el inferior del segundo. Para verificar que dos razones entre longitudes de segmentos son iguales se podría hacer coincidir los extremos izquierdos de los segmentos horizontales y verificar si los extremos superiores son colineales con aquéllos. Esta manera de establecer la proporción permitiría construir la cuarta proporcional a tres segmentos dados en un orden. En la Figura Nº 2 hemos representado cuatro segmentos, dos razones entre las longitudes de éstos y la proporción de las dos razones.

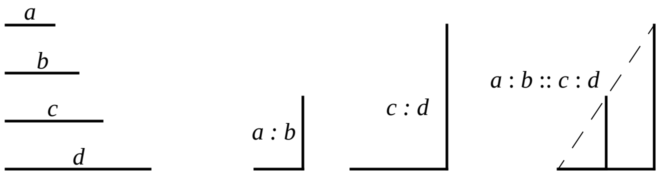


Figura Nº 2. Razones entre longitudes de segmentos y proporción entre ellas

Los libros V y VI de *Los Elementos* de Euclides presentan esta mirada cuantitativa no numérica. Creemos que su estudio permitiría iniciar un proceso que pueda culminar en la elaboración de propuestas de aula para abordar con los estudiantes un aspecto normalmente no estudiado en la escuela.

La correlación: ¿una temática protagonista en la proporcionalidad?
A comienzos de la década de los años noventa, con la propuesta de reforma curricular promovida por el Ministerio de Educación Nacional, se le reconoció un lugar importante al estudio de la correlación en la proporcionalidad. Antes de tal propuesta, los libros de texto apenas hacían una alusión al "aumento" (o disminución) simultáneo de las dos magnitudes como condición para establecer que las magnitudes son directamente proporcionales (ver, por ejemplo, Londoño y Bedoya, 1988). Después de la divulgación de los documentos que concretaban pedagógicamente tal propuesta (MEN, 1989), los libros de texto incorporan definiciones de correlación directa e inversa y proponen la identificación del tipo de correlación como una de las dos condiciones para establecer el tipo de proporcionalidad; por ejemplo, Londoño, Guarín y Bedoya (1993) presentan las siguientes definiciones:

> Dos magnitudes están *correlacionadas directamente* si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra también aumenta o disminuye. (p. 245)
>
> Dos magnitudes están *correlacionadas inversamente* si al aumentar (o disminuir) una de ellas, la otra disminuye (o aumenta). (p. 256)

Consideramos que este nuevo lugar de la correlación en la teoría de la proporcionalidad hace que persista y se acentúe un error conceptual que preexiste a la propuesta de reforma curricular mencionada. Además, creemos que el tratamiento didáctico de la correlación parece dejar de lado aspectos interesantes. Abordemos, de manera breve, cada uno de estos hechos.

Un error conceptual en la implicación entre correlación y proporcionalidad. Al establecer que la proporcionalidad directa entre dos magnitudes relacionadas se garantiza a través de verificar que las magnitudes están directamente correlacionadas y que es constante el cociente entre los valores correspondientes, se dejan de lado relaciones que siendo de proporcionalidad directa no implican, ni son implicadas por, una correlación directa. Para explicar lo anterior nos apoyamos en la siguiente definición de proporcionalidad directa recapitulada de un texto de análisis algebraico que presenta una teoría de la proporcionalidad (De Trocóniz y Belda, 1959):

> Dos magnitudes son proporcionales o directamente proporcionales, si sus cantidades se corresponden biunívocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.
> Designemos por $a, b, c, \dots$ las cantidades de la *primera* magnitud y por $a', b', c', \dots$ las cantidades homólogas o correspondientes en la

> *segunda* magnitud. Entonces:
> i. Al decir que las cantidades $a, b, c, \ldots$ se corresponden *ordenadamente* queremos indicar que si las cantidades se suceden en cierto sentido (por ejemplo $a < c < b < \ldots$), lo mismo debe ocurrir a las cantidades $a', b', c', \ldots$ (o sea $a' < c' < b' < \ldots$ o bien $a' > c' > b' > \ldots$).
> ii. La correspondencia en la *igualdad* exige que si $a = b$ entonces también $a' = b'$.
> iii. Por último la correspondencia en la suma exige que si $c = a + b$, sea también $c' = a' + b'$.

Al interpretar esta definición, sabiendo que los autores previamente han establecido que se están refiriendo a magnitudes continuas no necesariamente absolutas (es decir, que pueden ser relativas)[8], se deduce que se podrían tener dos magnitudes relacionadas a través de una función lineal decreciente que sean directamente proporcionales. En la Figura Nº 3 se muestra una gráfica de una función que satisface las condiciones de la definición.

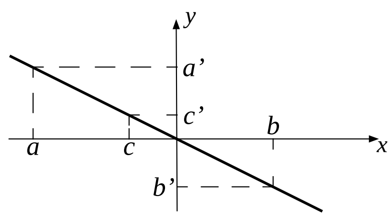


Figura Nº 3. Gráfica de una función de proporcionalidad directa decreciente

Desde nuestra perspectiva, en las matemáticas escolares se ha difundido la idea de que la proporcionalidad directa implica y es implicada por la correlación directa, pues se han considerado, de manera exclusiva, magnitudes absolutas, es decir magnitudes para las cuales, los valores son exclusivamente positivos o cero. Para este tipo de magnitudes es imposible tener una función que sea a la vez decreciente y satisfaga las demás condiciones que impone la proporcionalidad directa. Sin embargo, al ampliar el dominio de las magnitudes y considerar magnitudes relativas, como se mostró antes, sí es posible encontrar funciones decrecientes directamente proporcionales.

El problema que aún está por resolver es que no parece ser fácil encontrar magnitudes relativas que puedan ser trabajadas escolarmente para iden-

8. Las magnitudes absolutas no admiten valores negativos en tanto que las relativas sí. De esta manera un conjunto de segmentos tiene asociada, a través de considerar su longitud, una magnitud absoluta; pero un conjunto de segmentos orientados tiene asociada, a través de considerar su longitud y su sentido, una magnitud relativa. Un ejemplo similar se podría plantear si se contrasta un conjunto de ángulos con uno de ángulos orientados.

tificar y estudiar allí relaciones de proporcionalidad directa que sean decrecientes. Estamos a la búsqueda de tales magnitudes y por ahora sólo hemos podido imaginarnos que la relación que existe entre la amplitud de los ángulos centrales dirigidos y la longitud de arco de la circunferencia determinada por estos ángulos (tomando un radio fijo) comportaría una relación de proporcionalidad directa decreciente para los valores negativos de la amplitud de los ángulos y una relación de proporcionalidad directa creciente para los valores positivos de los ángulos, pero que mirada en todo su dominio de variación no comportaría una proporcionalidad directa.

De manera similar a lo comentado antes para la proporcionalidad directa podemos decir que una relación de proporcionalidad inversa no es implicada, ni debe implicar necesariamente, una correlación inversa. Consideramos que en este caso, también, el trabajo exclusivo con magnitudes absolutas en el estudio de la proporcionalidad ha generado que escolarmente se hayan difundido tales implicaciones entre correlación inversa y proporcionalidad inversa. Creemos que podrían darse situaciones en las que al incluir magnitudes relativas se podría tener una relación de proporcionalidad inversa en donde la función fuera creciente, como la mostrada en la Figura Nº 4. El problema consiste, entonces, en identificar magnitudes relativas que estén relacionadas de tal manera y que puedan trabajarse escolarmente.

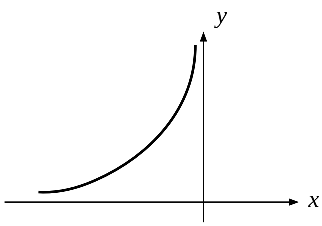


Figura Nº 4. Gráfica de una función de proporcionalidad inversa creciente

Quizá, si se logran determinar situaciones que relacionen magnitudes relativas y que definan la existencia de relaciones directa o inversamente proporcionales, adquiera un poco más de sentido estudiar la proporcionalidad después de haber estudiado los números enteros y los números racionales, pues estos números constituirían tanto un referente aritmético para tales situaciones, como una herramienta para abordarlas desde el punto de vista cuantitativo numérico. Por ahora, los enteros y los racionales negativos no se involucran en el estudio escolar de la proporcionalidad.

Un tratamiento didáctico limitado de la correlación. Creemos que en la escuela el tratamiento que se hace de la correlación es bastante limitado. Para el caso de la correlación directa, en algunas ocasiones las tareas que se les proponen a los estudiantes no van más allá de exigirles que adviertan que en una situación en la que se relacionan dos magnitudes, los valores de la primera están ordenados de menor a mayor, y afirmen que "la magnitud crece"; que luego adviertan que los valores de la segunda magnitud también están ordenados de menor a mayor y que hagan la misma afirmación; y que afirmen, en consecuencia, que "las dos magnitudes crecen" o que "a medida que una magnitud crece, la otra también lo hace", de lo que se concluiría que las magnitudes exhiben una correlación directa. Desde esta perspectiva, la correlación parece un asunto fácil de enseñar y aprender.

En contraste, consideramos que el reconocimiento y enunciación del tipo de correlación es un asunto complejo, cuya complejidad puede haber pasado desapercibida en la escuela[9]. Para ilustrar lo anterior, veamos lo que podría estar involucrado en la identificación del tipo de correlación, tanto en una tabla de datos (que presente valores correspondientes de las dos magnitudes, no necesariamente ordenados) como en una gráfica (que utiliza un sistema de representación diferente al cartesiano).

Desde nuestra perspectiva, la identificación del tipo de correlación expresada en una tabla que muestra algunos valores correspondientes no ordenados de las cantidades de X y Y, puede implicar: establecer una comparación entre parejas de datos de una de las cantidades (v.g., X, luego comparar ésta con la comparación de la pareja de datos correspondientes de la otra cantidad, y finalmente establecer si el resultado de esta última es el mismo para cualquier pareja de parejas de valores considerados. Así, el procedimiento para determinar que en una tabla se expresa una correlación inversa entre los datos, podría ser:

(i) comparar, a través de la relación "$<$", los dos primeros valores de las cantidades de X para establecer que $x_1 < x_2$;

(ii) comparar, entre sí y con la misma relación, los dos valores de las cantidades de Y correspondientes para establecer que $y_2 < y_1$;

(iii) comparar estos dos resultados para determinar que el orden establecido para los valores de X es diferente u "opuesto" al de los valores de Y;

(iv) realizar la comparación descrita en el numeral (i) para la siguiente pareja de datos de la tabla ($x_3 < x_2$), la comparación descrita en (ii) para sus valores correspondientes ($y_2 < y_3$), y la comparación enunciada en (iii) para los resultados de estas dos;

9. Además, esta complejidad tiene otra faceta que no consideramos aquí y que se refiere al significado de la correlación en el contexto de la estadística.

(v) comparar los resultados obtenidos al aplicar las comparaciones enunciadas en el numeral (iii), para determinar que en ambos casos el orden establecido para los valores de X es diferente u “opuesto” al de los valores de Y;

(vi) realizar los pasos (iv) y (v) para las demás parejas y comparaciones obtenidas, para verificar que en todas el orden establecido para los valores de X es diferente u “opuesto” al de los valores de Y.

En la Figura Nº 5 se esquematiza, para el caso de una tabla compuesta por tres parejas de datos, el procedimiento descrito anteriormente, destacando las diferentes comparaciones implicadas.

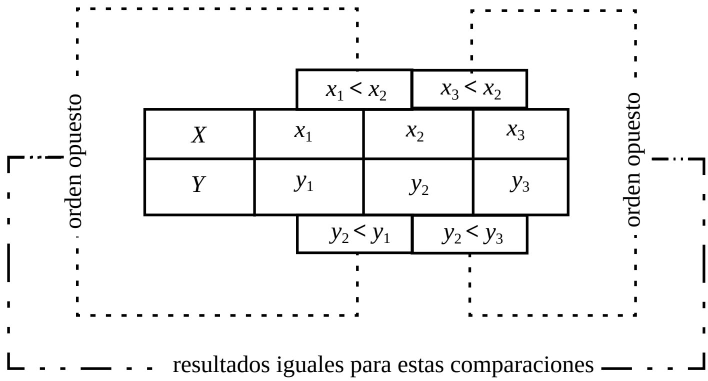


Figura Nº 5. Procedimiento y comparaciones para determinar una correlación inversa entre dos magnitudes

En suma, una tabla en la cual ni los valores x_i ni los y_i están ordenados, exhibe una correlación directa si las comparaciones se corresponden, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces también $y_i < y_{i+1}$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces también $y_{i+1} < y_i$, en tanto que muestra una correlación inversa si las comparaciones son opuestas, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces $y_{i+1} < y_i$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces $y_i < y_{i+1}$.[10]

10. Desde esta perspectiva no hemos podido identificar diferencias sustanciales entre las definiciones de correlación directa e inversa y las del carácter creciente o decreciente de una función, respectivamente.

Ahora abordemos el reconocimiento del tipo de correlación en la representación gráfica cartesiana de las funciones. Para la mayoría de los profesores de matemáticas reconocer si la gráfica de una función representa una función creciente o decreciente es una tarea que no reviste exigencia intelectual alguna; consideramos que esto se debe a que ellos han adquirido destreza y dominio de la representación gráfica, lo que les hace competentes para una tarea tal. Sin embargo, los estudiantes pueden no haber desarrollado los mismos conocimientos frente a la representación gráfica y tener serias dificultades para identificar si una función es creciente o decreciente con sólo mirar su gráfica. Para ilustrar lo que les puede suceder a los estudiantes, basta con observar las gráficas de dos funciones reportadas en la Figura Nº 6 e intentar contestar, después de un golpe de vista, cuál de las funciones afines representadas es creciente y cuál decreciente.

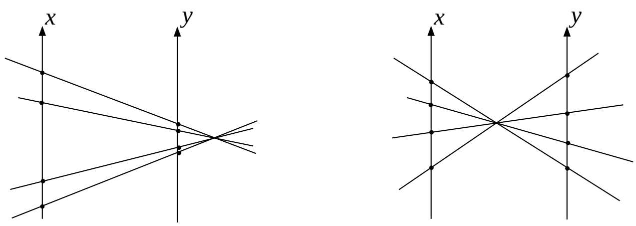


Figura Nº 6. ¿Funciones crecientes o decrecientes?

Es posible que el lector no haya reconocido que la primera gráfica representa una función afín creciente y la segunda una función afín decreciente, aunque de seguro sí advirtió que el sistema de representación no es cartesiano. En el sistema utilizado —sugerido por Arcavi y Nachmias (1989)— los dos ejes son paralelos y cada pareja de datos de la función se representa mediante un segmento rectilíneo definido por los puntos correspondientes a los valores numéricos de las componentes de la pareja ordenada.

La reflexión sobre este ejercicio de lectura de una información sobre la función en su representación gráfica puede llevar a reconocer que es necesario aprender a interpretar tal información y que ello implica un proceso de aprendizaje. Para el caso de las representaciones cartesianas, usualmente en la escuela, dicho proceso no se realiza con la consciencia suficiente de parte del profesor y del estudiante para que permita lograr un aprendizaje similar al que exhibe el profesor ante un ejercicio como el anterior en el sistema ortogonal.

SOBRE LOS LOGROS DEL PROGRAMA

En los profesores participantes

El propósito principal del Programa estaba relacionado con el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas participantes y no directamente con el aprendizaje de los estudiantes; sin embargo, es claro que tal intención tiene sentido pensando en que la formación que los profesores alcancen, se refleje en su enseñanza y por consiguiente se traduzca en avances en el aprendizaje de sus estudiantes.

Aunque se pudieron detectar algunos logros en los profesores, creemos que esto es apenas el inicio de un proceso —que puede o no proseguir dependiendo de los profesores mismos y de sus circunstancias laborales— cuyos efectos serían visibles a largo plazo. Percibimos así, la diferencia que hay entre una transformación temporal y puntual de la enseñanza, originada por el requisito de introducir una innovación para una o dos sesiones de clase, en la que además se contó con el apoyo y presión de asesores externos, y la transformación permanente de la práctica para enseñar cualquier tópico matemático.

El trabajo matemático con foco en un mismo tema para todos los profesores participantes, posibilitó que se hiciera un recuento de cómo se enseña éste en la escuela y los profesores se hicieran conscientes de esto, tuvieran acceso a distintas perspectivas del mismo, estudiaran y compararan diversas definiciones de la proporcionalidad e identificaran con más claridad sus propiedades, y trabajaran con problemas variados las distinciones entre los procesos de solución y el razonamiento implicado en éstos. Pero en particular, dicho trabajo permitió que los profesores cuestionaran su conocimiento matemático al respecto y, de alguna manera, lo modificaran.

El planteamiento de tareas y formulación de preguntas para configurar los talleres que se implementarían con los alumnos fue motivo de frecuentes discusiones y reflexiones entre los profesores. El ejercicio previo de establecer las posibles respuestas de los estudiantes contribuyó a ver la necesidad de fijar intenciones concretas para cada pregunta, a mirar su coherencia y pertinencia para lo que se quería, a determinar su interpretación probable por parte de los alumnos. En consecuencia, los talleres fueron sometidos a constantes modificaciones hasta producir la versión que se implementó, la cual según los mismos profesores todavía puede ser mejorada. Se generó de este modo en los profesores, una consciencia hacia la manera en que formulan las preguntas, y con respecto al sentido y propósito de las mismas.

También hubo un reconocimiento de parte de los profesores con relación a la diferencia involucrada en el proceso de observación, análisis e interpretación de las respuestas de los estudiantes que se llevó a cabo. Para empezar, el intento de mirar en las respuestas evidencias distintas a si son correctas o no, condujo a los profesores a ver cosas que antes pasaban por alto; por ejemplo, detectaron diferencias sutiles en los procedimientos aditivos y multiplicativos usados por los estudiantes, que les proporcionaron información sobre el razonamiento matemático utilizado. De otro lado, la obligación de establecer qué tipo de respuestas pueden indicar si los estudiantes lograron lo que se pretendía con las tareas, hizo que los profesores vieran lo que es relevante como indicio para esto y que muchas veces no es suficiente una respuesta adecuada como muestra de aprendizaje y que se requiere recoger mucha y variada información.

La necesidad de escribir las diversas versiones de los documentos solicitados en el Programa (reporte del proyecto de indagación, artículo, propuesta), favoreció en los profesores un avance al respecto en varios sentidos. Por un lado, se rompió la resistencia inicial a escribir que está instalada en la cultura de tantos docentes. Pero por otro lado, el proceso de elaborar un documento académico les permitió conocer requisitos mínimos para éste relativos a su estructura, presentación y redacción de la información, conexión y pertinencia de las ideas, uso de ideas de otros autores, etc. Es así como los documentos finales de la mayoría de los grupos reflejan cambios importantes con respecto a las versiones previas y denotan el esfuerzo por tener en cuenta los aspectos señalados.

En muchos de los grupos de profesores se evidenció un trabajo colaborativo fuerte. El Programa creó un espacio para compartir labores que usualmente en la institución se realizan de manera individual como la planeación y la evaluación de clases, pero también para conocer las posiciones, visiones y vivencias de cada profesor. Además, se establecieron relaciones personales cercanas que no se tenían y varios de estos grupos se consolidaron como un equipo donde se logró gran integración y dedicación, incluso en horarios por fuera de la jornada laboral. De acuerdo a reconocimientos expresos de estos mismos profesores han seguido trabajando de esta manera en otras actividades. No obstante, en dos de los grupos la situación fue contraria. En uno de ellos, los profesores no llegaron a entenderse y trabajaron siempre por separado; en el otro, aunque en principio se formó un grupo sólido que trabajó con empeño, al final las diferencias personales lo disolvieron y esto impidió que terminaran el artículo y la propuesta.

El haber identificado en varios de los profesores estos indicios de cuestionamiento, consciencia y reconocimiento con relación a aspectos de su práctica, alienta la posibilidad de que sean el motor para llevarlos a continuar en este camino, tal y como se ha visto en el caso de muchos profesores[11].

11. En particular, está el caso de los profesores de matemáticas de la Escuela Normal Superior María Montessori de Bogotá, quienes participaron en este Programa; ellos participaron también en la primera versión de la estrategia y han sido parte de otros programas de formación permanente realizados por “una empresa docente”. Su asiduo involucramiento en estos espacios muestra su interés en avanzar de manera constante en su desarrollo profesional.

En los estudiantes

No obstante que los resultados de los estudiantes al trabajar en los talleres diseñados en los proyectos de aula, muestran respuestas que coinciden con las esperadas y pueden ser indicios de logros en ellos, no es posible asegurar que haya habido un aprendizaje. Se necesitaría para esto por un lado, que los profesores hubieran dedicado más tiempo con los estudiantes para trabajar los tópicos tratados y les hubieran propuesto otras tareas distintas; por otro lado, se requeriría que hubieran propiciado oportunidades adicionales en las que los estudiantes hubieran podido ampliar y explicar sus respuestas y los profesores hubieran podido explorar y evaluar más detenidamente tales respuestas.

Además otro hecho que no contribuye a determinar el aprendizaje de los estudiantes, es la dificultad común a los trabajos de los profesores —no sólo de este Programa sino de todos los que hemos realizado— para observar de forma sistemática aspectos relevantes de las respuestas, que proporcionen información acerca del alcance de las intenciones buscadas. Como ya se dijo, y tal como se puede ver en los artículos de este libro, en este Programa el trabajar con un único tema matemático que facilitara la identificación de los indicios a mirar en las respuestas, y el acompañamiento cercano que se hizo a los profesores, posibilitó que los profesores ahondaran en el análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes, y en particular ayudó a que su atención no se centrará en lo correcto o incorrecto de las respuestas o en el gusto de los estudiantes por las tareas. Sin embargo, este análisis llevó a establecer en muchos casos que las tareas y preguntas propuestas no eran suficientes, pertinentes o adecuadas para las intenciones fijadas y por tanto no era coherente esperar el aprendizaje previsto para ellas.

REFERENCIAS

Arcavi, A. y Nachmias, R. (1989). Re-exploring familiar concepts with a new representation. En *Proceedings of the 13th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 74-84). París.

De Trocóniz, A. y Belda, E. (1959). *Análisis Algebraico*. Bilbao: Talleres Gráficos Ordica.

Díaz, C., Alvarez, J., Torres, A. y Guacaneme, E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Fiol, M. y Fortuny, J.V. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Freudenthal, H. (1983). Ratio and proportionality. En *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

Londoño, N., Guarín, H. y Bedoya, H. (1993). *Dimensión Matemática 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

MEN (1989). *Programas de matemáticas. Reforma curricular. Grado séptimo.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Perry, P., Valero, P. y Gómez, P. (1996). La problemática de las matemáticas escolares desde una perspectiva institucional. En P. Gómez y P. Perry (Eds.), *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores* (pp. 3-54). Bogotá: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Valero, P., Perry, P., Castro, M. Gómez, P. y Agudelo, C. (1998). Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares. En P. Perry (Ed.), *Experiencias de desarrollo profesional en matemáticas. Un apoyo para la reforma en la escuela secundaria* (pp. 3-38). Bogotá: una empresa docente.

Patricia Perry
Edgar Guacaneme
Felipe Fernández
Luisa Andrade
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
Tel.: 339 49 49 ext. 2717

APÉNDICE 1
TALLERES DEL PRIMER SEMINARIO

TALLER 1. RUTAS DE ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Intencionalidad. Con este taller se pretende establecer dificultades docentes en la enseñanza de la proporcionalidad, en particular, en la enseñanza de la regla de tres.

Tareas de la primera parte. En grupos de profesores de una misma institución realicen por escrito las siguientes tareas, para lo cual disponen de 45 minutos.

1) Describan la ruta pedagógica (orden temático, relaciones entre temas, tipos de tareas propuestas, etc.) que utilizan en la institución para enseñar proporcionalidad a sus estudiantes.
2) En la ruta descrita, identifiquen los lugares en los que como profesores han evidenciado problemas propios y den cuenta de tales problemas.
3) Para alguno de los problemas señalados expliquen qué han hecho para intentar solucionarlo y qué han logrado con ello.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en una plenaria, para la que se cuenta con 45 minutos.

Tareas de la segunda parte. En grupos de profesores de una misma institución realicen por escrito las siguientes tareas, para lo cual disponen de 45 minutos.

4) Describan la ruta pedagógica (orden temático, relaciones entre temas, tipos de tareas propuestas, etc.) que usan en la institución para enseñar la regla de tres.
5) En la ruta descrita, identifiquen los lugares en los que como profesores han evidenciado problemas propios y den cuenta de tales problemas.
6) Para alguno de los problemas señalados expliquen qué han hecho para intentar solucionarlo y qué han logrado con ello.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en una plenaria, para la que se cuenta con 45 minutos.

TALLER 2. CONCEPCIONES SOBRE LA PROPORCIONALIDAD

Intencionalidad. Este taller pretende propiciar un ambiente de exploración y explicitación de las concepciones de los profesores acerca de la proporcionalidad.

Tareas. En grupos de cuatro personas realicen por escrito las siguientes tareas, para lo cual disponen de 45 minutos.

1) Formulen una situación que involucre proporcionalidad directa.
2) Expliquen por qué consideran que es una situación de proporcionalidad directa.
3) Formulen una situación que involucre proporcionalidad inversa.
4) Expliquen por qué consideran que es una situación de proporcionalidad inversa.
5) Describan por qué consideran que ambas situaciones son de proporcionalidad.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en una plenaria, para la que se cuenta con 45 minutos.

TALLER 3. PUESTA A PRUEBA DE LAS DEFINICIONES

Intencionalidad. El taller pretende ofrecer un conjunto de situaciones a través de las cuales los profesores puedan cuestionar sus “definiciones” de proporcionalidad.

Tareas. En grupos de cuatro personas realicen por escrito las siguientes tareas, para lo que disponen de 1 hora.

1) Describan un grupo de criterios que les permitan determinar cuándo una situación es de proporcionalidad directa.
2) Describan un grupo de criterios que les permitan determinar cuándo una situación es de proporcionalidad inversa.
3) Determinen cuáles de las situaciones de proporcionalidad (ver situaciones A a E al final del taller) satisfacen uno u otro de los grupos de criterios establecidos anteriormente.
4) Si existen situaciones que no satisfacen alguno de los grupos de criterios, expliciten cuáles criterios no se cumplen. Justifiquen por qué siendo estas situaciones de proporcionalidad no satisfacen ninguno de los grupos de criterios.
5) Si lo consideran necesario, replanteen los grupos de criterios para que todas las situaciones anteriores puedan ser clasificadas como de proporcionalidad directa o de proporcionalidad inversa.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en una plenaria para la que se cuenta con 75 minutos.

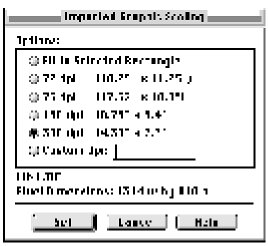
Situaciones de proporcionalidad

Situación A

Segmento	Medida
	7
	3
	9
	2

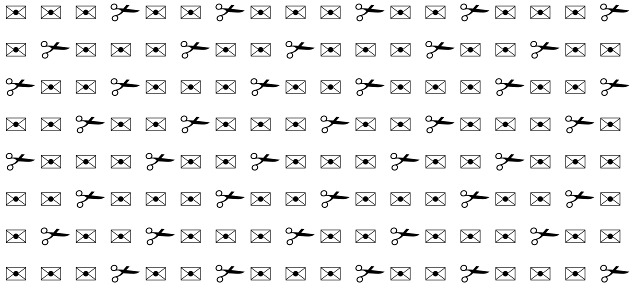
Situación B

La siguiente ventana aparece cuando en un editor de texto se quiere importar un archivo gráfico; a través de ésta se selecciona el tamaño del gráfico en el documento.

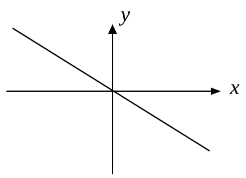


Situación C

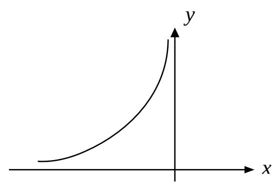
La siguiente situación representa una relación entre el número de tijeras y el número de sobres. Ésta se observa al construir rectángulos horizontales o verticales que contengan un número de íconos múltiplo de 7.



Situación D



Situación E



TALLER 4. ESTUDIO DE ALGUNAS DEFINICIONES FORMALES

Intencionalidad. A través del trabajo con definiciones formales de proporcionalidad se pretende que los profesores contrasten sus "definiciones".

Tareas. En grupos de cuatro personas realicen las siguientes tareas, para lo cual se dispone de 1 hora y media:

1) Lean las siguientes definiciones, teoremas y propiedades, relacionados con la proporcionalidad directa.

Definición 1 (PD). Dos magnitudes son proporcionales o **directamente proporcionales**, si sus cantidades se corresponden biunívocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.
Designemos por $a, b, c, \ldots$ las cantidades de la *primera* magnitud y por $a', b', c', \ldots$ las cantidades homólogas o correspondientes en la *segunda* magnitud. Entonces:

- i Al decir que las cantidades $a, b, c, \ldots$ se corresponden *ordenadamente* queremos indicar que si las cantidades se suceden en cierto sentido (por ejemplo $a < c < b < \ldots$), lo mismo debe ocurrir a las $a', b', c', \ldots$ (o sea $a' < c' < b' < \ldots$ o bien $a' > c' > b' > \ldots$).
- ii La correspondencia en la *igualdad* exige que si $a = b$ sea también $a' = b'$.
- iii Por último la correspondencia en la suma exige que si $c = a + b$, sea también $c' = a' + b'$.

Definición 2 (PD). Una aplicación f de E en F es una relación de proporcionalidad si existe un número k tal que $\begin{array}{l} f: \text{'E} \rightarrow F \\ x \rightarrow k \cdot x \end{array}$, o en otras palabras, si existe un número k, tal que la imagen mediante f de todo elemento x del dominio E es igual a $k \cdot x$.

Definición 3 (PD). Diremos que dos magnitudes absolutas M y N son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo $f: \text{M} \rightarrow N$ entre sus cantidades tal que:

i Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$,

ii $f(a+b) = f(a) + f(b)$, y,

iii Si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$. ($e$ es la unidad de M).

Teorema 1 (PD). Las cantidades de una magnitud y sus medidas, respecto de la misma unidad, se corresponden en la suma; como además la correspondencia entre las cantidades y sus medidas es ordenada, podemos afirmar que *las cantidades de una magnitud son proporcionales a sus medidas.*

Teorema 2 (PD) (ligado a la definición 1). Los siguientes resultados, todos ellos equivalentes, se conocen como el **teorema fundamental de la proporcionalidad directa**.

i *Las medidas de cantidades correspondientes de dos magnitudes proporcionales, con unidades correspondientes, son iguales*. Si $a = \mu \cdot b$ entonces $a' = \mu \cdot b'$.

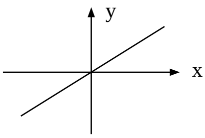
ii *En dos magnitudes proporcionales, la razón de dos cantidades de la primera magnitud es igual a la razón de las dos cantidades correspondientes en la otra*. Así: $a:b = a':b'$.

iii Si $a = \mu \cdot b$ ó $b = \frac{a}{\mu}$, también es $a' = \mu \cdot b'$ ó $b' = \frac{a'}{\mu}$, lo cual se puede expresar así: *Si dos magnitudes son proporcionales, al producto o cociente de una cantidad de una de ellas por un número, corresponde el producto o cociente de la cantidad homóloga por el mismo número*.

Propiedades (PD) (ligadas a la definición 2)

- i La imagen de la unidad es igual al coeficiente de proporcionalidad.
- ii Si y es la imagen de x, entonces el coeficiente de proporcionalidad es igual a $\frac{y}{x}$.
- iii Si x es multiplicado por a, su imagen es multiplicada por a.
- iv La imagen de una suma es igual a la suma de las imágenes.
- v Si y_1 es la imagen de x_1 y y_2 es la imagen de x_2, entonces $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$.

2) En cada una de las siguientes situaciones de proporcionalidad directa, interprete las anteriores definiciones, teoremas y propiedades. Reporten por escrito las interpretaciones logradas.

	$f:\Re \quad \Re$ tal que $x \to f(x) = m \cdot x$ donde $m \in \Re - \{0\}$
Situación 1	*Situación 2*

3) Determine las semejanzas y diferencias de las definiciones, teoremas y propiedades, con el respectivo grupo de criterios definido en el taller anterior.

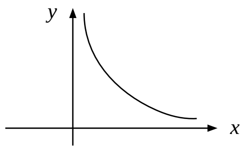
4) Lean la siguiente definición y teorema relacionados con la proporcionalidad inversa.

Definición 1 (PI). Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si sus cantidades se corresponde biunívoca y ordenadamente, y además son tales que al producto de una cantidad de ellas por un número entero, le corresponde el cociente de la cantidad homóloga a aquélla por el mismo número.

Teorema (PI). Los enunciados siguientes expresan, en dos formas equivalentes, el **teorema fundamental de la proporcionalidad inversa**:

- i *La razón de dos cantidades de la misma magnitud es igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes en la otra:* $a:b = b':a'$.
- ii *Al producto o cociente de una cantidad de una magnitud, por un número, corresponde el cociente o producto de la cantidad homóloga por el mismo número*. Si $a = \mu \cdot b$ es también $a' = \frac{b'}{\mu}$.

5) En cada una de las situaciones de proporcionalidad inversa siguientes, interpreten la anterior definición y teorema. Reporten por escrito las interpretaciones logradas.

	$g:\Re^{+} \to \Re$ tal que $x \to g(x) = \frac{m}{x}$ donde $m \in \Re - \{0\}$
Situación 3	*Situación 4*

6) Determinen las semejanzas y diferencias de la definición y teorema, con el grupo de criterios definido en el taller anterior.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en una plenaria, para la que se cuenta con 1 hora y 45 minutos.

TALLER 5. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Intencionalidad. Este taller tiene la intención de involucrar a los participantes en una reflexión acerca de la forma de solucionar distintas situaciones de proporcionalidad que pongan en juego su conocimiento al respecto.

Tareas. A continuación se presenta un conjunto de enunciados de problemas. De manera individual y por escrito deben dar solución a dichos problemas. Para realizar esta tarea disponen de 60 minutos.

1) Si hay 300 calorías en 100 gramos de cierto alimento, ¿cuántas calorías hay en 30 gramos de ese alimento?

2) Alicia puede correr 4 vueltas alrededor de una pista en el mismo tiempo en que Carolina puede correr 3 vueltas. Cuando Carolina haya recorrido 12 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado Alicia?

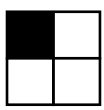
3) Pedro compró 70 artículos y Susana compró 90. Cada artículo cuesta lo mismo y todos costaron $800. ¿Cuánto pagó Susana?

4) Un atleta corrió 3000 metros en 8 minutos exactamente. ¿Cuál fue su velocidad promedio en metros por segundo?

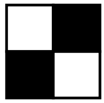
5) Tres quintos de los estudiantes en una clase son niñas. Si cinco niñas y cinco niños se adicionan a la clase, ¿es posible decir si hay más niños ó más niñas a partir de la información dada?

6) Una clase tiene 28 estudiantes. El número de niñas y niños están en la misma razón que 4 a 3. ¿Cuántas niñas hay en la clase?

7) Hay 2 cajas de piezas cuadradas de cartón; cada pieza tiene cuatro cuadrados pequeños. Todas las piezas de la caja 1 tienen la siguiente apariencia:



Todas las piezas de la caja 2 tienen la siguiente apariencia:



Se quiere hacer una figura tal que por cada pieza de la caja 2 existan 2 piezas de la caja 1.
(i) Si se usan 60 piezas de la caja 2 para elaborar la figura requerida, ¿cuántas piezas se necesitaron en total?
(ii) ¿Qué razón representa la relación entre el número de cuadrados negros y el número de cuadrados pequeños de la figura?

8) Los dos anuncios siguientes, aparecieron en un periódico de un país donde la divisa es el *zeds*.

Construcción A
Espacio de oficina disponible
85 - 95 metros cuadrados
475 *zeds* por mes
100 - 120 metros cuadrados
800 *zeds* por mes

Construcción B
Espacio de oficina disponible
35 - 260 metros cuadrados
90 *zeds* por metro cuadrado por año

Si una compañía está interesada en alquilar una oficina de 110 metros cuadrados en ese país por un año, ¿a cuál de las dos constructoras debería alquilar la oficina para conseguir un precio más bajo? Elabore su respuesta.

a. La tabla muestra valores de *x* y *y*, donde *x* es proporcional a *y*.

x	3	6	P
y	7	Q	35

¿Cuáles son los valores de *P* y *Q*?

TALLER 6. CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Intencionalidad. Este taller tiene como intención, involucrar a los participantes en una discusión y reflexión en torno a:

- las demandas cognitivas que hay detrás de diferentes formas de solucionar un mismo problema,
- las diferencias de la complejidad entre los problemas tratados.

Tareas. La siguiente actividad se desarrollará en grupos de cuatro personas, no todas del mismo colegio, y para ella disponen de 1 hora y media. A cada grupo se le asignarán dos problemas sobre los cuales centrará su trabajo.

1) Para cada uno de los dos problemas asignados expongan por escrito tres formas diferentes de solucionarlos.

2) Para las soluciones dadas a cada problema expliciten también por escrito cuáles son las diferencias encontradas en términos de los conceptos y procedimientos matemáticos implicados.

Para compartir con todo el grupo las diferentes soluciones a los problemas analizados se hará una puesta en común, para lo cual se dispondrá de 1 hora y media.

TALLER 7. LOS ESTUDIANTES Y LOS PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Intencionalidad. Este taller tiene entre sus intenciones, involucrar a los participantes en una discusión y reflexión en torno a:

- la diferencia entre los resultados esperados y los resultados encontrados en los alumnos frente a situaciones cuyas soluciones no exigen grandes demandas cognitivas,
- posibles errores y dificultades de los estudiantes al responder los problemas tratados.

Esperamos que al finalizar el taller de esta sesión, los profesores de cada colegio hayan hecho su primera aproximación a lo que será el error o dificultad que quieran abordar en el proyecto que van a realizar.

Tareas. Para la actividad siguiente disponemos de 1 hora y media y la llevaremos a cabo como una discusión con todo el grupo. Se tendrá en cuenta información recogida a partir de los resultados del TIMSS con respecto al desempeño de los estudiantes frente a ciertas preguntas relativas al tópico proporcionalidad. Para cada caso se harán las siguientes consideraciones:

- Estimar el porcentaje de sus alumnos que responderían correctamente al problema.
- Comparar el porcentaje estimado con el obtenido en el TIMSS.
- Determinar la forma de solución más frecuente en sus alumnos.
- Determinar los errores que cometerían más frecuentemente sus alumnos.
- Explicitar si hace actividades de enseñanza para que sus estudiantes puedan resolver problemas similares.
- Explicitar si consideran apropiado el problema para una evaluación del tema.

TALLER 8. PRIMERA APROXIMACIÓN A LA DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Intencionalidad. Este taller tiene la intención de que los profesores de cada colegio hagan su primera aproximación a lo que será el error o dificultad que quieran abordar en el proyecto que van a realizar.

Tareas. Con esta tarea se pretende que los cuatro profesores de cada colegio hagan su primera aproximación a la definición del problema que quieren abordar en el proyecto. Para ello disponen de una 1 hora y media y deben tener en cuenta lo que hemos discutido acerca de la proporcionalidad, de las tareas que usualmente se emplean en las clases para propiciar el aprendizaje del tópico, y de los errores y dificultades de los estudiantes frente al aprendizaje del tópico.

1) Explicitar por escrito el tipo de error y la posible dificultad que hay detrás del error, que serán objeto de estudio.
2) Presentar un esbozo de la estrategia de enseñanza que usarían para abordar el problema identificado.

LA TAREA PARA EL PRÓXIMO SEMINARIO

1) Deberán hacer la lectura de los artículos:
   Czarnocha, B. (1999). El maestro constructivista como investigador. Cómo enseñar razones y proporciones a adolescentes. *Educación Matemática, 11* (2), 52-63.
   Llinares, S. y Sánchez, V. (1992). El aprendizaje desde la instrucción: la evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica. *Enseñanza de las Ciencias*, *10* (1), 37-48.

   Guía de lectura para el artículo de S. Llinares y V. Sánchez
   Después de hacer una lectura cuidadosa del artículo, respondan por escrito las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué entienden cuando se habla del aprendizaje desde la instrucción? ¿Por qué creen que en el artículo se hace esta aclaración? ¿Cómo es para ustedes la relación entre estos fenómenos de instrucción y aprendizaje?
   b. Si se tiene en cuenta el propósito de la investigación, ¿cuál podría decir usted que es el foco del artículo?
   c. Enumeren y describan en sus palabras las estrategias usadas por los estudiantes para resolver los problemas de proporcionalidad numérica que se plantean en el artículo. Expliquen las similitudes y diferencias que ven entre la estrategias, en términos de la relación que hay entre los valores de la longitud de la varilla y la longitud de la sombra.
   d. Describan la metodología empleada por el profesor en la clase. Destaquen algún aspecto positivo de esta metodología que sea diferente a lo que ustedes hacen normalmente en clase.
   e. Describan el proceso que el profesor realiza que le permite evidenciar y confirmar sus interpretaciones acerca de lo que hacen los estudiantes.
   f. Reporten sus observaciones y/o comentarios adicionales surgidos durante la lectura del artículo.

   Recomendación. Para poner a prueba o para contrastar lo que dicen los autores del artículo acerca de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas de proporcionalidad que se plantean, les sugerimos realizar una experiencia similar con un grupo de dos o tres estudiantes.

2) Para el siguiente seminario que tendrá lugar en marzo de 2002, deberán entregar un documento —producto de reflexiones y análisis de su involucramiento en el desarrollo de este programa— que concrete los siguientes puntos:

- conceptos y/o procedimientos del tópico sobre el que versarán las tareas que propondrán a los estudiantes,
- consideraciones y análisis hechos para llegar a elegir las tareas que van a proponer a sus estudiantes,
- propósito o intención que tienen esas tareas en relación con la comprensión de los estudiantes,
- la secuencia de tareas y las tareas mismas que le plantearán a los estudiantes,
- soluciones posibles a las tareas que propondrán a los estudiantes y los conceptos y/o procedimientos matemáticos que están implicados en esas soluciones,
- soluciones que preven pueden dar sus estudiantes a las tareas propuestas y los errores que pueden prever en tales soluciones,
- aspectos relevantes acerca del manejo de la clase que hará el profesor del curso en el que se hará la implementación.

Esperamos que el documento que se describe arriba sea el resultado de una serie de actividades de lectura, reflexión y escritura tanto individual como del grupo de profesores, proceso al cual esperamos aportar los tutores. Ese aporte se hará principalmente a través del correo electrónico. En la última semana de enero deben enviarnos por correo la primera versión del documento antes descrito. Al cabo de dos semanas les estaremos devolviendo un documento con comentarios que consideramos deben tener en cuenta para producir la segunda versión que será presentada en el segundo seminario a todos los miembros del grupo. Esta segunda versión la deberán enviar por correo electrónico a su tutor una semana antes del segundo seminario de manera que podamos haberla leído previamente.

APÉNDICE 2

TALLERES DEL SEGUNDO SEMINARIO

TALLER 1. TRABAJO EN TORNO A LAS TAREAS DISEÑADAS PARA IMPLEMENTAR CON LOS ALUMNOS

Intencionalidad. Este taller tiene entre sus intenciones, involucrar a los participantes en una discusión y reflexión en torno a:

- los enunciados de las tareas que los profesores le van a proponer a sus estudiantes,
- las respuestas hipotéticas que pueden dar los estudiantes a las tareas propuestas,
- la intencionalidad de las tareas propuestas.

Esperamos que al finalizar el taller de esta sesión, los profesores de cada colegio hayan hecho su primera aproximación (o hayan revisado su primera versión) de lo que puede ser la tarea a proponer a sus estudiantes.

Las tareas de la primera parte. Para iniciar el trabajo en este taller los profesores de cada colegio deben formar un grupo y realizar lo siguiente:

1) Elaborar el borrador de una primera versión de enunciado de la tarea a proponer al curso de estudiantes que han elegido como grupo en el que se llevará a cabo la experiencia didáctica de su proyecto de aula. Indicar a que nivel escolar está dirigida la propuesta.
2) Explicitar, en una hoja diferente al la hoja donde hayan escrito el enunciado de la tarea, la intención general de la misma y de las intenciones particulares de cada una de las preguntas (o grupo de preguntas) planteadas.

Las tareas de la segunda parte. Para desarrollar la segunda parte de este taller, cada grupo debe pasarle o otro de los grupos el enunciado de la tarea propuesta, pero no la hoja donde hayan explicitado las intenciones de la misma. Ahora el trabajo consiste en:

g. Responder o darle una solución formal a la tarea que recibieron de otro de los grupos.

h. Explicitar respuestas hipotéticas o posibles de los estudiantes, tanto correctas como erradas, a la tarea propuesta.

i. Inferir, a partir del enunciado de la tarea y de las respuestas hipotéticas de los estudiantes, cuáles pueden ser las intenciones de aprendizaje a la tarea que han considerado.

Las tareas de la tercera parte. En esta parte del taller cada grupo de profesores, presentará a todo el grupo lo que desarrolló en la segunda parte, con la intención de contrastar las intenciones definidas por el grupo de profesores que elaboraron el enunciado presentado con la de los profesores que lo resolvieron.

TALLER 2. TRABAJO EN TORNO A LA OBSERVACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DE TAREAS

Intencionalidad. Este taller pretende aportar a los participantes elementos relativos a la observación del desarrollo de una secuencia de tareas en el aula.

Tareas de la primera parte. En esta actividad se agruparán por institución; un miembro de cada grupo será observador del trabajo que sus compañeros realicen para desarrollar una secuencia de tareas. Media hora antes de iniciar la actividad, los tutores y los profesores observadores se reunirán para planear detalles de la observación, en particular, para acordar algunos aspectos que sería relevante atender durante la observación.

La tarea de los profesores observadores se concretará entonces en registrar por escrito los aspectos considerados como relevantes para indicar algo con relación al cumplimiento de las intenciones previstas para la secuencia de tareas que realizarán los demás profesores.

ASPECTOS PARA ATENDER DURANTE LA OBSERVACIÓN

Con respecto a la construcción
Se trabaja numéricamente; se trabaja cuantitativamente; la nueva figura se construye "sobre" la figura dada; la nueva figura se construye "aparte" de la figura dada; se traza una figura parecida sin considerar el tamaño de sus elementos, sólo la apariencia; se reducen o amplían los lados en una misma cantidad de longitud; se identifica la razón entre los lados; se reducen o amplían los lados en cantidades de longitud que guardan la misma razón que entre las cantidades de longitud de los lados; los lados de la nueva figura se construyen teniendo en cuenta la razón entre los lados de la figura original.

Con respecto al eje de la estrategia
El eje de la estrategia contempla: la reducción o prolongación de la diagonal; el trazado de una paralela a uno de los lados; el trazado de más de una paralela a los lados, sin que necesariamente los lados de la figura se reduzcan o amplíen proporcionalmente; la identificación de la amplitud de los ángulos; la identificación de un punto a partir del cual se unen los vértices con segmentos que se reducen o prolongan y sobre los que se trazan paralelas a los lados de la figura original; la identificación de un punto a partir del cual se dilata la figura en una misma razón.

Con respecto a la justificación de la relación de semejanza
La justificación atiende a argumentos relativos: a la construcción realizada; a la congruencia de los ángulos homólogos; a hechos matemáticos conocidos; a la proporcionalidad entre segmentos homólogos que hacen parte de la figura; a la proporcionalidad entre segmentos trazados en la construcción.

Tareas de la segunda parte. Se hará una puesta en común en la que sea posible contrastar las anotaciones de los distintos observadores con el fin de conocer y comentar las dificultades surgidas en el proceso de observación y considerar posibles recomendaciones para cuando los profesores hagan la observación en sus proyectos de aula. También se pretende promover la comparación del registro hecho por un observador con las respuestas escritas del respectivo grupo observado con el fin de destacar la complejidad del proceso de evaluación de las producciones de los estudiantes.

TALLER CUYA IMPLEMENTACIÓN SE OBSERVARÁ

Propósitos de las tareas a realizar
Estas tareas tienen los siguientes propósitos:

- Puntualizar diferentes procedimientos para construir figuras semejantes a partir de unas dadas.
- Explorar qué tan generalizables son esos procedimientos.
- Destacar los elementos que determinan la semejanza de figuras geométricas.

El siguiente trabajo es para realizar en grupos de 3 o 4 profesores. Para hacerlo disponen de 4 horas.

Parte 1
Para cada una de las figuras[a] que se van a ir entregando,

a. Dibujen una figura que no sea congruente pero sí semejante.

b. Den cuenta de los pasos que siguieron para hacer la nueva figura, dando detalles de los aspectos geométricos involucrados.

c. Justifiquen por qué esas figuras son semejantes.

Parte 2

d. Expliciten todos los procedimientos **diferentes** que hayan sido utilizados en la construcción de figuras semejantes.

e. Pongan a prueba todos los procedimientos explicitados en el ítem anterior para determinar para cada figura cuáles sirven y cuáles no.

f. Examinando las justificaciones dadas en el ítem C, describan las condiciones para que dos figuras sean semejantes. Procuren que la descripción sea aplicable a la mayor cantidad de figuras abordadas. El reto es que su descripción pudiera aplicarse a todas las figuras abordadas.

a. Las figuras presentadas fueron: un rectángulo no cuadrado, un triángulo rectángulo no isósceles, un cuadrilátero no paralelogramo, un sector circular, una circunferencia y una elipse.

TALLER 3. TRABAJO EN TORNO AL PLAN DE OBSERVACIÓN DE LAS TAREAS QUE SE PLANTEARÁN A LOS ESTUDIANTES

Intencionalidad . La intención de este taller es que los profesores puedan avanzar en la elaboración del plan de observación para el taller o tareas que han definido como parte del diseño curricular que están construyendo.

Tareas de la primera parte. Los profesores de cada colegio deben formar un grupo y trabajar en torno a la elaboración del plan de observación, de manera que den cuenta de:

1) Cuando, cómo y quién va a realizar la observación de la implementación del taller o tareas con los estudiantes.
2) Las posibles respuestas de los estudiantes, incluyendo errores que podrían cometer.
3) Los aspectos relevantes a observar del trabajo y respuestas de los estudiantes que indiquen algo con respecto al cumplimiento o no de las intenciones del taller o de las tareas.
4) La interpretación que podrían hacer del trabajo de los estudiantes en el desarrollo del taller, basada en las respuestas que han mencionado y con relación a las intenciones del taller y las evidencias que fundamentan dicha interpretación.

Tareas de la segunda parte. Se hará una puesta en común donde cada grupo expondrá los aspectos relevantes que ha planeado observar en la implementación de su diseño. Se discutirá la coherencia de dichos aspectos con las intenciones establecidas para el diseño curricular.

APÉNDICE 3
TALLERES DEL TERCER SEMINARIO

TALLER 1. ORGANIZACIÓN DE LA EXPOSICIÓN DE LOS PROYECTOS DE AULA

Intencionalidad. Organizar la socialización de los resultados de los diseños curriculares implementados por los profesores de cada institución y proporcionar algunos criterios para realizar una crítica escrita a las presentaciones. En particular, el propósito de la primera parte del taller es definir estructura y organización de la presentación de los trabajos realizados; el propósito de la segunda parte es socializar los trabajos realizados y proporcionar algunas pautas para la elaboración de preguntas y comentarios que posibiliten una realimentación al trabajo de cada grupo de presentadores de parte de los colegas de las demás instituciones.

Primera parte. Esta tarea es para realizarse en el grupo de profesores de una misma institución. Se dispone de 90 minutos y se sugiere utilizar máximo tres transparencias para la presentación del trabajo realizado por cada institución. Para la presentación hay que tener en cuenta que no deben excederse de quince minutos (15 min.) y que deben dar cuenta de los siguientes puntos:

1) **Título del trabajo.** Seleccionar un título que represente apropiadamente el trabajo realizado y escribir el nombre de los realizadores.

2) **Objetivos**. Enunciar los propósitos de la propuesta en términos de lo que se quería lograr con los estudiantes.

3) **Estrategia metodológica.** Enunciar los aspectos generales que se tuvieron en cuenta para la elaboración de la propuesta (p.e. características particulares de los estudiantes como el nivel, la cantidad de alumnos a los que se dirigió el trabajo, quienes observaron la implementación, etc), el medio en que se materializó la propuesta (p.e. guía escrita que se entregó a cada estudiante o grupo de estudiantes, preguntas dadas oralmente, preguntas anotadas en el tablero, partes en que se dividió la propuesta, papel que los profesores en cada una)

4) **Ejemplo de tareas propuestas.** Presentar un ejemplo de las preguntas o actividades sugeridas a los estudiantes que consideren que son las más relevantes o ilustrativas de lo que elaboraron.

5) **Ejemplo de respuestas esperadas.** Presentar un ejemplo del tipo de respuestas que se habían imaginado que podrían responder los estudiantes.

6) **Ejemplo de respuestas de los estudiantes.** Presentar un ejemplo de respuestas de los estudiantes que les llame la atención bien sea porque no la esperaban encontrar o por que ilustra aspectos específicos que quieren resaltar en la presentación.

7) **Plan de observación.** Presentar un ejemplo del tipo de aspectos que determinaron observar y de cómo lo interpretarían

8) **Conclusiones.** Presentar una síntesis o resumen de lo que se logró con los estudiantes con respecto a los objetivos planteados y hacer un balance final de los

logros y las dificultades de la propuesta curricular.Taller 2. Pautas para comentar las presentaciones.

Segunda parte (procedimiento). El orden de presentación de los trabajos será determinado por los tutores. Para cada presentación se seguirá el siguiente procedimiento:

i **Presentación.** No debe exceder de 15 minutos y se debe apoyar en las transparencias que prepararon en la primera actividad.

ii **Elaboración de comentarios.** Al finalizar la presentación se dará un tiempo de 5 minutos para elaborar por escrito una pregunta y un comentario acerca de la presentación. Las preguntas o los comentarios formulados debe aludir a por lo menos dos de los criterios que se presentan en la siguiente sección.

iii **Respuesta a preguntas y comentarios.** Se entregará a los presentadores las preguntas y comentarios de sus colegas. Ellos las leerán y elegirán a cuáles de las preguntas formuladas desean considerar y las responderán. Para esta parte se dispondrá de 10 minutos.

Segunda parte (criterios para elaborar comentarios y preguntas). Estos criterios se deben leer antes de comenzar las presentaciones y servirán como referencia para tener en cuenta acerca de qué tipo de preguntas formular o qué tipo de comentarios hacer.

i **Carácter innovador de la propuesta.** Comentar si en la propuesta presentada hay algo novedoso, bien sea por el tipo de tareas o preguntas que se formularon, bien por que involucra aspectos de la proporcionalidad que usualmente no se consideran, o bien por la intención que persigue. Concretar qué es.

ii **Claridad en la presentación de resultados.** Comentar si las evidencias que se presentaron parecen apoyar lo que se concluye. Justificar porqué.

iii **Coherencia del contenido matemático.** Comentar si percibió inconsistencias o incoherencias con respecto a las matemáticas abordadas en la propuesta curricular y concretar en qué radican éstas.

iv **Coherencia didáctica.** Comentar si percibió inconsistencias o incoherencias desde el punto de vista didáctico, como por ejemplo al comparar las tareas propuestas con la intención perseguida, o porque las tareas no parecen acordes al grado en que se proponen. Concretar en qué radican.

v **Inquietudes o preguntas.** Formule una pregunta a los presentadores acerca de algo de lo que fue considerado en la presentación y que para usted no quedó muy claro.

TALLER 2. TRABAJO EN TORNO A LA ELABORACIÓN DE UN ARTÍCULO PARA PUBLICAR

Intencionalidad. A través de las tareas que se plantean en este taller se pretende dar inicio al ejercicio de elaborar un artículo académico que pueda ser publicado en una revista, ejercicio en el que los participantes se deben involucrar durante los próximos meses. El propósito de la primera parte de este taller es discutir algunas ideas acerca del sentido de elaborar un artículo y de publicarlo; la segunda parte tiene como propósito conocer y discutir algunas pautas iniciales que ayudan a definir la estructura y el contenido de un artículo; la tercera parte tiene como intención adelantar la definición de la estructura y el contenido del artículo de cada grupo de profesores, así como establecer la idea central del mismo, siguiendo las pautas iniciales suministradas; la cuarta parte tiene como intención identificar y escribir los asuntos e ideas principales de cada una de las secciones establecidas, para el artículo de cada grupo de participantes.

Tarea de la primera parte. Esta tarea es para realizarse de manera individual y responder por escrito. Se dispone de 10 minutos.

1) Explique en dos párrafos cuál puede ser el sentido para la comunidad de profesores y para usted personalmente, de publicar un artículo académico sobre un trabajo realizado.

En grupos de cuatro profesores, no necesariamente de la misma institución, discutan sus respuestas a la pregunta anterior e identifiquen los aspectos comunes y distintos. Del grupo seleccionen una persona que presente estos resultados en 3 minutos durante una plenaria, para la que se cuenta con 20 minutos.

Tareas de la segunda parte. Estas tareas son para realizarse en el grupo de profesores de una misma institución. Se dispone de dos horas.

1) Si ustedes fueran a escribir un artículo con respecto al trabajo realizado en su grupo, en qué aspectos centrarían el mensaje de lo que desearían comunicar.
2) De la segunda parte del libro que se entregó en el primer seminario, titulado Experiencias de desarrollo profesional en matemáticas considerar el artículo “Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita” y leerlo.
3) Identificar la idea principal del trabajo que se relata en el artículo y la estructura del mismo.
4) Leer con cuidado el documento que se adjunta acerca de algunas pautas para la escritura de artículos. Comparar y comentar la estructura sugerida en el documento adjuntado, con la del artículo leído y con la propuesta para el artículo de su grupo.

Tarea de la tercera parte. Estas tareas son para realizarse en el grupo de profesores de una misma institución. Se dispone una hora.

1) Con base en el trabajo realizado definir un esquema para el trabajo de escritura del artículo entre los profesores del grupo. Justificar la definición de la estructura de acuerdo a la información que se tiene en el trabajo o a otra que podría obtenerse.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del desarrollo de las tareas anteriores en 3 minutos durante una plenaria, para la que se cuenta con media hora.

Tareas de la cuarta parte. Estas tareas son para realizarse en el grupo de profesores de una misma institución. Disponen de dos horas.

1) Modificar la estructura del artículo ya elaborada de acuerdo a los comentarios recibidos en la discusión plenaria anterior.
2) Identificar y escribir para cada sección los asuntos que se van tratar. Organizar estos asuntos en el orden en que se van a presentar.
3) Identificar y escribir para cada sección las ideas que se van tratar. Organizar estas ideas en el orden en que se van a presentar.
4) Determinar las citas textuales y ejemplos que ayudan a ilustrar y sustentar lo que se va a decir en cada sección.

Del grupo seleccionen una persona que presente los resultados del trabajo en 5 minutos durante una plenaria, para la que se cuenta con media hora.

¿CONFÍA EN SUS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS PARA CONSTRUIR FIGURAS SEMEJANTES?

EDGAR GUACANEME, LUISA ANDRADE,
PATRICIA PERRY Y FELIPE FERNÁNDEZ

Presentamos aspectos sobre el diseño, implementación y observación de una situación-problema relativa a la construcción de figuras geométricas semejantes. Esta situación, diseñada para generar reflexiones y aprendizajes en torno a la semejanza geométrica, fue abordada por profesores de matemáticas de Educación Básica y Media. Las estrategias por ellos utilizadas para la construcción de figuras semejantes y las justificaciones expresadas, además de proporcionar información sobre su competencia en matemáticas y sobre su conocimiento geométrico, permitieron lograr aprendizajes respecto de la semejanza geométrica.

El estudio de este artículo puede hacerse con la intención general de conocer aspectos sobre la semejanza geométrica, aunque también para disponer de un referente de lo que podría ser un reporte de una actividad de indagación/acción.

INTRODUCCIÓN

A pesar de que la geometría no sea una de las áreas temáticas tradicionalmente trabajadas en la escuela o no tenga el énfasis que suelen tener la aritmética y el álgebra, algunas instituciones y profesores se preocupan por brindar a sus estudiantes, como parte de su conocimiento en matemáticas, información y formación en esta área. La semejanza geométrica, en tanto tema matemático propuesto para ser estudiado en la escuela, puede ser uno de los temas sobre los que muy posiblemente los profesores de matemáticas hacen exposiciones y/o proponen tareas para procurar tal formación. Dichas exposiciones y tareas abordan diversos aspectos relativos a la temática, entre los cuales están: la identificación de figuras semejantes, la definición de la semejanza entre figuras planas, el establecimiento de las características geométricas invariantes y variables de figuras semejantes, la construcción de figuras semejantes, y la solución de problemas utilizando las propiedades de las figuras semejantes.

Estos aspectos, como la mayoría de los aspectos de cualquier temática de las matemáticas escolares, al ser objeto de reflexión matemática y didác-

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 55-92). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

tica revisten una complejidad que podría cuestionar fuertemente el conocimiento profesional de los profesores así como la información contenida en textos y propuestas curriculares de matemáticas. Para ilustrar lo anterior, basta pensar en si la expresión "dos figuras son semejantes si tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño" —tradicionalmente enunciada en textos y clases de matemáticas— recurre a nociones o conceptos matemáticos explícita y claramente definidos o si, por el contrario, recurre a nociones que tan sólo permiten una aproximación intuitiva al establecimiento de la semejanza en tanto relación geométrica binaria.

En este artículo damos cuenta de una experiencia de diseño y desarrollo curricular, relativa a la semejanza de figuras geométricas; inicialmente explicitamos algunos asuntos implicados en la reflexión que se puede dar en torno a la construcción de figuras semejantes y la definición de criterios para decidir sobre la semejanza de dos figuras. Luego, presentamos elementos descriptivos sobre el diseño, la planeación de la observación, la implementación de un taller y una discusión de los resultados observados. Finalmente, a modo de balance, planteamos algunas consideraciones generadas por la experiencia vivida, que pueden servir como referencia para posteriores experiencias de diseño curricular sobre la misma temática.

DOS ASPECTOS RELATIVOS A LA SEMEJANZA GEOMÉTRICA

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS SEMEJANTES

Mucho antes de que los profesores de matemáticas la propongan como una tarea matemática, los estudiantes han desarrollado tareas que implican la construcción de figuras semejantes; basta pensar, por ejemplo, en la actividad de copiar en el cuaderno un dibujo hecho en el tablero o presentado en una cartelera o en un libro, para reconocer que los estudiantes se enfrentan a esta tarea sin que alguien les haya enseñado cómo hacerlo y —aun así— logran desarrollarla de manera relativamente exitosa. A este respecto, Fiol y Fortuny (1990, p. 20) señalan que aprender a dibujar involucra lograr que el dibujo sea proporcionado en la relación de sus partes (léase semejante) con lo dibujado. Algunos profesores, incluso de disciplinas diferentes a las matemáticas, eventualmente proponen a sus estudiantes la reproducción de dibujos a través del uso de cuadrículas, por medio de un pantógrafo, o utilizando unas reglas escaladas, para generar ampliaciones o reducciones de los mismos; también los involucran en tareas que implican la construcción de figuras semejantes, tales como el dibujo del plano de la casa o del salón, o el dibujo de objetos del entorno cuyo tamaño supera el de la superficie donde se va a reproducir.

No obstante las tareas que escolarmente pueden proponerse a los estudiantes, la construcción de figuras semejantes en el plano puede no ser una tarea habitualmente planteada por los profesores de matemáticas a sus estudiantes como parte de las tareas que deben realizar para el aprendizaje de la semejanza geométrica. Quizás es más usual que los profesores trabajen, con sus alumnos, los teoremas y propiedades de la semejanza para el caso de los triángulos que la construcción de figuras geométricas semejantes (incluso la de triángulos). Esto puede deberse a que ha sido tradicional que en el estudio escolar de la geometría se enfatice en los aspectos conceptuales más que en los procedimentales (Andrade et al., 2002, p. 223); a la exigua confianza que el profesor tenga en su información y conocimiento sobre aquellos teoremas y propiedades; o, a la poca pericia, conocimiento y reflexión del maestro sobre los procedimientos para construir figuras semejantes.

CRITERIOS PARA DECIDIR SOBRE LA SEMEJANZA DE DOS FIGURAS

En el informe de los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) en Colombia, se afirma que “los estudiantes colombianos reconocen con relativa facilidad figuras congruentes o semejantes, pero presentan serias dificultades en el manejo de las propiedades geométricas determinadas por estas relaciones” (Díaz et al., 1997, p. 83). En este sentido se puede suponer que el reconocimiento de la semejanza es un conocimiento que no implica mayores exigencias y/o que se logra construir durante los primeros años de la escolaridad. En efecto, suponemos que una tarea como la presentada en la Figura Nº 1 puede ser resuelta exitosamente por la mayoría de las personas, incluso por quienes no han tenido una formación escolar, salvo que la idea de semejanza que empleen en la tarea esté relacionada con el significado vulgar del término “semejante” y en consecuencia sea diferente a la idea y significado de la semejanza geométrica.[1]

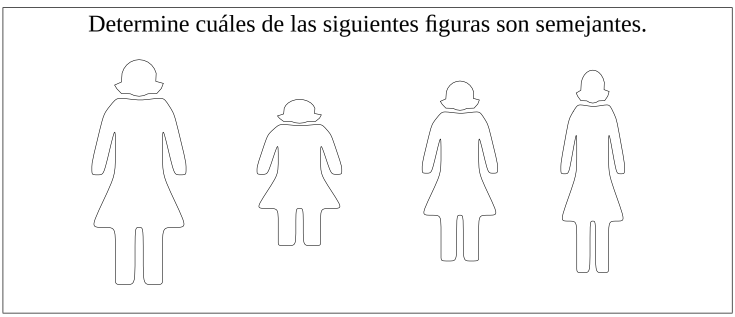


Figura Nº 1. Tarea de reconocimiento de figuras semejantes

1. Como lo reporta el Grupo Beta (1990, pp. 138-139) hay una diferencia entre el significado de la palabra “semejante” en lenguaje vulgar (usada como sinónimo de “parecido” o, incluso, utilizada como “igual”) y su significado matemático.

En la solución de esta tarea se involucra fuertemente la percepción de la proporcionalidad o, mejor, de la desproporcionalidad, cuestión que según algunos investigadores (Fiol y Fortuny, 1990, p. 20) se adquiere o construye desde muy temprana edad, al menos para contextos gráficos (v.g., fotografías, dibujos). Sin embargo, explicitar a través de un enunciado los criterios que se tienen en cuenta para resolver la tarea y/o dar una respuesta a la pregunta ¿cuándo dos figuras son semejantes? pueden ser problemas mayores. Como respuesta a tal pregunta se podría enunciar la frase "son semejantes cuando tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño", pero para algunos esta respuesta puede no ser suficientemente clara, pues en ese sentido todas las figuras de la tarea presentada en la Figura Nº 1 serían semejantes entre ellas, de la misma manera que lo serían todos los rectángulos, o todos los triángulos isósceles, pues "tienen la misma forma".

Si bien, en algún momento de la escolaridad, tal frase puede ser aceptable como definición de semejanza, la ambigüedad de la misma exige hacer un trabajo para cuestionar la potencia de tal definición y construir una que utilice criterios o nociones matemáticas de significado preciso.

La construcción de una definición de figuras semejantes puede ser un proceso escolar y personal que tome bastante tiempo. Quizá, luego de haber llegado a una aproximación intuitiva a la definición que calificamos como ambigua, uno de los momentos de tal proceso pueda ser la construcción de una definición de triángulos semejantes, para lo cual los criterios de semejanza entre triángulos[2] puedan constituir definiciones matemáticas adecuadas. En otro momento posterior, la semejanza podría entenderse como una correspondencia en la que "(i) A puntos alineados en la figura original corresponden puntos alineados en igual orden en la figura homotética. (ii) Los segmentos homólogos son proporcionales. (iii) Los ángulos homólogos son iguales." (Grupo Beta, 1990, p. 77), a pesar de que esta definición no sea aplicable a figuras formadas por segmentos de líneas no rectas (v.g., un sector circular), o por curvas que no definan ángulos (v.g., una circunferencia, una elipse). Incluso podría llegar a plantearse la semejanza como una relación que se define como la composición de la homotecia con otras transformaciones geométricas (v.g., rotación, translación, simetría).

Los profesores de matemáticas, en tanto personas que seguramente han transitado por tal proceso, o por uno similar, ante una situación que les exija explicitar o usar una definición de semejanza podrían recurrir a una de las definiciones presentadas en el párrafo anterior. Sin embargo, para algunos de ellos su proceso pudo haber quedado a medio camino y, en consecuencia,

2. "(i) Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.
(ii) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales también son semejantes.
(iii) Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados homólogos proporcionales." Grupo Beta (1990, pp. 80-81). Nosotros preferimos hablar de ángulos correspondientes congruentes, más que de ángulos iguales.

tanto su forma de solucionar problemas como el trabajo escolar que proponen a sus estudiantes, puede reducirse al uso y comprensión de sólo algunas de las definiciones, incluso únicamente a las más elementales o restringidas como aquella que calificamos de ambigua.

EL TALLER: PROPÓSITOS E INTENCIONES

Con la intención de trabajar la construcción de figuras semejantes y la definición de semejanza geométrica, con profesores de matemáticas, diseñamos un taller (ver Apéndice) que tuvo como fuente de inspiración una breve indicación realizada por Fiol y Fortuny (1990, pp. 129, 131).

Los propósitos que planteamos para el taller fueron:

- Puntualizar diferentes procedimientos para construir figuras semejantes a partir de unas dadas.
- Explorar qué tan generalizables son esos procedimientos.
- Destacar los elementos que determinan la semejanza de figuras geométricas.

Con la tarea propuesta en el literal a, más que lograr una verbalización de su conocimiento geométrico sobre la semejanza, pretendíamos que los profesores hicieran uso de tal conocimiento; en otras palabras, procurábamos que los profesores exhibieran sus competencias geométricas —entendidas como la capacidad de usar un conocimiento geométrico— y no la información geométrica que conocen y que posiblemente presentan en sus clases. Además, queríamos disponer de un registro gráfico del resultado del trabajo de construcción. Con la tarea del literal b, pretendíamos disponer de un registro escrito del procedimiento a través del cual se explicitara la estrategia geométrica utilizada; este registro podía servirle a los profesores para trabajar la tarea del literal d y a nosotros para interpretar el dibujo resultante en el literal a. Al pedir una justificación con respecto a la semejanza entre las figuras dadas y construidas, en la tarea del literal c, buscábamos brindar la oportunidad a los profesores de poner en juego sus definiciones sobre semejanza geométrica y su relación con el procedimiento utilizado en la construcción, a la vez que tendríamos un registro de las mismas.

Como se señala en la instrucción de la primera parte del taller, las tareas de los literales a, b y c se debían realizar para cada una de las figuras que se iban entregando en el orden en que se muestra en la Figura Nº 12 (ver Apéndice). Tal orden fue intencionalmente determinado y definido por la aparición de nuevas condiciones (v.g., contemplar figuras con segmentos no rectilíneos o figuras sin ángulos) para las cuales podrían no funcionar adecuadamente los criterios de semejanza y/o las estrategias utilizadas previamente; estas condiciones pretendían entonces o bien generar conflictos y promover la aparición de nuevas estrategias, o consolidar las estrategias empleadas y definiciones propuestas.

En la segunda parte del taller se presentaban tareas ligadas al propósito de generalizar definiciones y procedimientos relativos a la semejanza geométrica. Con la tarea del literal d, esperábamos que cada grupo identificara si había o no utilizado procedimientos diferentes en la construcción de las figuras semejantes. Entre tanto, la tarea del literal e, propiciaba la oportunidad para aproximarse a una estrategia única de construcción de las figuras presentadas. Finalmente, con la tarea propuesta en el literal f se pretendía aproximar a los profesores a la construcción de una nueva definición de semejanza geométrica. Esperábamos que los registros de la descripción de tales definiciones nos permitiera reconocer evidencias de algún aprendizaje logrado por los profesores.

Justificábamos la condición de trabajo en grupo, en la posibilidad que éste nos brindaba de registrar opiniones, acuerdos y desacuerdos, discusiones, etc. en torno al desarrollo de cada una de las tareas del taller.

PLANEACIÓN DE LA OBSERVACIÓN

RESPUESTAS POSIBLES

Como parte de la planeación de la observación nos dimos a la tarea de identificar y explicitar respuestas posibles a algunas de las tareas del taller. Para lograr concretar algunas de tales respuestas, previamente a su implementación desarrollamos nosotros mismos una a una las tareas, registramos nuestras respuestas y supusimos algunas potenciales respuestas. A continuación presentamos los resultados de estas actividades.

Posibles respuestas a la tarea del literal a[3]

Construcción de un triángulo semejante. Para construir figuras semejantes a la *figura a*, era posible que los profesores pusieran en juego alguno de los criterios de semejanza presentados en la segunda nota a pie de página. Utilizando el primer criterio, era factible que la estrategia consistiera en construir un ángulo congruente a alguno de los del triángulo dado y multiplicar, por un mismo factor, la longitud de cada uno de los lados que lo definen; o, con una pequeña variación de este procedimiento, se recurriera a prolongar (o comprimir) dos de los lados —con lo cual “se calca” el ángulo definido por éstos— y trazar una paralela al tercer lado —con lo cual se dilatan (amplían o reducen) los lados por un mismo factor. Utilizando el segundo criterio, era posible proceder a copiar convenientemente dos de los ángulos sobre

3. En las descripciones no incluimos una estrategia que implica la construcción “a ojo” de figuras “parecidas” (i.e., sin tomar medidas ni hacer construcciones geométricas). No obstante creímos que podría ser empleada o sugerido su uso.

un segmento de longitud diferente al del segmento común a los ángulos en la figura original y prolongar (o acortar) sus lados hasta obtener un triángulo. También era posible trazar una paralela a uno de los lados y prolongar (si fuera necesario) los otros dos hasta la recta; o, trazar paralelas a cada uno de los tres lados a cualquier distancia de éstos. Construir tres segmentos que sean dilataciones, por un mismo factor, de los tres que configuran el triángulo original y con aquéllos formar un triángulo, es una forma de emplear el tercer criterio.

Estaba dentro de lo posible que los profesores emplearan otras estrategias que no proceden de los criterios de semejanza entre triángulos ni se justifican de manera tan directa a través de aquéllos. Una de tales estrategias es la construcción de una cuadrícula que traslape al triángulo y la reproducción de ésta con un tamaño mayor (o menor) del lado del cuadrado que la define, para sobre ésta dibujar el triángulo semejante (ver Figura Nº 2).

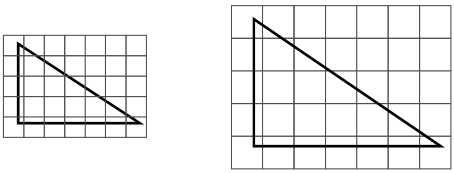


Figura Nº 2. Uso de cuadrícula para construir triángulos semejantes

Otra estrategia posible es ubicar un punto en el mismo plano de la figura, a partir de éste trazar semirrectas que contengan a los vértices del triángulo y luego, por un punto de uno de los rayos, trazar segmentos paralelos a los dos lados del triángulo y convenientemente unir los extremos de éstos con un segmento que resulta paralelo al tercer lado del triángulo (ver Figura Nº 3).

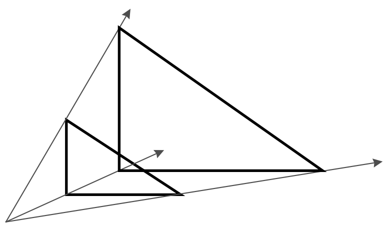


Figura Nº 3. Uso de haz de semirrectas para construir triángulos semejantes

Una tercera estrategia, bastante similar a la anterior, incluye el uso de una banda elástica a la que se le ha hecho un nudo y se ha fijado uno de sus extremos en un punto cualquiera del plano donde está la figura; para dibujar el triángulo semejante, o bien se hace corresponder el nudo con cada uno de los vértices del triángulo y se ubican los tres puntos correspondientes definidos por el extremo no fijo del caucho que a la vez determinan el nuevo triángulo, o se hace corresponder el nudo con uno de los puntos del triángulo y desplazándolo sobre el triángulo se va trazando el nuevo triángulo (ver Figura Nº 4).[4]

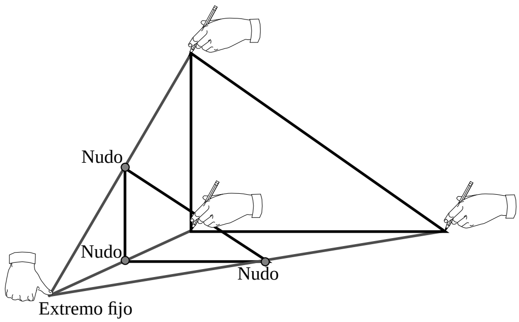


Figura Nº 4. Uso de banda de caucho para construir triángulos semejantes

Una cuarta estrategia, que no recurre a los reportados criterios de semejanza de triángulos, implica calcar en una transparencia el triángulo original y proyectarlo empleando el retroproyector.

Construcción de un cuadrilátero semejante. Es factible que los profesores utilicen un procedimiento consistente en descomponer el cuadrilátero (*figura b* o *figura c*) en dos triángulos y hacer por separado la construcción de cada triángulo semejante, utilizando alguna de las estrategias descritas antes pero teniendo en cuenta que los dos triángulos resultantes deben tener congruente el lado que es común al juntarlos para armar el cuadrilátero semejante.

Otra opción posible es que los profesores tracen y prolonguen una de las diagonales del cuadrilátero y a partir de uno de los puntos de ésta tracen paralelas a dos de los lados adyacentes y luego prolonguen los lados no considerados de la figura original. Esta estrategia es relativamente equivalente a una de las mencionadas antes para el caso del triángulo en la que no se recurre a los criterios de semejanza entre triángulos; todas aquellas estrategias (v.g., la cuadrícula, la proyección, el estiramiento de la banda de caucho, el trazo de un haz de semirrectas) son aplicables para los casos de los cuadriláteros.

La construcción de segmentos paralelos a los que componen la figura, si bien puede ser utilizada para el caso del triángulo, no es efectiva para el caso

4. Esta estrategia es denominada *the variable tension proportional divider (VTDP)* por Friedlander y Lappan (1987).

del cuadrilátero, incluso, si la distancia entre segmentos homólogos es la misma para los cuatro lados de las figuras. En la Figura Nº 5 se han trazado un rectángulo exterior y uno interior al rectángulo dado, con lados paralelos a los de éste y a una misma distancia; luego se han hecho coincidir en uno de sus vértices y en dos de sus lados para mostrar que la diagonal del rectángulo dado no coincide con la de los construidos, siendo esto evidencia de que no son semejantes.

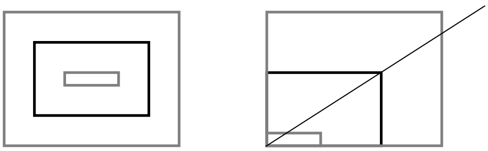


Figura Nº 5. Estrategia no efectiva de construcción de rectángulos semejantes

Tampoco es efectiva la estrategia de copiar los ángulos de la figura, sin considerar la proporcionalidad entre los lados de una y otra figura. Si tal estrategia fuera efectiva, se podría concluir que cualquier rectángulo es semejante a un cuadrado. La Figura Nº 6 muestra al lado izquierdo dos cuadriláteros que no son ni se perciben semejantes; el segundo de ellos se construyó copiando los cuatro ángulos internos del primero (i.e., a través de construir ángulos congruentes), lo cual se observa al solapar los dos cuadriláteros, como se muestra al lado derecho de tal Figura.

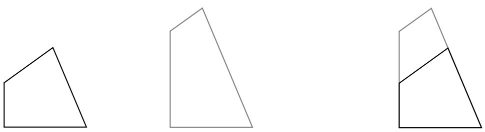


Figura Nº 6. Estrategia no efectiva de construcción de cuadriláteros semejantes

Construcción de un sector circular semejante. Una estrategia posible es comenzar por identificar que la *figura d* corresponde a un sector circular contenido en un círculo cuyo centro es el extremo común de los dos segmentos rectilíneos, luego dilatar tales segmentos por un mismo factor y trazar un arco de circunferencia cuyo radio está determinado por la longitud de los segmentos construidos y su centro por el extremo común de éstos. Para este caso, también funcionan bien las estrategias que hacen uso del retroproyector, la banda de caucho, la cuadrícula y el haz de semirrectas. Sin embargo, para estas dos últimas, es necesario incluir, además de los tres vértices, un conjunto finito de puntos del arco de circunferencia y efectuar, a través de un trazo que los conecte, un proceso de interpolación. Este proceso de interpolación es necesario también en el caso de usar la banda de caucho ubicando el nudo sólo sobre algunos de sus puntos, pero no, si se usara desplazándolo sobre la figura.

Una posible estrategia que no genera una figura semejante consiste en trazar sendos segmentos paralelos[5] a los tres que configuran el sector circular y que estén a una misma distancia, es decir, trazar un arco concéntrico con el original a una cierta distancia y segmentos paralelos a los que forman el ángulo del sector circular dado, a la misma distancia elegida; aunque la figura que se obtiene está formada por dos segmentos rectilíneos que determinan un ángulo congruente con el de la figura inicial y por un arco de circunferencia, no se trata de un sector circular ya que tal arco pertenece a una circunferencia cuyo centro es el vértice del sector circular inicial y no el vértice del ángulo construido.

Construcción de una circunferencia semejante. Una vez que se reconozca que la figura es una circunferencia, para obtener una figura semejante a la dada se puede proceder a trazar una circunferencia de radio diferente, ya sea concéntrica o no a la original. Cuando la circunferencia trazada es concéntrica también es paralela a la original.

Si se emplea una estrategia como la de la cuadrícula o la del haz de semirrectas, se puede construir tan sólo un número finito de puntos y, en consecuencia, sería necesario hacer un proceso de interpolación a través de una curva que pase sobre aquéllos. Si se emplea la estrategia de la banda de caucho no sería completamente necesario tal proceso, pues desplazando el nudo sobre la circunferencia se podría hacer un trazo continuo.

Construcción de una elipse semejante. Una de las estrategias posiblemente usada para esta figura es el trazado de una curva paralela a la original; sin embargo, ésta no es exitosa. Para comprobar que tales elipses no son semejantes se puede proceder de varias formas; por ejemplo, con los segmentos que definen los ejes de cada elipse se pueden construir sendos rectángulos y verificar que éstos no son semejantes pues sus diagonales no coinciden (ver Figura Nº 7).

De manera más general, se puede verificar que a través de la construcción de una curva paralela a la elipse original no se obtienen elipses semejantes, al asumir como medida entre las curvas la mitad de la longitud del eje menor y trazar la “elipse” en el interior de la elipse original; así se obtendría un segmento colineal con el eje mayor. Evidentemente no tiene mucho sentido que

5. Como uno de los segmentos es una curva, consideramos necesario establecer condiciones para el paralelismo entre curvas. Suponemos que dos curvas C_1 y C_2 son paralelas, si las rectas tangentes a dos puntos correspondientes cualesquiera son paralelas. Consideramos que un punto P’ de la curva C_2 es correspondiente a un punto P de la curva C_1 cuando P’ es el corte de la normal a la curva C_1 en el punto P, con la curva C_2.

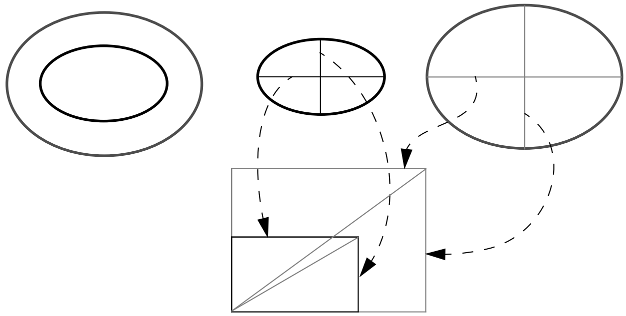


Figura Nº 7. Estrategia no efectiva de construcción de elipses semejantes

una elipse sea semejante a un segmento, pues ni siquiera se conservaría su carácter topológico de curva cerrada simple.

Las únicas estrategias eficientes que previmos se podrían llevar a cabo son las que involucran ya sea la cuadrícula, el haz de semirrectas, la banda de caucho o la proyección con el retroproyector; las dos primeras, como lo señalamos antes, involucran necesariamente un proceso de interpolación gráfica.

De otra parte, supusimos que la construcción de la elipse semejante sería una tarea bastante exigente para los profesores y que algunos de ellos no lograrían realizarla.

Posible respuesta a la tarea del literal c

Con relación a las respuestas que podrían expresar los profesores como justificación de la semejanza de las figuras, las siguientes fueron nuestras previsiones.

Muy probablemente, los profesores formulan la afirmación “son semejantes porque tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño”, o una relativamente equivalente (i.e., que utiliza términos que generan ambigüedad). Frente a tal situación se espera que, por iniciativa de alguno de los integrantes del grupo o del observador, se genere una actividad para clarificar el significado de los términos empleados (v.g., “misma forma”, “no necesariamente”, “tamaño”), pues como lo presenta Zaslavsky (1991), los profesores pueden tener significados particulares para tales términos y tener ideas que no se corresponden, todo lo que debiera, con el discurso matemático aceptado; por ejemplo, se puede proponer que se argumente por qué las dos figuras dibujadas tienen la misma forma.

Para los tres polígonos, algunos profesores presentan como justificación un conjunto de razonamientos, en los que involucran los criterios de semejanza entre triángulos, que podría considerarse como una demostración. También, es posible que presenten como argumento uno de dichos criterios ampliando el dominio de validez del mismo a otros polígonos; por ejemplo, para cada par de polígonos, expresan que son semejantes pues todos los ángulos de una figura son congruentes con los respectivos ángulos de la otra. Como lo señalamos antes, esta extrapolación del criterio de semejanza válido para triángulos no es aplicable a polígonos cualesquiera[6].

Justificaciones del estilo "porque todas las circunferencias son semejantes entre sí", o "porque todos los sectores circulares definidos por ángulos congruentes son semejantes", pueden hacer parte del repertorio de argumentos esgrimidos por los profesores. Consideramos que este tipo de afirmaciones requieren de una justificación de su validez, asunto que debería poder proponerse en la discusión del grupo. De otra parte, se puede esperar que los profesores no den justificaciones para la semejanza de las elipses, incluso si algunos de ellos han logrado construirla.

Posible respuesta a la tarea del literal d y e

A menos que los profesores utilicen ya sea la cuadrícula, la proyección, la banda de caucho, o el haz de semirrectas —procedimientos aplicables a todas las figuras—, ellos disponen de procedimientos no aplicables a todas las figuras. Por ello, consideramos que la realización de estas tareas puede permitir no sólo identificar lo anterior, sino además ofrecer una oportunidad para generar discusiones acerca de las justificaciones relativas a la aplicación condicionada de algunos procedimientos; por ejemplo, si un grupo utiliza como estrategia la construcción de paralelas a los contornos de las figuras se espera que advierta que esta estrategia es válida sólo para triángulos y circunferencias, y que discuta las razones que sustentan la no aplicabilidad para las demás figuras.

La identificación o elaboración de un procedimiento aplicable para todas las figuras puede ser una tarea bastante difícil si no es amplia la gama de procedimientos utilizados, o si ésta no incorpora alguno que pueda efectivamente ser aplicable a todas las figuras. Si el grupo no logra enunciar y realizar un procedimiento que responda a las condiciones de la tarea, se puede sugerir a los profesores que piensen cómo utilizar los materiales, instrumentos o equipos disponibles para construir figuras semejantes. Así, quizá puedan advertir que el retroproyector permite la construcción de figuras semejantes sin siquiera hacer construcciones geométricas.

Posible respuesta a la tarea del literal f

Como se explicita en la consigna de la tarea, se espera que las respuestas estén conectadas con las formuladas en el desarrollo de la tarea del literal c. Además, se espera que las respuestas estén condicionadas por el trabajo realizado en torno al establecimiento de la generalidad de los procedimientos y de un procedimiento único. En este sentido, si los profesores logran

6. David Slavit (1998) reporta algunas experiencias que ha tenido con estudiantes al explorar la validez del criterio de los tres ángulos (AAA) para otros polígonos.

responder a la tarea del literal e, se puede sugerir que intenten identificar qué elementos geométricos subyacen y sustentan tal procedimiento, y a partir de ello construir una definición de semejanza. Por ejemplo, si se utiliza el retroproyector se puede intentar una aproximación al teorema de Tales en el espacio (ver Grupo Beta, 1990, pp. 84-85) como forma de justificar la semejanza; si se utiliza el haz de semirrectas o la banda de caucho se puede procurar el reconocimiento de la homotecia como transformación subyacente a tales procedimientos; si se utiliza la cuadrícula se puede intentar un nexo con la dilatación uniforme del plano.

El reconocimiento de la incapacidad de construir una definición, aun habiendo utilizado los conocimientos matemáticos que poseen, se considera como una respuesta generada por la tarea en cuestión y para nosotros sería un resultado positivo del taller.

ASUNTOS SOBRE LOS QUE SE HARÍA LA OBSERVACIÓN

Se determinó que los cuatro diseñadores del taller cumpliríamos el papel de observadores de lo que sucediera en los grupos al implementarlo, aunque tendríamos también la posibilidad de cuestionar las producciones.

En primer lugar, establecimos que los observadores teníamos la tarea de registrar aspectos específicos para cada una de las partes del taller y para cada tarea propuesta.

En la tarea de la construcción de las figuras, además de identificar si los profesores utilizaban alguna de las estrategias previstas, o si por el contrario utilizaban estrategias que no habíamos considerado previamente, también debíamos registrar las particularidades de las estrategias utilizadas que consideráramos no se podrían recuperar a través del registro escrito del trabajo de los profesores, o que no estaban contempladas en la descripción de respuestas posibles. Por ejemplo, debíamos estar atentos a detectar entre otros aspectos: si la construcción incorporaba un trabajo con las cantidades de longitud y de amplitud de los segmentos y ángulos, respectivamente, o si además contemplaba un trabajo con sus medidas; si la nueva figura se construía sobre la figura dada o aparte de ésta; si al identificar razones entre segmentos éstos pertenecían a una misma figura o a dos, la dada y la que se construía; si se proponían varias estrategias y la manera como se decidía acoger o descartar alguna; el papel que cumplía cada uno de los profesores del grupo.

Además de identificar si las respuestas dadas a las tareas de los literales c, d y e, se ajustaban o no a las previstas, nos interesaba registrar: si los argumentos, definiciones o procedimientos escritos eran el resultado de la discusión o expresaban sólo la posición de uno de los integrantes; qué tipo de acción se realizaba en caso de no poder dar una justificación, definición o procedimiento; y los aspectos a los que se atendía para decidir que dos procedimientos eran diferentes.

Para la tarea final (literal f) nos interesaba establecer la manera en que el procedimiento general (o los particulares) condicionaba y guiaba la aproximación a una definición de semejanza.

En segundo lugar, advertimos que teníamos una pregunta que nos movía a realizar la observación. Nos interesaba saber si los profesores aprendían algo a través del desarrollo del taller, o si en el mejor de los casos, únicamente lograban cuestionar su conocimiento acerca de la semejanza geométrica, o si desarrollaban el taller sin que siquiera se lograra cuestionar su conocimiento geométrico.

Esta pregunta tiene su origen en la reflexión sobre experiencias anteriores. En nuestro trabajo en torno al diseño y desarrollo curricular, ha sido usual pedir a los profesores, con los que trabajamos, que diseñen talleres (e incluso nosotros mismos lo hemos hecho) a través de los cuales se pueda aprender algo; con alguna frecuencia, después de su implementación nos damos cuenta de que los talleres diseñados sólo constituyen un elemento de evaluación del conocimiento de quienes lo desarrollan y que, en realidad, no promueven aprendizaje alguno o, por lo menos, no hay evidencia de ello.

Nos interesaba saber si el taller propuesto tenía tales características, por lo cual debíamos estar muy atentos a observar y registrar eventos que pudieran constituir evidencias de que el taller no había sido una experiencia sin sentido para los profesores y que efectivamente había promovido cambios en ellos.

Para ello hicimos un brevísimo listado de eventos que podrían indicarnos que algo había sucedido. En la lista ubicamos: los profesores exhiben dudas y formulan preguntas que no son contestadas por ellos inmediatamente o con aserciones contundentes; los enunciados de los profesores aluden a conocimientos geométricos o a los procedimientos realizados; y, los profesores expresan que han aprendido y muestran qué han aprendido.

Además del anterior listado nos preguntamos qué cosas se pueden aprender del taller, a lo que respondimos a través de cinco aserciones:

- Algunos procedimientos que son utilizados para dibujar figuras semejantes no son útiles para todo tipo de figuras en el plano.
- Existen procedimientos geométricos que permiten construir figuras semejantes, cualquiera sea su forma.
- Los criterios de semejanza entre triángulos no son aplicables como definición para figuras que no sean triángulos o que no se puedan descomponer en ellos.
- La idea de “misma forma” y particularmente de “forma” no es geométrica.
- La semejanza geométrica se relaciona con la idea de dilatación en el plano (homotecias) y se puede describir a través de ella.

En tercer lugar, para apoyar el trabajo de observación, decidimos hacer un registro en video del trabajo en uno de los grupos y hacer grabaciones de audio de los demás grupos.

IMPLEMENTACIÓN

CONDICIONES DE IMPLEMENTACIÓN

La primera parte del taller se realizó con la participación de doce profesores[7] de matemáticas de la Educación Básica y Media, quienes emplearon cerca de tres horas y media (repartidas en dos sesiones con un receso de media hora) para construir algunas de las figuras semejantes. Los profesores se organizaron en tres grupos, cada uno de los cuales estuvo acompañado y observado por uno de los diseñadores del taller. En los tres grupos se hizo un registro en audio y se tomaron directamente notas sobre el trabajo de los profesores; además, la actividad de uno de los grupos se registró en video.

El trabajo en los grupos se dio de manera diferente. En uno de ellos se identificó la presencia de un profesor líder quien determinaba, sin mayor cuestionamiento por parte de los demás profesores del grupo, tanto la forma de proceder como las ideas matemáticas abordadas; ocasionalmente, los demás profesores sugerían maneras e ideas diferentes para realizar el trabajo. En algunas oportunidades los integrantes de este grupo trabajaron individualmente, para luego exponer sus elaboraciones ante el grupo. No obstante la existencia de un líder, fue principalmente el observador —y no el líder— quien a través de preguntas suscitó un cuestionamiento sobre los resultados del trabajo.

En otro grupo se observó que aunque hubo momentos de trabajo compartido por los cuatro integrantes, la mayor parte del desarrollo del taller fue realizado en subgrupos de dos, en cada uno de los cuales hubo un líder que era quien proponía qué hacer, llevaba el hilo del desarrollo y hacía el registro escrito, mientras que el otro profesor seguía el desarrollo, lo apoyaba haciendo cálculos y eventualmente intervenía para dar alguna idea. La interacción en el grupo se dio principalmente entre los líderes de los dos subgrupos y fue coordinada por uno de ellos quien hacía preguntas, proponía ideas para examinar, daba explicaciones y establecía conclusiones. El observador del grupo sólo en contadas ocasiones intervino a través de preguntas que procuraban que los profesores cuestionaran su trabajo o dirigieran su atención a una forma de proceder alternativa.

7. Utilizaremos los sustantivos genéricos “profesor” y “profesores” para referirnos a las personas (hombres y mujeres) que participaron del taller. De manera similar usaremos los sustantivos “observador” y “observadores”.

En el tercer grupo, desde el inicio del trabajo, los integrantes decidieron abordar cada construcción de manera individual y compartir las producciones logradas. Cuando cada quien presentó su trabajo ante el grupo, los demás profesores eventualmente formularon preguntas, algunas de las cuales fueron objeto de indagación o discusión. La participación del observador en este grupo fue más limitada que en los dos anteriores; en al menos dos oportunidades, consistió en hacer que el grupo avanzara en el desarrollo del taller (e.g., sugirió aplazar una discusión que bajo su óptica era anodina y les entregó una nueva figura para que desarrollaran el trabajo sobre ésta).

Además de las diferencias en la forma de proceder en cada grupo y en la participación de sus integrantes, hubo diferencias en cuanto a la cantidad de figuras abordadas. En uno de los grupos sólo se realizó el trabajo con tres de las figuras, en tanto que en otro se abordaron cinco y en otro, las seis.

La segunda parte del taller se realizó, de manera diferente a lo previsto, en una sesión que se llevó a cabo ocho días después de la implementación de la primera parte, a través de una plenaria de aproximadamente tres horas, conducida por uno de los diseñadores. La plenaria se desarrolló en torno a la explicitación de los procedimientos usados en los diferentes grupos para la construcción de las figuras semejantes —aunque también se presentaron algunos procedimientos previstos como respuestas posibles, pero no empleados por los profesores— y en torno a la justificación de la semejanza entre las figuras obtenidas; sólo en algún momento se discutió brevemente acerca de la diferencia entre algunos de tales procedimientos y sobre la posibilidad de tener un procedimiento para construir figuras semejantes, aplicable a cualquier figura, pero no hubo discusión acerca de las condiciones que en general determinan la semejanza de cualquier par de figuras. En la plenaria participaron siete de los doce profesores (los cinco restantes no asistieron; cuatro de ellos habían conformado uno de los grupos observados) y los observadores de la primera parte del taller; hubo intervenciones de la mayoría de los profesores. La plenaria se registró a través de una grabación de video.

RESULTADO DE LAS OBSERVACIONES DE LA PRIMERA PARTE DEL TALLER

En este apartado hemos organizado la descripción de algunas de las observaciones logradas durante la implementación de la primera parte del taller bajo diferentes títulos. La mayoría de ellos hacen referencia a los procedimientos de construcción empleados para construir las figuras semejantes y a las justificaciones argüidas sobre tal semejanza.

Alusiones con respecto al significado de semejanza

En uno de los grupos, antes de abordar la tarea de construcción del triángulo, y como reacción a la condición del literal a, se expresaron varios comentarios con respecto a la semejanza y a la congruencia; éstos aludían a la forma y el tamaño de figuras. Así se dijo, por ejemplo, que dos manos, una pequeña y otra grande son semejantes porque tienen la misma forma pero no son congruentes porque tienen diferente tamaño. En otro de los grupos simplemente se enfatizó en que la figura pedida debía ser semejante a la dada, pero no congruente con ésta, sin hacer mayor referencia a los elementos que definen la diferencia entre estas dos relaciones geométricas. En el otro grupo sólo se mencionó que si la figura original era un triángulo rectángulo, la figura pedida también debía serlo, pero "un poco más pequeña o más grande que la dada".

Pudimos registrar alusiones similares a la anterior en la construcción del rectángulo. En el desarrollo de esta tarea reconocimos, en al menos dos grupos, que la semejanza hacía referencia a la igualdad de las formas, entendiendo por esto que basta con que las dos figuras tengan el mismo nombre (por ejemplo, que sean rectángulos) para garantizar la semejanza.

Construcción de un triángulo semejante al dado

Las estrategias usadas por los profesores para construir un triángulo semejante al dado fueron diversas; excepto dos, las habíamos previsto como posibles respuestas. Una de las no previstas —que no es efectiva— consiste en medir las longitudes de los tres lados y las amplitudes de los dos ángulos agudos (bajo el supuesto de que el tercero es recto), aumentar una misma medida a cada una de las medidas de los dos lados perpendiculares entre sí, y con estas medidas construir los dos catetos del nuevo triángulo cuyos extremos determinan la hipotenusa. La otra estrategia no prevista implica trazar un plano cartesiano, copiar el triángulo sobre el plano, determinar las coordenadas de los vértices, multiplicar por un mismo número las coordenadas para obtener unas nuevas, ubicar las nuevas coordenadas y trazar segmentos entre éstas para formar un nuevo triángulo.

De las estrategias previstas, los profesores no utilizaron la que consiste en construir sobre un segmento (tomando como vértices, los dos extremos del segmento) dos ángulos respectivamente congruentes con dos ángulos del triángulo dado y prolongar (o recortar) los lados de los ángulos construidos para formar un triángulo; tampoco usaron la estrategia de las dos cuadrículas, ni la que implica el uso de la banda de caucho, ni la proyección con el retroproyector.

En uno de los grupos identificamos una fuerte tendencia al trabajo numérico, es decir, a la obtención de las medidas de las amplitudes de los ángulos y de las longitudes de los segmentos, para con ellas realizar operaciones aritméticas. En los otros grupos, para realizar la construcción no se recurrió a las medidas aunque para amplificar los lados por un factor (asociado generalmente al doble o a la mitad) se tuvo en cuenta la longitud de los segmentos.

Por otra parte, observamos que para cada estrategia usada en cada grupo, sólo después de su implementación, se reprodujo o se comentó acerca de ella; esto ocasionó que en uno de los grupos sólo hasta después de haber invertido algún tiempo en una estrategia que no generaba triángulos semejantes, uno de los integrantes hubiera exhibido un argumento para verificar el carácter fallido de la estrategia.

Justificación de la semejanza entre los triángulos

Al comparar las maneras de justificar utilizadas por los grupos, identificamos elementos comunes, pero también elementos que las hacen diferentes. En todos los grupos hay alusión a la congruencia entre los pares de ángulos homólogos. No obstante, en uno de los grupos ésta es la única condición que se menciona como necesaria y suficiente para verificar la semejanza, en tanto que en los otros dos grupos ésta se acompaña de la necesidad de existencia de la proporcionalidad entre los segmentos homólogos; incluso en uno de los grupos se menciona que son estas dos condiciones las que hay que verificar, es decir, que parece que no bastaría con una de ellas.

En la forma de comprobar la congruencia angular, también identificamos diferencia entre los grupos. En uno de ellos se hizo una especie de demostración basada en un hecho geométrico conocido: expresaron que en la construcción se podía verificar la congruencia para dos pares de ángulos (y por ende se tendría la congruencia del tercer par) pues se podía observar una configuración de dos rectas paralelas cortadas por dos secantes, lo que permitía justificar que los ángulos correspondientes (los alternos internos y también los opuestos por el vértice) eran congruentes. En los otros dos grupos se manifestó la necesidad de medir las amplitudes y las longitudes para establecer la igualdad y los cocientes, respectivamente; sin embargo, en sólo uno de ellos se procedió a hacer tales mediciones y a trabajar con ellas.

Además de la referencia a la congruencia y la proporcionalidad, identificamos alusiones a dos criterios diferentes. En uno de los grupos se inició la justificación afirmando que “la forma de las dos figuras [es decir, la forma del triángulo dado y la del triángulo construido] es la misma”; sin embargo, este argumento no se discutió y por tanto, en este momento no fue explícito el significado del término “forma”. En otro grupo hubo una alusión a la necesidad de encontrar un punto (de fuga o centro de homotecia) para verificar que las figuras eran semejantes.

Construcción de un rectángulo semejante al dado

En todos los grupos detectamos estrategias de solución correctas e incorrectas. De las utilizadas, que no generan rectángulos semejantes, habíamos previsto una de ellas. En dos de los tres grupos, en algún momento del desarrollo de la tarea de construir un rectángulo semejante al dado registramos que algunos de los profesores consideraban que todos los rectángulos eran semejantes. En ambos grupos, la construcción implicó trazar un segmento paralelo a uno de los que conformaban el rectángulo, dentro del mismo, con lo cual obtuvieron un rectángulo con un lado compartido (y por tanto congruente) con el original, dos lados más cortos que los del original (pero solapando parte de estos) y un lado paralelo. En estos dos grupos luego advirtieron que, a pesar de que las dos figuras tenían ángulos homólogos congruentes, ésta era una solución incorrecta, lo cual les causó mucha sorpresa, pues al parecer cuestionaba la suficiencia del criterio "conservar la misma forma" para garantizar la semejanza. En uno de estos grupos, antes de ensayar con esta estrategia construyeron un rectángulo arbitrario.

Una estrategia incorrecta utilizada en dos de los grupos no la habíamos previsto como respuesta posible, aunque sí una similar. Ésta consistió en adicionar a dos segmentos contiguos del rectángulo, sendos segmentos de una misma longitud (o aumentar a la medida de dos segmentos una misma medida) y con los segmentos (o medidas) resultantes construir el otro rectángulo. En la Figura Nº 8 se muestra el resultado de aplicar tal estrategia al rectángulo $ABCD$, es decir sumar $\overline{BE}$ (o $\overline{DF}$) a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. El carácter incorrecto de la estrategia fue luego reconocido por ambos grupos.

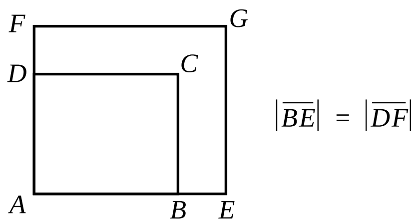


Figura Nº 8. Estrategia no efectiva de construcción de rectángulos semejantes

Dentro de las estrategias correctas, es decir aquellas que sí generan rectángulos semejantes, podemos citar el uso de la homotecia (con factores como 2, 3, 1.5) y la dilatación de los segmentos por un factor (generalmente, el factor 1/2 o 2) sobre, o en ausencia de, un plano cartesiano.

Para la construcción de un rectángulo semejante al dado, en dos de los grupos se empezó con la verificación de que la figura era un rectángulo.

Justificación de la semejanza entre los rectángulos

En todos los grupos, en algún momento del trabajo en torno a la justificación de la semejanza entre los rectángulos, se reconoció la necesidad de las condiciones de congruencia angular y/o de proporcionalidad entre los segmentos. En uno de los grupos, inicialmente se asumió la congruencia angular como condición suficiente para garantizar la semejanza y, en consecuencia, la justificación expresada se refiere sólo a ésta; en este caso la justificación recurrió (como se hizo en el caso del triángulo) a las relaciones de congruencia que se expresan entre los ángulos definidos por paralelas cortadas por una secante.

En todos los grupos, se reconoció que para garantizar la semejanza en el caso del rectángulo es necesario y suficiente verificar las dos condiciones señaladas. Para verificar la condición sobre la congruencia de los ángulos no hay un trabajo que vaya más allá de reconocer que aparentemente las amplitudes de pares de ángulos son iguales o de aludir a que la construcción hecha permite verificar la congruencia angular. En contraste con ello, la verificación de la condición sobre la proporcionalidad entre segmentos, mostró relativa diversidad entre los grupos y nos permite evidenciar que esta tarea favoreció la identificación del carácter incorrecto de algunas estrategias.

En dos de los grupos, advertir que las razones que podían establecer entre parejas de las longitudes de los lados de los dos rectángulos (o entre las medidas de los lados) no generaban una proporción, permitió que evidenciaran que tales rectángulos no eran semejantes y que, en general, no todos los rectángulos son semejantes entre sí. En uno de los grupos esto les permitió reconocer que el criterio de conservar la forma no era suficiente, aunque sí necesario, para determinar la semejanza de rectángulos.

Establecer las razones entre las longitudes de los segmentos homólogos de los rectángulos les permitió además reconocer que la estrategia de adicionar una misma longitud a los lados del rectángulo no generaba un rectángulo semejante, excepto que el rectángulo fuera un cuadrado. En esta dirección en dos grupos se elaboraron sendos argumentos similares al siguiente:

> Supongamos que a y b son las longitudes de los lados del rectángulo inicial, con $a \neq b$. Si a cada lado le sumamos un segmento de longitud c, obtenemos un rectángulo con lados de longitudes $a + c$ y $b + c$. Ahora bien, si los rectángulos son semejantes entonces debe cumplirse que las razones "a es a $a + c$" y "b es a $b + c$" forman una proporción. Suponiendo que así es, algebraicamente se puede obtener que "$a(b + c) = b(a + c)$" de lo que se deduce que "$a = b$", lo que contradice la condición de que sea un rectángulo no cuadrado y deja como única opción que la figura deba ser un cuadrado, o dicho de otra manera, que sólo para el cuadrado, la estrategia de adicionar un mismo valor hace que se obtenga una figura semejante.

De otra parte, la condición de proporcionalidad entre segmentos parece haber sido la fuente para que en ambos grupos se utilizara la estrategia de construcción en la que se dilatan (amplían o reducen proporcionalmente) los lados del rectángulo; en estos casos, el factor que se selecciona procede o bien de la elección de un número arbitrario o de la división de las medidas de un segmento del rectángulo dado y otro construido arbitrariamente.

Algunas inferencias y preguntas surgidas a partir del trabajo con los triángulos y rectángulos

Uno de los grupos, después de haber trabajado la construcción del triángulo y del rectángulo, centró su atención en tres asuntos. Uno de ellos se refería al número de paralelas que se requiere trazar si se pretende construir una figura semejante a un polígono dado haciendo que las dos figuras tengan en común un ángulo. A este respecto una de las personas del grupo señaló:

> Parece ser que cuando es un triángulo trazamos una paralela y ya; cuando es un rectángulo (es decir, con un lado más que el triángulo) tenemos que trazar dos paralelas. ¿Qué pasará en figuras que tengan más lados? Para un pentágono debería trazar tres paralelas.

Un poco después, a este respecto en el grupo se enunció y registró por escrito la siguiente consideración:

> […] de todas maneras, como las figuras semejantes se pueden meter una dentro de otra, se pueden hacer coincidir en uno de sus ángulos y siempre nos van a dar paralelas, o sea nos van a quedar lados que son paralelos entre la más grande y la más pequeña. Entonces si la figura tiene cuatro lados, resultarán dos paralelas; si tiene cinco, serán tres. […] Si hay seis, entonces serán cuatro paralelas las que quedan, y así sucesivamente. En el caso del triángulo había una, quedaba una paralela.

El segundo asunto fue planteado en términos de si existiría una relación entre las medidas de longitud de los segmentos que representaban el aumento (o la disminución) de los lados de la figura inicial para llegar a tener la figura semejante. Así, comparando el rectángulo inicial de dimensiones 3.1 centímetros por 5.2 centímetros con el rectángulo semejante obtenido al reducir el primero al 80%, generándose uno de dimensiones 2.5 centímetros por 4.1 centímetros[8] (ver Figura Nº 9), formularon lo siguiente:

> ¿Será que hay alguna relación aquí escondida? Esta medida tiene 0.6; 0.6 este pedacito y este pedacito tiene 1.1. ¿Habrá alguna relación entre esto y esto?[9]

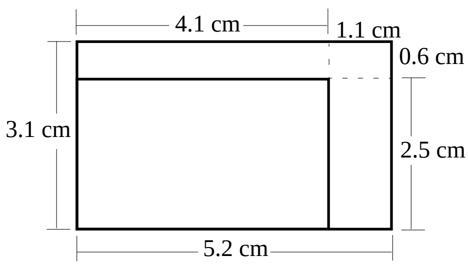


Figura Nº 9. Relación entre las longitudes de los aumentos

8. Estas medidas son las registradas por el grupo; sin embargo, las medidas exactas son 2.48 centímetros por 4.16 centímetros.
9. Más adelante en el apartado titulado “Discusión de resultados” presentaremos unas consideraciones al respecto de estas preguntas.

A este respecto, luego de hacer algunos dibujos y cálculos, dos profesores manifestaron no haber encontrado la relación buscada; también hablaron de buscar alguna relación entre los perímetros y las áreas de las figuras en cuestión, pero no logramos precisar a qué se referían exactamente y cómo se esperaba que esto contribuyera a la identificación de la relación entre las medidas de longitud de los segmentos que representaban el aumento.

El tercer asunto se refería a la búsqueda de una relación entre el aumento o disminución y el factor de ampliación o reducción, o en términos de los profesores, se proponían "mirar si puede haber proporcionalidad entre los factores y las líneas paralelas que quedan"; para ello tomaron varios factores de conversión, los aplicaron a las medidas del rectángulo dado (5.2 cm por 3.1 cm) y buscaron las diferencias. En la siguiente tabla recogemos la información con la que trabajaron; al revisar los cálculos pudimos identificar que algunas resultados fueron redondeados, uno de ellos de manera incorrecta:

Factor	**Largo (cm)**	**Ancho (cm)**	**Disminución/aumento en el largo**	**Disminución/aumento en el ancho**
0.32	1.6	1	3.6	2.1
0.8	4.2	2.5	1	0.6
1.5	7.8	4.7	2.6	1.6
2	10.4	6.2	5.2	3.1

Con esos datos, formularon preguntas como "¿se cumplirá que el factor de reducción 0.8 es al factor de reducción 0.32 como 1 es a 3.6, o como 0.6 es a 2.1?". Después de hacer cálculos, la respuesta que dieron al respecto es que no encontraron tal relación.

Construcción de un cuadrilátero semejante al dado

De las estrategias empleadas por los profesores en la construcción del cuadrilátero, tres no habían sido previstas como posibles respuestas; de ellas, dos no generan cuadriláteros semejantes. Una de tales estrategias consiste en prolongar dos de los segmentos y luego por un punto cualquiera de cada una de las prolongaciones construir sendas paralelas a los lados no considerados; la prolongación de los segmentos se hace de tal suerte que la figura construida no comparta ángulos con la dada. Con esta estrategia, ya sea que se comparta o no alguno de los ángulos, se garantiza la congruencia angular, mas no la proporcionalidad de los lados.

Una estrategia similar a la anterior fue empleada de manera exitosa en otro de los grupos; allí, la prolongación de los lados se hizo sobre dos de los lados contiguos de la figura dada, pero duplicando sus longitudes, para luego trazar paralelas a los lados no considerados por los extremos de los lados construidos.

La tercera estrategia no prevista, y al igual que la primera no efectiva, consiste en alargar en una misma cantidad por cada extremo, cada lado del cuadrilátero, y usar los extremos de los nuevos segmentos para trazar rectas cuyas intersecciones determinen los vértices del nuevo cuadrilátero, supuestamente semejante al original. Como lo pudimos corroborar a través de aserciones de los profesores que la ejecutaron, con esta estrategia creían estar obteniendo segmentos paralelos a los del cuadrilátero dado.

En uno de los grupos se realizó una construcción —anticipada como respuesta posible— que en efecto sí genera lados paralelos a los del cuadrilátero dado, pero no la proporcionalidad entre las longitudes; allí, en el interior del cuadrilátero se trazaron rectas a una misma distancia de cada lado y con sus intersecciones se determinaron los vértices del nuevo cuadrilátero. Esta estrategia parecía responder a la inquietud planteada por el observador acerca de si era posible hacer la construcción sin recurrir a tomar medidas.

En éste y en otro grupo se planteó también la idea de construir el cuadrilátero a través de la homotecia. Sin embargo, en ambos grupos reconocimos que sólo tenían una idea vaga de dicha transformación geométrica, del procedimiento a efectuar y de la conceptualización que hay detrás de éste. Al respecto, podemos comentar inicialmente que uno de los profesores sugirió que el efecto de la homotecia es transladar la figura en el plano. También podemos decir que en ambos grupos un procedimiento utilizado para realizar la homotecia, consistió en: elegir un punto P del plano y “conectarlo” con cada uno de los vértices del cuadrilátero mediante semirrectas de origen P; sobre cada una de ellas, a partir del vértice y en sentido opuesto al determinado por vértice-punto elegido, determinar sendos puntos a la misma distancia de cada vértice de la figura inicial; y, conectar los puntos así determinados, en el mismo orden en que se conectan los puntos de los que son imagen, para obtener un cuadrilátero.

En uno de estos grupos, aunque no lo explicitaron de manera precisa, se dieron cuenta de que, con la construcción hecha, obtenían una figura parecida a la dada, en una posición similar, pero que no podía ser semejante porque “no dan paralelas”. En el otro grupo, no advirtieron este hecho a pesar de que el observador les formuló preguntas al respecto del paralelismo entre los lados y/o de la congruencia angular; la ausencia de paralelismo entre los lados la atribuyeron a imprecisiones en el dibujo y no a cuestiones geométricas. En el primer grupo en cuestión, después de examinar ideas que iban teniendo y, en particular, después de explorar la situación en el triángulo y en el rectángulo, uno de los profesores encontró una estrategia apropiada para la tarea propuesta: eligió un punto (el de fuga o referencia), trazó semirrectas conectando tal punto con cada uno de los vértices del cuadrilátero y luego, a partir del punto elegido, sobre cada línea trazada tomó dos veces la distancia del punto al vértice con lo cual quedaron determinados cuatro puntos, los vértices de la figura construida. Al respecto, expresó:

> Se está tomando un punto de referencia y lo que estamos haciendo es ampliar una distancia con respecto al mismo punto de referencia. El factor de ampliación tendría que ver con la ubicación del punto de fuga; si lo hubiera tomado más lejos, posiblemente me va a cambiar la figura. Porque yo tomé con respecto a un punto fijo, entonces la distancia se iría ampliando, o sea que ahí el hecho de que la figura sea más grande o más pequeña nos lo está dando el punto de fuga.

En el grupo en que habían utilizado desde el inicio las homotecias, para el caso del cuadrilátero también usaron tal método y señalaron que con éste siempre obtendrían figuras semejantes.

Justificación de la semejanza entre los cuadriláteros

Después del trabajo realizado con los rectángulos pareció ser claro para los profesores que la congruencia angular y la existencia de proporcionalidad entre los lados serían las condiciones que determinan la semejanza para el caso de los cuadriláteros.

Para determinar la congruencia de los ángulos, los profesores aludieron nuevamente a la existencia de rectas paralelas cortadas por una secante. Con respecto a la verificación de esta condición vale la pena mencionar que en el caso en que se usó la estrategia de aumentar la longitud de cada lado en una misma medida y en uno de los casos en que se usó la homotecia de manera errónea, la apariencia de las figuras no hizo dudar a los profesores de si en efecto se trataban de figuras semejantes y en cierto sentido para ellos esta apariencia era suficiente para dar por verificado que la condición se satisfacía.

Algo similar a lo anterior evidenciamos en la justificación asociada a la estrategia de aumentar la longitud de cada lado en una misma medida, para determinar la proporcionalidad entre los lados. Allí, los profesores realizaron los cocientes entre las medidas tomadas sobre los dibujos y a pesar de obtener valores diferentes —que atribuyeron a la imprecisión del dibujo— sostuvieron que sí eran semejantes, hasta que reconocieron que uno de los valores de los cocientes sí era bastante diferente del valor de los otros. En otro de los grupos también se usó la estrategia del cálculo de los cocientes. Para justificar la existencia de proporcionalidad entre los lados, algunos profesores dividieron el cuadrilátero en dos triángulos para sobre éstos determinar la proporcionalidad y por ende su semejanza. En ninguno de los grupos donde se trabajó la construcción a través de la homotecia se estableció una justificación de la semejanza entre las figuras obtenidas.

Construcción de un sector circular semejante al dado

En sólo dos grupos se alcanzó a abordar la construcción del sector circular. En uno de ellos, algunos de los profesores no atendieron a la condición de que la figura construida no debía ser congruente y procedieron de la siguiente manera: dibujaron un segmento congruente al de la figura presentada, tomaron la amplitud del ángulo original y la reprodujeron convenientemente y luego, con radio igual a la longitud del segmento congruente, trazaron el arco de circunferencia con el compás.

Otro profesor del mismo grupo dibujó la cuerda correspondiente al arco, determinando así un triángulo isósceles, luego construyó un triángulo isósceles semejante a aquél con el ángulo definido por los lados de igual longitud común, y trazó el arco de la circunferencia con centro en el vértice que es centro del arco de la figura dada.

Quienes en el caso del cuadrilátero trabajaron con la estrategia de homotecia de manera errónea, también la aplicaron para el caso del sector circular; aquí, tomaron como centro de homotecia el vértice del sector circular y prolongaron los segmentos rectilíneos —y otros radios que trazaron— sumando un número determinado de unidades a partir de los vértices de la figura original. Entonces comenzaron una discusión acerca del "factor multiplicativo" involucrado en la homotecia.

En el otro grupo primero verificaron si realmente era un sector circular; para ello midieron los segmentos para determinar si eran radios y luego redibujaron el arco. Hecho esto procedieron a construir el sector circular semejante. Uno de los integrantes, al utilizar el método de la homotecia encontró que si bien podía construir, con relativa facilidad, los dos segmentos rectilíneos (y por supuesto el ángulo entre ellos) tenía dificultad para construir la totalidad del sector circular, ya que "tocaría pasar muchos puntos o … usar el compás".

Justificación de la semejanza entre los sectores circulares

El profesor que realizó la construcción a través del uso de triángulos semejantes para justificar que las figuras obtenidas son semejantes, luego de una discusión aclaró que para establecer la semejanza entre los dos sectores circulares se requiere la congruencia de los ángulos y que las longitudes de los lados de los triángulos inscritos en los sectores sean proporcionales. No obstante, luego dudaron sobre la necesidad de ambos criterios, al ser cuestionados por el observador. En algún momento de la discusión acerca de sobre qué elementos de las figuras se podía establecer la proporcionalidad, aludieron a las longitudes de los radios y de las cuerdas de los sectores, pero no a las longitudes de los arcos.

En el grupo donde se trabajó mediante las homotecias, los profesores establecieron que "para que dos sectores circulares sean semejantes deben cumplir que tengan el mismo ángulo y que haya proporcionalidad entre sus lados". Sin embargo, no realizaron procedimiento alguno para verificar que las figuras construidas satisfacían tales condiciones. Por alguna razón que no identificamos con claridad se ocuparon de estudiar la relación entre los perímetros y áreas de las figuras.

Construcción de una circunferencia semejante a la dada

En ambos grupos que abordaron esta tarea reconocimos más una discusión acerca de si todas las circunferencias son semejantes que un trabajo de construcción. Sin embargo, como parte de las discusiones, los profesores realizaron construcciones que los enfrentó al problema de identificar el centro de la circunferencia dada (para dibujar con el compás una concéntrica) o al problema de realizar la homotecia a todos los puntos de la circunferencia.

Esta tendencia a la discusión más que a la construcción hace que bajo este título no reportemos construcciones y que bajo el siguiente demos cuenta de algunos aspectos de tales discusiones.

Justificación de la semejanza entre las circunferencias

En uno de los grupos, la construcción de la circunferencia se dio mientras abordaban la construcción del sector circular. En este grupo se partió de la afirmación de que dos circunferencias concéntricas son semejantes, pero no se trazó una circunferencia concéntrica a la dada; dicha aserción fue cuestionada por el observador, generando una discusión en la que los profesores alternaron su posición a favor y en contra de que el carácter concéntrico de las circunferencias sea una condición necesaria para establecer la semejanza entre éstas; finalmente llegaron a coincidir en que no se requiere dicha condición. Luego, exploraron la posibilidad de obtener circunferencias semejantes no concéntricas, por medio de una homotecia; al respecto discutieron sobre la eficiencia de tal proceso, pues fueron conscientes de la necesidad de aplicar la homotecia a muchos puntos de la circunferencia. Concluyeron que ese método no era eficiente y que podían dibujar una circunferencia con un centro y radio cualquiera para obtener una figura semejante a la dada.

En el otro grupo, inicialmente se presentó la discusión sobre la semejanza de todas las circunferencias. Para determinar la validez de la afirmación señalaron que era necesario verificar la existencia de proporcionalidad y entonces se centró la atención en sobre qué elementos se define tal proporcionalidad. Uno de los integrantes mencionó la necesidad de determinar si existe proporcionalidad entre las longitudes de los radios y las longitudes de los arcos, pero otro adujo que "basta con verificar que los radios sean proporcionales, porque la longitud del arco está dada en términos del radio". Esto generó discusión acerca de la cantidad de elementos que se requieren para establecer la proporcionalidad, situación que si bien los llevó a reconocer que se requieren cuatro elementos para construir una proporción, no afectó la conclusión de que basta considerar radios diferentes para que haya semejanza. Con este nivel de precisión decidieron construir dos circunferencias y verificar que con las medidas de las longitudes de los radios y de las circunferencias sí se puede formar una proporción.

Construcción de una elipse semejante a la dada

En sólo uno de los grupos se registró algún trabajo en torno a la construcción de la elipse semejante a la dada. Allí, los profesores dibujaron triángulos rectángulos inscritos en la elipse dada (definidos por segmentos que evocaban los ejes) y elaboraron triángulos semejantes; algunos vértices de estos triángulo constituían puntos de la elipse a construir y por ellos trazaron "a ojo" la elipse.

Sobre la validez de este procedimiento no se hizo ninguna alusión pues en ese momento la sesión se dio por concluida.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta sección destacamos algunos de los resultados del trabajo de los profesores previamente expuesto, que a nuestro parecer evidencian que ellos sí advirtieron aspectos novedosos de la semejanza entre figuras geométricas o que se cuestionaron sobre éstos. La división que se explicita a través de los títulos responde más a una intención de organización de los resultados que a la independencia entre los mismos.

SOBRE LA IDEA DE SEMEJANZA

En los tres grupos pudimos detectar enunciados explícitos o acciones que, tomados en calidad de indicios, nos llevan a afirmar que inicialmente para varios de los profesores "ser semejante" significaba "tener la misma forma". Entre tales indicios podemos mencionar:

- el enunciado "todos los rectángulos son semejantes",
- la conjetura de que se puede obtener un rectángulo semejante a uno dado, trazando en su interior un segmento paralelo a uno de sus lados y congruente con él,
- la conjetura de que un triángulo rectángulo no isósceles se puede ampliar o reducir en su tamaño aumentando la misma cantidad de longitud a sus catetos,
- la conjetura de que se puede obtener un cuadrilátero semejante a uno dado (no regular) trazando en su interior segmentos paralelos a los lados, a una misma distancia de ellos.

Consideramos que la noción de semejanza basada en la idea de forma es imprecisa por cuanto se basa en una categoría conceptual que sólo permite clasificar las figuras geométricas de manera relativamente burda, por lo menos en muchos de los casos. Por ejemplo, la *forma rectangular*, como categoría conceptual, permite distinguir los rectángulos de otros polígonos convexos; sin embargo, no permite distinguir entre rectángulos semejantes y no semejantes a uno dado. Para lograr esa distinción se requiere una categoría que hable, por ejemplo, de la *forma rectangular con lados contiguos en una determinada razón*.

Identificamos además, que los profesores a través del trabajo realizado revaluaron el criterio de que la *semejanza* se puede describir a partir de la idea de *igual forma*. Específicamente reconocimos que en la justificación de la semejanza de los rectángulos construidos, los profesores verificaron que la forma no es un criterio suficiente para garantizar la semejanza de figuras, pero, a la vez, vieron que dicho criterio es una consideración necesaria para empezar un análisis acerca de la semejanza entre figuras, pues figuras con distinta forma (v.g., un triángulo y un rectángulo, una figura compuesta por curvas y una compuesta por segmentos rectilíneos) no pueden ser semejantes. Sin embargo, afirmaciones tales como "todos los cuadrados son semejantes" o "todas las circunferencias son semejantes", puestas en juego en algunos momentos del desarrollo del taller, parecían cuestionar de nuevo la relación entre igualdad en forma y semejanza.

De otra parte, reconocemos que si bien el taller tenía la intención de ser un medio para que los profesores reelaboraran su definición de semejanza geométrica y que el trabajo realizado logró evidenciar que para algunos profesores tal definición era vaga, bastante intuitiva y no válida para cualquier par de figuras, no haber abordado el trabajo propuesto en el literal f hizo que dicha reelaboración fuera personal y quizá no muy consciente.

SOBRE LAS CONDICIONES PARA GARANTIZAR LA SEMEJANZA

En contraste con la exigua referencia a la definición de semejanza, reconocemos que el taller —y particularmente la tarea de justificación— generó un intenso trabajo en torno a los criterios o condiciones a través de los cuales establecer la semejanza entre dos figuras. El potencial de este trabajo se vio acentuado por el orden en que se entregaron las figuras. De manera específica, creemos que fue bastante conveniente que el triángulo precediera al rectángulo; este hecho hizo que los profesores primero aludieran a los criterios para determinar cuándo dos triángulos son semejantes, lo que condujo de manera efectiva a reflexionar sobre el carácter suficiente y necesario de los criterios que se refieren a la congruencia angular y a la proporcionalidad directa entre las longitudes de los segmentos. Consideramos que esta reflexión permitió a los profesores ganar consciencia acerca de que la congruencia angular, lo mismo que la proporcionalidad entre las longitudes de los lados son, cada una, condición necesaria y suficiente para la semejanza de triángulos; lo cual genera que la verificación de una de ellas garantice la otra. A este respecto, en la plenaria realizada, uno de los profesores señaló como conclusión que "si se tiene la congruencia angular se sigue la semejanza entre los triángulos y de ésta se deduce la proporcionalidad entre la longitud de los lados homólogos, y viceversa". Afirmamos que algunos profesores no tenían suficiente consciencia de ello, apoyados en el hecho de que para verificar si dos triángulos son semejantes examinaron las dos condiciones, y en que en una discusión se defendía una jerarquía entre tales criterios, pues alguien señalaba que “primero es la congruencia de los ángulos y es esto lo que implica la proporcionalidad de las longitudes de los lados y no al contrario”.

Estos criterios fueron utilizados luego para algunas de las demás figuras lo cual permitió que los profesores ganaran consciencia de la necesidad y no suficiencia de cada uno. Por ejemplo en el caso del rectángulo, algunos profesores pudieron verificar que a pesar de satisfacer el criterio que alude a la existencia de ángulos congruentes, no se garantiza la semejanza. También pudieron identificar que para algunas figuras (v.g., el sector circular, la circunferencia y la elipse) los criterios no son aplicables directa y fácilmente, ya sea por la ausencia de ángulos o por la dificultad de determinar la proporcionalidad entre segmentos no rectilíneos.

Por otra parte, para verificar que los criterios de semejanza se satisfacían fue recurrente la mención de teoremas y enunciados de la matemática (no siempre completos) por parte de los profesores, sin que se explicitara siempre, de manera clara, cuál era el enunciado del teorema, cuál el significado del enunciado en cuestión ni cómo era que éste se aplicaba a —o justificaba— la idea discutida. Por ejemplo, en repetidas oportunidades se mencionó el Teorema de Tales[10], pero realmente se estaban refiriendo al teorema que establece la congruencias entre algunos de los ángulos que se forman al cortar dos paralelas con una recta.

SOBRE LAS ESTRATEGIAS

No sólo los criterios de semejanza se fueron aplicando a cada par de figuras; también las estrategias de construcción se fueron usando como base para el trabajo de elaboración de figuras posteriores. Esto generó que los profesores se encontraran con problemas suscitados por su propio trabajo; por ejemplo, en algún momento los profesores tuvieron que sustentar por qué el rectángulo construido al trazar un segmento paralelo y congruente a uno de los del rectángulo dado no era semejante a aquél, cuando el procedimiento de trazar un segmento paralelo sí les había funcionado para el triángulo, o por qué si la homotecia se mostraba tan favorable para el caso de las figuras de bordes rectilíneos no lo parecía tanto para las figuras que contenían segmentos curvos o eran una curva en sí mismas. Además de enfrentarlos a problemas —desde nuestra perspectiva importantísimos, deseables y muy necesarios para reconceptualizar asuntos de la semejanza geométrica—,

10. Como se puede ver en los dos enunciados siguientes del teorema de Tales, ninguno hace referencia a los ángulos formados por las rectas en cuestión: “Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra” y “La proyección paralela preserva el cociente entre las medidas de las longitudes de segmentos homólogos”.

mantenerse trabajando con una misma estrategia y avanzar en la aplicación y sustentación de la misma, les dio cierta seguridad a los profesores, pues probablemente sintieron que habían encontrado un procedimiento general, es decir, aplicable a cualquier figura. Este fue el caso de un profesor que siempre intentó descomponer la figura en triángulos, incluso cuando tenía segmentos no rectilíneos o era una curva; por supuesto que en este caso estas últimas figuras requerían de un número elevado de triángulos y de un proceso de interpolación geométrica. En consecuencia, este profesor siempre incorporaba en sus explicaciones y justificaciones la congruencia de ángulos y la proporcionalidad entre las longitudes de los lados.

Aunque mantenerse y avanzar en una misma estrategia de construcción de figuras semejantes no era una intención explícita del taller, los diseñadores sí habíamos pensado en esta posibilidad. El hecho de que una persona haya desarrollado el taller, o buena parte de éste, en forma progresiva (es decir, basándose en el trabajo previo) puede confirmar la idea de que el taller promovió algún aprendizaje relativo a: la manera de construir una figura semejante, los criterios para sustentar la existencia de semejanza e incluso, la idea misma de tal concepto. Por ejemplo, en uno de los grupos evidenciamos que a pesar de que la homotecia fue mencionada inicialmente por uno de los profesores sin una explicación clara de su significado, los profesores tuvieron varias oportunidades, al elaborar las distintas figuras y en las discusiones en el grupo, de ver: (i) el problema implicado en su concepción inicial con respecto al factor multiplicativo y no aditivo que se debe emplear para la ubicación en las líneas de los puntos que determinan la nueva figura; (ii) la posibilidad de aplicar una homotecia a figuras cuyos lados no son segmentos rectilíneos y por consiguiente no tienen vértices; (iii) la posibilidad de usar la homotecia y experimentar su utilidad para construir figuras semejantes; y, (iv) la posibilidad de que a través de una homotecia podría plantearse una definición de semejanza entre figuras válida para cualquier figura.

No obstante los indicios de que los profesores lograron algún aprendizaje frente a los asuntos mencionados, consideramos que también hay indicios de que el aprendizaje logrado pudo no concretarse o afianzarse suficientemente con el taller. Por ejemplo, como resultado de su trabajo en el caso del rectángulo, en uno de los grupos reconocimos que: (i) advirtieron que trazar una paralela a uno de los lados o sendas paralelas a dos de los lados contiguos del rectángulo (cuando se quiere hacer la construcción de manera que los dos rectángulos compartan un ángulo) no constituyen estrategias exitosas para lo que se quiere; y, (ii) establecieron una estrategia que tiene en cuenta las dos condiciones requeridas para la semejanza de polígonos (i.e., la congruencia angular de elementos homólogos y la proporcionalidad de las longitudes de lados homólogos). Sin embargo, cuando trabajaron en el caso del cuadrilátero se evidenció que las ideas desechadas y las establecidas en relación con las estrategias útiles para la tarea en cuestión, no tuvieron el suficiente peso y sustento como para utilizarlas con seguridad en este caso.

En una dirección similar a lo planteado inmediatamente antes, advertimos que el conocimiento de los criterios de semejanza para un determinado tipo de figuras puede no necesariamente orientar su construcción. En efecto, en uno de los grupos observamos la siguiente situación que permite ilustrar que al parecer saber que dos rectángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son congruentes y sus lados proporcionales no garantiza que la construcción se haga teniendo en cuenta esas dos condiciones: para comenzar a abordar la tarea de construir una figura semejante al rectángulo dado, los profesores no explicitaron las condiciones requeridas, aunque durante el trabajo con el triángulo habían explicitado la necesidad de la congruencia angular y la proporcionalidad entre lados homólogos para cualquier polígono. Sin embargo, al hacer la construcción supusieron tácitamente que era suficiente que la figura fuera un rectángulo. Una vez trazado el rectángulo presuntamente semejante al dado, para verificar la semejanza examinaron la proporcionalidad entre lados homólogos, lo que los llevó a verificar que la estrategia usada no era efectiva.

Esta observación nos permite señalar que las acciones de construir rectángulos semejantes y verificar semejanza entre rectángulos dados ponen en juego y exigen conocimientos matemáticos conceptuales y procedimentales diferentes. En efecto, lo realizado por los profesores para verificar la semejanza requiere, entre otras acciones, medir longitudes, medir amplitudes, identificar elementos homólogos, comparar medidas de amplitud de ángulos homólogos para determinar si son o no iguales, comparar medidas de longitud de lados homólogos, dos a dos, para determinar si forman proporción, concluir con base en la información recogida. Por su parte, construir un rectángulo semejante a uno dado podría requerir, entre otras acciones, construir un ángulo congruente a uno dado, construir segmentos de longitudes proporcionales a las de unos dados —lo que se puede hacer utilizando o no medidas— y realizar esas dos acciones en el orden adecuado para armar el rectángulo.

Si bien, como lo señalamos antes, consideramos que el conocimiento de los criterios de semejanza para un determinado tipo de figuras puede no necesariamente orientar su construcción, también creemos que a pesar de lograr una construcción pueden no advertirse claramente los conocimientos geométricos que la sustentan y que eventualmente podrían incorporarse a la justificación de la semejanza. Esto se evidencia al considerar cómo en un grupo los profesores, luego de varios ensayos con un procedimiento que emulaba de manera difusa elementos de la construcción a través de la homotecia, consiguen construir un cuadrilátero semejante al dado al duplicar convenientemente sendos segmentos definidos por los vértices del cuadrilátero y un punto P, pero —desde nuestra perspectiva— no consiguen relacionar la acción de tomar dos veces la distancia del punto P a cada vértice, con el hecho de que la razón de homotecia es 2 y que, en consecuencia, la longitud de los lados del cuadrilátero construido son el doble de la longitud de los lados del cuadrilátero dado; más bien, observamos que establecieron de manera errónea una relación entre la ubicación del punto *P* y el tamaño de la figura semejante construida, como lo indican las afirmaciones “el factor de ampliación tendría que ver con la ubicación del punto de fuga”, “el hecho de que la figura sea más grande o más pequeña nos lo está dando el punto de fuga”, “tocaría cambiar el punto de fuga [para construir otra figura semejante a la dada]”. Adicionalmente, no creemos que hayan visto que la justificación de ese procedimiento se pueda hacer en términos de semejanza de triángulos, es decir, que hayan visto que al trazar dos semirrectas de origen en un mismo punto *P* del plano, que contengan respectivamente los extremos, *A* y *B*, de un lado de la figura, están determinando el triángulo *ABP* y que luego, al tomar sobre tales semirrectas, dos veces la distancia del punto *P* a cada uno de los puntos *A* y *B* se están determinando los puntos *A’* y *B’*, tales que el triángulo *A’B’P* es semejante al triángulo *ABP* y, en consecuencia, quedó trazado el lado homólogo al lado de extremos A y B del cuadrilátero dado, siendo 2 el factor de ampliación (ver Figura Nº 10).

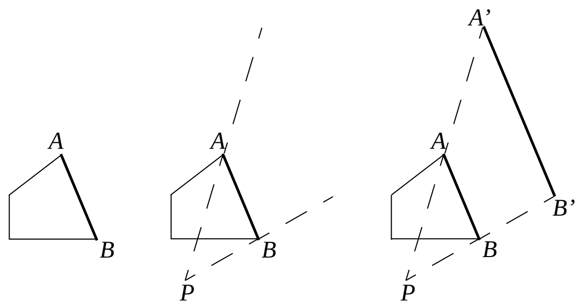


Figura Nº 10. Triángulos semejantes subyacentes en la homotecia

SOBRE UN INTERROGANTE PLANTEADO Y NO RESUELTO POR LOS PROFESORES

Frente al interrogante que se plantean y no llegan a resolver (ver p. 75), creemos que surgió vinculado a la estrategia establecida e indica que fueron conscientes de que aumentar o disminuir la misma cantidad de longitud a los lados del rectángulo no produce rectángulos semejantes. Quizás si hubieran tenido una aproximación general al asunto habrían podido encontrar fácilmente la solución. A continuación se esboza una (ver Figura Nº 11). Si el rectángulo cuyos lados miden $a + x$ y $b + y$ es semejante al rectángulo cuyos lados miden a y b, se cumple la proporcionalidad entre las medidas de sus lados, es decir, $(a + x)/a = (b + y)/b$, de donde resulta que $x/y = a/b$. Esto implica que el rectángulo cuyos lados miden x y y es semejante a cada uno de los otros dos rectángulos mencionados.

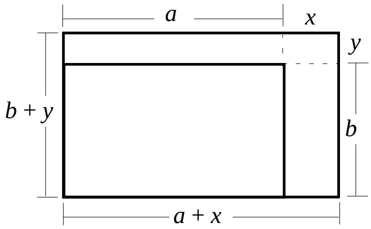


Figura Nº 11. Aumentos o disminuciones proporcionales para generar rectángulos semejantes

Al buscar si los factores de reducción/ampliación y las disminuciones/aumentos en el largo y el ancho de los rectángulos implicados están en proporción (directa), la respuesta fue negativa. Con respecto a este asunto, creemos que el interrogante planteado de manera imprecisa y su concreción en una cierta expresión numérica indican una actuación impulsiva, apoyada en el manejo de expresiones simbólicas, sin dar a ellas significado en el contexto en que se está trabajando. No advierten que, por ejemplo, existe proporción directa entre los factores 0.8 y 0.32 y las longitudes 4.16 y 1.664 y las longitudes 2.48 y 0.992 (longitudes obtenidas de aplicar dichos factores a las longitudes del rectángulo inicial: 5.2 y 3.1); y en consecuencia, no puede haber proporción entre tales factores y las longitudes 1.04 y 3.536 y las longitudes 0.62 y 2.108 (longitudes obtenidas de hacer las diferencias entre los lados de los rectángulos semejantes que se obtuvieron inicialmente), pero sí hay con certeza proporción entre las parejas de longitudes mencionadas inmediatamente antes y los factores 0.2 y 0.68 (que son el complemento con respecto a la unidad de los factores tomados inicialmente).

UN BALANCE PARA TERMINAR Y RECOMENZAR

Luego de haber desarrollado la experiencia descrita en los anteriores apartados creemos necesario hacer una especie de balance crítico de la misma que constituya un nuevo punto de inicio, o al menos de referencia, para las futuras experiencias de diseño curricular. Este balance lo hemos organizado a través de varios títulos que contienen consideraciones resultantes de una mirada a la actividad desarrollada por los profesores y los observadores.

CON RESPECTO A LAS TAREAS DEL TALLER

El hecho de no haber desarrollado la segunda y tercera partes del taller de la manera prevista, nos impide hacer un balance crítico de éstas. Sin embargo, como la primera parte sí se desarrolló de manera bastante aproximada a como se había planeado nos ofrece la posibilidad de hacer tal balance.

Al respecto de la tarea del literal a, consideramos que fue una decisión acertada entregar una a una las figuras, pues así no se anticiparon problemas que subyacen a la construcción de figuras con condiciones diferentes; habría sido conveniente anunciarles qué cantidad de figuras se iban a entregar para generar más consciencia de la limitación impuesta por el tiempo disponible. También fue acertado el orden de entrega de las figuras pues implicó, como se tenía previsto, la aparición de nuevos problemas y el cuestionamiento de las estrategias utilizadas.

De otra parte, vemos necesario considerar la pertinencia de algunos cambios de distinta índole. Por ejemplo, entre los instrumentos disponibles se deberían incluir calculadoras para agilizar la realización de los posibles cálculos. Otro asunto sobre el que aún no tenemos total claridad, se refiere a la conveniencia de cambiar algunas figuras: presentar un triángulo que no sea rectángulo y un rectángulo para el cual la diferencia entre las longitudes de los lados adyacentes sea mayor. Un tercer cambio tiene que ver con la idea de incluir una tarea inicial, a través de la cual se pueda generar una reflexión y discusión acerca de la idea de semejanza que tienen los profesores antes de realizar las tareas de construcción y justificación.

Con respecto a la tarea propuesta en el literal b, logramos advertir que el proceso de escribir con detalle los pasos de la construcción de las figuras semejantes, ayudó a que los profesores vieran los supuestos tácitos que habían hecho y la necesidad de explicitarlos y comprobarlos; adicionalmente, este proceso contribuyó a que utilizaran un lenguaje matemático más cuidadoso para expresar sus realizaciones —e incluso a emplear notaciones y lenguaje algebraico—, siendo más precisos en el uso de los términos. Sin embargo, durante la implementación no logramos que este proceso se realizara para todas las figuras abordadas con lo cual suponemos que se perdió en precisión y concreción respecto de los procesos empleados para es resto de las figuras. Además, la poca insistencia de nuestra parte en que se describieran los procedimientos limitó las posibilidades de que los profesores a través de éstos pudieran reconocer que hay al menos dos ideas de semejanza (como transformación geométrica y como relación entre figuras geométricas) que pueden depender del tipo de estrategia usada; así por ejemplo, si la estrategia usada es la homotecia, la idea de semejanza que mejor se compagina es la de transformación geométrica.

Definitivamente, consideramos que la tarea de justificación, presentada en el literal c, fue y es medular. Desde nuestra perspectiva de lo sucedido, pensamos que la justificación no constituye en sí misma un objetivo del taller sino más bien un medio a través del cual se logran cuestionar las condiciones de semejanza, se exige y promueve la comprobación de la satisfacción de éstas, y se gana en consciencia sobre el carácter necesario y suficientes de tales condiciones.

Finalmente, debemos precisar que el taller, en su conjunto, no sugiere rumbos didácticos para la enseñanza de la semejanza; ésta no es su intención general. No obstante, sí involucra una reflexión sobre el conocimiento matemático que constituye un insumo importantísimo a la hora en que los profesores deban diseñar una propuesta didáctica para promover el aprendizaje de la semejanza en los cursos de geometría de sus instituciones escolares.

CON RESPECTO A LA IMPLEMENTACIÓN

En primer lugar, el tiempo estimado para el desarrollo de cada una de las partes del taller fue bastante reducido en comparación con el tiempo empleado. Este hecho puede justificarse parcialmente en que estimamos el tiempo requerido sobre la base del tiempo empleado por nosotros para resolverlo trabajando de manera individual y no en grupo, lo cual no permitió que hubiese espacio para la discusión o conversación con otros, ni para que cada quien presentara su(s) estrategia(s) empleada(s) a los demás, circunstancias que sí se dieron en la implementación del taller con los profesores y que tomaron un tiempo considerable. Por otro lado, la no presencia de un observador que cuestionara los resultados del trabajo, mientras resolvíamos el taller, disminuyó la posibilidad de generar una revisión de las estrategias, las justificaciones, las construcciones, etc. También, la diferencia entre los tiempos estimados y empleados pudo deberse a que en algunas partes del taller los profesores dirigieron su atención a aspectos secundarios o marginales del trabajo (v.g., la insistencia de construir a través de una rotación, una figura congruente a la figura semejante ya construida), o a la realización de cálculos aritméticos sin recurrir a la calculadora. En consecuencia, reconocemos que para una próxima implementación debemos prever un tiempo mayor para el desarrollo del taller, hacer la previsión con base en una implementación que contemple la actividad de grupo, así como estar atentos a reorientar la actividad de los profesores cuando advirtamos que se ocupan de aspectos no centrales para el taller; con respecto a esto último, creemos conveniente anticipar tales aspectos y disponer de potenciales reacciones para reencauzar el trabajo.

En segundo lugar, debemos referirnos a nuestra actuación en la implementación del taller. En nuestra condición de observadores del desarrollo del taller en repetidas oportunidades tuvimos duda acerca de si hacer o no intervenciones ante el trabajo de los profesores (v.g., presentar una pregunta, expresar un comentario en favor o en contra, establecer una respuesta alternativa, realizar una acción o expresión de aceptación o rechazo, etc.). Estas dudas pueden explicarse de diferente manera. De un lado, reconocemos que el papel de observador genera ciertas restricciones a la intervención, pues es evidente que cualquier intervención modifica y condiciona la actuación natural de los profesores, aspecto que interesa observar. De otro lado, es también claro que a pesar de que en la etapa de diseño hayamos realizado un estudio y reconceptualización de la semejanza geométrica, no siempre nos sentimos suficientemente seguros con el conocimiento geométrico alcanzado, ni siempre el conocimiento didáctico logrado por la reflexión y actuar docente tiene un nivel tal que garantice que las intervenciones efectivamente beneficiarán el aprendizaje de los profesores que abordan el taller. Un tercer aspecto a considerar es precisamente el hecho de que estamos convencidos de que cada quien logra una apropiación específica de las intenciones del taller y que a pesar de haber comentado y discutido tales intenciones, queda la duda de si las intervenciones favorecerán el logro de dichas intenciones. Un último aspecto tiene que ver con la anticipación de respuestas; si bien, como se puede evidenciar en este documento, habíamos previsto varias respuestas de los profesores a las diferentes tareas propuestas en el taller, no explicitamos las reacciones posibles y potencialmente convenientes que a modo de guión nos ofrecieran un marco de acción reflexionado con anterioridad.

Para una próxima implementación del taller, si bien contamos con la experiencia brindada por la implementación objeto de este artículo, creemos necesario explicitar de manera más precisa las intenciones de aprendizaje del taller y las reacciones posibles de los observadores (tales como comentarios, preguntas, ejemplos, contraejemplos, enunciados matemáticos, etc.).

De otra parte, sentimos la necesidad de expresar nuestra reflexión sobre la plenaria. Consideramos que ésta constituyó fundamentalmente un espacio de socialización del trabajo realizado, pero no constituyó un espacio para institucionalizar y construir una consciencia colectiva al respecto del trabajo elaborado. Si bien en la plenaria se presentaron los procedimientos empleados para construir las figuras semejantes y se reprodujeron los argumentos que podrían sustentar la existencia de semejanza entre las figuras —aspectos importantes en el taller—, no se abordó con profundidad la discusión en torno a otros aspectos no menos importantes. Por ejemplo, no se realizó una reflexión sobre el concepto de "forma" y sobre la posibilidad y limitación de establecer una relación de la semejanza geométrica —en tanto concepto matemático— con éste. Tampoco se abordaron con detalle las diferencias esenciales entre las diferentes estrategias de construcción utilizadas ni las reelaboraciones con respecto a la definición de semejanza que los profesores habían logrado en el desarrollo del taller. Lo anterior se pudo deber a la limitación del tiempo, a la decisión de cambiar la estrategia de trabajo en la segunda y tercera parte del taller y a la consecuente poca preparación de la plenaria bajo estas nuevas condiciones. A pesar de esta mirada crítica a lo efectivamente realizado en la plenaria, tenemos la percepción de que las acciones y discusiones desarrolladas sí contribuyeron a ganar consciencia en cada uno de los profesores asistentes; de hecho creemos que quienes no asistieron a ésta quedaron a menos de la mitad de camino en la reflexión y reelaboración en torno a la semejanza geométrica.

SOBRE LA ESCRITURA DEL ARTÍCULO

Finalmente, debemos expresar nuestra satisfacción al haber logrado realizar una experiencia similar a la que les proponemos a los profesores que vivencien como parte de la estrategia de un programa de desarrollo profesional; esto nos ha permitido experimentar de manera directa algunas tensiones y satisfacciones ligadas al proceso de diseño, implementación y análisis de lo observado. Además, nos sentimos muy a gusto al poder contar con un documento que ilustra lo que pretendemos se concrete como reporte escrito de la experiencia de diseño y desarrollo curricular. Consideramos que si bien este artículo puede contener una serie de falencias y defectos, constituye un referente para futuras experiencias similares.

REFERENCIAS

Andrade, L., Perry, P., Fernández, F. y Guacaneme, E. (2002). *Rutas pedagógicas de las matemáticas escolares. Una mirada a la práctica del profesor* (documento no publicado). Bogotá: una empresa docente.

Díaz, C., Álvarez, J., Torres, A. y Guacaneme, E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa la forma y el número.* Madrid: Editorial Síntesis.

Friedlander, A. y Lappan, G. (1987). Similarity: Investigations at the middle grades level. En M. Montgomery y A. Shulte (Eds), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 136-143). Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics.

Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Madrid: Editorial Síntesis.

Slavit, D. (1998). Above and beyond AAA: The similarity and congruence of polygons. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3* (4), 276-280.

Zaslavsky, O. (1991). ¿In what ways are similar figures similar? En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings Fifteenth PME Conference* (vol. 3, pp. 378-385). Assisi: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Edgar Guacaneme
Luisa Andrade
Patricia Perry
Felipe Fernández
“una empresa docente”
Universidad de los Andes
Tel.: 3 39 49 49 ext. 2717

APÉNDICE
TALLER SOBRE SEMEJANZA GEOMÉTRICA

PARTE 1 (TIEMPO ESTIMADO: UNA HORA Y MEDIA)

El siguiente trabajo es para realizar en grupo de tres o cuatro profesores. Cada grupo deberá registrar por escrito los resultados de las tareas propuestas.

Para cada una de las figuras que se van a ir entregando[11]:

a. Dibujen una figura que no sea congruente pero sí semejante (para esta tarea pueden emplear los materiales, instrumentos y equipos que están sobre la mesa[12]).

b. Den cuenta de los pasos que siguieron para hacer la nueva figura, registrando detalles de los aspectos geométricos involucrados.

c. Justifiquen por qué las figuras son semejantes.

PARTE 2 (TIEMPO ESTIMADO: TRES CUARTOS DE HORA)

El siguiente trabajo es para realizar en el grupo o entre grupos. Cada grupo deberá registrar por escrito los resultados de las tareas propuestas.

d. Expliciten todos los procedimientos **diferentes** que hayan sido utilizados en la construcción de figuras semejantes. Pongan a prueba cada uno de tales procedimientos para determinar para cada figura cuáles sirven y cuáles no.

e. Identifiquen o diseñen un procedimiento que permita construir figuras semejantes a cualquiera de las trabajadas. Descríbanlo.

f. Examinando las justificaciones dadas para la tarea del literal c, describan las condiciones para que dos figuras sean semejantes. Procuren que la descripción sea aplicable a la mayor cantidad de figuras abordadas. El reto es que su descripción pudiera aplicarse a todas las figuras abordadas.

PARTE 3 (TIEMPO ESTIMADO: MEDIA HORA)

En plenaria cada grupo presentará el resultado de las tareas de la Parte 2 del taller.

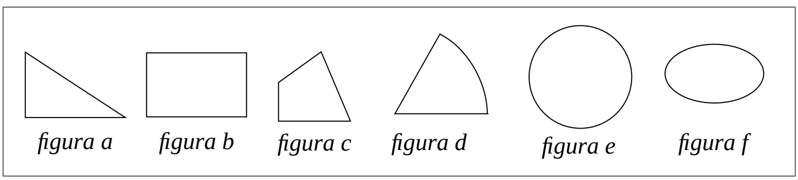


Figura Nº 12. Figuras entregadas a los profesores

---

11. En la Figura Nº 12 se muestran las figuras entregadas a los profesores y la secuencia en que esto se hizo.
12. Reglas graduadas, escuadras, compases, transportadores, un retroproyector de acetatos, transparencias, marcadores, bandas de caucho, papel cuadriculado y papel blanco.

ARTÍCULOS DE PROFESORES

UNA OPORTUNIDAD PARA PROFUNDIZAR EN ASPECTOS RELATIVOS A LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN COMO TÓPICO MATEMÁTICO

AMANDA MORENO, ARNALDO DE LA BARRERA,
MARGARITA MANTILLA Y NUBIA CARREÑO[1]

Se reportan detalles de una experiencia de desarrollo profesional en la que tuvimos oportunidad de aproximarnos al estudio de algunos aspectos de la razón como tópico matemático. Como parte de la experiencia se diseñó una secuencia de actividades para los estudiantes, se implementó, se analizaron los resultados y finalmente se llegó hasta escribir el presente artículo. Fueron de especial valor para nosotros la reconceptualización que pudimos hacer con respecto a la razón, la consciencia que ganamos sobre la complejidad del tema tanto para los estudiantes como para los docentes y el aporte que para nuestro conocimiento representó el ejercicio de escribir este artículo.

INTRODUCCIÓN

La experiencia a la que nos referimos en este artículo se llevó a cabo en el marco del "Programa de desarrollo profesional para profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores" que fue orientado por el grupo "una empresa docente" de la Universidad de los Andes. En pocas palabras, el trabajo que realizamos se enfocó en el diseño de una secuencia de actividades de enseñanza de un tópico matemático específico —la razón—, en su implementación y observación, y en el análisis de resultados; este trabajo fue apoyado por las actividades realizadas en los seminarios del Programa, la lectura de varios artículos que nos permitió reconceptualizar nociones implicadas en la enseñanza del tema en cuestión, y una reflexión sobre la forma como en la escuela se ha venido enseñando la razón, que tuvo su fuente en una mirada a la presentación que algunos libros de texto hacen del tópico.

La implementación de la secuencia de actividades se realizó con grupos de estudiantes de grado séptimo y octavo de educación básica secundaria en la Escuela Normal María Montessori de Bogotá.

1. Los autores agradecen a Patricia Perry sus comentarios y sugerencias a las varias versiones por las que pasó la elaboración de este artículo.

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 95-112). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

ELEMENTOS CONCEPTUALES

Para el desarrollo del proyecto se consultaron básicamente cuatro documentos: Freudenthal (1983), Schwartz (1988), Vergnaud (1991) y MEPS (1998). En esta sección registramos algunos de los elementos conceptuales que llamaron nuestra atención al hacer la lectura y, en cierta forma, tratamos de considerarlos tanto en el diseño de actividades como en el análisis de los resultados obtenidos.

En términos generales, en los referentes teóricos consultados no se consiguió una definición concreta del concepto de razón. Los planteamientos de los autores giran en torno a conceptos tales como: fracción, función, relación de equivalencia, estructura multiplicativa, magnitud, cantidad y medida. Por otra parte, los autores coinciden en mencionar las dificultades a las que se enfrentan los docentes y educandos cuando abordan el estudio de la razón.

Schwartz (1988) se refiere a *cantidades adjetivadas* (cantidades que tienen un referente) para mencionar las cantidades que surgen en los procesos de contar, medir o hacer cálculos con cantidades contadas o medidas. Así, (10, dulces/bolsa, cantidad de dulces por bolsa), (5600, $, costo del artículo X), (3.8, m, largo de una mesa), (60, km/h, rapidez de un vehículo) son ejemplos de cantidades adjetivadas. Denomina *extensivas* a las cantidades adjetivadas que surgen en procesos directos de conteo o medición o al sumar o restar cantidades contadas o medidas y que describen la cantidad del atributo que tiene el objeto en cuestión, en tanto que denomina *intensivas* a las cantidades obtenidas al dividir cantidades extensivas y que en realidad no hacen referencia a cantidad sino a calidad y son propiedades que permiten caracterizar un todo a partir de una muestra. Para ilustrar lo que es una cantidad intensiva y su diferencia con las extensivas, el autor propone considerar un montón de granos de café descrito por las tres cantidades siguientes: (5, libras, peso del café), (15000, $, costo del café) y (3000, $/libra, precio por libra de café) —esta última es una cantidad intensiva en tanto que las otras dos son extensivas— y al respecto afirma que

> La cantidad precio por libra es una clase diferente de descriptor del café. Mientras que las dos primeras cantidades describen todo el montón de granos de café, la cantidad precio por libra puede describir no sólo todo el montón de granos sino también un solo grano de café o un camión cargado de tales granos. Es un descriptor de una 'cualidad' del café y no de la cantidad de café. (p. 43)

Schwartz señala también que las cantidades intensivas se pueden reconocer por el hecho de que sus unidades de medida contienen el término "por" aunque ocasionalmente sea tácito como por ejemplo en el caso de la temperatura en la que "un grado es una medida de la energía cinética promedio por partícula en un material" y también en el caso de la velocidad expresada en nudos (milla naútica por hora). Además, destaca el hecho de que las cantidades intensivas no dan información acerca del número o cantidad de las cantidades extensivas implicadas, sino de una relación entre tales cantidades; por ejemplo, la cantidad intensiva, 5 dulces por niño, asociada al evento de repartir dulces entre un grupo de niños no informa ni sobre la cantidad de niños ni sobre la cantidad de dulces implicados en un evento particular de tal repartición.

En términos generales, la representación gráfica de una cantidad intensiva es más difícil de comprender que la de una cantidad extensiva: ésta se puede representar por un punto ubicado de manera apropiada sobre una recta numérica, en tanto que la cantidad intensiva requiere de una representación en un plano mediante una infinidad de puntos colineales cuyas coordenadas satisfagan la relación en cuestión. En la Figura Nº 1 se exhibe la representación gráfica de dos cantidades intensivas y la de dos extensivas.

Por otra parte, Schwartz afirma que ver la multiplicación únicamente como suma repetida se constituye en un obstáculo para comprender la multiplicación entre una cantidad intensiva y otra extensiva puesto que se trata de una situación que puede conducir a un resultado cuyo referente es distinto al referente de las dos cantidades que lo producen. Es el caso de la multiplicación de las cantidades 24 chocolatinas/libra de chocolate y 2 libras de chocolate, cuyo producto da como resultado 48 chocolatinas, situación esta que no se puede explicar como suma repetida de la cantidad intensiva implicada.

Vasco (2000, p. 22) reconoce la dificultad que para el alumno comporta la comprensión de las cantidades intensivas y señala la necesidad de que la enseñanza aborde dicha dificultad:

> Las mediciones deben ir mucho más allá de las medidas de magnitudes llamadas "extensivas", como las longitudes de las líneas, las áreas y los volúmenes de las figuras geométricas, para pasar a las magnitudes más difíciles, que son las llamadas "intensivas", como la velocidad de un vehículo, la aceleración, la densidad de un cuerpo sólido o la eficiencia de un motor, que pueden desarrollarse directamente por el ejercicio de un pensamiento métrico refinado o representarse como razones entre magnitudes extensivas.

Freudenthal (1983) señala que transformar la razón en un cociente, situación que se tiene al interpretar, por ejemplo, la expresión "como 3 es a 4" en términos de "3 dividido por 4", es privarla de lo que la hace valiosa como razón. Con respecto al significado que le es propio a la razón, el autor se refiere a la posibilidad de hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, lo que implica ser capaz de decir con sentido "*a* es a *b* como *c* es a *d*" sin anticipar que "*a* es a *b*" se puede reducir a un

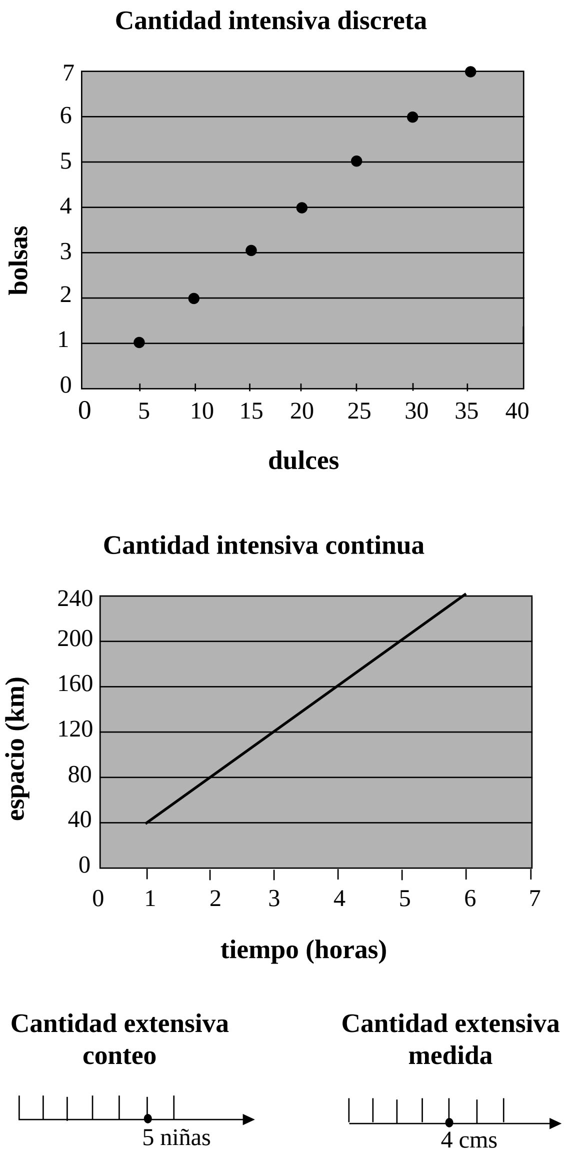


Figura Nº 1.

número o valor de magnitud, a/b, que es el mismo al que se podría reducir la expresión “*c* es a *d*”.

Para referirse a razones que relacionan pares de números (valores de magnitud) de un mismo sistema, Freudenthal habla de *razones internas*; por ejemplo, en el caso del movimiento uniforme "en tiempos iguales se recorren espacios iguales" da lugar a la expresión $e_1/e_2 = t_1/t_2$ formada por razones internas. Si se trata de la relación de valores de dos sistemas se refiere a *razones externas;* por ejemplo, la expresión $e_1/t_1 = e_2/t_2$ establece la característica del movimiento, en este caso, que la velocidad es constante. Según el investigador, el intercambio de términos en la primera proporción para obtener la segunda es bastante usual, sin embargo, la comprensión del paso de una a otra proporción comporta razonamientos no fáciles para quien aprende pues exige poner en juego conceptos tales como relación, función, magnitud, entre otros. Indica entonces que hay un paso cognitivo muy grande entre las razones internas y las externas.

Vergnaud (1991), aludiendo a la estructura multiplicativa pone de manifiesto la existencia de dos grandes categorías de relaciones que comportan multiplicación o división. Una de dichas categorías está formada por relaciones que involucran cuatro medidas y la otra, por relaciones que involucran tres medidas. Para ilustrar lo correspondiente al número de medidas implicadas en la relación, véanse las dos situaciones planteadas en la Figura Nº 2.

Pagué doce mil pesos por tres botella de vino. ¿Cuál es el precio de una botella?

Tres muchachos y cuatro muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y viceversa. ¿Cuántas parejas se pueden formar?

Figura Nº 2.

En el primer caso, las cuatro medidas implicadas en la relación son: 12000 pesos, 3 botellas, el precio de 1 botella (x), y, 1 botella. En el otro ejemplo, las cantidades implicadas son: 3 muchachos, 4 muchachas, el número de parejas que se pueden formar (y).

Con respecto a las relaciones cuaternarias (es decir, las que involucran cuatro medidas) señala Vergnaud que dos de las medidas implicadas corresponden a una misma cantidad y las otras dos, a otra cantidad, y que aunque con variaciones relativas al lugar en que aparece ubicado el valor desconocido y si se tiene o no información acerca de la unidad para una de las dos cantidades implicadas, se puede esquematizar este tipo de relación, así:

Cantidad A	**Cantidad B**
a_1	b_1
a_2	x

Refiriéndose a las posibles dificultades que enfrenta un niño en la resolución de situaciones en las que hay implicada una relación cuaternaria, el autor advierte la importancia de que la enseñanza considere aspectos tales como: (i) si las cantidades corresponden a magnitudes discretas o continuas, (ii) si las medidas son números enteros o no, (iii) qué se busca y con qué información se cuenta.

Además, al respecto de los procedimientos para resolver situaciones que involucren relaciones cuaternarias, destaca dos. Uno que tiene en cuenta la relación entre las dos medidas de una cantidad y para obtener el valor desconocido recurre a encontrar un "operador sin dimensión" o "escalar". El otro procedimiento tiene en cuenta la relación entre medidas correspondientes de diferentes cantidades y para obtener el valor desconocido recurre a un factor funcional entre las cantidades implicadas. En la Figura Nº 3 se presentan los esquemas correspondientes a los dos procedimientos descritos; en el primero, se usa un operador escalar en tanto que en el segundo, un operador funcional:

Figura Nº 3.

Un grupo de profesores asociados bajo el nombre "Matemática Elemental desde un Punto de Vista Superior" (MEPS) trabaja alrededor de los siguientes conceptos: magnitud, cantidad, medida y relación de equivalencia. En MEPS (1998) se plantean las siguientes definiciones: Una magnitud para la cual se puede definir la igualdad, la desigualdad y la adición se denomina *extensiva*; así, por ejemplo, la longitud, el área y la capacidad son magnitudes extensivas. Una magnitud para la cual se pueda definir la igualdad y la desigualdad pero no la adición se denomina *intensiva*; así, por ejemplo, la temperatura, la velocidad son magnitudes intensivas. *Razón* es una fracción algebraica que relaciona cantidades o magnitudes, mientras que el cociente es una razón reductible a una fracción numérica o a un número abstracto.

UNA OJEADA AL TRATAMIENTO DE LA RAZÓN EN ALGUNOS LIBROS DE TEXTO

En el medio educativo colombiano, el texto escolar es un recurso que apoya el proceso enseñanza - aprendizaje y ocupa un lugar significativo en el aula en la medida en que es un elemento a disposición del estudiante y, en no contadas ocasiones, también guía las acciones y decisiones del profesor con respecto a la enseñanza de temas específicos. Sin embargo, para el caso particular del concepto de razón vemos la necesidad de que el profesor use críticamente las propuestas incluidas en los libros de texto, pues de no hacerlo, éstas se pueden constituir en uno de los obstáculos para el aprendizaje del tópico; a esta consideración llegamos después de haber examinado con algún cuidado la presentación que del tema hacen tres libros de texto, análisis que hicimos cuando estábamos en la tarea de concretar el diseño de actividades para implementar en este proyecto. A continuación presentamos algunas de las anotaciones que al respecto hicimos a la luz de nuestra comprensión de las lecturas realizadas.

En Beltrán, Rodríguez, Dimaté (1996, p. 178), para incursionar en el concepto de razón, los autores presentan la siguiente situación:

> **Ejemplo.** En una frutería por cada 12 naranjas se obtienen 3 vasos de jugo. Comparemos el número de naranjas utilizadas para producir los vasos de jugo por medio de un cociente indicado: $\frac{12}{3}$.
>
> **Solución.** Este tipo de comparación recibe el nombre de *razón*; así, tenemos la razón entre el número de naranjas exprimidas y el número de vasos de jugo obtenidos. Cuando se simplifica la razón $\frac{12}{3}$ se obtiene la razón $\frac{4}{1}$, lo que indica que por cada cuatro naranjas se obtiene un vaso de jugo.
>
> **Conclusión.** Una razón es el cociente indicado entre dos cantidades.
>
> $\frac{a \leftarrow \text{antecedente}}{b \leftarrow \text{consecuente}}$.

Aunque la situación planteada se refiere a la "comparación" entre valores correspondientes de dos cantidades extensivas diferentes (número de naranjas y número de vasos de jugo) e incluso se designa dicha comparación con una cantidad intensiva ("por cada cuatro naranjas se obtiene un vaso de jugo"), la explicación dada sobre cómo pasar de una a otra expresión de la cantidad intensiva (es decir, cómo pasar del cociente indicado $\frac{12}{3}$ a $\frac{4}{1}$) por simplificación de la razón, muestra un tratamiento que destaca la existencia de un operador multiplicativo adimensional que permite pasar de un valor a otro dentro de la misma cantidad (el operador que reduce a la tercera parte tanto a la cantidad de naranjas como a la cantidad de vasos de jugo). Por otra parte, definir la razón como un cociente indicado, es decir, como la expresión de una operación entre dos números despoja al concepto de razón de su carácter de relación entre dos números.

En Camargo, García, Leguizamón, Samper y Serrano (1999b, p. 119), en la unidad dedicada a la variación proporcional, el tópico se inicia con una presentación histórica en la que se mencionan comparaciones entre magnitudes de la misma especie y también relaciones entre magnitudes diferentes. Enseguida se plantea una situación con un referente concreto, que es usada, por una parte, para precisar que "[…] cuando comparamos magnitudes homogéneas (de la misma especie), podemos establecer *razones*" y, por otra parte, para mostrar que se pueden relacionar magnitudes de diferente tipo, estableciendo el cociente entre pares de valores de ellas —cociente, que en ocasiones es constante.

El tratamiento descrito nos hace pensar, en primera instancia, que las autoras pretenden no reducir la razón a un cociente; sin embargo, dudamos de esta interpretación al advertir que no explicitan una conexión precisa entre cociente y razón que nos permita saber con certeza cuál es la diferencia entre dichos conceptos, y, observar que en el libro de la misma serie (Camargo, García, Leguizamón, Samper y Serrano, 1999a, p. 257), para el grado anterior, obtienen razones equivalentes mediante amplificación y simplificación de fracciones.

En Mora y Pardo (1995, p. 100) el tema de la razón se inicia así:

> **Una razón entre dos números racionales *a* y *b*,** $b \neq 0$ **, es el cociente indicado entre *a* y *b*.** Se expresa $a : b$ o $\frac{a}{b}$. El número a recibe el nombre de **antecedente** de la razón y el número b recibe el nombre de **consecuente** de la razón. Por ejemplo, $\frac{3}{5}$, $\frac{000}{5}$, $\frac{4}{2.5}$, $\frac{m}{n}$ son razones.
> **Ejemplo:** Un automóvil recorre 160 km por cada 5 galones de gasolina. ¿Cuál es el rendimiento del automóvil por galón de gasolina?
> **Solución:** Llamamos rendimiento del automóvil a la razón entre los kilómetros recorridos y los galones consumidos. Así, el rendimiento $r = \frac{160\,\text{km}}{5\,\text{gal}} = 32\,\text{km}/\text{gal}$. Luego: el rendimiento del automóvil es 32 km por galón de gasolina.

Atendiendo a lo que se explicita en la definición y a los ejemplos de razón que se presentan, percibimos que el concepto de razón se inclina hacia la noción de cociente indicado de dos números y reconocemos, como idea implícita de razón, la definición de razón homogénea en la que no se mencionan magnitudes y por tanto el campo de trabajo es el numérico. Sin embargo, la situación con referente concreto que se incluye como ejemplo, da la idea de razón heterogénea, con lo cual es clara una contradicción en la discusión.

Después de las precisiones anteriores, consideramos que el acercamiento realizado al tratamiento que algunos libros hacen para el concepto de razón, nos permitió advertir los siguientes hechos:

- La razón externa se menciona a través de ejemplos pero se abandona en favor del uso del cociente.
- Hay involucrados muchos términos (por ejemplo, razón, función, magnitudes, operador, medida, proporciones, proporcionalidad) que no necesariamente están definidos con precisión y además falta establecer relaciones entre los significados de dichos términos.
- A pesar de establecer diferencia entre los dos tipos de razones no se explora cada tipo.
- El tránsito de las proporciones formadas por razones entre cantidades del mismo sistema a las proporciones formadas por razones entre cantidades de dos sistemas, se aborda sin tener en cuenta el salto cognitivo que demanda.
- En las definiciones utilizadas se hace referencia al cociente (número). Sin embargo, la mayoría de ejemplos propuestos corresponden al análisis de una razón externa; así, se ve claramente una inconsistencia en el discurso escolar.
- El contexto que se privilegia es el cotidiano y el tipo de representación es la tabular.
- El dejar de lado las unidades de medida conduce a resultados numéricos; este hecho parece no facilitar la construcción del significado de la razón en una situación específica.

LA SECUENCIA DE TALLERES

LA INTENCIONALIDAD Y LOS LOGROS QUE SE BUSCABAN

Con base en los planteamientos de los autores consultados se diseñó una secuencia de tres talleres (ver Apéndice) con los que pretendíamos que los estudiantes comenzaran a construir la idea de que la razón implica conceptos tales como: función en sus diferentes representaciones, relación o índice de comparación y operador funcional.

Las preguntas formuladas iban encaminadas a establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Con respecto al índice de comparación esperábamos que los estudiantes descubrieran que permite describir un atributo que se refiere a calidad y no a cantidad y, por lo tanto, es posible usarlo tanto en una muestra como con el conjunto del cual proviene la muestra. Para ello queríamos que observaran que en las situaciones presentadas se conserva la razón y que las unidades de medida juegan un papel importante como parte del significado de la razón; pensábamos que era provechoso que manejaran diferentes formas de representación teniendo en cuenta el significado de la razón en cada una. Así, pues, con respecto a las respuestas a las varias actividades planteadas en los talleres, veíamos como deseable que los estudiantes:

- Encontraran y expresaran el índice de comparación en cada situación; tal expresión podía tomar varias formas, por ejemplo, para la primera actividad podía ser: "por cada 3 niños hay 5 niñas", "3 niños : 5 niñas", "3 niños / 5 niñas" o las expresiones correspondientes habiendo invertido el orden de la relación.

- Al reunir dos, tres, cuatro o más muestras, vieran y expresaran el hecho de que el índice de comparación se conserva, es decir, para el caso de la primera actividad sigue siendo que "por cada 3 niños hay 5 niñas".

- Frente a situaciones que implican comparación entre dos sistemas diferentes y cantidades de magnitudes diferentes (por ejemplo, *número de niños* comparado con *número de niñas*, *número de sobres* comparado con *número de tijeras*, *libras de chocolate* comparado con *número de chocolatinas*), hicieran uso de las respectivas unidades de medida.

- Se dieran cuenta de que el índice de comparación se refleja en la gráfica cartesiana en el hecho de que los puntos, correspondientes a las muestras de diferente tamaño, quedan alineados entre ellos y con el origen del plano cartesiano; es decir, notaran que al representar la relación en el plano, los puntos se encuentran alineados con respecto al origen.

- Encontraran una relación entre la razón externa con unidades de medida y la constante de proporcionalidad, con la idea de comparador y no de cociente indicado.

IMPLEMENTACIÓN

La experiencia se realizó con estudiantes de grados séptimo y octavo; estos últimos habían estudiado el tema en el curso anterior. En tres sesiones de clase, cada una de setenta y cinco minutos, los estudiantes trabajaron en grupos pequeños para desarrollar los primeros dos talleres; el tercero no fue implementado por condiciones ajenas a nuestra voluntad. En la implementación estuvimos presentes en calidad de observadores dos o tres de los autores de este artículo. A cada grupo se le entregó una copia del taller y el grupo entregó por escrito su respectiva respuesta.

ALGUNOS RESULTADOS

En esta sección presentamos un reporte de las diversas respuestas que dieron los grupos de estudiantes a la primera actividad del primer taller. Las respuestas de un grupo a los ítems b, c, d, e y f se refieren al total de personas que hay en el número de filas que consideran cada vez. Dicen, por ejemplo, "En cuatro filas hay 32 estudiantes"; además, destacan que "Por cada fila van aumentando 8 estudiantes". Todos los demás grupos, en sus respuestas mencionan el total de niños y el total de niñas que hay en la cantidad de filas que están considerando, explicitan la comparación, la simbolizan y destacan lo que ven de común en las respuestas. El siguiente cuadro presenta un resumen de tales respuestas:

Comparación	Simbolización	Lo común en las comparaciones
Por cada nueve niños hay quince niñas.	Para una fila 3 : 5	Los niños aumentan de tres en tres y las niñas de cinco en cinco.
De cada 6 niños hay 10 niñas en las dos filas.	6/10.	A medida que van aumentando el número de filas, el antecedente y el consecuente van aumentando más.
6 niños /10 niñas = 3 / 5.		$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30}$ Equivalentes.
Para tres filas reunidas: 15 – 9.	15 – 9 = 6.	En todos los casos hay más niñas que niños y los niños dan múltiplos de 3 y las niñas, múltiplos de 5.
Para dos filas reunidas: hay mayor número de niñas, pues tenemos 10 niñas y sólo 6 niños y la diferencia es de 4 niñas.		Las diferencias van aumentando en números pares como 4, 6, 8, 10, 12.
Si reunimos tres filas tendríamos el triple de niños y de niñas.	Para las seis filas: $5X^6 + 3X^6 = 48$	Por cada 5 niñas siempre habrá 3 niños.
15 niñas = 9 niños.	15 > 9.	En cada fila se aumentan 5 niñas y 3 niños.

Ante la tarea de construir una tabla que mostrara las comparaciones realizadas (ítem g), las respuestas fueron coherentes con el trabajo anterior; así, las dos hileras de la tabla contenían respectivamente información sobre el número de filas reunidas y el número de personas, o, el número de filas reunidas y la diferencia entre número de niñas y de niños, o, el número de niños y el número de niñas según la cantidad de filas reunidas —esta última respuesta fue la de la mayoría de los grupos.

Aunque no todas la tablas construidas se referían al número de niños y niñas, la gráfica cartesiana realizada por todos los grupos sí, puesto que en el enunciado de la tarea (ítem h) se pedía explícitamente. La gráfica obtenida por algunos grupos cumple a cabalidad las convenciones que regulan ese sistema de representación; sin embargo, también encontramos algunas deficiencias en las gráficas construidas por otros grupos. Por ejemplo:

- a pesar de que se pedía que las parejas ordenadas representaran (*número de niños*, *número de niñas*), no se respeta la convención de que los primeros elementos de las parejas ordenadas se representan sobre el eje horizontal;
- marcan sobre los ejes divisiones para representar los valores implicados pero lo hacen sin recurrir a una unidad de medida específica;
- conectan los puntos con una línea recta, probablemente, sin advertir que así incluyen una infinidad de puntos que no se pueden interpretar en el contexto de la situación tratada.

Con respecto a las respuestas del ítem h, nos llamó la atención de manera particular que tres grupos usaran el procedimiento que describimos a continuación: casi a la misma distancia del punto (0, 0) sobre el eje x y sobre el eje y ubican respectivamente a 3 y a 5; a partir de tales puntos construyen sendas escalas sobre los ejes con múltiplos de 3 y de 5, de manera que la misma longitud sobre x representa 3 unidades y sobre y representa 5 unidades pero no coincide con lo que representó inicialmente 3 o 5 unidades; al ubicar en tal plano los puntos correspondientes a las parejas de la tabla, con dicho procedimiento obtienen una serie de puntos alineados que no necesariamente están alineados con el origen del plano cartesiano (ver Figura Nº 4).

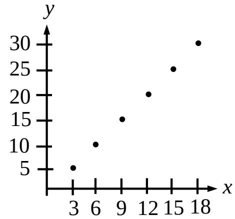


Figura Nº 4.

A la pregunta acerca de si ven alguna característica de los puntos representados en el plano cartesiano (ítem i), la mayoría se refiere a la colinealidad aunque expresan ese hecho de varias maneras y en ninguno de los casos mencionan si esa alineación se da o no con el origen del plano cartesiano; algunos de los enunciados hechos son: “los puntos están ubicados en diagonal”, “todos los puntos van en línea recta”, “si trazamos una recta entre los puntos coincidimos que las razones son equivalentes”, “los puntos que unen antecedente con consecuente van en diagonal” y “todos los puntos coinciden y se puede trazar una recta que contenga todos los puntos”.

Casi todos los grupos hicieron el diagrama sagital (ítem j); en algunos casos dibujaron flechas en ambos sentidos, en otros sólo del primero al segundo conjunto y en otros casos no dibujaron flechas; sólo en un caso, el diagrama tiene además de los valores considerados unos puntos suspensivos con lo que probablemente el grupo quiere indicar que se podrían incluir más parejas. Para explicar cómo se establece la correspondencia entre los conjuntos (ítem k), varios grupos se refieren a que por cada tres niños de un conjunto, hay cinco niñas en el otro conjunto: “cuando aumentan tres niños, aumentan cinco niñas”, “siempre tenemos en cada fila cinco niñas y tres niños”; “en el salón hay más niñas que niños porque por cada tres niños hay cinco niñas”; además, en algunos casos hubo mención al hecho de que la correspondencia está determinada de manera única, “siempre cada número corresponde a su número y no pueden cambiarse”, “a un número sólo le corresponde una flecha; toca ponerlos en orden”. Al parecer, los estudiantes perciben en forma intuitiva nociones relacionadas con la función tales como: a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento en el codominio (unicidad), al duplicar el número de elementos en el dominio se duplica el número de elementos en el codominio (variación) y la función es creciente (monotonía).

A través de las respuestas a las tareas en que se pedía a los estudiantes “expresar en matemáticas” algo dicho previamente de manera verbal (segunda parte del ítem b, ítem f), pudimos evidenciar la dificultad que para muchos de ellos representa usar coherentemente el lenguaje simbólico de las matemáticas. Al respecto, observamos que estudiantes que verbalmente expresan de manera coherente una comparación entre dos cantidades, cuando tratan de hacerlo usando símbolos matemáticos incurren en incoherencias; en particular, no tienen en cuenta incluir los adjetivos correspondientes para valores de cantidades extensivas o intensivas y además, escriben el signo “=” para expresar relaciones que no son de igualdad. En varios casos, pudimos ver el uso de las letras como etiquetas, para representar el adjetivo de cantidades extensivas (por ejemplo, en $4t$ la letra designa tan sólo el término “tijera”). Al advertir que un enunciado como por ejemplo, “por cada 10 sobres hay (corresponden) 4 tijeras” es expresado simbólicamente por los estudiantes como $10s = 4t$, podemos vislumbrar la dificultad que encaran tanto la enseñanza como el aprendizaje para lograr, por una parte, que los estudiantes lleguen a ser capaces de traducir el enunciado en la expresión $\frac{10\,\text{sobres}}{4\,\text{tijeras}}$, y por otra parte, que puedan ver tal expresión como un índice de comparación parte - parte que permite decir con sentido algo de la forma "5 sobres es a 2 tijeras como 10 sobres es a 4 tijeras".

Cuando los estudiantes expresan la comparación, por ejemplo, con los números 5/2 o 2/5 hay indicios de la representación simbólica de la razón, pero no tienen en cuenta los adjetivos, lo cual obstaculiza la apropiación del significado de razón como comparación de dos magnitudes distintas. En este punto intuimos que los modelos de enseñanza a los que han estado expuestos estos alumnos pueden presentar una tendencia a enfatizar el trabajo con lo numérico y a desconocer la importancia de las unidades de medida.

Varios de los estudiantes concibieron la relación entre cantidades correspondientes de las dos magnitudes implicadas como una relación de orden entre números y no, como una relación de equivalencia entre cantidades adjetivadas —que es la que sustenta el concepto de razón. En consecuencia, en sus respuestas escriben enunciados en los que la comparación es improcedente como por ejemplo cuando afirman que "10 niñas > 5 niños" en donde, al parecer, solamente tienen en cuenta la medida y no las unidades de medida.

PARA TERMINAR

Sentimos que los logros relacionados con la implementación del primer taller se refieren más al proceso de enseñar que al proceso de aprendizaje de los estudiantes. Como resultado de la experiencia vivida pudimos vislumbrar la complejidad que hay detrás del aprendizaje y la enseñanza de la razón como tema matemático. En particular, con respecto al aprendizaje pudimos ver que existen dificultades y obstáculos relacionados con la naturaleza del objeto de estudio y el lenguaje que se usa y/o se requiere para referirse a situaciones en las que está implicada la razón. Asociado con nuestra labor para la enseñanza del tema, específicamente y en primer lugar, fuimos conscientes de la necesidad de reconceptualizar nuestro significado de razón. La lectura del tema en artículos de autores que lo trabajan específicamente, no es fácil: no encontramos una definición concreta, más bien se presenta una discusión sobre el estatus lógico de la razón. En esta experiencia pudimos ver también el sentido y la complejidad que hay detrás de realizar un proyecto en el que cobran tanta importancia tareas tales como la formulación de preguntas que propicien la construcción de significado y el análisis de respuestas de los estudiantes y de datos obtenidos por observación directa hecho con base en criterios para valorar el avance en el proceso de comprensión.

Darnos cuenta de algunos de los obstáculos, dificultades y conflictos que surgen en el proceso de enseñanza - aprendizaje del tema nos proporciona elementos para reorientar el proceso de enseñanza del significado de razón; en particular, haber vislumbrado la complejidad propia de la razón como objeto matemático nos muestra que no es fácil de conceptualizar, por lo tanto amerita una mirada cuidadosa, de parte del profesor, que no se limite a lo que le puedan aportar los textos escolares en los que vimos que se perpetúa la presentación deficiente de algunos aspectos que caracterizan la razón.

Algunos puntos que consideramos importantes para la enseñanza del tema son los siguientes. Por una parte, en el proceso de enseñanza se hace necesario tener muy en cuenta el contexto, las ideas previas y precisar el lenguaje que se va a utilizar —haciendo el ejercicio de pasar del lenguaje usual al lenguaje matemático y viceversa. Por otra parte, para trabajar el concepto de razón sería conveniente que los estudiantes hayan hecho procesos de ordenar y clasificar. Cuando se inicia el proceso enseñanza – aprendizaje con magnitudes debe ser claro para los estudiantes qué es un trabajo de clasificación con respecto a un atributo, se deben establecer diferencias y semejanzas entre magnitud, cantidad de magnitud y medida pues es probable que ello ayude a que los niños no hagan enunciados como “10 niñas > 5 niños”, tipo de comparación que es válida entre magnitudes de una misma especie, pero no entre magnitudes diferentes. También es conveniente que los estudiantes sepan representar gráficamente en el plano parejas de valores, pues ello facilita el visualizar la relación de equivalencia que hay detrás del significado de razón.

REFERENCIAS

Beltrán, L.P., Rodríguez, B.P. y Dimaté, M.S. (1996). *Matemáticas con tecnología aplicada 7*. Bogotá: Prentice Hall de Colombia.

Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C. y Serrano, C. (1999a). *ALFA 6*. Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C. y Serrano, C. (1999b). *ALFA 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Freudenthal, H. (1983). Ratio and proportionality, En *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, Dordrecht.

MEPS (1998). Magnitud y cantidad. En *Temas de matemática elemental. XV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (pp. 23-32). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Mora, A.J. y Pardo, F. (Eds.), (1995). *Procesos Matemáticos 7*. Bogotá: Editorial Santillana S.A.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C.E. (2000). Las matemáticas escolares en el año 2001. En M.A. Ramírez (Comp.), *Las competencias matemáticas. Medición y evaluación* (pp. 17-33). Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Editorial Trillas.

Amanda Moreno
Arnaldo de la Barrera
Margarita Mantilla
Nubia Carreño
Escuela Normal Superior María Montessori
Tel.: 2894420 - 2894970
amandamoreno13@hotmail.com

APÉNDICE

PRIMER TALLER

1) Lean y realicen el siguiente ejercicio. En un salón hay 48 estudiantes colocados en seis filas. En cada fila hay 3 niños y 5 niñas.

g. Elaboren una representación de la situación.

h. Comparen el número de niños con el número de niñas que hay en cada fila.

- ¿Cómo expresarían esta comparación con palabras?
- ¿Cómo expresarían esta comparación en matemáticas?

i. Reúnan dos filas y comparen el número de niños con el número de niñas. Expresen esta comparación.

j. Reúnan tres filas y vuelvan a comparar el número de niños con el número de niñas y expresen la comparación.

k. Continúen reuniendo cuatro, cinco y seis filas y, para cada caso, hagan y expresen la comparación entre el número de niños y el número de niñas.

l. Observen si las comparaciones hechas tienen algo en común, exprésenlo con palabras o en matemáticas.

m. Construyan una tabla que muestre las comparaciones que realizaron anteriormente.

n. Dibujen un plano cartesiano, en el eje X coloquen el número de niños, y en el eje Y coloquen el número de niñas, representen los pares ordenados (número de niños, número de niñas).

o. Observen la posición de los puntos ubicados en el plano. ¿Tienen alguna característica común. ¿Cuál?

p. Construyan un diagrama de flechas que muestre las correspondencias entre el número de niños y el número de niñas.

q. Expliquen cómo se establece la correspondencia entre los conjuntos.

Una segunda actividad del taller en la que se pidió realizar tareas similares a las de la actividad anterior —hacer grupos, hacer comparaciones, registrarlas en la tabla y representarlas en el plano cartesiano observando las particularidades de la tabla y la posición de los puntos resultado de la representación— tuvo como contexto el esquema que se presenta en la Figura Nº 5, adaptado de Schwartz, 1983) y la instrucción dada a los alumnos fue construir grupos de forma horizontal, vertical o diagonal con la condición de que cada grupo tenga siete figuras.

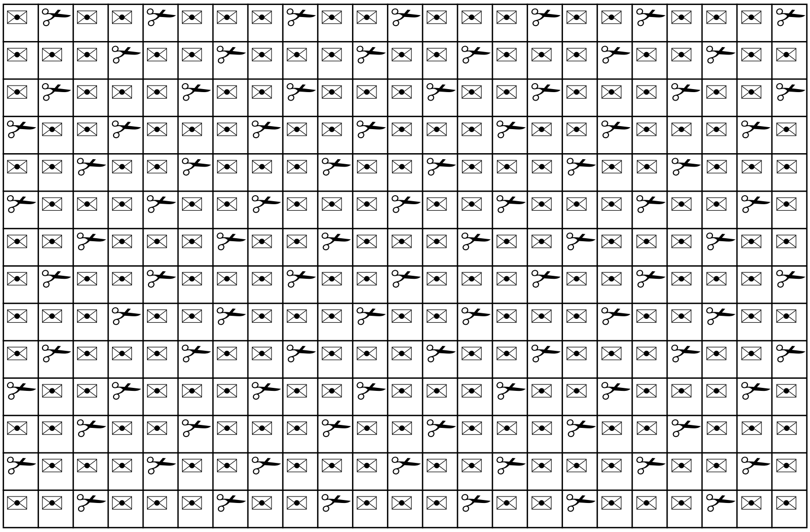


Figura Nº 5.

SEGUNDO TALLER

1) Una libra de chocolate se coloca en una máquina que produce 24 chocolatinas. El siguiente esquema representa la situación:

Libras de chocolate	Máquina	No. de chocolatinas
1		24
2		48
3		72
…		…
x		y

a. Dentro del cuadrito que representa la máquina, escriban el operador que permite obtener el número de chocolatinas a partir de las libras de chocolate.
    - ¿En qué unidades se mide la magnitud del conjunto de partida?
    - ¿En qué unidades se mide la magnitud del conjunto de llegada?
    - ¿Qué unidades tiene el operador que se coloca en el cuadrito?

b. Escriban el operador con sus unidades correspondientes.

c. Expliquen el significado del anterior operador.

d. Comparen los operadores que escribieron en todos los cuadros. ¿Se puede afirmar que el operador es el mismo? Expliquen por qué.

e. Encuentren la expresión matemática que relaciona a y con x, y expliquen el significado de esta relación.

f. Representen en el plano cartesiano las parejas que se forman en esta situación.

TERCER TALLER

Con este taller se pretendía que los alumnos reconocieran la razón externa como la relación y/x . En este taller se retomaban situaciones de los talleres anteriores y se pedía a los alumnos que hicieran representaciones usando diagramas sagitales y en el plano cartesiano; se hacía énfasis en la ley de correspondencia entre las magnitudes relacionadas. Además, se formulaban preguntas para que los estudiantes expresaran los significados que habían ido construyendo.

INTRODUCIR LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN: UN ASUNTO COMPLEJO

CARLOS PINO

En innumerables oportunidades, los profesores de matemáticas nos enfrentamos a la actividad de enseñar conceptos tales como el de razón y proporción. No obstante, no es muy usual que advirtamos que las estrategias de enseñanza usadas no son tan efectivas como suponemos; tampoco lo es preocuparnos por reelaborar los diseños curriculares empleados para tal fin. Este documento relata una experiencia personal y profesional en tal sentido.

INTRODUCCIÓN

En el último trimestre del año 2001, los profesores del área de matemáticas de la Escuela Normal Superior de Medellín recibimos una invitación de "una empresa docente" para participar en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores" que contemplaba la realización de tres seminarios y de una serie de tareas para desarrollar entre éstos. Tres profesores de matemáticas de la Normal asistimos a los seminarios programados y participamos activamente de los mismos. Sin embargo, por diversas razones, asumí de manera personal la realización de las tareas propuestas; como sobre ellas se fundamenta este artículo, mis compañeros no aparecen como autores del mismo.

A continuación presento aspectos del proceso de construcción de una propuesta diseñada para la enseñanza de la razón y la proporción y expongo algunas reflexiones sobre la propuesta misma.

EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta tuvo al menos dos versiones que se corresponden con sendos momentos del desarrollo del Programa. La primera versión es un extenso documento donde se registra una especie de diálogo entre un profesor y un alumno; la segunda, basada en la parte inicial de la primera, consiste en una serie de tareas propuestas a los estudiantes. A continuación describo cada una de tales versiones.

PRIMERA VERSIÓN

En el primer seminario, luego de hacer una mirada a la proporcionalidad en la escuela, de cuestionar los conceptos de razón y proporción, de examinar

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 113-124). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

diferentes definiciones sobre las magnitudes directa e inversamente proporcionales, de hacer consideraciones sobre la comprensión que los estudiantes logran de los procedimientos y conceptos ligados a la proporcionalidad, pude concluir que debía revisar mi conocimiento matemático con respecto a ese tópico pues había aspectos de la proporcionalidad que había pasado por alto, no todo lo que creía conocer lo podía sustentar, y además pude reconocer que los estudiantes tenían serias dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad.

Después del primer seminario, realicé la lectura de dos documentos que los tutores habían sugerido y desarrollé la guía de lectura que ellos habían propuesto para ayudar a la comprensión de uno de tales documentos. De los resultados importantes de la realización de tal tarea pude concluir que me interesaría desarrollar una breve propuesta curricular que vinculara una aproximación numérica a la proporcionalidad con la semejanza entre figuras geométricas.

A partir de este interés inicial elaboré un manuscrito de algo más de treinta páginas titulado “Asociar la construcción activa de estrategias de resolución de tareas de proporcionalidad numérica con la enseñanza entre figuras geométricas”, que presenté a los tutores como respuesta parcial a la segunda parte de la tarea por ellos propuesta al final del primer seminario, tarea que pretendía lograr una primera aproximación al diseño curricular que se implementaría con los estudiantes. Estructuré aquel documento de manera similar a un diálogo entre un profesor y un alumno: el profesor le iba planteando al estudiante unos enunciados a través de los cuales le presentaba tareas para realizar o aspectos teóricos, mientras el estudiante le presentaba sus respuestas a las tareas propuestas; el texto recogía tanto los enunciados del profesor como las respuestas del alumno.

Desde el punto de vista temático, la primera interacción presentada en el texto entre el profesor y el estudiante se da en torno a un ejercicio propuesto por el profesor en el que se intenta que el estudiante calcule las medidas de las longitudes de unos segmentos, establezca relaciones numéricas entre éstas y las utilice para determinar relaciones entre las longitudes de los segmentos; es decir, que el estudiante llegue a respuestas tales como:

$$\left|\overline{AB}\right| = 3\text{cm}\,,\ \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{9\text{cm}}{3\text{cm}} = \frac{9}{3},\ \overline{AD} = 3\times\overline{CD}\,,\ \text{o}\ \left|\overline{AD}\right| = 3\times\left|\overline{CD}\right|.$$

En la segunda interacción, el profesor le presenta la definición de razón entre dos cantidades de la misma magnitud y la aserción de que la relación entre segmentos es igual a la relación entre sus medidas, luego de lo cual le indica que identifique las razones en lo que ha hecho antes y que calcule algunas razones específicas. Luego, en la tercera interacción el profesor le propone al estudiante que compare algunas razones e identifique cuáles son iguales. Enseguida, en dos interacciones el profesor le propone determinar razones equivalentes a una razón dada y, en procura de una generalización, le interroga por el procedimiento utilizado para determinar tales razones.

A continuación de las anteriores interacciones, el profesor le presenta una definición de proporción de términos numéricos a la que acompaña de una definición nominal de medios, extremos y cuarta proporcional; luego, cuestiona al estudiante acerca de una proporción formada por razones de segmentos. Enseguida, el profesor le presenta un ejercicio para que el estudiante advierta la propiedad fundamental de las proporciones —es decir la igualdad entre el producto de medios y el producto de extremos—, ejercicio que el estudiante desarrolla y a partir del cual describe un enunciado general de la propiedad. Continuando con las propiedades de las proporciones, el profesor le plantea un ejercicio para que el estudiante reconozca qué sucede con una proporción cuando se invierten los medios, los extremos y las razones, cuestiones estas, que el estudiante aborda y enuncia sin problema alguno. En las tres siguientes interacciones, el profesor le propone al estudiante que pruebe sendas propiedades de las razones lo que es respondido por el estudiante con la verificación de las propiedades con casos particulares; al final de este trabajo con las propiedades de las proporciones aparece un ejercicio de generalización simbólica de las propiedades tratadas a través de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; este ejercicio no se desarrolla.

Para continuar, el profesor presenta la definición de segmento media proporcional y de tercera proporcional, además plantea la descripción de una construcción geométrica de un segmento media proporcional de otros dos dados y le propone al estudiante realizar tal construcción, tarea que el estudiante realiza. A partir de tal construcción y con la incorporación de información acerca de la semejanza entre triángulos, el profesor le propone que calcule la longitud del segmento media proporcional, tarea que el estudiante realiza. Al final de estas interacciones, aparece reportado un ejercicio para calcular la longitud del segmento media proporcional de cuatro pares de segmentos de medida dada.

Prosiguiendo con el estudio de la proporcionalidad geométrica, el profesor enuncia y demuestra el teorema cuyo enunciado es “un conjunto de rectas paralelas cortan a dos secantes cualesquiera en segmentos proporcionales”, luego de lo cual plantea un par de ejercicios que se podrían resolver aplicando el teorema. De manera similar, enuncia y demuestra el teorema “toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados, segmentos proporcionales” y propone ejercicios, algunos de los cuales acompaña con una descripción de su solución, la que es implementada por el estudiante. Aquí también aparecen algunos ejercicios propuestos, pero no resueltos.

A continuación, el profesor interroga al estudiante por las ideas de ángulos homólogos, lados homólogos y razón de semejanza; para luego presentarle una figura con dos triángulos semejantes y preguntarle por las condiciones que satisfacen que los hacen semejantes. Después, el profesor le propone al estudiante que indague por las demostraciones del teorema de Tales, de los tres criterios de semejanza y del teorema “en todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en la misma razón de los lados adyacentes”. Enseguida le presenta al estudiante siete ejercicios, que el estudiante resuelve a través de identificarlos como aplicaciones de los teoremas anteriormente tratados.

Para finalizar la propuesta, el profesor le plantea al alumno la definición de proyección ortogonal de un punto sobre una recta y le pide que demuestre cuatro teoremas referidos a triángulos rectángulos, el cuarto de los cuales es el teorema de Pitágoras.

Segunda versión

En la interacción con los tutores del Programa en torno a la primera versión, fui consciente de que aquella propuesta no satisfacía los requerimientos solicitados para el diseño curricular (por ejemplo, no podía ser desarrollada en dos o tres sesiones de clase, no identificaba sino un tipo de respuesta posible de los estudiantes —la correcta—, a más de la lectura de un texto de matemáticas no proponía actividad matemática a los estudiantes) y que debía reelaborar la propuesta. Procedí entonces a utilizar algunos elementos del inicio de la primera versión y construí cuatro talleres para ser propuestos a los alumnos de grado noveno (ver Apéndice).

A través de estos talleres pretendía que los estudiantes pudieran:

- Identificar el concepto de razón a partir de una serie de ejercicios de medición.
- Construir un procedimiento para hallar razones equivalentes a partir de una razón dada.
- Construir los enunciados de las propiedades de las proporciones.
- Establecer cómo en toda semejanza se construye una proporción.

Reflexiones sobre la segunda versión de la propuesta

Si bien implementé los cuatro talleres con un grupo de noveno de aproximadamente cuarenta estudiantes y mis dos colegas hicieron la observación respectiva, no cuento con información que a partir de la implementación me permita hacer una mirada crítica a los talleres diseñados. No obstante, presentaré en este apartado una serie de consideraciones y reflexiones que he podido hacer a través de la interacción con los tutores del Programa; éstas, como se verá, sugieren que es necesario hacer serias transformaciones a los talleres para potenciar de mejor manera el logro de los objetivos propuestos. A continuación presento las reflexiones y consideraciones para cada taller.

TALLER "PROPORCIONALIDAD 1.1"

Como se puede observar en el Apéndice, en el primer taller ("Proporcionalidad 1.1") se da una información geométrica y métrica sobre unos segmentos colineales y se pide calcular la medida de algunos de ellos. Considero que para desarrollar tal tarea un estudiante no necesariamente requiere de un conocimiento relativo a las razones, pues basta con hacer una división ($9 \div 3$) y a partir del resultado hacer una multiplicación (3×2) para determinar las medidas; eso sí, el estudiante debe saber interpretar la información dada en notación matemática relativa a la congruencia de los segmentos y su implicación en la igualdad de sus medidas. También, en dos numerales, se pide expresar la medida de un segmento en términos de la medida de otro; esta tarea puede ser resuelta con un manejo de las fracciones entre los números, sin recurrir a las razones entre los segmentos o entre sus medidas.

En este mismo taller se pregunta por la relación que existe entre las medidas de algunos segmentos. Con respecto a esta tarea puedo afirmar que se está suponiendo la existencia de una única relación, que está dada por el cociente indicado o razón entre las dos medidas (como se sugiere con la expresión simbólica que acompaña el enunciado de las tareas); en este sentido se están descartando otras relaciones entre tales medidas, como por ejemplo (para el caso del numeral 2) que "la medida del segmento *AD* es mayor que la medida del segmento *CD*" que "la medida del segmento *AD* es seis centímetros más que la del segmento *CD*" o que "la medida del segmento *AD* es el triple de la medida del segmento *CD*". El estudiante debe interpretar que las expresiones $|\overline{AD}|:|\overline{CD}|$ o $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|}$ representan **relaciones**, a pesar de que ellos vean allí sólo parejas de medidas, una división indicada entre parejas de medidas o simplemente un número fraccionario (si no incluye las unidades de medida, es decir los centímetros).

Por otro lado, a pesar de que el alumno haya resuelto bien los siete primeros numerales, (es decir, haya encontrado las respuestas correctas) la nota "La relación entre dos segmentos es igual a la relación de los números que los miden con la misma unidad" puede no significarle nada, pues en ninguna parte se le ha propuesto que establezca relaciones entre segmentos, sino que siempre se le ha centrado la atención en las medidas, es decir en lo numérico. Si antes se le cuestionara por posibles relaciones existentes entre dos segmentos, seguramente el estudiante podría darle mucho más sentido al contenido de la nota; en efecto, haber contestado previamente que "el segmento *AD* es mayor que el segmento *CD*" que "el segmento *AD* es el triple del segmento *CD*" asigna un significado particular a la nota.

Finalmente, la tarea de encontrar parejas de medidas de segmentos que tengan “la misma relación” o razón, propuesta en el numeral 9, se desaprovecha pues no hay ninguna pregunta ni tarea en este taller que haga reflexionar al estudiante sobre la posibilidad de que parejas diferentes puedan “tener la misma relación”, hecho que parece ser fundamental en la aproximación al concepto de proporción.

Atendiendo a las consideraciones anteriores parece acertado afirmar que identificar el concepto de razón a partir de una serie de ejercicios de medición no parece ser un objetivo que se satisfaga con el taller titulado “Proporcionalidad 1.1”. Quizá para lograr una mejor aproximación a este objetivo, primero que todo, deba aclararme lo que es una razón, lo que es una razón entre segmentos, lo que es una razón entre longitudes de segmentos, y lo que es una razón entre medidas de longitudes de segmentos, tarea por demás compleja. Con tal claridad conceptual podría reformular el primer taller e intentar una aproximación al concepto de razón.

TALLER “PROPORCIONALIDAD 1.2”

El planteamiento esbozado en el segundo taller, como mencioné antes, tiene como propósito ayudar a construir un procedimiento para hallar razones equivalentes a partir de una razón dada; este propósito puede llegarse a satisfacer si el estudiante resuelve correctamente el taller y más aun si el estudiante tiene conocimiento de las fracciones equivalentes. En verdad, la notación utilizada para representar las razones (es decir, aquella que incorpora el vínculo o línea horizontal) no ayuda a identificar las razones como diferentes a las fracciones. Tampoco ayuda mucho a establecer tal distinción el hecho de mencionar la igualdad y la equivalencia como dos nombres para denotar el mismo concepto, o quizá sea mejor decir, la misma relación representada por el símbolo “=”. En resumen, las cinco primeras tareas planteadas en el taller en cuestión podrían ser realizadas sin conocimiento alguno sobre las razones, sobre la cuarta proporcional, o sobre la proporción, pues podrían resolverse con conocimientos relativos a las fracciones equivalentes (por ejemplo, a los procesos de amplificar y al producto cruzado de fracciones equivalentes).

Por otra parte, he reconocido que la definición de proporción es más una definición nominal que conceptual; es decir, a través de la definición presentada en este taller a través de la “Nota”, se está dando un nombre a la igualdad entre dos razones, pero no se está estableciendo qué es la igualdad entre dos razones. Poder determinar una respuesta a tal interrogante es un asunto prioritario que se debe abordar dentro de la reflexión conceptual que como maestro deberé hacer, antes de proponerle a mis estudiantes una nueva tarea para que aprendan el concepto de proporción.

Finalmente, considero que la pregunta del numeral 7, no tiene sentido plantearla sin que antes haya habido un trabajo en torno al significado de la razón entre segmentos y de la igualdad de razones entre segmentos, pues una respuesta correcta implicaría estas expresiones dotadas de significado. Un trabajo tal posiblemente implicaría abordar una proporción entre segmentos planteada de manera geométrica —y no simbólica, como en el numeral en cuestión— a través de un dibujo como el siguiente en el que, en efecto, la razón entre los dos primeros segmentos es la misma que entre los dos últimos:

—— : ———— :: ——— : ——————

TALLER "PROPORCIONALIDAD 1.3"

Sin duda alguna este taller enfrenta al estudiante con el reconocimiento de propiedades de las proporciones y con sus enunciados expresados en palabras. No obstante, al analizar el taller he advertido que estoy pretendiendo que los estudiantes lleguen a reconocer y enunciar generalizaciones a través de tres casos particulares, lo que puede no ser un asunto sencillo mucho más cuando los estudiantes pueden no estar acostumbrados a este tipo de procesos de generalización ni a enunciar una aserción general; considero que sin mayor dificultad ellos podrán reconocer que si en la proporción $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ se intercambian los extremos, de los medios o de las razones, se generarán tres proporciones diferentes, pero tendrán dificultad para enunciar algo como "al invertir el orden de los extremos de **cualquier** proporción se obtiene otra proporción".

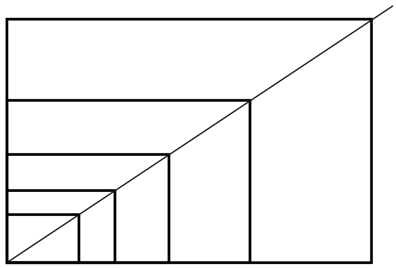
Una dificultad aun mayor se les presentará cuando intenten realizar la prueba del numeral 5; quizá logren ilustrar el enunciado a través de unos casos particulares, pero difícilmente trabajarían con cuatro variables y las operaciones y relaciones entre éstas, que exige una prueba matemática de tal propiedad.

Por otra parte, reconocí que los términos "antecedente" y "consecuente" no los había presentado antes y que no tenía mucho sentido ponerlos como miembros de una razón y mucho menos igualarlos a razones que involucraban números.

También me cuestioné por la importancia operativa y conceptual de conocer las propiedades de las proporciones. Al respecto, sólo pude reconocer que la propiedad abordada en el numeral 7 se utiliza en la explicación de la operatividad de los repartos proporcionales, pero no pude reconocer una respuesta similar para las demás propiedades.

TALLER "PROPORCIONALIDAD 1.4"

El lector muy seguramente notará que este taller no hacía parte de la primera versión de la propuesta. La inclusión del mismo obedeció más a una casualidad que a otra causa. En un momento del Programa los tutores nos entregaron un material bibliográfico que contenía sugerencias metodológicas y talleres específicos para abordar la temática de la proporcionalidad. En uno de aquellos materiales (Fiol y Fortuny, 1990) aparece una idea similar a la que planteé en el taller en cuestión, sin embargo, ahora reconozco que la interpretación que hice de tal idea la desvirtúa y, en cierto sentido, la transforma. Al parecer, la idea planteada por Fiol y Fortuny pretende aprovechar el hecho de que una familia de rectángulos semejantes pueden disponerse de tal manera que todos tengan un vértice común y cada uno de los vértices opuestos al vértice común estén en la misma recta. La siguiente figura ilustra lo dicho:



Como el lector podrá comprobarlo, la relación que hay entre dos lados contiguos de cada rectángulo de la familia es siempre la misma y se puede representar como una razón. De esta manera, se pueden establecer proporciones entre los correspondientes segmentos de los rectángulos dibujados. Así mismo, un rectángulo ubicado adecuadamente en tal arreglo pero cuyo vértice opuesto al vértice común no cumpla la colinealidad que cumplen los vértices de los rectángulos de la familia, no definirá una razón igual a la que define cualquiera de los rectángulos dibujados.

Esta idea parece ser más potente de lo que a primer vistazo había reconocido y me invita a estudiar con mayor detenimiento la propuesta de los autores mencionados antes. Por otro lado, para profundizar en el conocimiento matemático con respecto a las razones y las proporciones he iniciado un estudio de aspectos relativos a estos conceptos en la geometría y aritmética griegas, a partir de lo cual he podido reconocer que Euclides en *Los Elementos* hace una exposición bastante interesante que podría orientar procesos de enseñanza en el aula. A partir de esta aproximación he comenzado a escribir un texto en el que recojo notas y ejercicios con respecto a: el número y la proporción, la conmensurabilidad y la razón, la proporción, y la inconmensurabilidad, que espero me ayude a determinar una nueva secuencia de talleres para abordar escolarmente los esquivos conceptos de razón y proporción.

REFERENCIAS

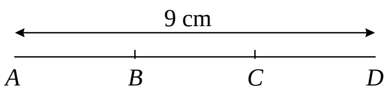
Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Carlos Pino
Escuela Normal Superior de Medellín
Tel.: (094) 284 0245

APÉNDICE

PROPORCIONALIDAD 1.1

Considere la siguiente figura donde $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$:



1) Calcule la medida del segmento *CD*: $(|\overline{CD}|)$

2) ¿Qué relación existe entre la medida del segmento *AD* y la medida del segmento *CD*? $(|\overline{AD}|:|\overline{CD}|)$

3) Exprese la medida del segmento *CD* en términos de la medida del segmento *AD*.

4) Calcule la medida del segmento *AC* : $(|\overline{AC}|)$

5) ¿Qué relación existe entre la medida del segmento *AC* y la medida del segmento *AD*? $(|\overline{AC}|:|\overline{AD}|)$

6) Exprese la medida del segmento *AC* en términos de la medida del segmento *AD*.

7) Con los datos obtenidos en los numerales anteriores, complete la siguiente tabla:

$\lvert\overline{CD}\rvert$	cm
$\lvert\overline{AC}\rvert$	cm
$\lvert\overline{AD}\rvert$	cm
$\dfrac{\lvert\overline{AD}\rvert}{\lvert\overline{CD}\rvert}$	———
$\dfrac{\lvert\overline{AC}\rvert}{\lvert\overline{CD}\rvert}$	———
$\dfrac{\lvert\overline{CD}\rvert}{\lvert\overline{AC}\rvert}$	———

> Nota: La relación entre dos segmentos es igual a la relación de los números que los miden con la misma unidad.

8) Aprovechando los resultados de la tabla anterior, calcule las relaciones:
$\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \_\_\_\_$; $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|} = \_\_\_\_$; $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \_\_\_\_$

9) Establezca las igualdades que se cumplan entre las razones:
$\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} = \_\_\_\_$; $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|} = \_\_\_\_$; $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \_\_\_\_$; $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \_\_\_\_$;
$\dfrac{|\overline{BD}|}{|\overline{AD}|} = \_\_\_\_$
$\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \_\_\_\_$ y $\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \_\_\_\_$ entonces $\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|}$
$\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \_\_\_\_$ y $\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \_\_\_\_$ entonces $\dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|} = \dfrac{|\overline{\quad}|}{|\overline{\quad}|}$

PROPORCIONALIDAD 1.2

1) Si la relación $\dfrac{|\overline{BD}|}{|\overline{AD}|} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$, escriba otras tres relaciones (o razones) tales que sean equivalentes y se cumpla:
$\dfrac{|\overline{BD}|}{|\overline{AD}|} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9} = \_\_ = \_\_ = \_\_$

2) Enuncie un procedimiento generalizado para hallar razones equivalentes a una razón dada entre medidas de segmentos.

3) Complete la siguiente expresión:
$\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{\_\_}{4} = \dfrac{12}{\_\_} = \dfrac{24}{\_\_} = \_\_$

4) Complete lo más rápidamente posible, las expresiones siguientes:
$\dfrac{\_\_}{2} = \dfrac{6}{3}$; $\dfrac{5}{4} = \dfrac{\_\_}{12}$; $\dfrac{7}{\_\_} = \dfrac{21}{15}$; $\dfrac{8}{7} = \dfrac{32}{\_\_}$; $\dfrac{100}{16} = \dfrac{25}{\_\_}$; $\dfrac{24}{8} = \dfrac{\_\_}{8}$; $\dfrac{1}{4} = \dfrac{\_\_}{20}$;
$\dfrac{\_\_}{9} = \dfrac{15}{27}$; $\dfrac{6}{\_\_} = \dfrac{18}{15}$.

5) Enuncie un procedimiento generalizado para hallar el término desconocido en cada expresión.

Nota: Una proporción es la igualdad de dos razones; así: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ o 2:3 :: 6:9 (léase: dos es a tres como seis es a nueve). En la proporción dada, el cuarto término (9) es la *cuarta proporcional* a los otros tres tomados en su orden (2, 3, 6). Los *medios* de una proporción son sus términos intermedios, es decir su segundo y tercer término. Los *extremos* de una proporción son sus términos extremos, esto es, su primer y cuarto término; por lo tanto:

extremos

$$2 : 3 : : 6 : 9$$

medios

6) En la proporción $\overline{AD} : \overline{CD} : : \overline{AD} : \overline{AB}$, ¿cuál es el segmento cuarta proporcional, cuáles son los segmentos medios y cuáles los extremos?

7) ¿Cuándo dos segmentos son proporcionales a otros dos?

PROPORCIONALIDAD 1.3

1) Determine el valor que falta para que cada una de las expresiones siguientes sea una proporción: $\frac{\quad}{5} = \frac{12}{15}$; $\frac{8}{\quad} = \frac{16}{10}$; $\frac{7}{3} = \frac{\quad}{12}$.

2) Para cada una de las proporciones anteriores calcule el producto de medios y el producto de extremos. ¿Cómo son esos productos?

3) Generalice mediante un enunciado tal propiedad: (propiedad fundamental).

4) En cada una de las proporciones anteriores:

   a. Invierta el orden de los extremos. ¿Qué sucede con las proporciones?

   b. Invierta el orden de los medios. ¿Qué sucede con las proporciones?

   c. Invierta las razones. ¿Qué sucede con las proporciones?

5) Generalice mediante sendos enunciados, cada una de las tres propiedades anteriores.

6) Pruebe que en toda proporción, la suma o la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma o la diferencia de los dos últimos es al cuarto.

7) Pruebe que en la serie de razones iguales
$$\frac{\text{antecedente}}{\text{consecuente}} = \frac{3}{5} = \frac{\quad}{10} = \frac{12}{\quad} = \frac{\quad}{40}$$
la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como cualquier razón de las dadas.

PROPORCIONALIDAD 1.4

> Nota: Las dimensiones de un rectángulo A son: 3 cm de largo y 2 cm de ancho. Convencionalmente, siempre llamaremos “largo” al lado de mayor longitud y “ancho” al lado más corto.

1) Complete la tabla y obtenga las dimensiones de los rectángulos semejantes A y B.

	A	B
largo	3 cm	cm
ancho	cm	4 cm

2) Aprovechando las dimensiones de los rectángulos A y B amplíe esta familia con dos miembros más (C y D) semejantes a A y D.

C	D
12 cm	cm
8 cm	16 cm

3) Sobre una hoja de papel milimetrado dibuje el rectángulo más pequeño de manera que el ancho se trace sobre el eje horizontal “x” y el largo sobre el eje vertical “y”. A continuación, designe los otros dos lados de forma que el rectángulo quede dibujado en el papel. Luego haga lo mismo con los rectángulos B, C y D.

   a. Observe los vértices, ¿qué ha sucedido?

   b. Dibuje sobre los ejes de coordenadas un rectángulo que no sea semejante a los anteriores. ¿Qué sucede con tal rectángulo?

   c. ¿Qué figuras geométricas se obtienen a partir de una proporción numérica comparando sus términos?

EXPLORACIÓN DE LA RAZÓN PORCENTUAL USADA COMO OPERADOR

LEONOR BARRETO, NINFA GARZÓN Y VICTORIA FONSECA

La realización de un proyecto de aula para explorar si alumnas de grado octavo usaban la razón porcentual como operador multiplicativo en la resolución de tareas específicas, fue una oportunidad para reconocer la importancia de algunos asuntos relativos a la enseñanza y, por ende, la necesidad de prestarles la atención y el cuidado que requieren. Tal es el caso de las tareas y preguntas que se le formulan al estudiante ya que son herramientas que apoyan el proceso de aprendizaje; también lo es, la observación directa del trabajo del estudiante que permite, por ejemplo, ser consciente de que no toda respuesta correcta implica una comprensión por parte del estudiante.

INTRODUCCIÓN

En este texto damos a conocer la experiencia que vivimos al participar en un programa de desarrollo profesional para profesores de matemáticas, adelantado entre octubre de 2001 y mayo de 2003 por "una empresa docente" con la financiación del Ministerio de Educación Nacional.

El Programa inició con la realización de un seminario cuya intención era crear un espacio para tratar y cuestionar aspectos específicos relativos a la proporcionalidad como tema de las matemáticas escolares. Así, durante este seminario hubo actividades encaminadas a: establecer dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad, explorar y explicitar las concepciones de los participantes acerca de la proporcionalidad, considerar un conjunto de situaciones a través de las cuales se pudieran cuestionar o discutir las definiciones de proporcionalidad, presentar varias definiciones formales de proporcionalidad y contrastarlas con las explicitadas por los participantes, reflexionar acerca de formas de solucionar distintas situaciones de proporcionalidad que pusieran en tela de juicio nuestro conocimiento al respecto, y, discutir las demandas cognitivas que hay detrás de las diferentes formas de solucionar un mismo problema.

Con base en las reflexiones y cuestionamientos realizados durante parte del seminario acerca de la proporcionalidad, su enseñanza y aprendizaje, se invitó a los participantes por cada institución a identificar un subtema muy específico y, para él, diseñar una secuencia de actividades de clase, hacer un plan para recoger información de interés durante la implementación, implementar las tareas con un grupo de estudiantes, procesar y analizar la información recogida, y escribir un reporte del proyecto realizado.

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 125-132). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

El segundo seminario en el que participamos abrió espacio para tratar aspectos relacionados con dos asuntos: uno de ellos, la elaboración de un plan de observación para utilizar en la implementación de la secuencia diseñada, el cual debía servir como referencia para el análisis de los resultados encontrados y el otro asunto, la escritura del reporte correspondiente al proyecto realizado.

Ninguna de las tres profesoras que llevamos a cabo este proyecto tenía una experiencia reciente en la enseñanza de la proporcionalidad; en consecuencia, no teníamos un conocimiento claro y preciso de asuntos tales como cuáles son los conceptos que se trabajan como parte del tema, cuál es la ruta que usualmente se propone en los libros de texto para enseñar el tema, cuáles son los errores que suelen cometer los alumnos, cuáles son los puntos sobre los que debe enfatizar la enseñanza, etc. Decidimos entonces realizar nuestro proyecto con estudiantes de grado octavo, quienes ya habían estudiado el tema de la proporcionalidad en el grado séptimo, con la intención de explorar si ellos usaban o no, la razón porcentual o porcentaje como un operador[1] y, además, evaluar conocimientos tratados en el curso anterior.

LA SECUENCIA DE TAREAS

DESCRIPCIÓN GENERAL

La primera tarea presenta una región rectangular cuadriculada, de veinte columnas y cinco filas de manera que se tienen cien cuadrados del mismo tamaño, algunos sombreados para formar la palabra “cien”. Relacionadas con ese contexto gráfico, hay planteadas una serie de preguntas que piden determinar la razón entre la cantidad de cuadros que cumplen una cierta condición y la totalidad de los cuadros del gráfico; una de tales preguntas es, por ejemplo, “¿Cuál es la razón entre la cantidad de los cuadros sombreados que forman la letra ‘C’ y la letra ‘I’ con la totalidad de los cuadros?”. Después de dichas preguntas hay otra que pide explicar cómo obtuvieron los valores de las respuestas dadas. Luego se pide usar los datos obtenidos para completar una tabla en la que para los diferentes casos considerados en las preguntas, se especifican tres columnas: número de cuadros que cumplen la condición, razón con respecto a la totalidad y lectura de la razón, espacio este donde queríamos la verbalización escrita de los símbolos usados en la segunda columna de la tabla. Termina la primera tarea con cuatro preguntas, dos de las cuales se refieren a lo común y lo

1. Al consultar los documentos de la propuesta del programa curricular para séptimo grado, publicada en el año 1989 por el Ministerio de Educación Nacional, encontramos la sugerencia de tratar temas tales como el porcentaje, el interés, el reparto proporcional y los problemas de regla de tres, como aplicación de operadores multiplicativos, con el fin de lograr la correspondiente integración entre ellos.

diferente que tienen las razones obtenidas y las otras dos, al nombre de ese tipo de razones y a otra forma de expresarlas.

La segunda tarea fue bastante similar a la primera en lo que demandaba para las alumnos, pues el contexto hacía referencia también a un conjunto de cien elementos, y se determinaban dos subconjuntos de los cuales se conocían las respectivas cantidades de elementos; las preguntas formuladas pedían determinar la razón entre la cantidad de elementos que cumplen una condición específica y la totalidad de elementos del conjunto de referencia. En este caso preguntamos también en qué situaciones de la vida diaria habían observado la representación utilizada por ellos para expresar las razones consideradas.

La tercera tarea tuvo dos partes. En la primera parte se planteó el siguiente problema:

> En un almacén se puede conseguir un descuento del 20% pero, al mismo tiempo, se tiene que pagar el impuesto del IVA del 16%. ¿Qué preferiría que calculasen primero: el descuento o el impuesto?

Para darle respuesta a la pregunta formulada, las estudiantes debían completar dos tablas en las que se presentaban cinco artículos (los mismos para las dos tablas) con sus respectivos precios; para cada artículo, en la primera tabla debían calcular: (i) el valor del IVA, (ii) el precio más el valor correspondiente al IVA, (iii) el valor del descuento para el precio más IVA, (iv) el precio a pagar, y en la segunda tabla debían calcular: (i) el valor de la rebaja, (ii) el precio menos el valor correspondiente a la rebaja, (iii) el valor del IVA para el precio menos la rebaja, (iv) el precio a pagar. Los precios de los artículos eran múltiplos de 1600 y estaban ordenados ascendentemente; además, en cada una de las tablas se presentaron los valores correspondientes a las diferentes columnas para el primer artículo; esto se hizo para que tuvieran una referencia en caso de necesitarla pues podrían hacer sus cálculos y comparar sus resultados con los dados en la tabla. En la segunda parte se plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Conoce alguna manera de calcular directamente la razón porcentual de cualquier cantidad? ¿Cuál?
- ¿Qué significado tiene el operador "$\times \dfrac{b}{100}$? ¿Lo utilizó en la solución del taller?
- ¿Conoce alguna fórmula para solucionar problemas de aumentos y disminuciones porcentuales?
- ¿Qué significado tiene un descuento porcentual?
- ¿Qué significado tiene un aumento porcentual?

IMPLEMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN

La secuencia de tareas descrita se implementó en dos sesiones, cada una de sesenta minutos, con un grupo de nueve estudiantes del grado octavo quienes voluntariamente participaron en la experiencia. Para que desarrollaran las tareas propuestas se pidió a las alumnas conformar grupos de tres; así, en cada sesión inicialmente hubo un trabajo en grupo y luego la respectiva socialización.

Cada una de las profesoras participantes en el proyecto observó de cerca el trabajo de un grupo de alumnas, teniendo en cuenta una serie de aspectos previstos al hacer el plan de observación. En general, queríamos observar si las alumnas comprendían el lenguaje utilizado en los enunciados y preguntas, si entendían qué se les preguntaba y qué se les pedía realizar, si las justificaciones expresadas por ellas tenían sentido lógico, si intercambiaban opiniones con sus compañeros de grupo como parte del trabajo.

Con respecto a la primera tarea queríamos observar, en primer lugar, cómo determinaban las alumnas la totalidad de cuadros de la cuadrícula: si asociaban la palabra escrita en el diagrama con la totalidad de cuadros, si los contaban uno a uno, si utilizaban modelos matemáticos para determinar el número de cuadros tales como contar los cuadros de una fila (columna) y sumar ese valor tantas veces como columnas (filas) hubiera, o, contar los cuadros de una fila y los de una columna y multiplicar esos dos valores; en segundo lugar, cómo determinaban las alumnas la cantidad de cuadros que cumplían con la condición impuesta en cada caso: si los contaban uno a uno o si lo hacían indirectamente con base en información calculada previamente; en tercer lugar, qué notación utilizaban las alumnas para expresar la razón porcentual: como cociente indicado, o como un número decimal, o con el signo "%"; en cuarto lugar, cómo enunciaban verbalmente la razón porcentual: "la razón de … a cien", "la razón entre … y cien", "… es a cien", "por cada cien hay …".

Dada la similaridad de las dos primeras tareas, en la segunda, con excepción de lo relativo al contexto de la situación, se observaron los mismos asuntos que en la primera.

Con respecto a la tercera tarea queríamos observar, en primer lugar, cómo interpretaban y manejaban la razón porcentual aplicada a una cantidad: si como un operador fraccionario que actúa sobre una cantidad (es decir, hace cien partes de la cantidad y coge un determinado número de tales partes), si como un operador multiplicativo (es decir, se calcula el decimal correspondiente al porcentaje y se multiplica por la cantidad a la que se le aplica), si como una relación entre conjuntos (grupos de cien partes) que por ejemplo permite ver que 15% de 300 establece una relación biunívoca entre grupos de 100 y grupos de 15, tal que la relación "de 15 a 100" es la misma que "de 30 a 200" y la misma que "de 45 a 300"; en segundo lugar, si utilizaban la regla de tres para plantear y solucionar la situación.

Para llegar a tener una buena percepción del trabajo realizado por las alumnas fue importante seguir de cerca las conversaciones que se dieron entre las integrantes de cada grupo sobre los conceptos de: operador, razón, porcentaje, descuento porcentual, forma de escribir y leer una razón, lo mismo que haber atendido los análisis y procesos seguidos para obtener las diferentes respuestas.

ALGUNOS RESULTADOS

En relación con la primera tarea encontramos que para determinar el número total de cuadros, los tres grupos de alumnas contaron el número de cuadros a lo largo y a lo ancho del rectángulo y luego multiplicaron entre sí tales números; además, leyeron la palabra formada con los cuadros sombreados y eso les permitió reafirmar que había cien cuadros en total.

Para determinar el número de cuadros sombreados y el de cuadros blancos, los contaron uno a uno, aunque algunas alumnas señalaban que el segundo número se podía obtener a partir del primero; en otros casos considerados en los que era posible obtener el número de cuadros sombreados sumando números previamente obtenidos, lo hicieron así, sin contarlos uno a uno.

Para responder las preguntas que se referían a cuál es la razón entre dos cantidades, en los tres grupos conversaron para decidir qué simbología utilizar; por ejemplo, en uno de los grupos una alumna propuso escribir 63% mientras que otra se inclinó por la escritura $63/100$, y el grupo terminó escribiendo esto último sin haber explicitado algún criterio que les ayudara a tomar la decisión; además acordaron que la expresión se lee “sesenta y tres por ciento”. La notación usada por los otros dos grupos fue respectivamente “63 es a 100” y “63 : 100”.

En la pregunta donde creíamos que las alumnas podían dar justificaciones que nos ayudaran a vislumbrar qué entendían por razón entre dos cantidades, los tres grupos mencionaron los valores implicados en la razón y no la manera como habían obtenido la razón; al revisar el enunciado de la pregunta nos damos cuenta de que las estudiantes lo interpretaron correctamente y es el enunciado que planteamos el que no expresa bien lo que pretendíamos. Sin embargo, cabe resaltar que por observación directa una de nosotras percibió que para encontrar la respuesta a una pregunta, uno de los grupos adicionó razones porcentuales como si fueran fracciones homogéneas, situación que nos parece un indicio de que se asocia la razón con una fracción; otra situación que nos dio a entender esta asociación tiene que ver con la forma como las alumnas leyeron las razones, por ejemplo, “sesenta y tres centésimos”.

En las respuestas que dieron los tres grupos a las preguntas que indagaban por lo común y lo diferente de las razones que se estaban considerando, las alumnas usaron términos asociados al tópico de razones y de fracciones; por ejemplo, dijeron que “todas están sobre 100”, “en todas las razones el antecedente es diferente”.

Con respecto a la tercera tarea encontramos que en los tres grupos, las alumnas comenzaron por hacer los cálculos correspondientes a la primera fila de las tablas tal como lo habíamos previsto, ejercicio con el cual comprobaron que el procedimiento que estaban usando era apropiado. Posteriormente se dispusieron a llenar las dos tablas usando el procedimiento que habían puesto a prueba. Un grupo utilizó calculadora y fue el único que pudo completar las dos tablas, compararlas correctamente y en consecuencia dar respuesta al problema planteado. En los otros dos grupos fue evidente el uso de la razón como operador fraccionario para hacer los cálculos; al respecto de este uso tenemos la percepción de que varias de las alumnas aplicaron el algoritmo sin entender realmente lo que significa.

Por otra parte, pudimos ver que en ninguno de los tres grupos se preocuparon por analizar si los valores obtenidos representaban o no respuestas lógicas; en un grupo, por ejemplo, al determinar el 16% de un artículo cuyo precio es de $3200 encuentran que el precio del artículo más el IVA es de $9507 lo que significaría que el porcentaje del IVA equivale a $6307, cantidad que corresponde casi a dos veces el precio del artículo. Esto nos sugiere la necesidad de propiciar en nuestras clases actividades encaminadas a que los estudiantes miren las respuestas que obtienen tratando de establecer si son razonables o no, si tienen sentido lógico o no.

A la pregunta que se refería a si conocen una manera directa de calcular la razón porcentual de cualquier cantidad, respondieron afirmativamente y vimos que en efecto así es pues lo demostraron al hacer uso del operador para los cálculos de las tablas; sin embargo, al tratar de precisar la manera en que lo hacen, mencionan la simplificación; frente a esta respuesta, las observadoras no hicimos exploración alguna que nos permitiera ahondar en las ideas de los alumnos al respecto.

A la pregunta que se refería al significado del operador $\times \frac{b}{100}$, dos grupos respondieron explicitando cómo aplicar el procedimiento: “se multiplica por b y luego se divide por 100”.

A la pregunta que indaga acerca de si conocen una fórmula para solucionar problemas de aumento y disminución porcentuales, en los tres grupos dieron una respuesta acertada expresada en términos generales.

La experiencia nos permitió ver la importancia y los efectos positivos para el proceso de aprendizaje que tiene el hecho de lograr que las alumnas participen voluntariamente en las actividades que se les plantean, como sucedió en nuestro caso; el resultado es más diciente en la medida en que las alumnas mostraron un gran interés, honestidad, responsabilidad y compromiso en el desarrollo de cada una de las tareas.

Como maestras pudimos reconocer la importancia que tiene la observación directa por parte del docente en el momento en que las estudiantes desarrollan una tarea, ya que permite conocer aspectos importantes, que no percibimos, cuando simplemente evaluamos el trabajo en forma escrita. Por ejemplo, es frecuente creer que respuestas correctas de las alumnas indican que han entendido un concepto; por nuestra observación afirmamos que en ocasiones es posible tener respuestas correctas obtenidas en forma mecánica, es decir, siguiendo un procedimiento previamente establecido, sin que haya un análisis lógico detrás de su utilización. Otro ejemplo se refiere a que pudimos advertir que en ocasiones algunas estudiantes entendían la pregunta, sabían la respuesta pero tenían dificultad para expresar la solución, en parte quizás por dificultades de comunicación pero también porque les falta claridad en el concepto implicado o destreza en el manejo de los algoritmos requeridos; sin embargo, de ello no se puede deducir que el estudiante no comprende nada del tópico; algo similar se puede decir en casos en los que el estudiante reconoce que la respuesta no es la correcta pero no está en capacidad de argumentar por qué. Estas breves consideraciones aquí presentadas nos ayudan a entender que la relación entre las producciones de los alumnos y la comprensión que ellos tienen acerca de un tópico específico no es directa ni transparente y por ello la tarea que tenemos los maestros de dar cuenta de cómo va avanzando la comprensión de nuestros estudiantes es un asunto muy complejo que requiere de una enorme responsabilidad de nuestra parte.

PARA TERMINAR

En primer lugar, queremos señalar que la participación en este proyecto fue una excelente oportunidad para iniciar procesos de cambio en el área de matemáticas, experiencia que puede motivar a las otras áreas académicas de la institución a emprender un proceso de cualificación similar.

En nuestro caso comprobamos que es posible e interesante involucrarnos en procesos de desarrollo profesional mediante los cuales podamos adelantar pequeños proyectos de indagación en el aula que se centren en tópicos puntuales relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, es relativamente claro que las múltiples actividades institucionales por las que tenemos que responder pueden generar circunstancias no del todo propicias para este tipo de participación de los maestros en la medida en que no nos deja tiempo sino para atender los asuntos de la cotidianidad de la escuela.

La experiencia en este trabajo nos mostró que en muchas ocasiones las definiciones que manejamos en clase están basadas en los conceptos de los programas curriculares del Ministerio de Educación Nacional o en textos escolares dirigidos a los estudiantes y cuando profundizamos en tales conceptos nos damos cuenta de que no son lo suficientemente claros y precisos.

Al elaborar preguntas, talleres o evaluaciones debemos tener en cuenta que se trata de las herramientas con las cuales apoyamos el aprendizaje de nuestros alumnos y en consecuencia se constituyen en un factor pedagógico fundamental; por lo tanto, las situaciones problemas deben motivar y desencadenar razonamientos de tipo matemático que conlleven a que las respuestas no sean inmediatas y que contribuyan al desarrollo de competencias logicomatemáticas del estudiante —competencias que se manifiestan cuando busca ordenada y selectivamente la solución a los problemas, intenta más de un camino para llegar a una respuesta, o puede decidir si una respuesta obtenida es razonable en el contexto en el que está planteada la respectiva pregunta.

Las reflexiones que hicimos en esta experiencia acerca de la observación al trabajo del alumno, nos hacen más conscientes de que poder observar al estudiante como parte de la evaluación nos ayuda a dar cuenta de los logros alcanzados: cuál es el saber del estudiante y los cambios que se van operando en dicho saber a medida que él participa activamente de su proceso de aprendizaje, cómo se van desarrollando las capacidades de lectura y escritura sobre temas relacionados con la matemática y la capacidad de reflexionar críticamente sobre lo que se enseña, lee o escribe. Con un mayor conocimiento sobre esos aspectos del proceso de aprendizaje es claro que se puede ser más cauto con relación a calificaciones absolutas y afirmaciones imprecisas o demasiado generales y, en cambio, se puede dar información de elementos positivos del proceso del estudiante que se refieren a lo que éste ha logrado frente a las diferentes temáticas tratadas.

Deseamos que nuestra participación en este Programa de desarrollo profesional contribuya a iniciar y consolidar la construcción de una red de maestros de matemáticas cuyo propósito general sea realizar acciones para mejorar la práctica docente y extender la experiencia a las alumnas maestras en su práctica pedagógica y así responsabilizarnos todos de la educación matemática desde el preescolar hasta el grado trece.

Leonor Barreto
Ninfa Garzón
Victoria Fonseca
Escuela Normal Superior Leonor Álvarez Pinzón de Tunja
Tel.: (098) 742 9287

CORRELACIÓN INVERSA Y DIRECTA: ¿DOS CARAS DE UNA MISMA MONEDA?

INÉS GONZÁLEZ, RAMIRO CORTÉS
Y WILLIAM VELÁSQUEZ

En el estudio de la proporcionalidad el carácter creciente o decreciente de la relación entre las magnitudes ha sido siempre un aspecto esencial. Presentamos una experiencia de indagación-acción a través de la cual intentamos, de un lado, explorar la manera como los estudiantes reconocen y enuncian el orden relativo de magnitudes que varían de manera dependiente en dos eventos, y de otro lado, promover en los estudiantes el aprendizaje y uso de formas de representación de tales relaciones. Los resultados observados en el trabajo de los estudiantes nos llevaron a reflexionar sobre cuestiones tales como si una relación puede simultáneamente comportar una correlación directa e inversa, o si siempre es posible establecer representaciones cartesianas de la covariación.

INTRODUCCIÓN

Por invitación de "una empresa docente", los profesores de matemáticas de la Escuela Normal Superior de Amagá, fuimos convocados a participar en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores", coordinado por "una empresa docente", centro de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Desde nuestra perspectiva, el objetivo principal del Programa era promover una experiencia de diseño curricular en torno a algún concepto o procedimiento relevante para la comprensión de la proporcionalidad. Para conseguir este objetivo participamos de varios seminarios y en el período intermedio entre ellos llevamos a cabo una serie de tareas en la Escuela Normal.

En el desarrollo del Programa inicialmente tuvimos acercamientos a la proporcionalidad desde una visión matemática y didáctica. Después, comenzamos la fase de planeación y diseño de la propuesta curricular en la que —entre otras actividades— diseñamos talleres que resolvimos antes de presentárselos a los alumnos, propusimos posibles respuestas que ellos darían en el momento en que desarrollaran tales talleres y los replanteamos. Luego, implementamos en una de nuestras aulas dichos talleres haciendo simultáneamente una observación y registro de las actividades y respuestas de nuestros estudiantes. Después, con base en los registros de la observación, realizamos un análisis a través del cual pudimos advertir algunas caracterís-

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 133-146). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

ticas de la manera como los estudiantes establecieron rasgos de la variación conjunta de dos magnitudes en un mismo evento y elaboraron representaciones gráficas de dicha variación.

A continuación presentamos información relativa a este proceso de diseño e implementación curricular; ésta la hemos organizado en cinco partes, a saber: “Elección de eventos cotidianos de variación conjunta”, “Tareas propuestas a los alumnos”, “La preparación de la implementación”, “La implementación del diseño curricular” y “A modo de conclusión”.

ELECCIÓN DE EVENTOS COTIDIANOS DE VARIACIÓN CONJUNTA

REDIMENSIONAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD

El trabajo realizado en el primer seminario nos enfrentó a una perspectiva de la proporcionalidad poco familiar para nosotros, como docentes. En aquel seminario, de un lado, reconocimos que las rutas temáticas que empleamos los profesores para la enseñanza de la proporcionalidad no son tan diversas, pues casi siempre el listado de temas que se abordan al estudiar la proporcionalidad incluye los mismos títulos en un mismo orden; infortunadamente, la sustentación que pudimos ofrecer a aspectos de tal ruta (por ejemplo, orden temático, jerarquía temática) no fue tan fuerte como esperábamos; en consecuencia quedaron planteados algunos interrogantes, tales como: ¿es necesario que el estudio de las fracciones preceda al estudio de la proporcionalidad?, ¿es necesario estudiar razones y proporciones para poder estudiar la proporcionalidad directa e inversa?, ¿cuál es la relación que hay entre proporción y proporcionalidad?, ¿cuál es el sustento conceptual de la regla de tres, como algoritmo para resolver problemas de cuarta proporcional? De otro lado, en el primer seminario, al estudiar los criterios que manejamos para decidir si una situación involucra una relación de proporcionalidad y contrastarlos con definiciones matemáticas, advertimos que hay diversas definiciones de proporcionalidad directa e inversa y que no es cierto que la correlación directa esté sólo ligada a la proporcionalidad directa, ni que la correlación inversa no esté ligada a tal tipo de proporcionalidad. También, en aquel seminario, al estudiar algunas preguntas acerca de temas de proporcionalidad incluidas en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias —TIMSS— (Díaz, Álvarez, Torres y Guacaneme, 1997) pudimos identificar algunos de los errores más comunes de los alumnos al abordar la proporcionalidad, tales como: abordar una situación de proporcionalidad sin considerar si es directa o inversa, organizar equivocadamente las variables para calcular la cuarta proporcional, plantear y resolver problemas de proporcionalidad inversa de la misma manera como se resuelven los de proporcionalidad directa, o utilizar patrones aditivos de cambio en lugar de multiplicativos. A través de las estadísticas de respuesta a aquellas preguntas del TIMSS, pudimos sorprendernos con los bajos resultados que los estudiantes colombianos obtuvieron y nos cuestionamos acerca de los resultados efectivos de la enseñanza que promovemos acerca de la proporcionalidad.

Definitivamente, en aquel primer seminario pudimos redimensionar la complejidad de la proporcionalidad, en tanto temática escolar. Como consecuencia de ello intuimos que la pregunta acerca de cómo enseñar la proporcionalidad era no sólo muy general, sino que difícilmente podría ser respondida en el Programa, pues por la dimensión del problema subyacente a la pregunta se requeriría desarrollar un vasto proyecto de investigación.

En aquel momento iniciamos un proceso de identificación de una temática específica dentro de la proporcionalidad que pudiera ser abordada a través de un breve diseño curricular. Con este fin hicimos una reflexión inicial sobre nuestra experiencia y sobre las dificultades de los estudiantes, identificando así que si bien resuelven con cierta facilidad situaciones en las que intervienen magnitudes directamente proporcionales, presentan serias dificultades cuando en las situaciones intervienen magnitudes inversamente proporcionales; estas dificultades se expresan en errores tales como organizar mal la proporción y resolver el problema como si las magnitudes fueran directamente proporcionales. De esta manera, la proporcionalidad inversa se constituía en una temática más específica a estudiar.

Al cuestionar nuestro conocimiento acerca de la proporcionalidad inversa pudimos advertir que dentro de los criterios de los que disponíamos para definirla se encontraba un concepto mucho más específico como lo era la correlación inversa; concepto que como se había señalado en el seminario no era condición necesaria, a menos que las magnitudes implicadas en la relación fueran absolutas (como las que comúnmente se trabajan en la escuela). En aquel momento —basados en nuestra experiencia docente, en los planteamientos del Ministerio (MEN, 1989) y con la ayuda de los tutores del Programa— decidimos que el estudio de la correlación (directa o inversa) podría configurar un punto de partida en la enseñanza de la proporcionalidad y que por tanto deberíamos desarrollar un proyecto de indagación-acción que nos permitiera explorar aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la correlación.

LA CORRELACIÓN

Con la colaboración de los tutores del Programa pudimos establecer algunas definiciones y consideraciones respecto de la correlación.

En un lenguaje matemático se puede expresar que dos magnitudes X y Y están correlacionadas directamente si para todo y_i y todo y_j se cumple que $y_i < y_j$ cuando $x_i < x_j$. De manera similar, se establece que están inversamente correlacionadas si para todo y_i y todo y_j se cumple que $y_j < y_i$

cuando $x_i < x_j$. Si se aceptara que las magnitudes están relacionadas mediante una función f se diría entonces que f es creciente, en el primer caso, y que es decreciente, en el segundo.

Para reconocer que existe una correlación directa entre las magnitudes X y Y es necesario comparar, a través de la relación "$<$", los valores de las cantidades de X entre sí, y los valores de las cantidades de Y entre sí. Si los resultados de estas comparaciones son iguales para todas las parejas de valores y sus correspondientes, entonces se puede afirmar que hay correlación directa entre las magnitudes. Para explicar un poco más lo anterior presentaremos una tabla con dos filas que podrían parecer mal ubicadas, en las que se muestra el resultado de aplicar la relación "$<$" a las parejas de cantidades sucesivas de las magnitudes X y Y.

	$x_1 < x_2$	$x_3 < x_2$	$x_3 < x_4$	$x_4 < x_5$	$x_6 < x_5$	
X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	$y_1 < y_2$	$y_3 < y_2$	$y_3 < y_4$	$y_4 < y_5$	$y_6 < y_5$	

Como se puede observar, ni los valores x_i ni los y_i están ordenados; no obstante, las comparaciones se corresponden, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces también $y_i < y_{i+1}$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces también $y_{i+1} < y_i$. Por supuesto que si los valores x_i estuvieran ordenados, los valores y_i también lo estarían en el mismo orden.

De manera similar para reconocer que existe una correlación inversa entre las magnitudes X y Y es necesario comparar, a través de la relación "$<$", los valores de las cantidades de X entre sí, y los valores de las cantidades de Y entre sí. Si los resultados de estas comparaciones son opuestos para todas las parejas de valores y sus correspondientes, entonces se puede afirmar que hay correlación inversa entre las magnitudes. Como lo hicimos antes, para explicar un poco más esta idea presentaremos una tabla con dos filas que podrían parecer mal ubicadas, en las que se muestra el resultado de aplicar la relación "$<$" a las parejas de cantidades sucesivas de las magnitudes X y Y.

	$x_1 < x_2$	$x_3 < x_2$	$x_3 < x_4$	$x_4 < x_5$	$x_6 < x_5$	
X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	$y_2 < y_1$	$y_2 < y_3$	$y_4 < y_3$	$y_5 < y_4$	$y_5 < y_6$	

Como se puede observar, las comparaciones son opuestas, es decir si $x_i < x_{i+1}$ entonces $y_{i+1} < y_i$ o si $x_{i+1} < x_i$ entonces $y_i < y_{i+1}$. Aquí, si los valores x_i estuvieran ordenados, los valores y_i también lo estarían pero en orden opuesto.

A partir de estas definiciones de correlación directa e inversa[1], de las consideraciones de lo que significaría su reconocimiento, y de advertir que si los valores de una de las magnitudes están ordenados es más fácil reconocer la existencia y el tipo de correlación, determinamos que nos interesaría que nuestros estudiantes pudieran identificar que la variación de una de las variables afecta la variación de la correspondiente variable y que pudieran formular enunciados (gráficos o textuales) que dieran cuenta del crecimiento o decrecimiento de una de las variables con respecto al correspondiente crecimiento o decrecimiento de la otra.

DOS EVENTOS EN LOS QUE SE PUEDE EXPLORAR LA CORRELACIÓN

Bajo los supuestos de que el conocimiento matemático se construye de mejor manera en ambientes que le sean familiares a los estudiantes y que las matemáticas deben permitir a los estudiantes mejorar el conocimiento de su entorno, creímos conveniente enfrentar a los estudiantes a eventos cotidianos en los que se identificaran dos variables mutuamente relacionadas que comportaran correlaciones inversas.

Las indicaciones de los tutores del Programa nos llevaron a reconocer dos eventos reportados en sendos documentos provenientes de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. El primero, reportado por Janvier, Charbonneau y Cotret (1989) en el estudio de las maneras de expresar la variación de variables relacionadas, plantea el cambio de luminosidad en un sitio a medida que transcurre el tiempo; decidimos que nos interesaría el cambio de luminosidad al atardecer. El segundo, reportado en uno de los informes colombianos del estudio TIMSS (Díaz y Rivera, 1997), propone estudiar la manera como varía el tiempo de disolución de una tableta de Alka–Seltzer en agua, a diferentes temperaturas para el agua.

REFLEXIONES PRELIMINARES SOBRE LOS EVENTOS

La determinación de esos dos eventos de variación conjunta no fue suficiente para consolidar el diseño curricular; vimos conveniente entonces adelantar una aproximación a ideas y representaciones matemáticas relacionadas en tales eventos. Así, nos dispusimos a explicitar información acerca de las variables relacionadas, del tipo de correlación entre las variables y de las posibles formas de representación de las mismas.

Inicialmente, para nosotros no fue problema la identificación de las variables en cada uno de los eventos; en el primer evento, el *tiempo de disolu-*

1. Consideramos necesario advertir que en estadística se utilizan los conceptos de correlación positiva y negativa, pero que éstos son diferentes de los de correlación directa e inversa tratados aquí.

ción y la *temperatura del agua* constituían las variables relacionadas; en el segundo, lo eran la *hora* y la *luminosidad*. En aquel momento reconocimos que el primer evento suponía la identificación de una correlación inversa ya que se debería observar que a mayor temperatura menor tiempo se requería para que la tableta se disolviera; por su parte también el segundo evento comportaba una correlación inversa, pues a medida que aumentara el tiempo, la luminosidad iría disminuyendo. En cuanto a la representación gráfica habíamos considerado que existía la posibilidad de que los estudiantes hicieran dibujos, pero en realidad nosotros estábamos pensando en gráficas elaboradas en planos cartesianos; no obstante, pudimos advertir que sin medir la luminosidad sería imposible hacer una representación cartesiana y supusimos que la única opción para el evento en el que ésta estaba presente serían los dibujos.

TAREAS PROPUESTAS A LOS ALUMNOS

En el Apéndice presentamos los dos talleres que les propusimos a los estudiantes, para ser desarrollados en equipos y por escrito. El primero, titulado "La luminosidad al atardecer", pretende centrar la atención en la correlación que existe entre el tiempo y el nivel de luminosidad al final del día; el segundo titulado, "Disolución del Alka-Seltzer", procura que se reconozca y enuncie la correlación entre la temperatura del agua y el tiempo de disolución de las tabletas.

Al menos tres razones justificaban que propusiéramos el taller de la luminosidad, a saber: implica un evento común del que pocas veces nos percatamos; los alumnos pueden hacer la observación en sus casas, sin limitaciones económicas y el día que lo deseen; y, fomenta la creatividad y argumentación de los alumnos. También previmos dos razones para el caso de la disolución del Alka-Seltzer: es un experimento de bajo costo y se puede hacer el seguimiento al trabajo de los alumnos.

LA PREPARACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

Como parte de la preparación de la implementación realizamos de manera individual las tareas de los talleres, luego socializamos las experiencias y respuestas; lo anterior nos permitió tener una aproximación a las posibles respuestas e interpretaciones de los alumnos. A continuación presentamos de manera sintética el resultado de estas actividades para cada uno de los talleres propuestos.

LA LUMINOSIDAD AL ATARDECER

Suponíamos que las descripciones que los estudiantes realizarían como respuesta al literal B podían referirse a un hecho específico (por ejemplo, se fue anocheciendo) o a la variación del nivel de luminosidad (por ejemplo, claro, menos claro, mucho menos claro, …, se oscureció; más oscuro, mucho más oscuro, …, oscuro del todo).

En cuanto a las representaciones gráficas del literal C esperábamos encontrar un dibujo del cielo en una noche o una secuencia de dibujos con diferente nivel de luminosidad. También supusimos que algunos estudiantes harían una gráfica en un plano cartesiano y que ésta estaría constituida por puntos, líneas o barras; en cualquier caso, las mayores valoraciones cualitativas se ubicarían lejos del cero.

Como respuesta a la pregunta 1 del literal D, esperábamos que los estudiantes admitieran que habían o no utilizado la información del cuadro. En lo que respecta a la pregunta 2 del mismo literal, supusimos una respuesta afirmativa o negativa acompañada de una explicación sobre: la cantidad de información de la gráfica, la necesidad de participar en la observación como condición para poder entender la gráfica y la calidad de la gráfica. La respuesta a la pregunta 3, podía implicar el uso de frases del tipo "cuando avanza el tiempo, la luminosidad disminuye", "cuando avanza el tiempo más se oscurece" o "en un momento determinado se oscureció rápido". A la pregunta 4, los estudiantes podrían responder afirmativa o negativamente; aquí también esperábamos que la respuesta se acompañara de una explicación que en el caso de la respuesta negativa podría ser del estilo "porque hay días en que se anochece más temprano o más tarde" o, "porque las condiciones climáticas son diferentes" y en el caso de la respuesta afirmativa podría ser "porque siempre se anochecerá a medida que transcurre el tiempo".

DISOLUCIÓN DEL ALKA-SELTZER

El cuadro propuesto en el literal B, se podría completar con expresiones que dieran cuenta del tiempo (por ejemplo, se demora mucho, menos, mucho menos y poco) o con valores numéricos, resultado de cronometrar el tiempo.

Como respuesta a la tarea planteada en el literal C, esperábamos que presentaran dibujos de cuatro vasos identificados con el nombre relativo a la temperatura del agua; además aquí también consideramos como posibles respuestas, gráficas cartesianas con características similares a las reportadas como respuesta al literal C para el evento de la luminosidad.

Para las preguntas 1 y 2 del literal D, esperábamos las mismas repuestas que para las mismas preguntas en el evento de la luminosidad. Para la pregunta 3, suponíamos que los estudiantes utilizarían expresiones tales como: "a más temperatura, menos tiempo necesita para disolverse" o "a menos temperatura requiere más tiempo para su disolución".

LA IMPLEMENTACIÓN DEL DISEÑO CURRICULAR

CONDICIONES DE IMPLEMENTACIÓN

Los talleres fueron propuestos a un grupo de veintisiete estudiantes del grado séptimo. El taller de la luminosidad en el atardecer fue propuesto como tarea para ser realizada fuera de la clase, pero la socialización se hizo en plenaria en el colegio, con la participación de dos de los autores como observadores y de uno como el profesor del curso. Para el taller de la disolución del Alka-Seltzer se dividió el curso en nueve grupos o equipos de trabajo; uno de los autores fue el orientador del taller para todos los equipos, en tanto que los otros dos profesores actuamos como observadores de un equipo cada uno. La actividad se realizó en el laboratorio de Ciencias Naturales, para tener acceso rápido al fogón y a la nevera; para esta actividad no se suministró ningún instrumento de medida y se determinó en cada vaso, con una línea, el nivel del agua, que fue igual en todos los vasos.

RESPUESTAS OBTENIDAS

La luminosidad al atardecer

Como respuesta a la tarea del literal B, algunos estudiantes escribieron en las celdas de la tabla expresiones relacionadas con el nivel de iluminación que percibían en el momento de la observación (por ejemplo, brillante, tenue, luminosidad débil, muy poco iluminado, hay muy poca luminosidad, opaco, semioscuro, se oscureció por completo). Otros estudiantes utilizaron frases que expresan una comparación entre dos niveles de luminosidad (por ejemplo, hay menos luz solar, está más oscuro, perdió luminosidad, se ha perdido la mayoría de la luminosidad). Identificamos que las respuestas de otros estudiantes no se refieren a la luminosidad, sino a aspectos climáticos (por ejemplo, hacía calor, hace frío, el ambiente es más fresco, hacía menos calor), a descripciones del firmamento (por ejemplo, empezó con un cielo lindo, las nubes se esparcen, no ha salido la luna, el sol se empezó a ocultar, las nubes cambiaron de posición y de color, el cielo se pone en parches, se estaba terminando de ocultar el sol, la luna estaba entera, las estrellas empezaron a salir, la luna y las estrellas salieron del todo), o al momento del día (por ejemplo, todavía es de día, va anocheciendo, ya anocheció más, finalmente es de noche).

Como se puede reconocer, existen respuestas que al parecer no atienden la consigna "respecto a la luminosidad" del enunciado de la tarea, ni al título de la columna donde se debía registrar la información. Muchas de estas respuestas alejaron a los estudiantes de la intencionalidad del trabajo, puesto que se pretendía la identificación de dos aspectos inversamente relacionados (transcurso del tiempo y luminosidad), y con algunos de los aspectos empleados se expresaban relaciones directas (por ejemplo, con más tiempo más frío, con más tiempo más nubes con manchas). Por su parte, las respuestas que sí atienden a la relación entre el tiempo y la luminosidad, expresan o bien un estado que se corresponde con un momento específico, o bien un cambio de la luminosidad entre dos momentos. Las respuestas de este último caso se corresponden mejor con las que habíamos previsto.

Las gráficas realizadas como respuesta al literal C, fueron en su mayoría dibujos de paisajes y quienes representaron la relación en un plano cartesiano o bien no identificaban los ejes o incluían rectas que indicaban correlaciones directas. Los dibujos se correspondieron con lo que esperábamos encontrar y que describimos en el apartado de respuestas esperadas.

En cuanto a las respuestas de las cuatro preguntas del literal D, puede resumirse el trabajo de los alumnos como sigue. Como respuesta a la pregunta 1, los estudiantes que admitieron haber usado la información de la tabla adujeron que ésta constituía un recurso que permitía recordar alguna información con respecto al tiempo y a la luminosidad; quienes recordaban dicha información afirmaron no haber requerido la tabla. Las opiniones en respuesta a la pregunta 2 estaban divididas; algunos estudiantes contestaban que no era posible que otra persona interpretara correctamente la gráfica hecha debido a la diferencia entre los pensamientos o puntos de vista de las personas, mientras que quienes contestaban afirmativamente mencionaban que la gráfica daba suficiente información o describían la gráfica como argumento. Con respecto a la pregunta 3, se encontraron varias respuestas, que se refieren a una correlación inversa entre las magnitudes consideradas (por ejemplo, a medida que van aumentando las horas, el día va perdiendo su luminosidad; entre más tiempo menos luminosidad), a una correlación directa (por ejemplo entre más tiempo más oscuridad) y otras no clasificables en estos dos grupos (por ejemplo, a medida que transcurre el tiempo la luminosidad es más escasa; la oscuridad aumenta gradualmente a medida que el sol se oculta; tiempo y luminosidad van cambiando lentamente). Como respuesta a la pregunta 4, todos los estudiantes coinciden en que no se obtendrían iguales resultados, pero no se refieren ni a la existencia de la correlación ni al tipo de ésta, sino a que la “velocidad” en que se oscurecería no sería siempre la misma, hecho que hacen depender de diferentes factores (por ejemplo, clima, estación del año, luminosidad del día).

Disolución del Alka– Seltzer

A pesar de la instrucción de no medir el tiempo, los estudiantes utilizaron sus relojes para hacerlo y determinaron tiempos cercanos a los dos minutos para el agua helada, alrededor de un minuto para agua al clima, próximos a medio minuto para agua tibia, y aproximados a veinte segundos para agua caliente.

Pocos estudiantes hicieron dibujos de la situación y la mayoría realizó gráficas de ejes ortogonales; estas gráficas contenían rectas de pendiente negativa, rectas de pendiente positiva y, eventualmente, una curva de una función decreciente.

Las respuestas a las preguntas 1 y 2 son muy parecidas a las de las preguntas 1 y 2 de la situación de la luminosidad al atardecer. Como respuesta a la pregunta 3, se registraron enunciados de correlación inversa (por ejemplo, entre menor temperatura más tiempo y entre mayor temperatura menos tiempo), de correlación directa (por ejemplo, entre más fría el agua más se demoraba; a más temperatura, más rápido se disolvía el Alka-Seltzer) y respuestas que no se dejaban agrupar en ningún tipo de correlación (por ejemplo, el Alka-Seltzer se demora a veces de acuerdo con la temperatura).

UNAS REFLEXIONES SOBRE LAS RESPUESTAS OBTENIDAS

Registrar las respuestas de los estudiantes y organizar su presentación para configurar el apartado inmediatamente precedente fue el inicio de un proceso de reflexión. Un segundo paso de este proceso nos llevó a hacer consideraciones adicionales, algunas de las cuales pueden justificar las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas.

Sobre las magnitudes involucradas

En el taller de la luminosidad al atardecer, el tiempo —o quizá sea mejor hablar de la duración— es una magnitud relativamente familiar para los estudiantes y hay valores numéricos específicos y ordenados de ésta. La otra magnitud (la luminosidad) si bien puede ser cotidianamente perceptible, no es fácilmente descriptible en términos cualitativos como se exige en la instrucción B; para esta cualidad —al igual que para muchas otras— no poseemos palabras que indiquen diferentes valores intermedios a los extremos (por ejemplo, brillante y opaco —o sus respectivos sinónimos—) lo cual podría obligar a incluir descripciones de comparación con estos estados extremos (por ejemplo, menos brillante, más opaco). Ahora bien, pensar en una cuantificación numérica de tal magnitud obligaría a conocer de mejor manera la magnitud y a realizar una aproximación a la fotometría, pues incluso sería inoperante la estrategia de utilizar una escala de valores entre 0 y 1 para describir el nivel de luminosidad (donde 0 correspondiera a la carencia de luz y 1 a un brillo extremo).

Por su parte, en el taller de la disolución del Alka-Seltzer la temperatura está presentada por cuatro palabras que describen sendos valores (no específicos sino relativos) de la magnitud. La otra magnitud objeto de estudio (la duración) debe ser expresada en términos no numéricos, lo cual parece imposible si no se efectúa una comparación con una unidad de medida (es decir, si no se mide) o no se comparan entre sí las duraciones, para lo cual sería necesario tener un mismo momento de inicio para las diferentes temperaturas del agua.

Sobre lo relativo de lo directo o lo inverso

Las magnitudes implicadas en las situaciones exhiben un comportamiento interesante: la variación de sus valores se puede describir de diferentes maneras. Para el caso de la luminosidad su variación se puede enunciar de al menos dos maneras equivalentes: "se hizo más oscuro" o "se hizo menos claro"; estos dos sentidos de la variación de los valores ligados a la variación en un sentido del tiempo origina dos expresiones para describir la variación de la luminosidad con respecto a la variación del tiempo, a saber: "a medida que se hace **más** tarde se hace **más** oscuro" y "a medida que se hace **más** tarde se hace **menos** claro". Como se puede ver en las anteriores frases —a través del hecho resaltado— la covariación de estas dos magnitudes se puede describir por las expresiones "a más … más …" y "a más … menos …".

La descripción de la covariación de dos magnitudes de maneras diferentes se presenta también en la situación de la disolución del Alka–Seltzer. Allí la variación de la temperatura del agua se puede describir de cuatro maneras, equivalentes dos a dos: "se hizo más fría" o "se hizo menos caliente", y "se hizo menos fría" o "se hizo más caliente". También la variación del tiempo de duración de la disolución se puede describir de varias maneras: "se demoró más", "fue más lento", "se tardó menos", "fue más rápido", "fue menos lento", "fue menos rápido", etc. Esto hace que la covariación se pueda describir a través de enunciados que incluyan las expresiones "a más … más …", "a menos … menos …", "a más … menos …" y "a menos … más …", como por ejemplo: "a **más** temperatura **más** rápido se disuelve", "a medida que el agua se hace **menos** fría, la disolución toma **menos** tiempo", "a medida que el agua se hace **más** caliente, la disolución toma **menos** tiempo", o "a **menos** temperatura **más** tiempo toma la disolución".

Inicialmente consideramos que poder establecer enunciados diferentes —y aparentemente opuestos— para la covariación de un par de magnitudes relacionadas hacía que la correlación pudiera ser directa o inversa, según el enunciado establecido. Sin embargo, luego nos dimos cuenta de que los enunciados incorporaban las palabras "más" y "menos" pero no la palabra "menor" implicada en las definiciones propuestas para la correlación directa e inversa; esta observación resultaría importante, como se verá a continuación.

Si en la situación de la luminosidad al atardecer incorporamos una relación de orden "<" a la magnitud tiempo y asumimos valores del tiempo t_i (con t = 1, 2, …, 7) correspondientes a cada una de las celdas de la tabla del literal B (de izquierda a derecha) y hacemos algo similar para la luminosidad —es decir, asumimos valores de luminosidad l_i (con i = 1, 2, …, 7) correspondientes a cada una de las celdas de la tabla (de izquierda a derecha)—, tendríamos que $t_i < t_{i+1}$ y $l_{i+1} < l_i$; esto, interpretado a la luz de las definiciones de correlación, nos indicaría que el fenómeno de la luminosidad con respecto al tiempo exhibe una correlación inversa. Pero entonces, ¿por qué se puede enunciar con expresiones de la forma "a más … más …" y "a más … menos …"? Creemos que lo que sucede es que la expresión

$l_{i+1} < l_i$ que bajo la relación de orden se enunciaría "l_{i+1} es menor que l_i" también puede ser interpretada o bien como "l_{i+1} es menos luminoso que l_i", o como "l_{i+1} es más oscuro que l_i"; estas dos expresiones verbales son tan sólo dos maneras diferentes de interpretar el mismo resultado de aplicar la relación de orden a los datos de la tabla, por tanto no implica que se puedan establecer dos órdenes diferentes para tales datos y que, en consecuencia, la correlación sea simultáneamente directa o inversa, dependiendo de la expresión verbal que se seleccione.

Este hecho, nos invita a reflexionar sobre las definiciones de correlación directa e inversa que usualmente aparecen en los textos escolares de matemáticas y que de manera habitual presentamos en nuestras clases, casi siempre como preámbulo al estudio de la proporcionalidad.

Sobre las posibles formas de representación

La representación cartesiana de las magnitudes involucradas en las situaciones o eventos tratados resulta ser una tarea no muy sencilla. Esto se debe fundamentalmente a que los datos de algunas de las situaciones no exhiben valores numéricos absolutos sino más bien estados cuantitativos (no numéricos) relativos, como en el caso de la temperatura. La representación en un eje horizontal de los valores de la temperatura del agua incluye los cuatro valores (helada, al clima, tibia y caliente) en orden (de izquierda a derecha o viceversa) pero no se puede establecer la "distancia" entre éstos; por su parte la representación de la luminosidad en un eje vertical incluiría dos puntos que indicarían los valores extremos (brillante y opaco) y puntos intermedios sin un nombre específico.

Como en ambos eventos existen magnitudes que con la información disponible no podían ubicarse en escalas graduadas, entonces la representación cartesiana resultaba imposible y a lo sumo se podría hacer una representación en dos ejes ortogonales no graduados. Este tipo de representación parece ser mucho más abstracta que la representación cartesiana y aun mucho más que la representación a través de una secuencia de dibujos.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Sin duda, la experiencia de diseño curricular nos impuso tareas que o bien, habitualmente no realizamos o, lo hacemos de manera apresurada y sin una reflexión cuidadosa. Sin duda, la "velocidad" con la que transcurre la actividad docente —determinada, entre otras, por la cantidad de cursos que hay que atender, por el elevado número de estudiantes a cargo, por la cantidad de temas que hay que abordar, por el sinnúmero de tareas que involucra la docencia— no favorece la actividad de diseño curricular. Este hecho hace que el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores" constituya ante todo una oportunidad para diagnosticar y mejorar la formación docente a través de una acción didáctica.

A través de esta acción pudimos reconocer: la necesidad de profundizar en el estudio de los temas matemáticos que enseñamos a nuestros estudiantes, la complejidad de diseñar talleres a través de los cuales los estudiantes logren aprender matemáticas, la potencialidad de observar directamente la actividad de los estudiantes como medio para entenderlos y comprender los procesos que realizan y, la necesidad de convertir el quehacer cotidiano de docentes y estudiantes en objeto de reflexión.

De manera particular y bajo la consideración de que nuestro diseño curricular constituye tan sólo un paso inicial del estudio de la proporcionalidad, identificamos algunas de las acciones futuras que podrían apoyarse en la experiencia vivida, a saber: replantear los talleres de acuerdo con lo observado y con las reflexiones realizadas, escudriñar conceptos matemáticos involucrados en eventos de covariación, identificar otros eventos que contengan correlaciones que puedan expresarse como relaciones inversas o directas, identificar formas de conectar la correlación con la proporcionalidad inversa o directa y mantener la actividad de diseño curricular como una manera de concretar en el aula estas acciones.

REFERENCIAS

Díaz, C., Álvarez, J., Torres, A. y Guacaneme, E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas –TIMSS– Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Díaz, C. y Rivera, H. (1997). *Habilidades en ciencias y matemáticas: una alternativa para desarrollar la creatividad –TIMSS– Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Janvier, C., Charbonneau, L. y de Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: obstacles et conflits. Colloque international "Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif* (pp. 64–75). Ottawa: Les editions d'Arc.

MEN (1989). *Programas de matemáticas. Reforma curricular. Grado séptimo.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Inés González
Ramiro Cortés
William Velásquez
Escuela Normal Superior Victoriano Toro Echeverri de Amagá
Tel.: (094) 8472017
E-mail: amagns01@edatel.net.co

APÉNDICE

PRIMER TALLER: LA LUMINOSIDAD AL ATARDECER

A. Observo la luminosidad del día, en un espacio abierto, entre las 5:30 p.m. y las 7:00 p.m., sin luz artificial.

B. Registro con mis palabras, en el siguiente cuadro, lo observado a medida que transcurre el tiempo respecto a la luminosidad del día. La valoración es cualitativa.

Tiempo	5:30 p.m	5:45 p.m.	6:00 p.m.	6:15 p.m.	6:30 p.m.	6:45 p.m	7:00 p.m.
Luminosidad							

C. Represento gráficamente lo observado.

D. Respondo sustentando:

1) ¿Necesité la información del cuadro para elaborar la gráfica?
2) Otra persona que observe la gráfica que realicé, ¿interpretaría lo que quise representar?
3) Comparando el tiempo transcurrido con la luminosidad, ¿qué podría concluir?
4) Si realizo esta observación en cualquier día del año, ¿obtendría aproximadamente la misma información?

SEGUNDO TALLER: DISOLUCIÓN DEL ALKA-SELTZER

A. En un recipiente con agua helada, determino el tiempo de disolución de un Alka-Seltzer. Repito este procedimiento con agua al clima, tibia y caliente.

B. Completo el siguiente cuadro, de acuerdo a lo observado:

Temperatura del agua (determinada al tacto)	**Tiempo de disolución del Alka-Seltzer**
Helada	
Al clima	
Tibia	
Caliente	

C. Elaboro una gráfica que dé cuenta del experimento realizado.

D. Respondo sustentando:

1) ¿Elaboré la gráfica utilizando la información del cuadro?
2) Otra persona que observe la gráfica elaborada, sin acompañamiento del cuadro, ¿comprendería de qué se trata?
3) ¿Qué relación puedo establecer entre la temperatura del agua y el tiempo de disolución del Alka-Seltzer?

La enseñanza de la proporcionalidad: un camino largo por recorrer

Adriana Espinal, Adriana Suárez,
Teresa Araque y Henry Vanegas

En este documento describimos algunos aspectos de la experiencia vivida en torno al diseño e implementación de una secuencia de tareas de proporcionalidad. A través de estos aspectos se evidencia que diseñar talleres para procurar que los estudiantes aprendan matemáticas es una labor compleja que exige la puesta en juego de conocimientos y habilidades docentes que habitualmente se usan pero que no están plenamente consolidados, a la vez que promueve una reflexión sobre éstos que permite cualificarlos.

Introducción

La Escuela Normal Superior de Jericó fue invitada por "una empresa docente" de la Universidad de los Andes a participar en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores". Esta invitación fue bien recibida institucionalmente y a partir de ello se decidió que nos involucráramos en el Programa con el deseo de aprender y con la intención de que éste fuera un espacio para confrontar la formación profesional lograda en la actividad docente que se desarrolla en la Normal.

La tarea central que llevamos a cabo en el marco del Programa fue el diseño e implementación de una secuencia de talleres, a través de los cuales buscábamos, además de lograr el aprendizaje de la proporcionalidad por parte de los estudiantes, identificar pautas que nos permitieran mejorar, crear, recrear y promover la enseñanza de la proporcionalidad.

A continuación, en cinco apartados presentamos algunos aspectos de la experiencia de diseño e implementación. En el primero hacemos una descripción sucinta de la problemática abordada, en el segundo aludimos a las características de la estrategia diseñada para abordar la problemática, en el tercero damos cuenta de algunos detalles de la implementación de la secuencia, en el cuarto exponemos algunos elementos que deberían ser tenidos en cuenta para la reelaboración de la estrategia utilizada y en el último sintetizamos algunas reflexiones acerca de la experiencia misma. Además, incluimos como apéndice la secuencia de talleres utilizada.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F. (Eds.) (2003). Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer (pp. 147-163). Bogotá: una empresa docente.

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La proporcionalidad constituyó el eje matemático sobre el que se instauró el Programa; en este sentido, inicialmente se realizó una reflexión acerca del conocimiento matemático en torno a la proporcionalidad. Como resultado de esta reflexión pudimos advertir que, a pesar de nuestra percepción inicial, nuestro conocimiento sobre la proporcionalidad —como educadores— era insuficiente para dirigir procesos de aprendizaje y que era necesario profundizar en aquél, pues tal insuficiencia podía ser una de las causas que contribuía a que los resultados esperados en cuanto al aprendizaje no se alcanzaran. A este respecto, en el Programa pudimos observar cómo el Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) mostró que la proporcionalidad —en tanto área temática que incluía el concepto de proporcionalidad, el significado de razón y proporción, la proporcionalidad directa e inversa, la extrapolación e interpolación lineal, etc.— presentó niveles de desempeño bastante bajos en el ámbito internacional y muy bajos para la población colombiana de los grados séptimo y octavo. También anteriormente, a través de los resultados de las pruebas SABER, a las que estuvieron vinculados los estudiantes de la Escuela Normal, habíamos podido reconocer que el desempeño en matemáticas de nuestros estudiantes era no muy satisfactorio.

Para confrontar los resultados obtenidos en las dos pruebas citadas, decidimos realizar en la institución una prueba de diagnóstico sobre la proporcionalidad; así, en el grado quinto de primaria indagamos por el significado de razón y proporción, en el grado décimo por la pendiente y las razones trigonométricas, y en undécimo por la interpolación y extrapolación lineal. Como los resultados de esta prueba nos mostraron un panorama de desempeño de los estudiantes similar al reportado en los estudios TIMSS y SABER, decidimos hacer una intervención de “refuerzo” en contenidos básicos para el tema sobre el que se hizo el diagnóstico. Luego, aplicamos nuevamente la prueba, pero los resultados no se modificaron sustancialmente; la mirada realizada a los resultados nos permitió advertir que los estudiantes tenían problemas para: establecer la razón entre los valores de dos magnitudes, determinar la ubicación de los términos en una proporción para solucionar un problema de cuarta proporcional, identificar la existencia de una correlación (directa o inversa) en una situación de covariación, plantear problemas de proporcionalidad, y, construir una proporción a partir de la igualdad de dos productos (por ejemplo, a partir de la igualdad $8 \times 6 = 12 \times 4$ escribir la proporción $\frac{8}{12} = \frac{4}{6}$). Adicionalmente, reconocimos que para los estudiantes el tipo de correlación es condición suficiente para determinar el tipo de proporcionalidad, es decir, para ellos, determinar que la correlación es directa basta para establecer que la proporcionalidad es directa, o determinar que es inversa para deducir que la proporcionalidad es inversa. También advertimos que ellos usan la regla de tres simple directa en cualquier problema de proporcionalidad, ya sea que la relación entre las magnitudes sea directa o inversa.

Esta experiencia —de diagnóstico, acción y evaluación— nos permitió ser conscientes de la necesidad de trabajar de una manera diferente los contenidos relativos a la proporcionalidad, es decir, de la necesidad de una nueva estrategia pedagógica. En aquel momento creímos conveniente que tal estrategia pedagógica adhiriera a planteamientos generales ampliamente difundidos en la comunidad de profesores, como los siguientes: "debemos ubicar a los estudiantes en un entorno de aprendizaje que propicie la investigación, el descubrimiento y la construcción de su comprensión, gracias a sus propios esfuerzos" y "hay que propiciar que el educando viva el aprendizaje como una experiencia progresiva, divertida y formativa". Además juzgamos provechoso que la estrategia asumiera los planteamientos expuestos en el documento oficial de lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) acerca de las situaciones problemas como recurso y medio para el aprendizaje de las matemáticas, pues como allí se menciona, éstas generan un estado de desequilibrio que crea en el estudiante la necesidad de abordar nuevas herramientas y acceder así a nuevos conocimientos; en otras palabras, las situaciones problemas son aquellas que generan interrogantes y a la vez incitan a la búsqueda de respuestas, además para su solución requieren procesos de reflexión, análisis y construcción.

LA ESTRATEGIA DISEÑADA

Para abordar la problemática esbozada en el apartado anterior y atendiendo a los planteamientos sobre los que nos gustaría proponer una estrategia didáctica de aula, vimos conveniente diseñar una secuencia de talleres (ver Apéndice) a través de los cuales los estudiantes pudieran desarrollar acciones que les permitieran un contacto con el conocimiento matemático relativo a la proporcionalidad.

Cuatro talleres constituyen la secuencia. Cada uno de los talleres está conformado por dos o tres actividades en las que se presenta una situación que incluye un contexto y una serie de preguntas y tareas que deben desarrollar los estudiantes; en algunas situaciones se incluye información matemática con respecto a algunos contenidos relativos a la proporcionalidad. Los talleres abordan diferentes temas relacionados con la proporcionalidad y su orden de aparición pretende corresponderse con un orden temático.

En el primer taller se enfrenta al estudiante a dos tablas que contienen información cuya interpretación, desde nuestra perspectiva, debe permitir reconocer las magnitudes relacionadas y el tipo de correlación (directa o inversa) existente. En el segundo taller presentamos dos situaciones de proporcionalidad (directa e inversa) a través de las cuales queremos que los estudiantes evidencien el carácter constante del cociente y del producto de valores correspondientes, respectivamente. Con el tercer taller pretendemos abordar una aproximación al cálculo de la cuarta proporcional como una estrategia para encontrar valores desconocidos de las dos situaciones del segundo taller, es decir como una estrategia para resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa que parte del reconocimiento del carácter constante del cociente o producto y su reinterpretación en términos de proporciones. En el cuarto taller les presentamos a los estudiantes dos problemas de proporcionalidad y les proponemos que inventen problemas a partir de una proporción y una tabla; este taller, en cierto sentido, constituye una manera de evaluar lo logrado en los tres talleres anteriores.

LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA

Implementamos la secuencia de talleres en el grado séptimo, en un curso de treinta y dos estudiantes, en cinco sesiones de cincuenta minutos cada una.

Para iniciar la implementación, entregamos los cuatro talleres a los estudiantes, les presentamos su estructura general y les dimos las instrucciones sobre la manera en que esperábamos que abordaran la solución de los mismos. Inmediatamente después se conformaron los grupos de trabajo, cada uno compuesto por cuatro integrantes, y se dio inicio al trabajo con el primer taller. Luego de aproximadamente media hora hicimos una socialización de las respuestas del taller, aclaramos dudas e inquietudes y corregimos algunos errores cometidos por los estudiantes. De manera similar se desarrolló la actividad para los demás talleres. Al final de la quinta sesión, y con el ánimo de afianzar algunos de los aspectos estudiados, propusimos otros ejercicios que no estaban incluidos en los talleres.

Durante la implementación, uno de nosotros actuó como profesor del curso, en tanto que los otros tres intentamos hacer una observación del trabajo de los estudiantes. Para esta observación habíamos determinado previamente unos derroteros generales. Por ejemplo, en el desarrollo de la primera tarea de la tercera actividad del cuarto taller nos interesaba observar si los estudiantes: interpretaban la proporción como una comparación de valores, aludían a proporciones de las anteriores actividades y talleres, determinaban la cuarta proporcional, discutían sobre incluir o no un contexto al problema, determinaban el tipo de proporcionalidad del problema a proponer o propuesto, y/o formulaban el enunciado del problema. Así mismo, para la segunda tarea de la tercera parte nos interesaba reconocer evidencia acerca de si los estudiantes: identificaban en la tabla los valores correspondientes, hacían comparaciones multiplicativas o aditivas entre los valores de la tabla, identificaban el tipo de correlación entre las parejas de valores correspondientes en la tabla, agregaban datos a la tabla, planteaban proporciones, calculaban el producto o el cociente de las parejas de valores, discutían sobre la inclusión de un contexto en el enunciado, y/o, enunciaban un problema.

De otro lado, habíamos anticipado algunas respuestas posibles a las tareas y preguntas propuestas. Por ejemplo, como respuesta a la primera tarea de la Actividad 1 del cuarto taller, supusimos que los estudiantes podrían:

- Intentar determinar cuántos pasajeros transporta el conductor del bus en un solo día y luego contestar la pregunta a través de dividir a 1296 entre 6; con este dato podrían ir calculando cuántos pasajeros recogería en dos, tres, cuatro, etc., días, hasta encontrar el número de días que corresponde a 4320 pasajeros.
- Encontrar los múltiplos de 1296 e identificar que el número de días debe estar entre 18 y 24.
- Plantear y resolver el problema en forma de regla de tres:

Pasajeros	**Días**
1296	6
4320	x

$$x = \frac{4320 \times 6}{1296} = 20 \text{ días}$$

- Plantear alguna de las siguiente proporciones y, a través del uso del producto cruzado, encontrar la cuarta proporcional:

$$\frac{1296}{4320} = \frac{6}{x} \qquad \frac{4320}{1296} = \frac{x}{6} \qquad \frac{1296}{6} = \frac{4230}{x}$$

El proceso de observación nos permitió reconocer aspectos generales del trabajo de los estudiantes en cada uno de los talleres. Para el caso del cuarto taller pudimos advertir que: en la mayoría de los grupos de estudiantes se hizo varias veces la lectura de los enunciados de los problemas, en algunos grupos la identificación de los problemas como situaciones de proporcionalidad fue casi inmediata, en muchos grupos se utilizaron símbolos y tablas como parte de la solución, y en una buena cantidad de grupos, con la intención de entender y solucionar los problemas, se establecieron comparaciones de éstos con las situaciones y problemas de los anteriores talleres.

En un primer momento consideramos que para muchos grupos las actividades realizadas a través de los tres primeros talleres les permitió abordar con relativo éxito las tres actividades del cuarto taller. Además, reconocimos que para la mayoría de los estudiantes el trabajo con las tablas constituyó tanto un referente para significar y entender las relaciones entre las magnitudes, como una estrategia para emplear en la solución de los problemas, pues utilizaban la tabla como un medio para anotar sistemática y organizadamente los datos, y luego establecían razones y comparaban los valores de las magnitudes. No obstante, en un segundo momento reconocer que en la mayoría de los grupos, la solución a los problemas de proporcionalidad del cuarto taller no involucró el uso de las proporciones sino que se procedió a través de la identificación de la variación aditiva de los valores, de operaciones aditivas sobre los mismos, o de comparaciones que involucraban encontrar la pareja de valores en la que una de las componentes fuera la unidad para luego multiplicar por un factor, nos hizo interrogarnos por el éxito de la secuencia de talleres.

Este cuestionamiento nos llevó a revisar los talleres propuestos y con la ayuda de los tutores del Programa pudimos notar algunos aspectos que no habíamos advertido al momento del diseño de la secuencia y que deberán constituir elementos centrales en la reconstrucción y rediseño de la secuencia de talleres; en el siguiente apartado presentamos tales aspectos.

ASPECTOS PARA LA REELABORACIÓN DE LA SECUENCIA

La mirada a cada uno de los talleres, con la intención de detectar posibles falencias en éstos que pudieran corregirse en una nueva versión de la secuencia, nos permitió determinar que la propuesta puede y debe ser mejorada en aspectos de forma y contenido; al mismo tiempo, la discusión sobre tales aspectos nos generó algunas reflexiones sobre el contenido matemático mismo. A continuación reportamos las falencias y las reflexiones para cada uno de los talleres.

CUESTIONES PARA REELABORAR EL PRIMER TALLER

En el primer taller, las dos actividades pretenden enfrentar a los estudiantes a sendas situaciones que expresan correlación directa e inversa, respectivamente, entre dos magnitudes. Sin embargo, al intentar determinar cuáles son las magnitudes implicadas nos encontramos con sorpresas respecto de la idea de magnitud que teníamos y pusimos en juego en el taller, y a la de comparación entre magnitudes.

En la actividad “De compras en el supermercado”, las magnitudes involucradas serían el *número total de artículos depositados en el carrito* y el *costo total de tales artículos*; la cuestión aquí es que la definición que habitualmente utilizamos de magnitud (todo aquello susceptible de medida) no parece ser aplicable a la primera magnitud, a menos que aceptemos que el conteo es una manera de medir, lo cual no parece ser adecuado, pues aunque los resultados de ambos procesos (contar y medir) sea un número, los procesos mismos parecen diferentes. Desde esta perspectiva, es claro que se hace necesario que, de un lado, reconceptualicemos la idea de *magnitud* para tener claridad si en esta actividad se están o no relacionando dos magnitudes, a través de sus valores numéricos, y de otro lado, revisemos la teoría de la proporcionalidad para establecer si pueden existir relaciones proporcionales entre conjuntos que no sean magnitudes; lo anterior deberá permitirnos un juicio para reelaborar las situaciones del taller.

En la actividad “Necesidad de dormir” la reflexión sobre las magnitudes implicadas ofrece un panorama un poco más complejo que el reportado inmediatamente antes. En esta actividad contestar la pregunta del numeral 4 (¿A qué magnitudes se refiere el cuadro?) no parece ser un asunto sencillo. Inicialmente se podría pensar que las magnitudes implicadas son la *edad de una persona* y el *número aproximado de horas diarias que duerme una persona*; si esto fuera así, los valores de cada magnitud deberían ser números positivos. No obstante, al observar la tabla y extractar la información se hace evidente que hay dos “seudomagnitudes” A y B cuyos valores se pueden representar en los conjuntos $A = \{\text{bebés, niños, adultos, ancianos}\}$ y $B = \{[18, 20], [9, 10], [7, 9], [5, 7]\}$, respectivamente. Como puede evidenciarse, los valores no son números, aunque a éstos se les puedan hacer corresponder, de manera arbitraria, algunos números. En otras palabras, la tabla no presenta una relación entre magnitudes, pues no implica dos magnitudes; esta afirmación se sustenta en el hecho de que para ninguna de las dos “seudomagnitudes” se puede establecer una relación de orden entre sus valores, ni una operación “suma” entre éstos, condiciones necesarias para considerar que un conjunto de valores defina una magnitud, como se estableció en uno de los seminarios del Programa.

De otro lado, a pesar de no formar parte de las tareas propuestas en el taller, al hacer el ejercicio de graficar la posible relación que se quería presentar a través de la tabla, nos encontramos con el problema de cómo ubicar en un eje los valores de la primer columna, o los valores de la segunda columna; como solución podríamos adoptar al menos dos posibilidades: ubicar cada elemento de la primera columna en un punto del eje (lo mismo para la segunda columna) o asociar un intervalo del eje a posibles valores de cada elemento. Así, obtendríamos gráficas como las que se presentan en la Figura Nº 1 y en la Figura Nº 2:

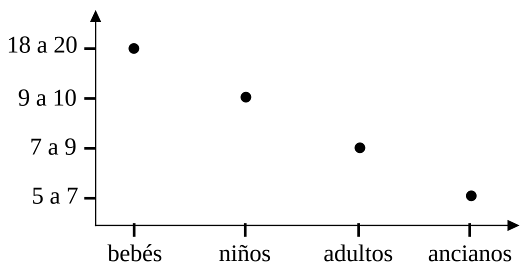


Figura Nº 1.

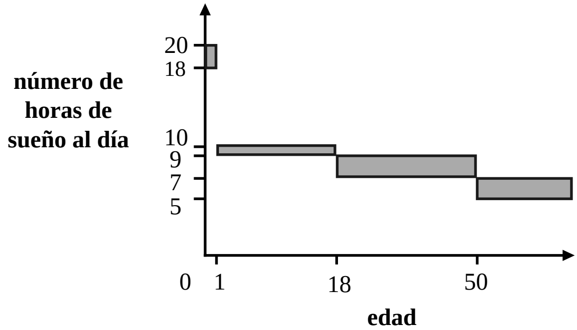


Figura Nº 2.

En la primera gráfica quizá se pueda observar el comportamiento que está implícito en la actividad, es decir, la correlación inversa, pero hay que precisar que el orden en que se han dispuesto los datos es arbitrario, pues éstos se han ordenado con un criterio aplicable a los números posiblemente asociados a las categorías. En otras palabras, no es preciso decir que “bebés” sea menor que “niños”; así, pudo haberse ubicado en el orden inverso, lo cual modificaría la gráfica y la caracterización de la relación. En la segunda gráfica se puede observar que la relación no es función y que para este caso no podría hablarse de la existencia de una correlación inversa. Desde nuestra perspectiva, la segunda gráfica es una interpretación correcta de la relación que se quería proponer. En conclusión, parece ser necesario cambiar las magnitudes de la situación y los valores de las mismas; quizá, entonces, se pueda pensar en cuatro edades representativas de los grupos de edades (por ejemplo, 1 año, 7 años, 25 años y 65 años) y cuatro números de horas de sueño correspondientes (por ejemplo, 18 horas, 10 horas, 8 horas y 7 horas), como una forma de evitar los problemas reportados.

En las tres actividades del taller, nos referíamos a una comparación entre las magnitudes (concretamente en la pregunta 3 de la Actividad 1, en la tarea 5 de la Actividad 2 y en las tareas 2 y 3 de la Actividad 3). Ahora creemos que a través de las tablas no se comparan las magnitudes sino que se establecen relaciones entre éstas, o más específicamente, se presentan correspondencias entre valores de las magnitudes. Las comparaciones podrían establecerse entre los valores de una misma magnitud a través de relaciones o de operaciones; desde esta perspectiva, enunciados tales como “$5000 es un costo menor que $35000”, “$5000 excede a $35000 en $30000 ” y “$5000 es la séptima parte de $35000” tienen sentido, en cambio, no tiene sentido comparar “7 artículos” con su costo “$58000”. También podrían establecerse comparaciones entre las respuestas a las preguntas sobre el orden en los valores de cada una de las magnitudes; de esa manera, podría decirse que en la primera actividad los valores de la primera columna están estrictamente ordenados (1 < 2 < 4 < 6 < 7 < 9 < 10) y que sus correspondientes valores de la segunda columna también lo están (es decir, \$5000 < \$14000 < \$35000 < \$47000 < \$58000 < \$75000 < \$99000). Esta comparación entre los órdenes de los valores de cada magnitud se aproxima más al significado de correlación que queremos promover a través del taller en cuestión; por ello es importante repensar y replantear las preguntas y tareas del taller que se refieren a la comparación y al reconocimiento de la correlación.

Finalmente, creemos que es necesario replantear la pregunta 5 de la Actividad 1 y la pregunta 6 de la Actividad 2, pues de un lado ambas se pueden contestar afirmativa o negativamente, en cuyo caso la respuesta no da información relevante, y de otro lado, consideramos que la instrucción "explicar la relación" es ambigua y no alude necesariamente a la correlación presente.

CUESTIONES PARA REELABORAR EL SEGUNDO TALLER

Inicialmente debemos reconocer que las condiciones de cociente o producto constante, no son los únicos rasgos característicos de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa, respectivamente, pero, son los únicos que se ponen en juego a través de las dos actividades. En particular, a través de la Actividad 1 no se plantea tarea alguna que aborde las propiedades de aditividad y de homogeneidad que satisfacen las funciones de proporcionalidad directa y que se pueden expresar sintéticamente como $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$, respectivamente; tampoco a través de la Actividad 2 se pretende abordar la proporcionalidad inversa desde la perspectiva de la proporcionalidad directa, es decir, no se hace alusión a que una relación de proporcionalidad inversa satisface la condición de que entre los valores de una magnitud y los recíprocos de los correspondientes se puede reconocer una relación de proporcionalidad directa.

De otro lado, creemos que en la Actividad 1 inicialmente podría ser conveniente considerar sólo una de las relaciones, es decir, o bien, la relación entre el número de naranjas y el número de vasos de jugo obtenido, o bien, la relación inversa (es decir, entre el número de vasos de jugo y el número de naranjas). Quizá, atendiendo al orden de presentación de los datos en el texto que plantea el contexto sea preferible abordar la primera relación citada, para luego, en una actividad posterior abordar el estudio de la relación inversa. Esto implicaría suprimir varias de las preguntas y tareas de las propuestas y presentarlas cuando se estudie aquélla. Este comentario sería aplicable también para la Actividad 2.

En el numeral 10 se menciona la palabra "actividad"; desde nuestra perspectiva actual lo que se deben comparar no son las actividades sino el comportamiento de los valores de las magnitudes en cada una de las situaciones o más específicamente, los tipos de correlación entre las magnitudes de cada una de las actividades.

CUESTIONES PARA REELABORAR EL TERCER TALLER

En la información matemática con respecto a la idea de proporción con la que se inicia la Actividad 1, usamos la simbología de los números fraccionarios y el concepto de igualdad entre los resultados de las divisiones indicadas. Esto puede generar que el estudiante no establezca diferencia entre una fracción y una razón, de lo que podría seguirse que tampoco reconociera la existencia de la diferencia entre una igualdad de fracciones y una proporción. En consecuencia, a través de la explicación teórica en el taller sólo le estaríamos dando un nuevo nombre (o dos) a objetos matemáticos ya conocidos. No obstante las consideraciones anteriores, no hemos logrado la suficiente claridad sobre los conceptos de razón y fracción que nos permita caracterizarlos y diferenciarlos, ni vemos cómo una potencial diferenciación de éstos pueda modificar la aproximación que queremos plantear en el taller. Este hecho obliga a preguntarnos si en efecto a través del taller solamente estamos abordando una temática relativa a los números fraccionarios, con la ilusión de estar trabajando con razones y proporciones.

De otro lado, si bien reconocemos que el resultado de las multiplicaciones a las que nos referimos en las tareas 1 y 2 de la Actividad 1, es siempre el mismo, no hemos logrado precisar el significado de dicho producto en el contexto de la situación; tampoco hemos logrado precisar el significado de las proporciones que se pide que construyan los estudiantes en la tarea 2 de la Actividad 2. Nos parece importante y urgente que logremos precisar tales significados pues con seguridad esto modificaría el taller ya que intentaríamos entonces que a través de nuevas tareas propuestas los estudiantes interpretaran y construyeran significado para los productos, razones y proporciones, significado sin el cual el trabajo puede quedarse en un tratamiento sintáctico de los valores de una tabla, lo cual ratificaría la visión de las matemáticas como “algo que sirve sólo para hacer ejercicios inútiles y carentes de significación”.

CUESTIONES PARA REELABORAR EL CUARTO TALLER

Tanto en la Actividad 1 como en la Actividad 2, las preguntas del numeral 1 pueden exigir responder previamente las demás preguntas planteadas, por lo cual creemos conveniente modificar el orden de las preguntas y plantear el problema como pregunta final.

En la Actividad 3 creemos conveniente modificar los valores de la tabla del numeral 2, pues los datos de las dos primeras celdas verticales de la tabla deberían ser 2 y 3 para así establecer una relación de proporcionalidad inversa entre los dos conjuntos de valores.

REFLEXIONES PARA CONCLUIR

A través del Programa y de las experiencias generadas por éste, hemos podido evidenciar que la proporcionalidad se constituye en uno de los temas que impone mayores retos al docente que intenta dirigir procesos de aprendizaje basados en la solución de problemas. Este carácter problemático exige que haya mucha más indagación en el aula sobre su enseñanza y aprendizaje, que se continúe en la búsqueda de construcción de estrategias metodológicas eficientes, que se promuevan muchas más acciones de capacitación y formación docente en torno a los contenidos relativos a la proporcionalidad, y que se procure una reflexión más intencionada y constante sobre la actividad de enseñanza de tal temática. Sin estos elementos es poco probable que obtengamos resultados significativamente diferentes en los procesos de los estudiantes.

Finalmente, debemos reconocer que el diseño y la implementación de la secuencia de talleres en la Escuela Normal Superior de Jericó, de un lado nos permitió una experiencia de trabajo en equipo con colegas, hecho por demás valiosísimo, y de otro lado, nos abrió las puertas a una reflexión que apenas hemos iniciado y que se puede resumir con la pregunta: ¿las situaciones problemas son tan sólo herramientas o medios de evaluación del aprendizaje de los estudiantes, o también pueden constituirse en medios para el aprendizaje de las matemáticas?

REFERENCIAS

MEN (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Adriana Espinal
Adriana Suárez
Teresa Araque
Henry Vanegas
Escuela Normal Superior de Jericó
Tel.: (094) 852 3484
E-mail: jerins01@edatel.net.co

APÉNDICE

PRIMER TALLER

Actividad 1. De compras en el supermercado

Una señora fue de compras al supermercado y llevó $100000. A medida que fue depositando artículos en el carrito, fue registrando en una tabla el número total de artículos en el carrito y el costo total correspondiente. La siguiente tabla fue realizada por la señora en la compra de diez artículos, algunos repetidos:

Nº. de artículos	**Costo de la compra**
1	5000
2	14000
4	35000
6	47000
7	58000
9	75000
10	99000

Atendiendo a la situación anterior respondan:

1) ¿Con qué fin creen ustedes que la señora elaboró dicha tabla?
2) ¿Cuánto le costaron a la señora los diez artículos? ¿Le sobró dinero? ¿Le faltó dinero?
3) ¿Qué magnitudes se están comparando en la tabla?
4) ¿Qué habría pasado con el costo total de la compra si la señora hubiese comprado otros artículos?
5) ¿Podrían dar alguna conclusión que explique la relación entre el número de artículos y el costo de la compra?

Actividad 2. Necesidad de dormir
Comenten sobre las respuestas a las preguntas:

1) ¿Cuántas horas diarias aproximadamente duerme un niño recién nacido?
2) ¿Cuántas horas duerme cada uno de ustedes?
3) ¿Cuántas horas duerme una persona anciana?

Ahora comparen sus respuestas con la información que aparece en el siguiente cuadro:

Grupos según edad	**Número de horas de sueño**
Bebés	18 a 20
Niños	9 a 10
Adultos	7 a 9
Ancianos	5 a 7

De acuerdo con la información del cuadro, respondan:

4) ¿A qué magnitudes se refiere el cuadro?

5) Den ejemplos de otras cantidades que se comporten como las que se compararon acá.
6) ¿Podrían dar alguna conclusión que explique la relación entre la edad y el número de horas que una persona duerme?

Actividad 3. Comparación entre las actividades 1 y 2

1) ¿Qué diferencias o semejanzas encuentran entre la forma como se comportan las magnitudes de la actividad “De compras en el supermercado” con la forma como se comportan las magnitudes de la actividad “Necesidad de dormir”?
2) Busquen ejemplos de otras cantidades que se comporten como las que compararon en la actividad “De compras en el supermercado”.
3) Busquen ejemplos de otras cantidades que se comporten como las que compararon en la actividad “Necesidad de dormir”.

SEGUNDO TALLER

Actividad 1. El jugo de naranja

Un deportista utiliza una naranja para preparar dos vasos de jugo; naranja y media para tres vasos de jugo; dos naranjas para cuatro vasos de jugo; dos naranjas y media para cinco vasos de jugo; tres naranjas para seis vasos de jugo y cuatro naranjas para ocho vasos de jugo. El deportista desea hacer una tabla donde aparezcan relacionados el número de vasos de jugo y el número de naranjas.

Con base en la información presentada en la situación anterior respondan las preguntas y realicen las tareas siguientes:

1) Si ustedes fueran los deportistas, ¿cómo harían dicha tabla?
2) ¿A qué magnitudes se refiere el texto?
3) ¿Qué relación pueden establecer entre el número de vasos de jugo y el número de naranjas?
4) ¿La anterior relación es la misma que hay entre el número de naranjas y el número de vasos de jugo?
5) Representen el cociente indicado (o división) entre el número de naranjas empleado y el respectivo número de vasos de jugo obtenido para los datos del texto. Calculen los correspondientes cocientes exactos (es decir, hagan las divisiones) y expresen una observación con respecto a los resultados.
6) Representen el cociente indicado (o división) entre el número de vasos de jugo obtenido y el respectivo número de naranjas empleado para los datos del texto. Calculen los correspondientes cocientes exactos (es decir, hagan las divisiones) y expresen una observación con respecto a los resultados.
7) Escriban otras parejas de datos para la situación del texto; para cada una de ellas obtengan su cociente.
8) Si fueran a preparar 20 vasos de jugo, ¿cuántas naranjas se necesitarían?
9) Con 10 naranjas, ¿cuántos vasos de jugo se pueden preparar?

10) Supongan que a la tabla que tienen se le borró parte de la información. Describan un procedimiento para hallar el número de naranjas requeridas para hacer un determinado número de vasos de jugo y un procedimiento para hallar el número de vasos de jugo que se obtendrían con un determinado número de naranjas.
11) Verifiquen si con los procedimientos descritos se podrían encontrar los valores que eventualmente se borraron de la tabla construida.
12) Den ejemplos de dos magnitudes que se comporten de manera similar a las dos de la situación que se está trabajando.
13) Establezcan semejanzas entre las relaciones de esta situación y la de “De compras en el supermercado”.

Actividad 2. La modista

Una modista que confeccionará un vestido de novia, desea saber cuándo puede entregarlo, teniendo en cuenta que si tuviera 24 días debería trabajar 2 horas diarias para cumplir; para ello hace una tabla como la siguiente:

N° de horas diarias trabajadas	**N° de días que emplea para hacer el traje**
2	24
3	16
4	12
6	8
8	6
12	
	2

Analicen la información presentada en la tabla anterior y respondan las siguientes preguntas y tareas:

1) Si solamente trabaja 3 horas diarias, ¿cuántos días tardará en confeccionar el vestido?
2) Si quisiera entregarlo en ocho días, ¿cuántos horas debería trabajar diariamente?
3) ¿A qué magnitudes se refiere el texto?
4) ¿Qué relación existe entre el número de horas de trabajo diarias y el número de días que se emplean para confeccionar el vestido?
5) ¿Qué tipo de correlación hay entre el número de horas diarias trabajadas y el número de días que se emplean para la confección del vestido?
6) ¿Existe alguna relación entre el número de días que se emplean para confeccionar el vestido y el número de horas de trabajo diarias?

7) Con base en los dos últimos renglones de la tabla, planteen las preguntas sugeridas en cada caso.

8) ¿Cómo son los cocientes entre cada pareja de datos? ¿Cómo son los productos entre cada pareja de datos?

9) Con base en las respuestas a las preguntas del numeral anterior, describan dos procedimientos para calcular los valores que faltan en la tabla.

10) ¿Qué diferencias y semejanzas pueden establecer entre esta actividad y la de "El jugo de naranja"? ¿Qué diferencias y semejanzas pueden establecer entre esta actividad y la de "Necesidad de dormir"?

TERCER TALLER

Actividad 1. Algo más sobre el jugo de naranja

Si realizamos las divisiones $\frac{1}{2}, \frac{1.5}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2.5}{5}, \frac{3}{6}$ obtenemos el mismo cociente exacto, es decir: $\frac{1}{2} = \frac{1.5}{3} = \frac{2}{4} = \frac{2.5}{5} = \frac{3}{6}$. A cada una de las anteriores igualdades se le puede llamar una *proporción.*

En una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a los números a y d se les llama extremos, en tanto que a los números b y c se les llama medios.

Para verificar una proporción no es necesario hacer las dos divisiones indicadas; se puede utilizar el hecho de que en una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Este resultado permite encontrar un término desconocido de una proporción como se observa en la solución al siguiente problema: Si la razón que hay del 2 al 4 es la misma que hay de un número desconocido al 20, ¿cuál es el número desconocido? $\frac{2}{4} = \frac{x}{20}$ entonces $2 \times 20 = 4 \times x$ luego $40 = 4 \times x$ y así $10 = x$.

Con base en la anterior información y en la actividad "El jugo de naranja" realicen las tareas y respondan las preguntas:

1) Tomen una proporción de la actividad "El jugo de naranja". Identifiquen sus extremos y sus medios. Hallen el producto de los extremos. Hallen el producto de los medios. ¿Cómo son esos resultados?

2) Tomen otras proporciones; hallen los mismos productos solicitados anteriormente y establezcan cómo son sus resultados.

Actividad 2. Algo más sobre la modista

> Si se tiene la igualdad entre dos productos de manera adecuada se pueden formar proporciones con los factores. Así, por ejemplo si se tiene que $2 \times 24 = 3 \times 16$ entonces se puede formar la proporción $\frac{3}{2} = \frac{24}{16}$.

Atendiendo a la anterior información y a la situación de "La modista" respondan las siguientes preguntas y tareas:

1) En la actividad de "La modista" se encontró que por ejemplo $2 \times 24 = 3 \times 16$ o $4 \times 12 = 6 \times 8$. Escriban todas las igualdades entre productos que se encontraron en tal actividad.
2) Expresen como proporciones las igualdades entre los productos indicados anteriormente.
3) Expresen como proporción la siguiente expresión (igualdad): $8 \times 6 = 12 \times \square$
4) ¿Cuál es el número que debe ir en el recuadro?
5) Si la razón que hay del 12 al 8 es la misma que hay del 6 a un número desconocido, ¿cuál es el número? Reemplacen en la proporción el número desconocido y verifiquen la respuesta.

CUARTO TALLER

Actividad 1. El conductor
El conductor de un bus transporta 1296 pasajeros semanalmente, trabajando 6 días.

Piensen en la situación anterior y respondan las siguientes preguntas.

1) ¿Cuánto tiempo se demora para movilizar 4320 pasajeros?
2) ¿Cuáles magnitudes son las que se están relacionando?
3) ¿Están las magnitudes directa o inversamente correlacionadas?
¿Por qué?
4) ¿Son las magnitudes directamente o inversamente proporcionales?
¿Por qué?

Actividad 2. Consumo de combustible
El dueño de una estación de gasolina tiene para surtir a su clientela 300 galones de dicho combustible. Con el propósito de complacer por igual a sus clientes, decidió venderles a cada uno el mismo número de galones.

1) Si solamente llegan 60 clientes, ¿cuántos galones de gasolina le corresponderían a cada uno?
2) ¿Están las magnitudes directa o inversamente correlacionadas? ¿Por qué?
3) ¿Son las magnitudes directamente o inversamente proporcionales? ¿Por qué?

Actividad 3. Inventemos problemas

1) Inventen un problema cuya solución requiera de la siguiente proporción: $\frac{100}{60} = \frac{\square}{2400}$.

2) Para la siguiente tabla, inventen un problema:

1	12
2	8
4	6
6	4
8	3

De la cotidianidad a la proporcionalidad directa

Gabrielina Moreno, Ana Otálora,
Lilia Jiménez y Fabio Barón

Se da cuenta de una experiencia que se llevó a cabo con el propósito de mejorar el aprendizaje de la proporcionalidad directa en estudiantes de grado séptimo, la cual surgió de la preocupación por las fallas presentadas en la enseñanza y aprendizaje de este tema. Casi siempre los profesores de matemáticas al desarrollar el tema, consideran solamente una de sus propiedades, la que habla de la monotonía cuando la relación es creciente, dejando de lado otras propiedades igualmente importantes. Así, diseñamos e implementamos tareas para el aula partiendo de situaciones de la vida cotidiana relacionadas con la proporcionalidad directa, que ayudaron a nuestros estudiantes a ampliar sus ideas al respecto.

Introducción

Un grupo de profesores de matemáticas de la Escuela Normal Superior Santiago de Tunja, en el marco del "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores" organizado y asesorado por "una empresa docente" de la Universidad de los Andes, decidió trabajar en torno a la proporcionalidad directa con el fin de proponer e implementar tareas que ayudaran a mejorar el aprendizaje de este tema. Se conocían las fallas presentadas en la enseñanza y aprendizaje del tópico, tanto en la institución misma como en la región y, en general, a nivel nacional, pues han sido evidenciadas en la práctica diaria y en diferentes pruebas, como el Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), en el que los estudiantes colombianos ocuparon el penúltimo lugar.

Esta experiencia fue producto de la motivación generada en los profesores por algunas lecturas sobre las relaciones de proporcionalidad, por las reflexiones realizadas alrededor de esta temática, por el trabajo propuesto en el Programa y por la necesidad de diseñar nuevas estrategias metodológicas para lograr una mejor comprensión del tema en los estudiantes. Nos involucramos entonces en el proceso cíclico de diseñar y revisar una serie de talleres, hasta llegar a una versión que se puso a prueba en grado séptimo y cuyos resultados se analizaron cuidadosamente con el fin de establecer su efectividad con respecto al objetivo propuesto.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F. (Eds.) (2003). Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer (pp. 164-177). Bogotá: una empresa docente.

EL DISEÑO DE LOS TALLERES Y SU IMPLEMENTACIÓN

Muchas veces la matemática se enseña como una ciencia alejada de la realidad del estudiante, quien no comprende para qué tiene que aprender esos conceptos que no tienen nada que ver con su entorno y su realidad y a los cuales no les encuentra ninguna aplicabilidad. Por esta razón, además de querer promover una mejor comprensión de la relación de proporcionalidad directa, pretendíamos que los estudiantes vieran las matemáticas, al menos con respecto a dicho tema, como una ciencia vivencial para que el estudiante comprendiera cómo ellas, y en particular las relaciones de proporcionalidad, están integradas a su vida y le ofrecen elementos y argumentos para solucionar problemas.

Con base en el estudio del tema realizado durante el Programa y específicamente en las definiciones de la proporcionalidad directa propuestas por Luengo y el Grupo Beta (1990)[1] y por Fiol y Fortuny (1990)[2], decidimos profundizar en tres de sus propiedades: la correspondencia biunívoca, la monotonía, y la constante de proporcionalidad, propiedades estas que son suficientes para determinar si una relación es o no de proporcionalidad directa. En consecuencia, el objetivo de los talleres se estableció como promover en los estudiantes el reconocimiento de estas tres propiedades para que alcanzaran una comprensión más amplia de la relación de proporcionalidad directa. No obstante que uno de los aportes de esta experiencia tiene que ver con nuestro redescubrimiento de que hay relaciones de proporcionalidad directa que son decrecientes, en los talleres diseñados y en las discusiones consecuentes con los estudiantes sólo se trataron relaciones de proporcionalidad directa crecientes.

Como se querían trabajar situaciones cercanas al estudiante que le permitieran relacionar la proporcionalidad con su entorno, se analizaron varias circunstancias de la vida diaria; luego de esto se eligieron magnitudes que fueran familiares para el estudiante para estudiar las relaciones entre ellas.

Se comenzó por formular tareas y preguntas que apuntaran a promover la identificación de cada una de las tres propiedades en cuestión, y que proporcionaran la oportunidad de ver cada propiedad desde diversos ángulos y expresarla a través de diferentes representaciones. Así, se contempló propiciar el reconocimiento y la expresión de cada propiedad mediante los valores numéricos de las magnitudes, verbalmente y por medio de la gráfica

---

1. Un resumen de la definición indicada por estos autores es: Una aplicación f de E en F es una relación de proporcionalidad, si existe un número k tal que la imagen mediante f de todo elemento x del dominio E es igual a $k \bullet x$.
2. Estos autores plantean la siguiente definición: Dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades, f de M en N tal que: i) si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$; ii) $f(a+b) = f(a) + f(b)$; iii) si $a = r \bullet e$ entonces $f(a) = f(r \bullet e) = r \bullet f(e)$.

cartesiana. Además, se diseñaron dos talleres con la idea de abordar dos situaciones contextualizadas diferentes, por un lado, y por el otro, con el fin de que el trabajo en el segundo taller permitiera reafirmar los temas estudiados en el primero. Una vez elaborada una versión inicial de los talleres, los profesores planteamos y analizamos posibles soluciones a cada tarea y pregunta; antes de llegar a la versión final de los talleres fue necesario reformular los enunciados de las tareas y las preguntas varias veces, ya que al examinarlas con cuidado, veíamos que daban cabida a respuestas ambiguas o que no atendían a lo que se buscaba. Adicionalmente, este ejercicio contribuyó a determinar las tareas y preguntas cuyas respuestas indicarían el alcance de las intenciones con respecto a cada propiedad en especial y a la proporcionalidad directa en general.

En ambos talleres se planeó hacer una discusión posterior a su desarrollo que permitiera que los estudiantes expresaran oralmente las ideas comprendidas, las dudas y dificultades, para aportar no sólo a su comprensión del tema sino también a que los profesores tuvieran más información relativa a lo sucedido en los alumnos.

El primer taller (ver Apéndice) aborda una situación cotidiana para los estudiantes como es su transporte diario en bus, desde un barrio de la ciudad llamado “Los Muiscas” hasta la institución. Inicialmente se presenta una tabla en la que se relacionan las magnitudes *número de viajes* y *costo de los mismos*; se dan algunos datos y se pide completar las casillas faltantes. Hasta este momento se esperaba que el estudiante viera solamente que hay dos magnitudes y una relación entre ellas, que se va a caracterizar luego con el trabajo posterior. A continuación se plantean una serie de preguntas con el objeto de identificar las tres propiedades de la proporcionalidad directa. Por último, se expone un diagrama cartesiano que representa la relación entre el número de viajes y el costo y se formulan preguntas para verificar las propiedades de la proporcionalidad directa en la relación entre estas dos magnitudes. Con este punto final del taller se quería también que el estudiante reconociera que una relación de proporcionalidad directa involucra la relación entre dos magnitudes que pueden expresarse mediante una función lineal.

La situación que se aborda en el segundo taller implica las magnitudes *longitud del lado de un triángulo equilátero* y su *perímetro*; el propósito del taller era que los estudiantes comprobaran las propiedades de la proporcionalidad directa de la relación entre estas dos magnitudes geométricas para reconocer así que dicha relación es directamente proporcional. Fue necesario hacer un trabajo previo con los estudiantes sobre triángulos, triángulo equilátero y perímetro. En este taller se presentaron dibujos de triángulos equiláteros con medidas dadas en números enteros y decimales, y los estudiantes debían calcular perímetros, organizar datos en tablas y ordenarlos, calcular el cociente perímetro/lado, elaborar diagramas de flecha y cartesianos.

Los talleres se implementaron con dieciocho estudiantes de grado séptimo, cuyas edades estaban entre doce y trece años, quienes se organizaron en grupos de tres. Posterior a la realización de cada taller, su desarrollo fue socializado en una sesión de cuarenta y cinco minutos, donde cada grupo expuso sus resultados a las preguntas; los profesores actuaron como guías y cuestionadores; durante la discusión se hizo énfasis en la verbalización e identificación de las propiedades de la proporcionalidad directa que eran objeto de estudio. Cuando las respuestas de los estudiantes no coincidían, la discusión se condujo de forma que llevara a los estudiantes a concertar la respuesta.

Al final de cada socialización se llevó a cabo un intercambio verbal con los estudiantes a modo de evaluación de la actividad completa, donde ellos expresaron sus opiniones con respecto a ésta.

RESULTADOS

GENERALIDADES

En los desarrollos escritos de los talleres, las respuestas de los grupos de estudiantes se analizaron cuidadosamente para evidenciar resultados y dificultades con respecto a las intenciones establecidas. El análisis que aquí se presenta destaca en primer lugar algunas respuestas que nos parecen relevantes pero que no necesariamente hablan de las propiedades de la proporcionalidad directa, y en segundo lugar, las respuestas a ambos talleres que sí muestran indicios del reconocimiento de tales propiedades.

Los grupos no tuvieron dificultades para llenar las tablas propuestas en los dos talleres. Sin embargo, en la primera tabla del segundo taller, no ordenaron los valores y simplemente los organizaron en la tabla de acuerdo a como fueron presentados. Con respecto a las preguntas iniciales del primer taller (ver Apéndice), que pretendían que los estudiantes calcularan diferentes valores para las dos magnitudes con el fin de llenar la tabla y verbalizaran los procedimientos seguidos, cabe destacar las diferencias entre éstos, a pesar de que los resultados numéricos coincidieron. Es claro que para estos cálculos, los estudiantes se basaron en el costo de un pasaje obtenido de revisar los valores presentados en la tabla y establecer cómo puede obtenerse un valor de una magnitud a partir del correspondiente en la otra magnitud. Así, los distintos procedimientos empleados por los estudiantes fueron:

a. Dividiendo el costo total de los pasajes entre el costo de un pasaje (tres grupos): Número viajes = $\frac{\text{Costo total}}{\text{Costo de un viaje}}$. El costo de un pasaje es utilizado para hallar el número de viajes.

b. Buscando un número —por tanteo o por su manejo de las tablas de multiplicar— una vez que han encontrado el costo de un viaje, que multiplicado por 500 dé 3500 y dé 20000 (un grupo). Plantean en forma implícita una ecuación cuya solución lleva a determinar el número de viajes. Este procedimiento es seguido por los estudiantes cuando se trabaja con números pequeños; al proponer números más grandes el grupo concluye que es más fácil realizar la división directamente. El razonamiento seguido aquí involucra más elementos que el presentado en el ítem anterior, pues se hace referencia a una ecuación con una incógnita.

c. Multiplicando 500 por 7 y 500 por 40 (un grupo). El procedimiento seguido aquí es similar al anterior, pero plantean la multiplicación en forma explícita por tratarse de números no tan pequeños.

d. Utilizando la multiplicación y la división (un grupo). Solamente enunciaron las operaciones que aplicaron durante el desarrollo del taller.

El procedimiento seguido por la mayoría de los grupos para hallar el número de viajes que se pueden realizar con $47000 consistió en hacer la división de $47000 entre $500. Se destaca el razonamiento seguido por un grupo que involucra elementos de la relación de proporcionalidad directa, al aumentar las dos cantidades al doble, al asociar y descomponer cantidades, y al aplicar la propiedad clausurativa de la adición para cada magnitud. Valiéndose de la tabla inicial, los estudiantes de este grupo indican:

> Si con $20000 realizo 40 viajes, entonces con $40000 realizo 80 viajes porque tengo el doble de dinero. Si con $3500 hace 7 viajes, entonces con $7000 hace 14 viajes; luego 80 viajes + 14 viajes = 94 viajes porque $40000 + $7000 = $47000.

INDICIOS ACERCA DE LA CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA

Para detectar el reconocimiento de la correspondencia biunívoca, se estudiaron las respuestas a las preguntas 8, 9, 10, 11, 12 y 13 del primer taller (ver Apéndice).

Los estudiantes establecieron en forma intuitiva una correspondencia uno a uno, en ambos sentidos, entre el costo y el número de viajes. Para los cálculos necesarios en estas preguntas, algunos grupos utilizaron estrategias multiplicativas identificando el costo de un pasaje, mientras que otros usaron estrategias aditivas repitiendo los valores, como un grupo que realizó el siguiente procedimiento:

2 pasajes cuestan $1000
2 pasajes cuestan $1000
2 pasajes cuestan $1000
2 pasajes cuestan $1000
___
8 pasajes cuestan $4000

En este procedimiento el grupo aplica la descomposición aditiva buscando el sumando más sencillo que es $1000 y que representa el costo de los pasajes de ida y regreso en un día; sin embargo, es interesante pensar cuál sería el procedimiento seguido, si se preguntara por el costo de los pasajes en un mes.

Durante la discusión con los estudiantes, los profesores explicitamos que el tipo de correspondencia establecido, recibe el nombre de *correspondencia biunívoca*. Allí se evidenció una reafirmación del reconocimiento de esta propiedad, pues los estudiantes proporcionaron otros ejemplos de relaciones donde se puede establecer este tipo de correspondencia, como la relación entre el *número de estudiantes* y el *número de pupitres* en un salón, donde a cada estudiante le corresponde un pupitre y viceversa; la relación entre los países de Suramérica y su respectivo presidente.

En el segundo taller las preguntas relativas a la correspondencia biunívoca cuyas respuestas se analizaron, fueron las preguntas 9, 10 y 11 (ver Apéndice).

Todos los grupos de estudiantes establecieron la correspondencia entre una medida de lado dada para un triángulo equilátero con su perímetro correspondiente, es decir, identificaron la relación uno a uno en un solo sentido. Posteriormente, algunos pudieron ver la relación en el otro sentido a través de la última de estas preguntas, justificando que a cada perímetro le corresponde una única longitud del lado pues al dividir por tres el perímetro se obtiene la longitud del lado. En la socialización se concluye con los estudiantes que entre el lado y el perímetro de un triángulo equilátero hay una relación única en ambos sentidos, y los profesores indican que las relaciones de este tipo son llamadas biunívocas.

Indicios acerca de la monotonía creciente

Para evidenciar el reconocimiento de la propiedad de monotonía creciente en el desarrollo del primer taller, se analizaron las respuestas a las preguntas 14, 15, 16 y 17 de éste (ver Apéndice).

En sus respuestas los estudiantes establecieron que si el número de viajes aumenta, el costo también aumenta y si el número de viajes disminuye, el costo también disminuye; de la misma forma afirmaron que si se tiene más dinero para transporte, se pueden realizar más viajes y si se tiene menos dinero para transporte se pueden realizar menos viajes. Con estas respuestas los estudiantes establecen la monotonía creciente entre las magnitudes relacionadas, aunque desconocen su nombre, razón por la cual los profesores en la socialización lo dieron a conocer. Los estudiantes participaron dando ejemplos de relaciones entre magnitudes que cumplen con esta propiedad, como la relación entre número de artículos que se pueden comprar de un precio dado y la cantidad de dinero que se requiere para comprarlos; la relación entre el número de ejercicios de matemáticas que se pueden realizar y la cantidad de tiempo que se requiere para esta tarea; aquí se hace ver que aunque esta relación parece ser creciente no es necesariamente lineal, es decir solucionar el doble de ejercicios no siempre puede requerir el doble del tiempo.

Con referencia al trabajo en el segundo taller sobre la propiedad de monotonía creciente de la relación, se consideraron las respuestas a la pregunta número 15 (ver Apéndice).

Los estudiantes ordenan de menor a mayor tanto la longitud de los lados como el perímetro de los triángulos dados, y después de comparar estas medidas logran establecer que a menor perímetro menor longitud del lado del triángulo, y que a mayor perímetro mayor es la longitud del lado; igualmente expresan que cuando es menor la longitud del lado, menor es su perímetro y cuando el lado es mayor, mayor es su perímetro; esto lleva a los estudiantes en la discusión a concluir que en esta situación también la relación es monótona creciente, aunque no necesariamente los estudiantes lo expresan de esta manera.

Indicios acerca de la constante de proporcionalidad directa

Para trabajar con la constante de proporcionalidad directa en el desarrollo del primer taller se plantea una pregunta inicial y luego se pide calcular el cociente. Con el fin de detectar el manejo de esta constante se miraron las respuestas a las preguntas numeradas como 18, 19, 20 y 21 de dicho taller (ver Apéndice).

Los estudiantes establecieron que el cociente en todos los casos es 500, es decir que siempre es el mismo valor, aunque no especificaron unidades; lo ideal habría sido que hubieran respondido $500 por viaje. No averiguaron el nombre solicitado que designa este valor constante y los profesores durante la socialización se vieron obligados a indicar que esta constante se denomina *constante de proporcionalidad.*

En el segundo taller para determinar el trabajo de los estudiantes con la constante de proporcionalidad directa, se analizaron las respuestas a las preguntas número 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 (ver Apéndice).

En general las respuestas de los estudiantes a estas distintas preguntas y tareas propuestas en este taller tuvieron resultados correctos. Sólo un grupo tuvo dificultad en la suma de decimales para hallar el perímetro del triángulo de lado 2.5 centímetros; los estudiantes de dicho grupo hicieron la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 2.5\ \text{cm} \\ 2.5\ \text{cm} \\ +\ 2.5\ \text{cm} \\ \hline 6.15\ \text{cm} \end{array}$$

Se observó que los estudiantes organizan los datos en la tabla sin ningún problema y tampoco se les dificulta calcular el cociente entre el perímetro y el lado. Establecen el resultado de este cociente como 3, para el que se indica que es la constante de proporcionalidad. Al igual que en el taller anterior la mayoría de los grupos da sus respuestas sólo en términos numéricos olvidando las unidades de las magnitudes correspondientes. En este caso, durante la socialización, los profesores indicaron que la constante de proporcionalidad se puede trabajar sin unidades por tratarse de cantidades homogéneas y al efectuar el cociente se cancelan las unidades. Se sugirió a los estudiantes averiguar por las características de la relación entre el perímetro y la longitud del lado de un cuadrado y en general por las características de la relación entre el perímetro y la longitud del lado de un polígono regular y ver qué conclusión podían obtener con respecto a tales relaciones.

EL TRABAJO CON LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA CARTESIANA

En el trabajo que se propone en el primer taller (ver Apéndice) con la representación gráfica cartesiana de la relación que se ha abordado, los estudiantes interpretan la gráfica de manera adecuada y pueden comprobar las propiedades estudiadas: después de contestar las preguntas propuestas en el numeral 22, determinan que para los puntos marcados la correspondencia es biunívoca, la relación es creciente y el cociente entre el costo y el número de viajes es constante; también detectan que los puntos indicados son colineales. Sin embargo, en el segundo taller donde ellos mismos tenían que construir la gráfica presentan dificultades para establecer las escalas y para ubicar los puntos en la gráfica. Esto lleva a que en principio el evidenciar las propiedades en la gráfica no sea fácil. Luego de que los profesores intervinieron para indicar cómo construir la gráfica se discute acerca del reconocimiento de las propiedades en la gráfica, y los estudiantes dan muestras otra vez de interpretar y ver tales propiedades allí. En la socialización de este trabajo, los profesores resaltaron la diferencia entre la magnitud discreta y la magnitud continua que fueron consideradas en las situaciones del primer y segundo taller respectivamente, la cual se refleja en la posibilidad de trazar una línea que conecte los puntos colineales ubicados en el plano cartesiano.

Aunque en el primer taller, las respuestas a la pregunta que se refiere al punto de la gráfica ubicado en el origen de las coordenadas del plano cartesiano, dan cuenta de interpretaciones acertadas, en la descripción de la gráfica solicitada posteriormente no se tiene en cuenta el hecho de que la línea pasa por el origen. No obstante, al trazar la línea de la gráfica en el segundo taller y a pesar de que los estudiantes toman las longitudes de los lados de los triángulos representadas casi exclusivamente por números enteros, dibujaron la recta en forma continua incluyendo el punto (0, 0). Aunque este hecho parece no ser una acción consciente de los estudiantes, durante la socialización lo justifican aduciendo que a un lado de longitud cero le corresponde un perímetro cero.

Con respecto a la consideración de la relación de proporcionalidad directa como una relación que se puede representar por una función lineal, que era una de las intenciones inicialmente establecidas para los talleres, no se hizo un trabajo explícito, ni tampoco se indagó sobre las posibles conexiones que los estudiantes pudieron haber establecido en ese sentido.

REFLEXIONES FINALES

En la actividad relativa a los triángulos equiláteros, los estudiantes manifestaron ser conscientes de que el lado de un triángulo puede tomar cualquier valor entero o decimal, mayor o igual que cero. Aun así, en el desarrollo de los talleres se evidenció nuevamente el hecho, ya conocido, de que los estudiantes prefieren y eligen trabajar con números enteros, dejando de lado los números decimales. Adicionalmente, y quizás como explicación a esto, presentan errores al operar estos números, al ordenarlos y ubicarlos en el plano cartesiano, lo que condujo a que los profesores hiciéramos una pausa en los talleres y tratáramos este tema una vez más.

En la escuela es usual que el trabajo se centre en los números y se descuiden las unidades asociadas. Esta situación fue patente en esta experiencia pues tanto en el primer taller como en el segundo, las respuestas de los estudiantes presentaban únicamente el resultado numérico sin tener en cuenta las unidades de las magnitudes correspondientes. Esto nos ha hecho reflexionar y nos invita a enfatizar en el trabajo con las unidades en las operaciones aritméticas, pero en particular en las razones entre magnitudes heterogéneas donde se generan magnitudes diferentes a las implicadas en la relación.

Los resultados obtenidos en los dos talleres permiten concluir que el desarrollo de éstos posibilitó que los estudiantes tuvieran experiencias con relaciones entre magnitudes en las cuales se aproximaron al reconocimiento de las propiedades que caracterizan una relación de proporcionalidad directa. Creemos que es necesario exponerlos a otras situaciones que les faciliten afianzar los tópicos tratados, y que además les ayuden a involucrarse en un proceso de generalización con respecto a las propiedades que caracterizan las relaciones de proporcionalidad directa, a partir de estudiar casos particulares.

Cabe resaltar que aunque en general las respuestas verbales de los estudiantes se acercaron bastante a las esperadas, fueron notorias las dificultades en la redacción y en el uso de palabras adecuadas, y que a pesar de que en sus expresiones se percibe la idea que se trata, el lenguaje utilizado sigue siendo intuitivo e informal.

Por razón de que no se esperaba que los estudiantes supieran o descubrieran los nombres que en las matemáticas se le han asignado a las propiedades que se estudiaron, los profesores habíamos planeado darlos a conocer en las socializaciones luego de que los estudiantes pudieran caracterizar relaciones con las propiedades trabajadas. No obstante, dadas las dificultades inherentes a conducir una discusión y lograr que los participantes digan lo que se espera, y en parte por los problemas de los estudiantes al expresarse, los profesores terminamos no sólo por informar tales nombres sino también por concluir y sintetizar las propiedades y su caracterización de las relaciones de proporcionalidad directa. Consideramos que debemos entrenarnos en el manejo de este tipo de discusiones con el fin de que dichos espacios sean aprovechados por el estudiante para llegar a conclusiones al menos concertadas entre todos.

El proceso que seguimos los profesores en este trabajo significó para nosotros una experiencia distinta como docentes. A partir del estudio y reflexión sobre un tema matemático específico, diseñamos unos talleres con tareas que se revisaron con cuidado y fueron modificadas en numerosas ocasiones buscando coherencia y pertinencia; implementamos dichas tareas con los estudiantes, se observaron y luego las respuestas se analizaron con detalle. Además, haber logrado una magnífica integración y una alta dedicación del grupo de profesores para sacar adelante el trabajo, primordialmente por fuera de la jornada laboral, contribuyó a hacer de esta experiencia algo diferente.

Aunque vemos que hacer un trabajo similar con todos los temas y en todos los cursos que manejamos es un trabajo monumental, casi que utópico, reconocemos que sí se pueden introducir pequeños cambios en este sentido en nuestras clases, mientras con algún tema puntual se adelantan procesos parecidos.

El desarrollo del tipo de tareas propuestas en los talleres y el hecho de compartir el trabajo en grupo fueron dos elementos que motivaron más a los estudiantes y generaron una mejor disposición hacia el trabajo, e incluso entusiasmo. Vimos que las actividades de socialización, además del aporte que pueden tener en la comprensión que el estudiante logra de las matemáticas, promueven una mayor participación suya en las clases y lo incitan no sólo a expresar verbalmente sus respuestas, sino también a sustentarlas y buscar argumentos. Así mismo se fomenta el escuchar y valorar los aportes de los demás, lo cual hace que la clase de matemáticas sea más amena y enriquecedora, aspectos que fueron reconocidos por los mismos estudiantes, durante las evaluaciones de las actividades. Hubo allí comentarios de agrado, pero igualmente sugerencias para una próxima implementación.

REFERENCIAS

Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Luengo, R. y Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gabrielina Moreno
Ana Otálora
Lilia Jiménez
Fabio Barón
Escuela Normal Superior Santiago de Tunja
Tel.: (094) 839 0176
fabarun@col1.telecom.com.co

APÉNDICE

TAREA 1

La siguiente tabla muestra el costo en pesos y el número de viajes que un estudiante hace en buseta desde el barrio Los Muiscas hasta la Escuela Normal Superior Santiago de Tunja.

Número de viajes	4	5		10	15	20		57
Costo en pesos	2000	2500	3500	5000	7500		20000	

1) Complete la tabla anterior.
2) ¿Cómo halló el costo de 20 pasajes y el de 57 pasajes?
3) Halle el costo de 1 viaje, de 3 viajes, de 30 viajes y de 195 viajes.
4) ¿Cómo halló el número de viajes que puede realizar con \$3500, con \$20000?
5) ¿Qué procedimiento utilizó para hallar el costo de los pasajes en los numerales 1) y 2)?
6) Halle el número de viajes que se pueden realizar con \$1000, \$5000, \$11500 y \$47000.
7) Describa el procedimiento que realizó para hallar el número de viajes, en el numeral anterior.
8) Si el estudiante debe realizar 8 viajes en una semana, ¿cuánto dinero debe gastar en el transporte? ¿Por qué?
9) ¿Puede realizar los mismos 8 viajes con \$3000? ¿Con \$2500? ¿Con \$2000? ¿Por qué?
10) Si tiene \$4000 para el transporte, ¿cuántos viajes puede realizar? ¿Por qué?

11) ¿Con los mismos $4000 puede realizar 10 viajes, 12 viajes, 15 viajes? ¿Por qué?

12) Si el estudiante realiza un número determinado de viajes, ¿el costo de estos viajes es único o puede cambiar?

13) Con una determinada cantidad de dinero, ¿el número de viajes que se pueden hacer es fijo o puede variar?

14) Si el número de viajes aumenta, ¿qué sucede con el costo?

15) Si el número de viajes disminuye, ¿qué sucede con el costo?

16) Si se dispone de más dinero para transporte, ¿se pueden realizar más viajes?

17) ¿Qué sucede si se dispone de menos dinero para transporte?

18) ¿Existe una cantidad numérica que al multiplicarla por el número de viajes, dé cómo resultado el costo total del transporte? Si existe, ¿cuál es?

19) Halle el cociente de:

   a. $\dfrac{\text{costo de 4 viajes}}{\text{4 viajes}}$.

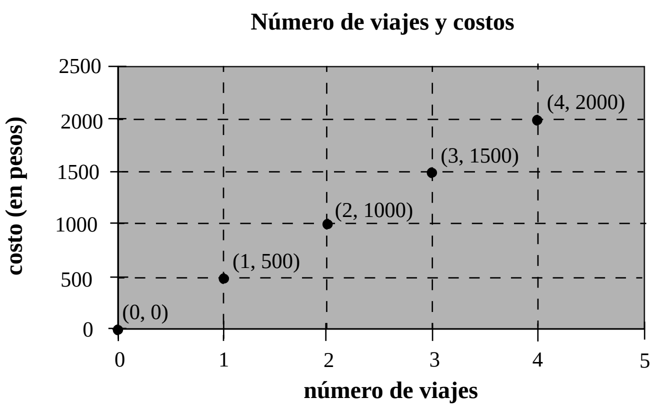
   b. $\dfrac{\text{costo de 15 viajes}}{\text{15 viajes}}$.

   c. $\dfrac{\text{costo de 47 viajes}}{\text{47 viajes}}$.

20) Compare los resultados anteriores con el número obtenido en el numeral 18. ¿Qué concluye?

21) Averigüe qué nombre recibe ese número o esa constante.

22) Observe el siguiente diagrama cartesiano que representa la relación entre el número de viajes y el costo.



   a. Para un viaje, ¿hay otro costo diferente al representado en el diagrama?

b. Para tres viajes, ¿hay otro costo diferente al representado en el diagrama?

c. Si gasta \$2000 en transporte, ¿puede realizar más viajes que los indicados en el diagrama?

d. ¿Cómo interpreta la pareja (0, 0)?

e. ¿Existen dos puntos que tengan igual la primera componente (el número de viajes)?

f. ¿Existen dos puntos que tengan igual la segunda componente (el costo)?

g. Al unir los puntos ubicados en el diagrama, ¿qué característica presentan?

TAREA 2

Intencionalidad. Comprobar la existencia de una proporcionalidad directa entre el lado y el perímetro de triángulos equiláteros.

1) Dibuje triángulos equiláteros cuyo lado (L) mida: 2 cm, 3 cm, 5 cm y 2.5 cm.

2) Halle el perímetro (P) de cada uno de los triángulos que dibujó.

3) Organice los datos anteriores en la siguiente tabla:

Lado (L)				
Perímetro (P)				

4) Para cada uno de los casos anteriores, determine el cociente $\dfrac{\text{Perímetro}}{\text{Lado}}$.

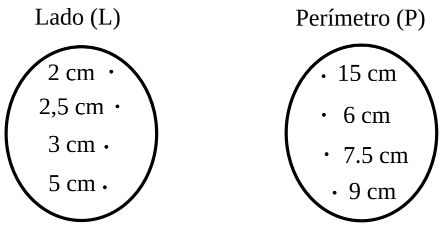
5) ¿Cómo son los cocientes entre el perímetro y el lado?

6) ¿Cuál es el valor? Este valor recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

7) Halle la longitud del lado de los triángulos equiláteros cuyos perímetros son:
P = 30 cm, P = 3 cm, P = 21 cm, P = 10.5 cm.

8) ¿Existe la constante de proporcionalidad entre el perímetro y el lado de los triángulos del numeral 7? Si existe, ¿cuál es?

9) Trace una flecha de manera que a la longitud del lado de un triángulo equilátero le corresponda su perímetro.



10) Si el lado de un triángulo equilátero es de 2 cm, ¿su perímetro puede ser 15 cm, 6 cm, 7.5 cm, 9 cm? Justifique sus respuestas.

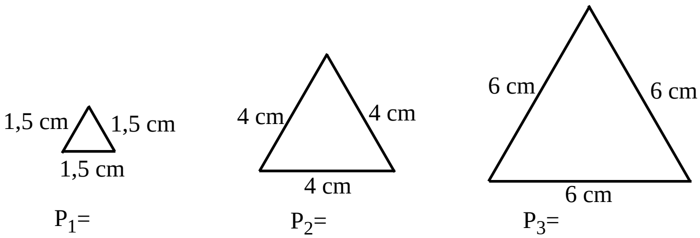
11) Si un triángulo equilátero tiene 7.5 cm de perímetro, ¿su lado puede medir 2 cm, 2.5 cm, 3 cm, 5 cm? Justifique sus respuestas.

12) Dibuje tres triángulos equiláteros, de longitud diferente a los dibujados en el numeral 1, y halle el perímetro de cada uno. Halle la constante de proporcionalidad. Compare este resultado con los obtenidos en los numerales 4 y 5. ¿Qué puede concluir?

13) En un diagrama cartesiano, represente los puntos correspondientes a las medidas del lado y el perímetro de los triángulos que dibujó en el numeral 12.

14) En el mismo diagrama, ubique los puntos correspondientes a la tabla del numeral 3. Al unir los puntos, ¿la figura que resulta es: una curva, una recta, otra?

15) Considere los siguientes triángulos equiláteros:



a. Ordene de menor a mayor la longitud de los lados de los tres triángulos.

b. Ordene de menor a mayor el perímetro de los tres triángulos.

c. Escriba las dos series anteriores, utilizando el símbolo menor que (<).

d. Compare las longitudes de los lados con su perímetro, ¿qué puede concluir?

RECONOCIMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA EN UNA REPRESENTACIÓN TABULAR

BERNARDO OVIEDO, HERNANDO BURGOS
Y JUVENAL GONZÁLEZ

Se comentan la propuesta y los resultados de un diseño curricular implementado en un curso de grado séptimo para introducir la noción de proporcionalidad directa usando una representación tabular. Los resultados encontrados, al observar y analizar lo sucedido en la implementación, muestran diferencias interesantes en las respuestas de los estudiantes que sugieren el replanteamiento de algunas de las preguntas propuestas, así como el estudio más cuidadoso de algunos de los errores evidenciados en las respuestas de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN

En el año 2001, diez Escuelas Normales del departamento de Antioquia iniciaron su participación en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores", coordinado por "una empresa docente" de la Universidad de los Andes. En el transcurso de dicho Programa se realizaron tres seminarios en los que se discutieron, entre otras cosas, algunas orientaciones acerca de cómo planear y desarrollar propuestas de diseño curricular para abordar la enseñanza de algún tema específico de la proporcionalidad.

La propuesta de la Escuela Normal Superior del Bajo Cauca se encaminó a concretar un diseño curricular con el propósito de que al implementarlo los estudiantes pudieran reconocer características de la proporcionalidad directa en el ámbito del manejo de una tabla de datos. La aproximación metodológica seguida consistió en el diseño de un taller que plantea a los estudiantes tareas y preguntas a través de las cuales se debe manipular un material concreto, realizar una serie de cálculos, comparar resultados de los cálculos hechos y establecer conclusiones acerca de los procesos desarrollados; los profesores diseñaron un material concreto para apoyar el desarrollo del taller. Teniendo en cuenta que los materiales preparados eran fáciles de manejar, que el taller era para realizar en pequeños grupos de estudiantes y que el profesor debía jugar un papel de orientador y/o creador de condiciones para facilitar el aprendizaje y no el de instructor que imparte conocimiento o transmite información, se quería que el taller propuesto permitiera por un lado, crear un ambiente de trabajo estimulante para los estudiantes, que les propiciara algún aprendizaje y por otro lado, que permitiera a los do-

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 178-188). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

centes, como diseñadores de la experiencia, situarse en la perspectiva de observadores de una situación de aprendizaje.

PROPUESTA DE DISEÑO CURRICULAR

La propuesta implementada se apoyó en un material concreto constituido por dos reglas, un conjunto de cinco barras de madera y un conjunto de otras tres barras. En la regla 1, la unidad de longitud correspondía a 1.5 centímetros y en la regla 2, la unidad correspondía a 1 centímetro; en otras palabras, la relación entre las medidas obtenidas por las reglas 1 y 2 era de 3 a 2. Las cinco barras se construyeron de longitudes 3, 6, 9, 12 y 15 centímetros respectivamente y tenían nombres dados por la secuencia numérica 1, 2, 3, 4 y 5 atendiendo al orden creciente de su longitud, con lo cual la barra menos larga se designó con el número 1 y la más larga con el número 5. Las otras tres barras fueron designadas respectivamente con las letras P, M y G (pequeña, mediana y grande); la barra M medía 18 centímetros y las barras P y G medían respectivamente 13 y 23 centímetros.

A cada grupo de alumnos se le entregó un juego constituido por las dos reglas y las cinco barras; también se dio a cada grupo una copia del taller (ver Apéndice). La propuesta tuvo como punto de partida la medición de la longitud de cada una de las cinco barras con las dos reglas.

INTENCIONALIDAD DEL TALLER

Establecimos como intenciones de aprendizaje que los estudiantes pudieran: por un lado, reconocer a través del desarrollo del taller cuándo en una representación tabular podría haber una relación directamente proporcional; y, por otro lado, que los estudiantes notaran que al medir las longitudes de las barras con dos unidades distintas de medida, las razones formadas por medidas tomadas con la primera regla eran iguales a las razones formadas por las correspondientes medidas tomadas con la segunda regla.

Con lo planteado en el primer literal se pretendía que los estudiantes armaran la tabla y comenzaran a manipular y conocer el material concreto que se les había entregado. En el literal b se pretendía que los estudiantes, de acuerdo al patrón que se iba generando, determinaran de manera visual cuál de las tres barras presentadas podría ser la barra 6. De esa forma se quería poner a prueba el sentido de proporcionalidad en términos cuantitativos no numéricos, ya que el estudiante a través de la observación directa, sin recurrir a la medición con las reglas, podría establecer la barra cuya longitud se ajustara de manera más apropiada a la regularidad observada.

Con la tarea planteada en el literal c, se pretendía que los alumnos pudieran notar la existencia de relaciones numéricas entre las medidas de las longitudes de las barras. En particular, se quería que vieran que la medida de la longitud de la barra 1 —obtenida con cualquiera de las reglas— está contenida un número exacto de veces en las medidas de las longitudes de las barras 2, 3, 4 y 5; además, a través de la identificación de este hecho se esperaba que pudieran predecir la medida de la barra 6.

Después, con base en las tareas planteadas en los literales d, e, f y g, se pretendía que los estudiantes establecieran la igualdad entre los diferentes pares de razones obtenidos de medir la longitud de cualquier par de barras diferentes con las dos reglas proporcionadas y de tal manera que, al simplificar cualquiera de estos pares de razones, los estudiantes se dieran cuenta de que siempre obtenían razones equivalentes; por ejemplo, para medidas tomadas con cualquiera de las reglas, se obtenía una razón de 1 a 2, para las medidas de las barras 1 y 2; una razón de 1 a 3, para las medidas de las barras 1 y 3; una razón de 2 a 3, para las medidas de las barras 2 y 3; etc. Con base en lo que plantea el literal f, se pretendía que el estudiante caracterizara las relaciones numéricas encontradas en términos de la relación que se podía establecer entre las medidas de un mismo segmento con la regla 1 y la regla 2; ésta sería la constante de proporcionalidad. Todo el proceso anterior se intentaba precisar en el recuadro que aparece después del literal g, en donde la intención era darle un nombre a los hechos encontrados, diciendo que se está ante una tabla en la que los datos guardan una relación de proporcionalidad directa.

Finalmente, mientras que la tarea planteada en el literal h buscaba constatar si, con lo realizado en los literales anteriores, los alumnos eran capaces de determinar si estaban o no ante una tabla en la que los datos guardan una relación de proporcionalidad directa, en el literal i, debían asumir que estaban ante una tabla de proporcionalidad directa y, con base en este información, se pretendía que determinaran los datos faltantes en tal tabla.

PAUTAS PARA LA OBSERVACIÓN

Para observar la implementación del taller en el aula se tuvieron en cuenta algunas pautas relativas a cómo nos organizaríamos para la aplicación, y a los aspectos de desempeño de los estudiantes que enfocarían nuestro interés. Con respecto a la organización, se estableció que un docente aplicara el taller y estuviera encargado de orientar las preguntas y cuestionar las respuestas de los estudiantes, mientras que los otros dos educadores se encargaban del trabajo de observación.

Para la implementación de la experiencia se eligieron quince alumnos de grado séptimo de educación básica, con edades entre once y trece años. Se dispuso que los quince alumnos se organizaran en cinco grupos de tres alumnos cada uno. En relación con las actividades de los estudiantes que se observaron durante la implementación, determinamos fijarnos en cuestiones como la manipulación del material de apoyo y el consiguiente proceso de llenado de la tabla, así como en el desarrollo de las preguntas y conclusiones a que llegara cada grupo, por razón de la interpretación que le dieran a las preguntas del taller propuesto.

En particular, en relación con la tarea de medir la longitud de las barras utilizando las dos reglas se determinó observar si los estudiantes lo hacen correctamente. Con respecto al llenado de la tabla, se propuso observar si los estudiantes notan que inicialmente no se les ha entregado la barra 6; si toman las medidas sin notar que les hace falta la barra 6; si entre las barras P, M y G eligen a M como la barra 6; si escriben las medidas obtenidas en las celdas correspondientes; si llenan la tabla sin tener en cuenta el lugar que le corresponde a cada medida de las longitudes de las barras; si hallan el valor de la medida de la longitud de la barra 6 sin necesidad de medirla; si utilizan un procedimiento concreto para hallar la medida de la longitud de la barra 6; si justifican el procedimiento utilizado para hallar la medida de la longitud de la barra 6.

Finalmente, con relación al desarrollo de las preguntas y a las conclusiones obtenidas por cada grupo de estudiantes se observaron los siguientes aspectos: siguen la secuencia indicada en el taller; determinan los cocientes o razones correspondientes; igualan correctamente los cocientes de los valores correspondientes de la tabla; no igualan correctamente los cocientes correspondientes y se evidencian errores; simplifican los cocientes obtenidos; encuentran la relación numérica entre las dos columnas, de tal forma que les permite obtener un dato en la segunda columna, conociendo el de la primera; justifican el procedimiento para hallar el valor desconocido en la tabla; identifican la proporcionalidad directa en las tablas. Además, se previó registrar el tipo de operaciones a las que recurren los alumnos para hallar datos desconocidos en las tablas, así como los métodos utilizados para verificar si en las tablas existe proporcionalidad directa.

RESULTADOS OBSERVADOS

Con respecto a la manipulación del material se observó que los alumnos de todos los grupos tomaron las medidas de las longitudes de las cinco barras entregadas al comenzar el taller con ambas reglas sin que se presentaran dificultades en ese proceso; igualmente, el llenado de la tabla se realizó sin dificultad y efectivamente todos los grupos preguntaron dónde estaba la barra 6.

Para hallar la medida de la barra 6, tres de los grupos se fijaron en la secuencia de resultados de las medidas de las longitudes de las barras que se iban generando al realizar el proceso, es decir, notaron que en la primera columna los datos ascendían de dos en dos, mientras que en la segunda columna ascendían de tres en tres. En los demás grupos, al parecer, los estudiantes no se dieron cuenta de la relación que había entre los datos obtenidos en el proceso de medición y no pudieron determinar el valor de la barra 6. No obstante, cuando el profesor que dirigía el taller les mostró las tres barras P, M y G —una de las cuales se ajustaba, en su longitud, a la secuencia de datos que resultaba de la medición— los estudiantes supieron indicar cuál era la barra más apropiada.

En particular, en uno de los grupos se observó que los estudiantes reconocieron cierto tipo de relaciones entre las medidas de longitud de las barras. Por ejemplo, cuando usaron la regla 2 para medir la barra 1 y la barra 2 —luego de establecer que medían 3 y 6 centímetros respectivamente— dijeron que la suma de las medidas de las longitudes de esas dos barras daba 9, valor que era precisamente la medida de la siguiente barra, la barra 3. Ese fue uno de los grupos de estudiantes que se dio cuenta de que las medidas de las longitudes de las barras con una misma regla variaban con un incremento constante, y el incremento constante era de valor diferente para las medidas con la otra regla. Más adelante, el mismo grupo de estudiantes, al establecer las razones entre las medidas de las longitudes de las barras 1 y 2, medidas con la regla 2 y las medidas de las longitudes de las barras 1y 2 medidas con la regla 1, obtuvieron correctamente las razones 2/4 y 3/6, respectivamente. Sin embargo, luego observamos que no igualaron dichas razones, sino que las sumaron así: $2/4 + 3/6 = 5/10$; y después, volvieron y repitieron lo mismo con otras dos razones ya que las sumaron de la siguiente manera $2/12 + 3/18 = 5/30$. De lo anterior vale la pena señalar que aunque los estudiantes sumaron razones y no propiamente fracciones, posiblemente no eran conscientes de ello. Así pues, si como suponemos, se acepta el hecho de que los estudiantes creen que están sumando fracciones, el proceso realizado —sumar por separado numeradores y denominadores entre sí— aunque sea incorrecto, permite al estudiante forzar la situación para obtener una razón invariante que le sirve de respuesta: 1/2 en el caso del primer ejemplo y 1/6 en el segundo caso.

En contraste con el grupo anterior, en otro de los grupos, los estudiantes establecen las razones pero no entre las medidas de las longitudes de dos barras diferentes medidas con la misma regla, sino entre las medidas de las longitudes de una misma barra obtenidas con las dos reglas. Esta respuesta, normativamente errada con referencia a lo que se pedía realizar en la guía del taller (literal d), llevó a que posteriormente los estudiantes igualaran las dos o más razones obtenidas —es decir, a escribir la igualdad $2/3 = 4/6 = 6/9 \ldots$— para luego simplificar y así obtener una constante de proporcionalidad. Esta respuesta fue algo que los profesores no esperábamos, pero que a los estudiantes les parecía que funcionaba dado que hallaban la constante de proporcionalidad que se pedía encontrar. Sin embargo, cabe señalar que cuando posteriormente abordaron la tarea en la que se les pedía completar las tablas (literales h e i), ellos no lograron encontrar el valor desconocido, lo que nos indica que no se estableció una verdadera conexión entre este valor y las igualaciones que habían realizado anteriormente.

En general, los grupos que lograron establecer las igualdades entre las razones al realizar simplificaciones de las mismas, también se dieron cuenta, como ellos decían, de la posibilidad de multiplicar en cruz como un hecho que les permitía establecer la igualdad de las razones sin necesidad de realizar simplificaciones.

En relación con el literal en el que se presentaron dos tablas con respecto a las que se pedía establecer si había una relación de proporcionalidad directa (literal h), hay que mencionar que algunos grupos se contentaron con establecer, para las primeras dos parejas de valores de la tabla, la igualdad de razones. Esto significa que no era claro para ellos la necesidad de establecer la igualdad de razones para todos los casos en que efectivamente se requería comprobarla, y por ello algunos concluyeron que sí había una relación de proporcionalidad en los datos de la primera tabla. Por otra parte, otro grupo de estudiantes afirmó que en la primera tabla, los datos no satisfacían una relación de proporcionalidad, debido a que éstos no seguían una secuencia, tal como sí la seguían los datos de la tabla que habían obtenido al realizar las medidas de las barras.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En esta sección exponemos primero algunas conclusiones del análisis de los resultados obtenidos al implementar el taller y luego presentamos unas reflexiones con respecto a la idea de proporcionalidad abordada en el mismo, reflexiones que surgieron al revisar las tareas que conforman el diseño teniendo en cuenta las respuestas de los alumnos.

En primer lugar, al observar el desempeño de los estudiantes a través del taller propuesto y al hacer una comparación entre lo que nosotros esperábamos y lo que ellos respondieron, resultan claras al menos dos cuestiones. Por un lado, la necesidad de replantear algunas de las preguntas y tareas del taller que se les propuso a los estudiantes de manera que al poner a prueba las reformulaciones se pueda ir afinando esta propuesta de diseño curricular. Por otro lado, nos parece que es necesario reforzar algunos conceptos como razón, cociente y suma de fracciones como prerrequisito para desarrollar el taller propuesto, de manera que sean más claras las conexiones entre estas ideas y así poder integrar de manera más relevante los conocimientos que los estudiantes poseen con los nuevos. Por ejemplo, como consecuencia de las sumas entre razones que algunos alumnos presentaron como respuesta a una de las tareas del cuestionario —y que probablemente eran vistas, en ese momento, más como suma de fracciones que como una posible suma de razones—, vale la pena revisar si tiene sentido o si es posible realizar sumas entre razones[1]. Así pues, este ejemplo y algunos otros comentados en los resultados de la sección anterior, muestran la necesidad de reflexionar más a

1. Al respecto, recomendamos a los lectores, revisar dos artículos en los que se aborda tal pregunta (Guacaneme, 2000) y una respuesta parcial a ella (Obando, 2001).

fondo acerca de los diferentes errores que los alumnos cometen y de cómo trabajar de manera más eficiente las dificultades que subyacen a ellos.

En segundo lugar, aunque la mayoría de los estudiantes pudieron advertir la regularidad de los valores de cada una de las dos secuencias de medidas anotadas en la tabla[2] que se presentó en el literal a, el reconocimiento de tal regularidad no es un aspecto necesario ni suficiente para la identificación de la relación de proporcionalidad. En conexión con lo anterior, el hecho de que algunos estudiantes hayan afirmado que una tabla en la que los datos no se presenten de manera ordenada, no guarda una relación de proporcionalidad, nos lleva a pensar en la necesidad de realizar un replanteamiento de la tarea inicial del taller para que la medición de las barras se haga en desorden y luego de ese proceso, sí se plantee un reordenamiento de los datos. Así mismo conviene incluir barras cuyas medidas de longitud rompan la progresión aritmética.

En términos generales, creemos que el material concreto se debe vincular de manera más significativa al desarrollo del taller propuesto; en esta experiencia no hubo la suficiente utilización de dicho material como para que el estudiante se diera cuenta por ejemplo de la variación constante de las longitudes de las barras; en otras palabras, se hizo más énfasis en la manipulación numérica —que se desprendía de la medición de las barras y el reconocimiento de regularidades entre tales valores— que en la manipulación del material concreto como medio para que los estudiantes advirtieran y reconocieran ciertos hechos.

Con respecto a las reflexiones, la primera tiene que ver con la experiencia de medición sobre la que se apoya el desarrollo del taller. Consideramos que para introducir el tema de la proporcionalidad directa en el grado séptimo, una manera quizás motivadora para los estudiantes pero poco usada es la de proponer tareas cuya realización requiera tomar mediciones en torno a alguna experiencia física que implique magnitudes directamente proporcionales y tenga sentido el registro de dicha información numérica en tablas. Algunas situaciones que podrían servir de contexto para tales tareas son: en una circunferencia dada, relacionar la amplitud de un ángulo central con la longitud del arco subtendido; en un conjunto de cuadrados, relacionar la longitud del lado con el perímetro; en un conjunto de triángulos equiláteros, relacionar la longitud del lado con la altura. Una situación con respecto a la cual se podría pensar que sigue una relación de proporcionalidad directa es la que se puede establecer en un triángulo en el que se fijan las longitudes de dos de sus lados, y se analiza la relación de la amplitud del ángulo formado por los lados fijos con la longitud del tercer lado; en realidad, se puede veri-

2. Es importante destacar que en dicha tabla los datos guardan una relación de proporcionalidad y dentro de la secuencia se dispusieron de manera uniformemente creciente o decreciente, aumentando o disminuyendo en una cantidad constante.

ficar que dicha variación no se comporta como una relación de proporcionalidad directa.

Con las situaciones mencionadas queremos no solamente ilustrar que hay alternativas que se pueden utilizar para la generación o manipulación de tablas de datos, sino señalar que en ellas hay algunas características que las diferencian. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia están implicadas dos magnitudes diferentes, mientras que en el caso del cuadrado se trabaja con dos magnitudes del mismo tipo, longitud del lado y longitud del perímetro. En particular, en la situación que nosotros elegimos para trabajar, sólo se trabaja con una magnitud, la longitud de las barras. En realidad, lo que en últimas se establece, en la situación trabajada, es la proporcionalidad entre las medidas de las longitudes de las barras, independientemente de la escala de medición utilizada.

La segunda reflexión tiene que ver con la idea de proporcionalidad directa que quisimos que los estudiantes manejaran en este taller. Para empezar, consideramos que hay al menos dos maneras diferentes de concretar o definir la proporcionalidad directa en una representación tabular; infortunadamente estas dos aproximaciones fueron establecidas más claramente para nosotros, luego de la implementación del taller. Ahora queremos puntualizar las dos definiciones anunciadas, dado que con ello, pensamos, se contribuye a que el lector comprenda algunas falencias en las tareas del taller.

Supongamos que una tabla de datos se representa así:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Diremos que la tabla de datos (X, Y) satisface una relación de proporcionalidad directa cuando para todo pareja (x_i, y_i) existe un único número k, tal que $y_i = k \times x_i$ para todo i. Esta relación también se suele establecer diciendo que k es la constante de proporcionalidad, obtenida a partir de cualquier cociente de la forma y_i / x_i. Se debe notar que en esta definición, los cocientes se establecen entre valores de las dos magnitudes relacionadas. Otra manera de definir que la tabla satisface una relación de proporcionalidad es estableciendo que $x_j / x_i = y_j / y_i$ para todo los pares i, j. En este caso nótese que los cocientes se establecen entre valores de la misma magnitud. Aunque las dos definiciones presentadas son equivalentes hay que señalar que la primera, que se establece a través de un cociente funcional, es más eficiente para determinar la proporcionalidad directa que la segunda, que se establece a través de cocientes escalares que no necesariamente son iguales a la constante de proporcionalidad o a otra constante.

En algunas propuestas de enseñanza acerca del tema en cuestión, vemos que se suele enfatizar el tratamiento de la proporcionalidad directa con base en un trabajo gráfico, que utiliza preferencialmente el modelo de las rectas de pendiente positiva y que pasan por el origen de un plano cartesiano, o con base en la manipulación algebraica de expresiones funcionales de la forma $f(x) = k \times x$. Sin embargo, es interesante y conveniente que se le brinde al estudiante la oportunidad de acceder también a una manipulación, interpretación y análisis de la proporcionalidad directa en términos de la comparación de cocientes de valores de la misma magnitud para ambas magnitudes ($x_j/x_i = y_j/y_i$, cocientes escalares), y, en términos de cocientes de valores correspondientes en las dos magnitudes ($y_i/x_i = k$, cociente funcional). Desde nuestra experiencia, las características de los ejercicios que se proponen con mayor frecuencia en los currículos escolares de nuestra institución no han explorado suficientemente estas posibilidades, por lo general carecen de alguna contextualización experimental y su solución suele implicar un nivel de abstracción que no necesariamente contribuye a que la situación propuesta sea motivante para el estudiante. De esta manera, el alumno termina viendo lo propuesto como sólo una oportunidad para seguir un procedimiento con una significación muy limitada sobre la idea de proporcionalidad directa.

Por ello, dentro de algunas de las posibles alternativas para la enseñanza de la proporcionalidad directa, ahora vemos que la opción de incluir el manejo de la representación tabular es factible, y que a través del mejoramiento de aproximaciones como la que propusimos el alumno puede poner en juego otros aspectos diferentes a los que se manejan o se enfatizan en propuestas curriculares usuales.

REFERENCIAS

Guacaneme, E. (2000). ¿Es posible “sumar” fracciones? *Revista EMA, 5* (3), 284-289.

Obando, G. (2000). Sí, es posible sumar algunas razones. *Revista EMA, 6* (1), 69-78.

Bernardo Oviedo
Hernando Burgos
Juvenal González
Escuela Normal Superior de Caucasia
Tel.: (094) 8390176
E-mail: acaum001@ami.net.co

APÉNDICE

a. Midan la longitud de las barras de madera con la regla 1 y luego con la regla 2, llenando la siguiente tabla:

Barras	**Medida con la regla 1**	**Medida con la regla 2**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

b. Observen las tres barras que les presentamos ahora, a las que llamaremos barra P, barra M y barra G. De acuerdo a la regularidad que se ve en las mediciones anotadas en la tabla anterior, ¿cuál de las tres barras presentadas podría ser la barra 6? Justifiquen su respuesta.

c. Sugieran un método para predecir cuál debe ser la medida de la barra 6 sin medirla.

d. Realicen todos los posibles cocientes entre dos barras medidas con la regla 1 e iguálenlos al cociente correspondiente de las dos barras medidas con la regla 2, por ejemplo:

$$\frac{\text{Barra 1 medida con la regla 1}}{\text{Barra 2 medida con la regla 1}} = \frac{\text{Barra 1 medida con la regla 2}}{\text{Barra 2 medida con la regla 2}}$$

e. Simplifiquen cada uno de estos cocientes planteados en el punto anterior. ¿Cómo son? Justifiquen su respuesta.

f. Dada la medida de la longitud de una barra medida con la regla 1, encuentren la medida de la longitud de dicha barra con la regla 2, pero sin medirla.

g. ¿Se cumplirá la relación numérica establecida en el literal anterior, para cualquier par de medidas de longitud presentadas en la tabla? Justifiquen su respuesta.

> Cuando en una tabla, la respuesta al literal anterior es afirmativa, se dirá que existe una relación de proporcionalidad directa en la tabla.

h. Apliquen los pasos anteriores a las siguientes tablas y averigüen si existe una relación de proporcionalidad directa entre cualquier par de parejas de datos.

12	8
18	12
22	15

1	3
2	6
6	18

27	18
32	22
60	40

8	24
9	27
10	30

i. En las siguientes tablas hacen falta algunos datos; expliquen cómo hacen para hallar el valor de cada dato faltante. Traten de encontrar una relación numérica entre las dos columnas, de tal forma que permita obtener un dato en la segunda conociendo el de la primera y viceversa.

8	6
	9
24	18
28	21
32	
	30

25	
15	12
10	8
5	4
20	16
	20

RELATO SOBRE UNA EXPERIENCIA PARA INICIAR EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD

FÉLIX FARFÁN, SANDRA PRIETO Y MARTHA MOLANO

Se relatan detalles de una experiencia relativa al diseño e implementación de un taller en torno al reconocimiento de dos aspectos relevantes de la relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes. La posibilidad de observar de cerca el trabajo de los estudiantes mientras desarrollaban el taller fue parte importante de esta experiencia porque nos cuestionó lo apropiado que puede resultar la metodología que usamos con frecuencia en la clase, también vimos la importancia de tener especial cuidado en la formulación de tareas y preguntas a los estudiantes.

EL COMIENZO DE LA EXPERIENCIA

A finales del año 2001, la Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Villapinzón, del municipio de Cundinamarca, fue invitada a participar en un programa de desarrollo profesional coordinado por "una empresa docente" y financiado por el Ministerio de Educación Nacional. El propósito del Programa era crear un espacio para que los profesores participantes pudieran llevar a cabo un proyecto de aula a través de realizar actividades propias de su quehacer profesional, que usualmente no realizan por diversos motivos; actividades tales como planear de manera sistemática la enseñanza de un tópico específico, implementar y evaluar dichos planes, compartir con colegas el trabajo realizado durante el proceso no sólo para recibir sino para dar comentarios y sugerencias, y registrar por escrito detalles de la experiencia vivida y de los resultados obtenidos. En el marco del Programa llevamos a cabo la experiencia de la cual hacemos un breve recuento en este artículo.

El proceso que vivimos y el trabajo que realizamos en el Programa estuvo apoyado por tres seminarios en los cuales se trataron asuntos que podrían ayudarnos a llevar a cabo el proyecto de aula que debía centrarse en algún tópico de la proporcionalidad. Así, en los seminarios se revisaron elementos relativos a la proporcionalidad y a su aprendizaje y enseñanza; en ese sentido se estudiaron definiciones y propiedades de las magnitudes directa e inversamente proporcionales, se centró la atención en los requerimientos cognitivos que una determinada tarea en torno a la proporcionalidad plantea a los estudiantes, se habló de la organización temática usual del tópico y de la forma de enseñarlo. También se consideraron e ilustraron asuntos relevantes para llevar a cabo las diferentes etapas del proceso como por ejemplo, el

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 189-198). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

diseño de la secuencia de actividades para implementar con los estudiantes, el plan de observación, la escritura del reporte y del artículo sobre la experiencia. Además se abrieron espacios para presentar avances del trabajo realizado con el fin de recibir comentarios críticos y sugerencias de los demás participantes.

Como resultado de la reflexión realizada en el primer seminario llegamos a identificar que la mayor dificultad que presentan los estudiantes en el tema de la proporcionalidad, más exactamente en la resolución de problemas ligados a esta temática, no está en el planteamiento y resolución de la correspondiente regla de tres, como podría pensarse, sino en la determinación de si las magnitudes implicadas son o no directa o inversamente proporcionales.

Con respecto a tal dificultad fue posible reconocer que en la enseñanza, por lo general, el análisis del tipo de relación que liga a dos magnitudes no hace parte de la solución de los problemas y cuando se lleva a cabo, se enfoca en examinar si la relación es creciente y/o decreciente para determinar respectivamente si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales, cuando en realidad, dicha condición no es suficiente para determinar la proporcionalidad y sólo es necesaria en el caso de que las magnitudes implicadas no sean absolutas. En el seminario fue evidente el hecho descrito cuando los maestros respondimos que la relación entre la amplitud de un ángulo de un triángulo cualquiera y la longitud del lado que se opone a tal ángulo (manteniendo fijas las longitudes de los otros dos lados) es directamente proporcional porque a mayor ángulo se opone mayor lado, sin tener en cuenta que la relación numérica que liga esas dos magnitudes está dada por el teorema del coseno y no involucra una constante de proporcionalidad directa.

Reconocimos que la relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes absolutas incluye aspectos que no siempre se consideran, por lo menos de manera explícita, cuando se trata el tema en el aula. Dos magnitudes absolutas son directamente proporcionales si: la relación que liga las dos magnitudes es biunívoca, es creciente (es decir, una de las magnitudes aumenta al aumentar la otra), existe una constante de proporcionalidad que caracteriza a las parejas de valores que se corresponden en las dos magnitudes relacionadas, y al hacer la gráfica de las parejas de cantidades de las dos magnitudes relacionadas en el plano cartesiano, se obtiene un conjunto de puntos alineados con el origen del sistema de coordenadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, para determinar si dos magnitudes absolutas son directamente proporcionales se necesita, entre otras, la habilidad para reconocer la relación multiplicativa que liga a las parejas de valores numéricos de las respectivas magnitudes, es decir, el estudiante debe poder ver que cada valor de una de las magnitudes es resultado de multiplicar al valor correspondiente en la otra magnitud por una constante. Así, para precisar lo que significa la constante de proporcionalidad, es importante centrar la atención principalmente sobre la relación de valores correspondientes en las dos magnitudes y no sobre valores de una misma magnitud. Por esto, consideramos apropiado que las tareas que se propongan al menos inicialmente consideren el trabajo de los alumnos con tablas de valores de dos magnitudes, se haga énfasis en la relación entre valores correspondientes en las dos magnitudes y los valores de las dos magnitudes que se den en las tablas no propicien que los estudiantes se centren en la regularidad que presentan los valores de una misma magnitud.

EL TALLER

Teniendo como referencia las consideraciones anteriores, planeamos un taller con el objetivo de centrar la atención de los estudiantes en el análisis de las magnitudes implicadas en situaciones específicas, para que pudieran reconocer que: (i) las cantidades que se corresponden en las dos magnitudes se relacionan mediante la multiplicación o la división, y, (ii) tal relación es creciente. A continuación describimos la secuencia de las tres actividades que conformaron el taller.

PRIMERA ACTIVIDAD

Para el desarrollo de esta actividad se entregaron cinco canicas a cada estudiante. Inicialmente, se les pidió que conformaran grupos de dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce estudiantes y para cada caso establecieran cuántas canicas reunían entre todos los del grupo. Luego se formularon tres preguntas que pretendían seguir explorando la relación entre las dos magnitudes (*número de estudiantes* y *número de canicas*) mediante la determinación de parejas de valores un poco más grandes (incluso en una de las preguntas —numeral 3— no se dio un valor específico sino un rango de valores) que los considerados anteriormente y además en una de las preguntas —numeral 2— se indagaba por la correspondencia inversa a la abordado en los demás casos. Las siguientes fueron las preguntas:

1) Si se conformaran grupos de 36 estudiantes. ¿Cuántas canicas reunirían entre todos?
2) ¿Cuántos alumnos reunirían 250 canicas?
3) Si el número de alumnos que juntan sus canicas es mayor que 36. ¿Qué pueden decir del número total de canicas reunidas?

Enseguida se pidió registrar la información obtenida a través de las tareas anteriores en una tabla cuyo formato se les dio; la tabla tenía dos columnas tituladas respectivamente con los nombres de las dos magnitudes implicadas y siete filas vacías que los estudiantes debían completar. Luego, para concluir esta actividad se formularon tres preguntas más, dos de ellas, relativas a casos particulares, y la otra, relativa a la generalidad que engloba los casos particulares consignados en la tabla. Vale la pena destacar que la pregunta del numeral 4 en la que se dan dos valores correspondientes de las dos magnitudes y además se pide explicar el procedimiento usado para hallarlos, pretende dirigir la atención de los estudiantes a la constante de proporcionalidad, lo que también se quiere lograr con la pregunta del numeral 6. Las siguientes fueron las preguntas:

4) Si entre 60 alumnos reúnen 300 canicas que relación se puede establecer? ¿Qué procedimiento utilizaron para obtener este resultado?

5) Entre cuantos alumnos reúnen 150 canicas? ¿Qué procedimiento utilizaron para obtener este resultado?

6) ¿Qué relación pueden establecer entre las dos columnas de la tabla anterior?

SEGUNDA ACTIVIDAD

La segunda actividad propuesta pretendía, igual que la anterior, que los estudiantes comenzaran a explorar la relación entre dos magnitudes a través de determinar parejas de valores correspondientes; en este caso, las magnitudes implicadas eran la *cantidad de objetos producidos* y el *tiempo requerido (en horas) para dicha producción.* El enunciado de la situación establecía que en una pequeña industria se confeccionan tres pantalones por hora. Para comenzar, se pidió completar la información de una tabla cuyo formato dimos y en el cual había datos de alguna de las magnitudes implicadas, así:

Tiempo (horas)	1		6	7		10
Cantidad de pantalones		9	18		30	

En la tabla, de manera intencionada, incluimos la misma pareja de valores dos veces, dando en un caso el valor del tiempo y en el otro, el valor de la cantidad de pantalones, con la intención de que los alumnos al sorprenderse por esa repetición pudieran advertir que en realidad hay dos relaciones que ligan las magnitudes implicadas y que para obtener el valor que hace falta a partir del que se conoce, en el caso de una de tales relaciones se requiere multiplicar por tres mientras que en el otro, se requiere dividir por tres. Luego, se plantearon preguntas similares a las formuladas en la actividad anterior, es decir, preguntas que apuntaban a establecer el valor correspondiente de una de las magnitudes para un valor dado de la otra magnitud, considerando valores más grandes que los incluidos en la tabla pero todos enteros. Así, algunas de tales preguntas formuladas fueron:

1) ¿Cómo obtuvieron los valores faltantes en la tabla?

2) ¿En cuánto tiempo se confeccionan 60 pantalones?

3) ¿Cuántos pantalones se confeccionan en 20 horas?

Preguntar por los procedimientos usados después de completar la tabla tenía como propósito que los estudiantes reflexionaran sobre las acciones hechas en los casos particulares tratados y eso les permitiera precisar una regla, que podían usar para responder preguntas relativas a cualquier valor. Para cerrar la actividad se hicieron las siguientes dos preguntas cuyos propósitos, respectivamente, eran que los estudiantes establecieran la constante de proporcionalidad y advirtieran el carácter creciente de la relación.

4) ¿Por hora en cuánto se incrementa el número de pantalones?

5) Entre mayor sea el tiempo dedicado a la producción, ¿habrá menos o más producción? ¿Por qué?

TERCERA ACTIVIDAD

A través de descripciones cortas y tareas específicas se plantearon tres situaciones más en las que había implicadas magnitudes directamente proporcionales, a saber: *tiempo* y *espacio* en una circunstancia en la que la velocidad es constante, *número de niños* y *número de adultos* relacionados mediante la razón 1 a 3, y *cantidad de artículos* de un mismo tipo y *costo* respectivo. Las descripciones fueron:

> 1) Un vehículo que viaja a la misma velocidad, va a lo largo de una carretera recta a 60 kilómetros por hora.
>
> 2) En un estudio de la población en el país A se llegó a la conclusión de que por cada niño hay tres adultos.
>
> 3) En un almacén el precio de un cierto artículo es $100.

Con respecto a las tres situaciones descritas, se pidió completar sendas tablas en formatos dados por nosotros, que contenían dos parejas de valores conocidos para las que se cumplen las propiedades de una relación directamente proporcional —información con la que, de manera tácita, pretendíamos indicar el carácter proporcional de las magnitudes—, e incluían también, valores de una u otra de las magnitudes para que los estudiantes determinaran el valor correspondiente que faltaba. Dichos valores eran todos números enteros, no siempre incluían el valor 1 para alguna de las magnitudes, no siempre formaban una progresión aritmética y no siempre se presentaron ordenadamente; en uno de los casos se presentaron los datos de una de las magnitudes ordenados en forma descendente.

Lo último que se propuso a los alumnos dentro de la secuencia descrita, pretendía que ellos dieran una mirada a las cinco relaciones que se habían explorado a través de hacer tablas de valores y analizaran algunos aspectos. Para ello se plantearon las siguientes tareas:

1) Analicen todas las actividades anteriores y busquen una característica común entre ellas.
2) Identifiquen en cada tabla las respectivas magnitudes.
3) ¿Qué relación encuentra entre las diferentes magnitudes?
4) Si una magnitud aumenta, ¿qué pasa con la otra magnitud?
5) Si una magnitud disminuye, ¿qué pasa con la otra magnitud?

GENERALIDADES DE LA IMPLEMENTACIÓN

El taller fue desarrollado por doce alumnos de grado octavo quienes fueron seleccionados al azar y distribuidos en cuatro grupos de tres estudiantes cada uno, con el fin de que interactuaran entre ellos para la solución del taller. La implementación se hizo en una sesión de dos horas que tuvo lugar en el recinto de la biblioteca de la Normal; esta sesión no hizo parte de trabajo del curso. Participaron los cinco docentes del área de matemáticas, uno como orientador de la clase y el resto como observadores. Cada alumno recibió una copia de los enunciados de las tres actividades y cinco canicas.

A través de la observación directa de los estudiantes mientras desarrollaban el taller, pudimos notar que los estudiantes estuvieron dispuestos de manera positiva para realizar las actividades propuestas, es decir, trabajaron en lo que se les pedía sin distraer su atención en charlas sobre otros asuntos; quizás esto tiene que ver con el hecho de que se les hubiera entregado a cada uno, una copia de los enunciados de las tareas y preguntas sobre las que tenían que centrarse. También advertimos que aunque en los diferentes grupos se llevó a cabo una conversación entre los estudiantes con respecto a las varias tareas del taller, en algunos casos se tomó la decisión según el estudiante que estaba liderando el desarrollo del taller y así la respuesta final no necesariamente representa un consenso del grupo; ese líder no fue nombrado por el grupo sino que se constituyó por razón de su participación activa y destacada dentro del grupo.

ALGUNOS RESULTADOS

Mirando las soluciones de los alumnos tanto orales como escritas pudimos observar varias cosas que precisamos en las siguientes subsecciones.

PRIMERA ACTIVIDAD

Con respecto a la primera actividad, los cuatro grupos determinaron sin problema alguno el número de canicas reunidas por las cantidades de alumnos dadas inicialmente (dos, cuatro, seis, …, doce); sin embargo, no todos procedieron de la misma manera para obtener los resultados: dos grupos multiplicaron el número de estudiantes considerado por cinco, otro grupo contó usando una secuencia de diez en diez y el otro, aplicó la suma de canicas. De manera sorpresiva para nosotros, la situación no fue igual de fácil cuando se les preguntó por el número de canicas que reunirían entre treinta y seis estudiantes; varios de los alumnos no entendieron la pregunta, tuvieron que hacer una relectura; en algunos casos, el profesor que coordinó la sesión tuvo que hacer alguna aclaración y finalmente efectuaron la correspondiente multiplicación; quizás el hecho ocurrió porque los alumnos estaban considerando la situación concreta que se les planteó al pedirles que se reunieran ellos mismos, primero en grupos de dos, luego en grupos de cuatro, etc., y al plantearles la situación hipotética de treinta y seis alumnos reunidos, no la vieron como tal y en consecuencia la tarea les parecía sin sentido en el contexto en el que estaban trabajando.

Todos los grupos respondieron correctamente la pregunta acerca del número de niños que reunirían doscientas cincuenta canicas, haciendo para ello la respectiva división. Varios de los alumnos no notaron la diferencia entre la pregunta sobre el número de canicas si se reunían las de treinta y seis alumnos y la pregunta que se refiere a si se reunen más de treinta y seis alumnos, a pesar de haberla leído varias veces para tratar de entenderla; para responderla hicieron la operación 36×5; este hecho nos hace pensar que la pregunta "¿qué pueden decir del número total de canicas reunidas?" podría reformularse, por ejemplo, así: Se sabe que entre 36 alumnos reúnen 180 canicas; un número mayor de alumnos, ¿reúnen más o menos cantidad de canicas que las que reúnen 36 alumnos?

No hubo dificultad para llenar la tabla de datos, sin embargo, hicieron el comentario de que el número de preguntas no concordaba con el número de casillas de la tabla, pero luego se dieron cuenta de que en una pregunta no había un número de alumnos definido.

Para el caso particular en el que se dieron los dos valores correspondientes de las dos magnitudes (ver el numeral 4 en p. 192) y se preguntó por la relación que se puede establecer, todos los grupos establecieron alguna de las dos igualdades $5 \times 60 = 300$ o $300/5 = 60$. En la siguiente pregunta (ver numeral 5, p. 192), realizaron primero la operación $150/5$ y luego ante un comentario del profesor, realizaron una multiplicación para comprobar que este resultado era correcto.

Frente a la última pregunta de esta actividad (ver el numeral 6 en p. 192), una alumna respondió que "siempre se trabaja con canicas". Otro grupo, en un principio, estableció que la relación consistía en que iba de diez en diez pero al llegar al dato de treinta y seis alumnos dudaron de esa respuesta. Otro grupo estableció que "por cada diez canicas hay dos alumnos y cada vez que se quiera establecer el número de alumnos o canicas se debe multiplicar por 5". La variedad de respuestas a esta pregunta —que no apuntan a lo que queríamos que los estudiantes advirtieran— nos hace ver la necesidad de reformularla y también de introducir otras tareas anteriores que realmente permitan enfocar la atención en la relación que hay entre los valores correspondientes de las dos magnitudes. Un comentario adicional: nos sorprendió que los estudiantes no vieron la necesidad de utilizar canicas para llevar a cabo la actividad.

SEGUNDA ACTIVIDAD

Con respecto a la segunda actividad, no presentaron dificultad para llenar la tabla; siempre multiplicaron o dividieron por tres según cuál fuera el dato conocido y frente a la pregunta sobre cómo obtuvieron los valores faltantes, explicitaron frases como por ejemplo, “para saber el tiempo dividimos por tres” y “para conocer los pantalones multiplicamos por 3”; en este caso, al mencionar las magnitudes implicadas se refirieron a “pantalones” y “horas” en vez de “cantidad de pantalones” y “tiempo” tal como se designaban en el formato que se les presentó. Los cuatro grupos observaron y comentaron que los dos últimos cuadros estaban repetidos. Con base en el resultado anterior, consideramos que los estudiantes tuvieron que enfocar su atención en la relación entre las dos magnitudes puesto que centrarla en los valores de cualquiera de ellas no les conducía a completar la tarea, situación que fue diferente en la primera actividad.

Frente a la pregunta planteada en el numeral 4, p. 193, todos los grupos respondieron de manera acertada “por hora se incrementan 3 pantalones”. En la planeación del taller, nosotros consideramos que tal pregunta tenía como propósito que los estudiantes establecieran la constante de proporcionalidad y en ese sentido, al analizar la respuesta dada por los grupos pensamos que ella era indicio de haber logrado el propósito. Sin embargo, en la interacción con los tutores durante el proceso de edición de este artículo pudimos ver que en realidad tal pregunta no apunta a relacionar dos valores correspondientes en las dos magnitudes sino a relacionar la diferencia de dos valores de una magnitud con la diferencia de los valores correspondientes en la otra magnitud. De manera simbólica, podríamos decir que si A y B son las dos magnitudes relacionadas de manera directamente proporcional y a_i y a_j son dos valores de A y b_i y b_j son los correspondientes valores en la magnitud B, la pregunta del taller de la que estamos hablando hace referencia a la relación entre $a_j - a_i$ y $b_j - b_i$ y no entre a_j y b_j, con lo cual se estaría sugiriendo que la constante de proporcionalidad se define en términos de las primeras dos expresiones y no en términos de las dos segundas.

Por otra parte, en relación con la pregunta del numeral 5, p. 193, todos los grupos establecieron la conclusión de que “si se aumenta el número de horas se aumenta también el número de pantalones”.

TERCERA ACTIVIDAD

Todos los grupos pudieron completar sin dificultad las tablas. Con respecto a las magnitudes de la primera situación descrita, los alumnos identificaron el carácter creciente de la relación al expresar enunciados como por ejemplo, "al aumentar el tiempo aumenta el espacio"; además, dicen que "en una hora se recorren sesenta kilómetros", lo que nos parece hace referencia a la constante de proporcionalidad[1]. Con respecto a la segunda situación descrita, casi ningún estudiante se percató de que los cinco valores dados para la magnitud *cantidad de niños* estaban desordenados y puesto que los dos únicos valores de la otra magnitud que se daban en la tabla estaban en orden descendente (al mirar de izquierda a derecha) dijeron que la cantidad de adultos decrecía cuando la cantidad de niños crecía; además tuvieron dificultad para ver a tres como la constante de proporcionalidad en la relación que liga número de niños-número de adultos. Antes de que siguieran adelante en el análisis de la tercera tabla, el profesor que estaba coordinando la sesión, llamó la atención de los alumnos sobre el hecho del desorden de los valores en la tabla y sugirió que los reorganizaran y volvieran a hacer el análisis, con lo cual todos los alumnos pudieron ver que la relación es creciente y que la constante de proporcionalidad es tres. Con respecto a la tercera situación descrita, al analizar los datos de la tabla, los alumnos comenzaron por notar que los datos de la magnitud *cantidad de artículos* estaban ordenados descendentemente, algunos los reorganizaron en forma ascendente y otros no, pero atendiendo a lo que expresaron creemos que vieron el carácter creciente de la relación. En este caso, en uno de los grupos la relación que establecieron es que "debemos agregar dos ceros a cada precio", mientras que en los otros grupos fue claro que debían multiplicar por cien a la cantidad de artículos para obtener el correspondiente costo.

En resumen, según lo que observamos, creemos que en términos generales logramos lo que pretendíamos con el taller: los estudiantes vieron en las relaciones presentadas el carácter creciente y además que es posible obtener los valores de la magnitud X como multiplicación de los valores correspondientes en la magnitud Y por una constante o los valores de la magnitud Y como cociente de los valores correspondientes en la magnitud X por una constante.

CONCLUSIÓN

Al desarrollar este proyecto pudimos observar aspectos positivos que tienen que ver con algunas características de la experiencia de clase que vivimos los estudiantes y los profesores en la implementación del taller. Por un lado,

1. A diferencia de lo sucedido en la actividad anterior, en este caso, el enunciado "en una hora se recorren sesenta kilómetros" sí establece relación entre dos valores correspondientes de las dos magnitudes implicadas.

al hacer la clase en torno a unas tareas propuestas por escrito a los estudiantes, hay mayor participación de ellos en su proceso de aprendizaje, puede haber mayor relación entre el alumno y el profesor puesto que los alumnos están trabajando a su ritmo y así tienen más oportunidad para expresar sus ideas y preguntas específicas tanto al profesor como a sus compañeros de grupo; todo ello, hace más motivante la clase para el estudiante.

Por otro lado, que el profesor no tenga su atención puesta, de manera exclusiva y durante toda la clase, en lo que tiene que decirle a los estudiantes sino que por el contrario pueda detenerse a mirar lo que ellos hacen y a escuchar las preguntas que formulan en torno a las tareas propuestas, es una situación que permite al profesor poner a prueba las previsiones que hizo en la planificación del diseño y además tener información acerca de si el estudiante está adquiriendo el nuevo aprendizaje; vemos que esta situación es muy provechosa para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Fue también positivo el hecho de que algunas de las respuestas erróneas de los estudiantes en el taller nos hicieran ver que las respectivas preguntas y tareas que les planteamos deben cambiarse de manera que sean más precisas, o quizás lo más conveniente sea incluir tareas adicionales que los lleve a ver cosas sin que el profesor tenga que mostrárselas; por ejemplo, al centrar la atención en el carácter creciente de la relación, podríamos preguntarles si al mirar los valores en la tabla se ve que ellos están creciendo o decreciendo.

Para terminar, los puntos mencionados antes nos llevan a cuestionar la metodología que aplicamos usualmente en el desarrollo de las clases ya que vemos que no es la más adecuada; también nos gustaría decir a los maestros que se requiere ser más claros y concisos en el momento de hacer las preguntas al estudiante, aunque éstas se hagan en el lenguaje del estudiante.

Félix Farfán
Sandra Prieto
Martha Molano
Escuela Normal Superior María Auxiliadora de Villapinzón
Tel.: (091) 8565122

APROXIMACIÓN A LA PROPORCIONALIDAD A TRAVÉS DE UNA SITUACIÓN DE LA VIDA COTIDIANA

TATIANA RINCÓN Y FANNY NARANJO

Se presenta una propuesta para el aula que considera una situación de la vida cotidiana que sirve de contexto para plantear tareas que tienen la intención de poner en juego algunas nociones de la proporcionalidad. A través de las respuestas de los estudiantes en la implementación de la propuesta, se entreve un manejo de comparaciones entre precios de las variables asociadas, pero no hay de manera explícita un manejo de las razones ni de comparaciones entre ellas, como tampoco de argumentos, tácitos o no, sobre relaciones de proporcionalidad que sustenten el trabajo realizado.

INTRODUCCIÓN

En octubre de 2001, la Escuela Normal Superior "Presbítero José Gómez Isaza" de Sonsón, Antioquia, aceptó la invitación a participar en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores", a cargo de "una empresa docente" de la Universidad de los Andes y financiado por el Ministerio de Educación Nacional. En el marco del Programa se llevó a cabo una serie de tres seminarios dirigidos a los profesores participantes, con el propósito de trabajar en temas relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela.

El trabajo que se planteó en el primer seminario, para realizar a lo largo del Programa, fue la planeación y puesta en práctica de un proyecto de indagación en el aula que consistía en la elaboración de un diseño curricular de dos o tres clases, relacionado con algún tópico específico de la proporcionalidad que fuera de interés para el grupo de profesores de cada Normal.

En consecuencia, uno de los primeros asuntos que tuvimos que concretar los profesores de matemáticas de la Normal, fue la elección del tópico de trabajo dentro del tema de la proporcionalidad. Infortunadamente, este asunto de la elección del tema no se pudo definir tan rápido como hubiéramos deseado, puesto que en el equipo de profesores había una docente que trabajaba en matemáticas en el nivel de primaria, y el tema elegido sólo nos parecía apropiado para trabajar a nivel de secundaria. Así pues, este hecho motivó la reconsideración del equipo de profesoras que iba a trabajar en el proyecto y que finalmente se redujo a las dos profesoras que presentamos este artículo.[1]

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 199-208). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

En una de las actividades realizadas en el primer seminario se mostraron y discutieron algunos resultados de estudiantes colombianos en las pruebas del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias —TIMSS— de 1997[2], que dejan ver el bajo desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas en los que están implicados la comprensión y el manejo de nociones de proporcionalidad. Las profesoras que finalmente abordamos la tarea de planeación e implementación del proyecto de aula, motivadas en buena parte por la discusión mencionada antes, encontramos como tópico de interés el relacionado con la solución de situaciones problema de la vida cotidiana, que comprometiera la utilización de nociones de la proporcionalidad directa, como son las razones, las proporciones y la regla de tres.

ELABORACIÓN DEL DISEÑO

Para aproximarnos a la tarea de elaborar el diseño, hicimos una revisión de varios aspectos. Por un lado, se realizó una evaluación informal a los estudiantes con base en la cual queríamos detectar las dificultades que presentaban al resolver problemas relacionados con el tema de proporcionalidad; por otro lado, se identificaron elementos del conocimiento matemático que se deberían tener en cuenta al realizar el diseño y se discutió cómo se podría proponer la secuencia de enseñanza para concretar el diseño del taller.

Con base en la evaluación informal realizada se pudo dar cuenta de algunas dificultades y errores más comunes en los estudiantes. Por ejemplo, una de las dificultades detectadas más notoria fue la interpretación no adecuada de los enunciados de algunos problemas o tareas propuestas que condujeron al empleo de procedimientos no apropiados.

Con respecto a la mirada al conocimiento matémático relativo, se consideró que la solución de la situación elegida debería involucrar contenidos matemáticos, indirecta y directamente, relacionados con la proporcionalidad, como por ejemplo: la realización de operaciones aritméticas elementales (suma, resta, multiplicación y división) en conjuntos numéricos como los naturales o los racionales; las comparaciones cuantitativas numéricas y no numéricas de la forma 'mayor que', 'menor que' o 'igual que' en variables como *precio, volumen, peso*; el establecimiento de razones entre precios de dos variables relacionadas y la comparación de estas razones; la formulación de la regla de tres y su manejo, que implícitamente supone un reconocimiento de una relación de proporcionalidad; y el manejo de redondeos en la manipulación de números racionales en su representación decimal.

Con respecto al tipo de problemas entre los que se podría elegir para concretar el diseño del taller, se consideró que sería interesante proponerle a los

1. Una de las dos profesoras que asistió al primer seminario, posteriormente se retiró del Programa.
2. Para una información más detallada al respecto, recomendamos ver Díaz et al. (1997).

estudiantes una situación problemática de la vida cotidiana que implicara la toma de decisiones con base en el manejo de los precios de las variables y las razones entre ellos. Fue así como surgió la idea de proponer un taller que promoviera la reflexión de los estudiantes con respecto a cómo elegir los artículos más económicos en un supermercado teniendo en cuenta no sólo el precio, sino también el peso y el precio unitario. La idea, en pocas palabras, consistía en averiguar los precios de algún artículo particular que estuviera disponible en algunas de las tiendas del municipio —en variedad de marcas, precios y tamaños— con el propósito de elegir el artículo de la marca y tamaño que proporcionalmente resultara más económico.

TALLER PROPUESTO

El taller que finalmente se propuso a los estudiantes de grado séptimo se dividió en dos partes. En la primera parte se planteó a los estudiantes una tarea para que realizaran en grupos de cuatro, por fuera del aula, la cual consistía en averiguar, en dos de los supermercados del Municipio, los precios de ciertas marcas de cremas dentales (Colgate, Kolynos y Close-Up) en presentaciones de diferentes tamaños diferenciados por peso o volumen, para luego preparar un reporte de la información recolectada y presentarlo, en una cartelera, en la clase. La segunda parte del taller planeada para ser realizada en el aula, consistía en responder una guía de preguntas preparada por los profesores. Los estudiantes debían trabajar en los mismos grupos conformados para el desarrollo de la primera parte del taller. Las preguntas incluidas en la guía se presentan a continuación:

1) Determinar para cada uno de los tamaños de crema dental, 25 cc, 50 cc, 100 cc y 175 cc, ¿qué supermercado ofrece el precio más económico? Registrar todos los procedimientos y los resultados de las operaciones realizadas. (Se dice que un producto de una marca A presenta un precio favorable frente a la marca B si el precio por unidad de volumen en la marca A es menor que el de la marca B).

2) Para una sola submarca de una determinada marca de crema dental, calcular el precio del centímetro cúbico por cada uno de los tamaños, en ambos supermercados. Establecer cuál tamaño ofrece el mayor precio y cuál el menor precio. Registrar tanto los procedimientos utilizados como los resultados de las operaciones realizadas.

3) Para cada una de las marcas y submarcas no consideradas en la pregunta anterior, calcular el precio de un centímetro cúbico de crema dental. Registrar las operaciones utilizadas y, en una tabla, organizar los resultados de los cálculos.

4) Con los precios establecidos, determinar cuál es el precio mayor y cuál el precio menor que hay que pagar por cada uno de los tamaños de estas

marcas y submarcas de crema dental en los supermercados. Explicar su respuesta.

5) Si el único criterio para establecer qué crema dental comprar fuera lo favorable de su precio ¿cuál crema dental compraría y en qué tamaño? Explique con el mayor detalle posible las razones que sustentan su respuesta.

RESULTADOS OBSERVADOS

La implementación del taller se realizó en una sesión de tres horas de clase. En el desarrollo del taller estuvimos presentes las dos profesoras; una de nosotras observó la implementación del taller, mientras que la otra estuvo encargada de orientar el trabajo de los estudiantes.

La primera parte del taller fue realizada de manera entusiasta por los alumnos y no se presentaron mayores dificultades; además, la mayoría de ellos reportaron precios y marcas que coincidían con la información que al respecto nosotras habíamos averiguado con antelación. Sin embargo, en el desarrollo de la segunda parte del taller surgieron varias dificultades.

Para empezar, algunos minutos después de que se les entregara la guía de preguntas, la mayoría de estudiantes manifestó no entender qué era lo que se les preguntaba y que "las preguntas propuestas eran muy difíciles de contestar y eran muy largas y extensas sus respuestas". Por ello, la profesora encargada de dirigir el taller tuvo que intervenir en repetidas oportunidades para aclarar las dudas de los estudiantes con respecto a las preguntas; no obstante, a pesar de todas las explicaciones hechas por la docente, los estudiantes decían no comprender qué era lo que tenían que hacer. Probablemente, esta falta de comprensión de las preguntas, generó en los estudiantes un sentimiento de apatía o de pereza hacia la tarea propuesta que los llevó a que no pusieran todo su empeño en el desarrollo de la segunda parte del taller.

En suma, sólo dos grupos respondieron en su totalidad la segunda parte del taller. Hemos seleccionado las respuestas presentadas por uno de estos dos grupos para dar cuenta de la manera como los estudiantes abordaron e interpretaron las preguntas planteadas. El texto presentado por los estudiantes como respuesta a la primera pregunta se recoge en la Figura Nº 1.

Como puede observarse en la respuesta presentada por este grupo de estudiantes, la manera como le dieron sentido a la pregunta "¿qué supermercado ofrece el precio más económico?" se concretó a través de sumar los precios, en el caso de cada supermercado, de todas las marcas consideradas en todos los tamaños disponibles. Esta respuesta sugiere que los estudiantes no pensaron, como esperábamos, en el precio específico de una crema dental para cada tamaño de manera independiente, sino en cuál era el supermercado que ofrecía el precio total más económico, como si se fuera a comprar una crema de cada marca y cada tamaño.

Colgate máxima protección anticaries		
MerqueFácil	25 cc	840
MerqueMás	25 cc	650
MerqueFácil	50 cc	1850
MerqueMás	50 cc	2100
MerqueFácil	75 cc	2850
MerqueMás	75 cc	3450
MerqueFácil	100 cc	3500
MerqueMás	100 cc	4000
MerqueFácil	150 cc	5740
MerqueMás	150 cc	6050
Colgate total		
MerqueFácil	100 cc	4550
MerqueMás	100 cc	4800
Colgate triple acción		
MerqueFácil	100 cc	3210
MerqueMás	100 cc	3450
Kolinos		
MerqueFácil	150 cc	2450
MerqueMás	150 cc	2500
Close-up eucalipto		
MerqueFácil	37 cc	1550
MerqueMás	37 cc	1600

Merquefácil
840
1850
2850
3500
5740
4550
3210
2450
1550
26640

MerqueMás
650
2100
3450
4000
6050
4800
3450
2500
1600
28600

El supermercado que ofrece el precio más económico es Merquefácil

Figura Nº 1.

Al revisar la pregunta, vimos que aunque nuestra expectativa era que el estudiante hiciera comparaciones entre razones de precio y tamaño, la forma en que está hecha la pregunta no requiere establecer razones, pues es suficiente tomar cada tamaño de crema por separado y comparar su precio en los dos supermercados. Así la pregunta no implica necesariamente poner en juego nociones relacionadas con la proporcionalidad.

Una de las respuestas que se dio a la segunda pregunta se expone en la Figura Nº 2. Por la notación utilizada en esta respuesta para los resultados de las divisiones, que hace referencia a las unidades de las magnitudes, es decir pesos y centímetros cúbicos, podría decirse que los estudiantes trabajan con razones, pero no se puede garantizar que las vean como tales. Los argumentos que se presentan para sustentar cuál es el tamaño que ofrecía el menor o el mayor precio, en términos de su precio por centímetro cúbico, sólo son coherentes dentro de un subconjunto de los casos que se debían contemplar. Por ejemplo, en la primera argumentación inexplicablemente

Colgate máxima protección anticaries

MerqueFácil	25 cc	840	\$34 el cc 33,6
MerqueMás	25 cc	650	\$26 el cc
MerqueFácil	50 cc	1850	\$37 el cc
MerqueMás	50 cc	2100	\$42 el cc
MerqueFácil	75 cc	2850	\$38 el cc
MerqueMás	75 cc	3450	\$46 el cc
MerqueFácil	100 cc	3500	\$35 el cc
MerqueMás	100 cc	4000	\$40 el cc
MerqueFácil	150 cc	5740	\$38.2 el cc $38,2\overline{6}$
MerqueMás	150 cc	6050	\$40 el cc $40,\overline{3}$

Pensamos que sale más económico el de 100 cc porque sus centímetros cúbicos son más baratos y porque de 75 cc un cc vale 38 pesos y el otro de 100 vale 35 pesos.
Pensamos que la más cara es la de 150 cc porque si multiplicamos por ejemplo 75x2 que es lo que falta para llegar a 150 nos daría un precio más favorable que comprando la crema de 150 cc y lo mismo con el resto de tamaños (25, 50, 75, 100, 150).

Figura Nº 2.

no consideran los tamaños de 25 centímetros cúbicos —que son los de menor precio por centímetro cúbico—, mientras que en la segunda argumentación no tuvieron en cuenta que lo que se alegaba no era válido para los precios por unidad que se ofrecían en el otro supermercado. En este segundo argumento se exhibe un hecho que podría sugerir un manejo intuitivo de una relación de proporcionalidad pues al presuponer que las magnitudes cantidad y precio son directamente proporcionales, se afirma que al duplicar la cantidad de crema, por ejemplo comprar dos cremas de 75 centímetros cúbicos, el precio se duplica igualmente. Aun así no hay evidencias de que los estudiantes hayan visto esto o sean conscientes de ello, y más bien parece que lo manejan de esta manera porque así es naturalmente la relación entre cantidades y precios. No se ve si emplearon la regla de tres para encontrar el precio, y no parece que en la comparación se hayan referido a la razón entre precio y cantidad.

Esta respuesta no muestra que los estudiantes tuvieran problemas para establecer qué operación realizar o para hacer las divisiones, como tampoco para manejar la aproximación o redondeo de los números que contenían decimales al número entero más cercano. Cabe anotar también la identificación de la periodicidad en los decimales y el manejo de la notación para esto. No obstante, el trabajo de este grupo fue una excepción con referencia al redondeo de números, pues en los demás grupos de estudiantes pudimos notar errores al respecto.

Para responder la tercera pregunta, los estudiantes ampliaron el cuadro que presentaron como respuesta a la segunda pregunta como se indica en la Figura Nº 3:

Colgate total			
MerqueFácil	100 cc	4550	$45 el cc 33,6
MerqueMás	100 cc	4800	$48 el cc
Colgate triple acción			
MerqueFácil	100 cc	3210	$38 el cc2
MerqueMás	100 cc	3450	$34 el cc
Kolinos			
MerqueFácil	75 cc	2450	$33 el cc
MerqueMás	75 cc	2500	$33.3 el cc
Close-up eucalipto			
MerqueFácil	37 cc	1550	$42 el cc
MerqueMás	37 cc	1600	$43 el cc

Figura Nº 3.

También en esta respuesta podría pensarse que los estudiantes trabajan con razones, por el hecho de anotar las unidades de las magnitudes a los resultados de las divisiones, pero tampoco aquí se puede asegurar que las identifiquen como tales. Se ve que los estudiantes reconocieron que tenían que dividir e hicieron las divisiones sin problemas, con la ayuda de la calculadora. Así mismo redondearon los decimales aproximando el número a números enteros aunque cuando el decimal es cinco toman el entero menor. Con respecto a la organización en una tabla, está claro que presentan los resultados así, pero desconociendo el propósito de las tablas de varias entradas de posibilitar el cruce de información para sintetizarla y facilitar su lectura.

Un fragmento de lo que respondieron los estudiantes a la tercera pregunta se encuentra en la Figura Nº 4:

Creemos que el precio que los consumidores deberíamos pagar por la crema dental Colgate en su submarca Máxima protección anticaries es la siguiente:
Si compramos 6 cremas dentales de 25 cc que nos equivale a 150 cc nos saldría valiendo $5040, mientras que si compramos una sola crema dental de 150 cc nos valdría $5740. Entonces el menor precio que debería pagarse sería 5040 y el mayor, su precio actual que es 5740.
…
Colgate triple acción. Pensamos que su precio actual es el justo ya que creemos que esta submarca es mejor que las demás submarcas que tienen un precio más alto.

Figura Nº 4.

Para esta respuesta los estudiantes no parecen haber tenido en cuenta los precios por centímetro cúbico encontrados en las dos respuestas anteriores. Creemos que la manera en que está formulada la pregunta, haciendo referencia a cada tamaño y cada marca, obliga a mirar cada precio independientemente y no lleva a hacer una comparación entre todos los precios de una submarca. Sin embargo, en esta respuesta los estudiantes aun sin referirse a los precios obtenidos previamente, elaboran para una cantidad específica, 150 centímetros cúbicos, de crema de una de las submarcas de Colgate en uno de los supermercados, un razonamiento que podría ajustarse a lo que se pide en la pregunta; consideran de este modo, el menor y mayor precio que habría que pagar por dicha cantidad, los cuales corresponden a dos de sus presentaciones. No es claro si contemplaron los precios de las otras presentaciones para la misma cantidad, es decir si hicieron el cálculo del precio de tres cremas de 50 centímetros cúbicos, de dos de 75 centímetros cúbicos, ya que estos cálculos no están escritos. En el razonamiento de esta respuesta, está por detrás de nuevo el supuesto de que la relación entre cantidad y precio es directamente proporcional, y por consiguiente si un precio de la primera magnitud aumenta un número de veces también lo hace su precio correspondiente. No obstante, tampoco aquí hay muestras de que los estudiantes lo hayan visto o sean conscientes de tal supuesto. No se sabe si plantearon y utilizaron la regla de tres para encontrar el precio, y no parece que en la comparación se hayan referido a la razón entre precio y cantidad, o sea al precio de un centímetro cúbico para cada presentación.

Lo registrado en la respuesta de los estudiantes a la quinta pregunta aparece en la Figura Nº 5:

Lo que compraríamos sería Colgate en su submarca triple acción de 100 cm^3, porque es más favorable y más rica. Colgate máxima protección de 100 cm^3 vale 3500 y colgate total de 100 cm^3 vale 4550.

Figura Nº 5.

Vemos entonces, que la información registrada en esta respuesta no permite establecer si usaron o no los resultados de las respuestas dadas a la segunda y tercera pregunta, para tomar la decisión; parece que sólo se fijaron en el precio total de cada presentación y no en el precio por unidad de volumen, es decir por centímetro cúbico. Tratando de dilucidar el razonamiento seguido por los estudiantes para que su respuesta tenga sentido, lo que se puede decir es que al parecer tomaron solamente las presentaciones de 100 centímetros cúbicos de cada marca y submarca, compararon su precio y eligieron la más barata en uno de los supermercados. Reconocemos en consecuencia que tampoco esta pregunta implica necesariamente el poner en juego nociones relacionadas con la proporcionalidad. Cabe anotar en esta respuesta que los estudiantes después de haber notado siempre los centímetros cúbicos con las letras “cc” aquí pasan a hacerlo como “cm^3”.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Con respecto a los logros de los estudiantes en la aproximación al tema de la proporcionalidad, resultante del desarrollo de la situación que se les presentó, debemos reconocer que no fueron los esperados. Pensamos que el taller propuesto llevaría a los estudiantes a la identificación y establecimiento de razones entre las dos magnitudes consideradas, al planteamiento de reglas de tres con base en el reconocimiento expreso de la relación de proporcionalidad directa; esperábamos que también dicho reconocimiento justificara los razonamientos presentados sobre el aumento proporcional del precio de una magnitud por razón del mismo aumento en la otra magnitud. A pesar de las instrucciones que se daban en la mayoría de las preguntas de la guía acerca de registrar y dar detalles de las operaciones realizadas, la información incluida fue poca y por lo tanto no hubo indicios de lo anterior.

Desde el punto de vista del interés que despertó en los estudiantes la resolución de las tareas planteadas en la guía de trabajo de la segunda parte del taller, el balance es desalentador. Una razón a la que se puede atribuir esta apatía de los estudiantes, es que las tareas propuestas —concretadas en las instrucciones que propusimos— eran demasiado exigentes para el grado séptimo en el que implementamos el taller. Por otra parte, quizás nuestros alumnos están muy poco acostumbrados a abordar situaciones o talleres del estilo del que les propusimos.

Finalmente, desde la mirada que se puede hacer a la intención del taller propuesto y a su coherencia con las preguntas planteadas, tenemos que reconocer que es necesario hacer una revisión más cuidadosa de los propósitos de cada tarea y de su formulación para que apunten a poner en juego las nociones de la proporcionalidad que realmente se quiere que los estudiantes trabajen. Además nos damos cuenta de que es posible explotar la riqueza de la situación planteada para atender a tales nociones y proponer tareas adicionales que, por ejemplo, conduzcan a que el estudiante para una misma marca y submarca en un supermercado determine cuál presentación tiene el menor precio proporcionalmente, determinar si hay una relación de proporcionalidad entre los precios unitarios y totales de las diferentes presentaciones de una misma submarca, etcétera.

REFERENCIAS

Díaz, C., Álvarez, J., Torres, A. y Guacaneme, E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Tatiana Rincón
Fanny Naranjo
Escuela Normal Superior "Presbítero José Gómez Isaza" de Sonsón
Tel.: (094) 869 1422
E-mail: enspjg@edatel.net.co

Resolución de problemas de proporcionalidad: un estudio exploratorio

Margélica Salas, Marjorie Martínez,
Luz Gómez y William Vidal

Presentamos algunos aspectos y resultados de un estudio realizado en un curso de grado octavo, con respecto a la resolución de una secuencia de problemas que ponen en juego nociones básicas asociadas a la proporcionalidad. En los resultados obtenidos, pudimos identificar algunas estrategias de resolución a las que recurren los estudiantes cuando no se ha considerado previamente la enseñanza de la regla de tres, y encontramos algunas falencias en la forma de plantear y abordar este tipo de problemas, de las que no éramos conscientes.

Introducción

En octubre de 2001, los educadores del área de matemáticas de la Escuela Normal Superior Miguel Ángel Álvarez, del municipio de Frontino, recibimos una invitación del Ministerio de Educación Nacional, a través de la Secretaría de Educación de Antioquia, para participar en el "Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores" organizado por "una empresa docente" de la Universidad de los Andes de Bogotá.

Al comenzar el Programa, los tutores del mismo nos plantearon la idea de elaborar un diseño curricular para la enseñanza de un tópico específico de la proporcionalidad, tarea que fue acogida con expectativa por nuestra parte. Vimos entonces, como resultado de las discusiones que se dieron durante el desarrollo del primer seminario —y en particular, de algunas reflexiones que surgieron acerca de formas de solucionar distintas situaciones de proporcionalidad— que el tema en cuestión era más complejo de lo que inicialmente creíamos.

A pesar de que metodológicamente estaba planeado que seleccionáramos tal tópico, el deseo de establecer cómo era el desempeño de los estudiantes cuando se les enfrentaba con problemas en los que se pusieran en juego conceptos y procesos relacionados con el tema de la proporcionalidad, determinó para nosotros la tarea a realizar.

Así pues, en consonancia con esta modificación de la intención original del proyecto de aula, en primer lugar, enfocamos el trabajo en la realización de un diagnóstico en el grado octavo, cuyo propósito era identificar, por una

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F. (Eds.) (2003). Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer (pp. 209-221). Bogotá: una empresa docente.

parte, los procedimientos de los estudiantes para resolver algunos problemas que ponen en juego la idea de proporcionalidad, y, por otra parte, algunos de los errores que surgían al abordar su solución.

Después de hacer este diagnóstico y con base en las conclusiones arrojadas por el mismo, debíamos plantear el diseño y presentar a los estudiantes una serie de situaciones problemas con el propósito de iniciar la enseñanza de algunos de los tópicos asociados al tema de la proporcionalidad. Infortunadamente, debido a que se presentaron en la institución algunos eventos imprevistos que fue necesario atender con prelación, las actividades del cronograma que se había previsto no se pudieron realizar en su totalidad y la segunda parte del proyecto de aula no se pudo terminar dentro de los plazos establecidos en el Programa. Así pues, este artículo centra la atención en la presentación y resultados de lo relativo al estudio diagnóstico, para lo cual en primer lugar, vamos a presentar los enunciados de los problemas que se propusieron a los estudiantes y luego la solución que dimos a ellos junto con algunos comentarios. Después, damos cuenta de algunos detalles de la implementación y de los resultados observados y finalmente exponemos algunas reflexiones acerca del proceso realizado.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Para la realización de la prueba de diagnóstico se propuso que los estudiantes abordaran el siguiente conjunto de problemas:

1) En la finca de Felipe trabajaron Pedro, Juan y Lucas en la construcción de una casa; se sabe que entre los tres reciben por el trabajo diario \$6000 y que han trabajado así: Pedro 2 horas, Juan 3 horas y Lucas 5 horas. ¿Cuánto dinero recibe cada uno, teniendo en cuenta que la hora de trabajo tiene el mismo valor para todos?

2) Si el bus de la Escuela Normal Superior ha recorrido 360 kilómetros en 5 horas, viajando a una velocidad constante, entonces: ¿cuántas horas tardó en recorrer 252 kilómetros? ¿Qué distancia recorrió en un cuarto de hora?

3) Para distribuir 320 litros de leche han sido necesarias 80 canecas de 4 litros cada una. Si se quiere distribuir los mismos litros de leche en 20 canecas, ¿de cuántos litros debe ser cada caneca? ¿Cuántas canecas de 64 litros se necesitan para distribuir los mismos litros de leche?

4) Los ingredientes que aparecen a continuación y sus respectivas cantidades son para preparar una comida para tres personas. ¿Cuál será la cantidad que se requiere para preparar la misma comida para seis y nueve personas?

Ingredientes	**3 personas**	**6 personas**	**9 personas**
Carne Cebolla Tomate Salsa negra Vinagre Arroz	2 libras 9 onzas 12 onzas 2 cucharadas 1 cucharada 2 libras		

5) Gonzalo tiene 4 cultivos de bacterias. Si en cada cultivo, el número de bacterias se duplica cada 3 horas, ¿cuántas veces se habrá duplicado el número de bacterias en 24 horas? Si cada cultivo tiene 1 bacteria al comenzar su reproducción, ¿cuántas bacterias se tendrán en cada cultivo 24 horas después?

6) En la planta de producción, un ojo electrónico revisa 35 botellas por minuto. Si se necesitan revisar 6732 botellas y se dispone de tres horas ¿sobrará tiempo o quedarán botellas sin revisar?

SOLUCIÓN COMENTADA DE LOS PROBLEMAS

Intencionalmente se seleccionaron problemas aritméticos —y no geométricos— ya que se quería enfocar el estudio en lo relativo a la observación de los procesos aritméticos que pudieran emplear los estudiantes. Algunos de los problemas planteados contemplan la realización de repartos proporcionales, como en el caso de los problemas primero y cuarto, y en los otros, excepto el quinto problema, la consecución de una solución requiere de la explicitación y/o justificación de algún método para hallar una cuarta proporcional. A continuación se presenta un análisis más detallado de cada uno de los problemas propuestos.

PRIMER PROBLEMA

La situación planteada en este problema se resume en el siguiente cuadro:

Persona	Pedro	Juan	Lucas	Todos
Dinero devengado	? a	? b	? c	\$6000 = $a + b + c$
Horas trabajadas	2	3	5	$2 + 3 + 5 = 10$

Se tiene entonces un problema en el que se debe determinar la forma como fue distribuido un salario y en el que se sabe que: la cantidad para repartir es \$6000, el número de partes en que se debe repartir es 3, el reparto se realiza con base en el número de horas trabajadas y la hora de trabajo tiene el mismo valor para todos los trabajadores. Dada la condición de que la hora de trabajo tiene el mismo valor para todos, el *pago* es proporcional al *número de horas trabajadas*, es decir, a cada número de horas le corresponde una cantidad proporcional de dinero o viceversa. Esquemáticamente, la situación se suele representar así:

$$\begin{array}{ccc} \text{horas} & & \$ \\ 2 & \rightarrow & a \\ 3 & \rightarrow & b \\ 5 & \rightarrow & c \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{ccc} \$ & & \text{horas} \\ a & \rightarrow & 2 \\ b & \rightarrow & 3 \\ c & \rightarrow & 5 \end{array}$$

entonces las razones de los valores correspondientes son iguales, es decir:

$$\frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{5}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

Ahora bien, por la propiedad fundamental que cumple una serie de razones se tiene que:

$$\frac{2+3+5}{a+b+c} = \frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{5}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a+b+c}{2+3+5} = \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

y como se sabe que $a + b + c = \$6000$ entonces:

$$\frac{2+3+5}{a+b+c} = \frac{10\text{ horas}}{\$6000} = \frac{2}{a} = \frac{3}{b} = \frac{5}{c}$$

Entonces, tomando proporciones se puede llegar a los repartos en los que se obtiene: $a = \$1200$, $b = \$1800$ y $c = \$3000$. Vemos entonces que se trata de un problema de repartos proporcionales.

SEGUNDO PROBLEMA

Quizás la información más relevante de este problema es la que señala que la velocidad del bus es constante, pues precisamente es esa información la que permite aseverar que la *distancia recorrida* es proporcional al *tiempo*, y por ello, es posible establecer las siguientes razones entre distancias y tiempos:

$$\begin{array}{ccc} \text{distancia} & & \text{tiempo} \\ 360\text{ km} & \rightarrow & 5\text{ horas} \\ 252\text{ km} & \rightarrow & x \\ y & \rightarrow & 0.25\text{ horas} \end{array}$$

Entonces, las respuestas al problema se pueden encontrar al establecer igualación de razones, según lo planteado en cada pregunta, así:

$$\frac{360 \text{ km}}{252 \text{ km}} = \frac{5 \text{ h}}{x} \Rightarrow 360 \text{ km} \times x = 252 \text{ km} \times 5 \text{ h}$$
$$x = \frac{252 \text{ km} \times 5 \text{ h}}{360 \text{ km}}$$
$$x = 3.5 \text{ h}$$

$$\frac{360 \text{ km}}{y} = \frac{5 \text{ h}}{0.25 \text{ h}} \Rightarrow y \times 5 \text{ h} = 360 \text{ km} \times 0.25 \text{ h}$$
$$y = \frac{360 \text{ km} \times 0.25 \text{ h}}{5 \text{ h}}$$
$$y = 18 \text{ km}$$

El desarrollo anterior ilustra entonces un proceso para hallar una cuarta proporcional, con el fin de responder a cada pregunta.

TERCER PROBLEMA

Para resolver este problema es necesario interpretar la relación como de proporcionalidad inversa, en donde las magnitudes relacionadas son el *número de canecas* y la *capacidad de cada caneca*. Esto significa que el número de canecas multiplicado por la capacidad de las canecas debe ser constante e igual a 320 litros. Entonces, las razones que se derivan del problema enunciado son:

Número de canecas		Capacidad de las canecas
80 canecas	$\rightarrow$	4 litros/caneca
20 canecas	$\rightarrow$	x
y	$\rightarrow$	64 litros/caneca

Teniendo en cuenta que la relación de proporcionalidad es inversa, las respectivas igualdades de razones que se pueden establecer para responder a cada una de las dos preguntas son:

$$\frac{80 \text{ canecas}}{20 \text{ canecas}} = \frac{x \text{ litros/caneca}}{4 \text{ litros/caneca}} \quad \text{y} \quad \frac{80 \text{ canecas}}{y} = \frac{64 \text{ litros/caneca}}{4 \text{ litros/caneca}}$$

al desarrollar estas igualdades se llega a: x = 16 litros/caneca, y = 5 canecas. Entonces, estamos de nuevo ante un problema en el que se ha planteado un proceso para hallar una cuarta proporcional; la diferencia con respecto al problema anterior es que en el presente se debe trabajar con una relación de proporcionalidad inversa y por tanto la igualdad de las razones planteadas reflejan este hecho.

CUARTO PROBLEMA

Este problema, como ya lo habíamos dicho es de repartos proporcionales. Para poder encontrar los repartos solicitados en el problema es necesario que el resolutor reconozca en el mismo la proporcionalidad directa entre el *número de personas* y la *cantidad de ingrediente*, cualquiera que sea el ingrediente. Por ejemplo, para determinar la cantidad de carne en el caso de la receta para 6 personas la proporcionalidad directa entre número de personas y cantidad de ingrediente permite plantear la siguiente igualdad de razones, de la cual se obtiene la cantidad para dicho ingrediente:

$$\frac{3 \text{ personas}}{2 \text{ libras}} = \frac{6 \text{ personas}}{x} \Rightarrow x = 4 \text{ libras}$$

En este problema hay una pequeña diferencia con respecto al primer problema —en el que el reparto sólo involucra una magnitud— y es que la unidad y también la magnitud de la cantidad de ingrediente que se mide, varía dependiendo del ingrediente; en el caso de las onzas y las libras lo que se mide, de dos formas diferentes, es la cantidad de peso del ingrediente, mientras que en el caso de las cucharadas lo que se mide es el volumen del ingrediente. Quizás el hecho mencionado dificulta la posibilidad de ver el problema como de repartos proporcionales pues no tiene sentido considerar la cantidad total de ingredientes que configuran la receta; esta situación lleva a buscar la solución del problema mediante la aplicación reiterada de la regla de tres para determinar una cuarta proporcional en las proporciones relativas a cada uno de los ingredientes.

QUINTO PROBLEMA

En este problema para dar una respuesta a la primera pregunta, se requiere la determinación de una cuarta proporcional; sin embargo, para dar respuesta a la segunda pregunta, no se puede recurrir a un razonamiento proporcional. Para respaldar esta afirmación, veamos una manera de responder las dos preguntas del problema.

La primera pregunta nos lleva a considerar el *tiempo* y el *número de veces que se duplica* un cultivo de bacterias como variables de una relación de proporcionalidad directa; así, la igualdad de las razones: “3 horas es a una duplicación” y “24 horas es a x duplicaciones”, lleva a que $x = 8$ es la cuarta proporcional que satisface la relación de proporcionalidad.

En la segunda pregunta las variables relacionadas son el *número de bacterias* del cultivo y el *tiempo*; sin embargo, entre este par de variables no hay una relación de proporcionalidad. Una manera iterativa de encontrar la respuesta es construir una tabla así:

Tiempo en horas	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Nº de bacterias	1	2	4	8	16	32	64	128	256

En realidad, si *f* es la función que expresa el número de duplicaciones ocurridas en el proceso de reproducción en términos del tiempo implicado ($d = f(t) = t/3$) y *g* es la función que expresa el número de bacterias del cultivo en términos del número de duplicaciones ocurridas ($b = g(d) = 2^d$), entonces es posible expresar el número de bacterias del cultivo en terminos del tiempo transcurrido como $b = (g \bullet f)(t) = 2^{t/3}$. La función anterior es la implicada en la solución a la segunda pregunta y ya que esta es una función exponencial, no es de propocionalidad. Por supuesto, la no proporcionalidad de tal función se puede verificar directamente en la representación tabular que aparece unas líneas más atrás[1].

SEXTO PROBLEMA

En este último problema, el resolutor no sólo debe encontrar la manera de determinar una cuarta proporcional; además debe comparar el resultado obtenido con respecto a una referencia que podía ser en términos de las botellas que se necesitaba revisar (6732 botellas) o del tiempo que había disponible para la revisión (3 horas). En el primer caso se debe encontrar la cuarta proporcional de la igualdad entre las razones 35 botellas revisadas en un minuto y *z* botellas revisadas en 180 minutos, de la cual se llega a $z = 6300$, y como $6300 < 6732$, quedarían 432 botellas sin revisar. En el segundo caso se puede establecer proporcionalidad entre las razones: 35 botellas revisadas en un minuto y 6732 botellas revisadas en *x* minutos, de la cual se llega a $x = 192.34$, y como $192.34 > 180$ haría falta un poco más de 12 minutos para revisar todas la botellas.

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS OBSERVADOS

Con relación a los aspectos que queríamos observar se tuvo presente si los estudiantes recurrían a la utilización de gráficos y de operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones o divisiones); también quisimos registrar si efectivamente se entablaban discusiones en torno a la lectura y solución de los problemas propuestos y si llegaban a una solución correcta

1. Los colegas de la Escuela de Caucasia presentan un artículo acerca del reconocimiento de la proporcionalidad directa en una representación tabular (ver Oviedo, Burgos y González, 2003, en esta misma publicación).

o errada; y para el momento de la socialización de las soluciones, quisimos mirar la descripción de los procedimientos utilizados.

El estudio se realizó con un grupo de cuarenta y cinco estudiantes de ambos sexos, cuyas edades estaban entre trece y quince años. La secuencia de problemas se desarrolló en tres sesiones de clase. Para empezar, los alumnos fueron organizados en grupos de cuatro o cinco estudiantes, lo que probablemente posibilitó —como era nuestra intención— que se diera un diálogo colaborativo entre ellos, sobre todo para sortear las dificultades que iban encontrando. Una vez terminada la solución de los problemas, el proceso continuó con la socialización de las estrategias utilizadas y al final el profesor hizo algunos comentarios acerca de las diferentes soluciones presentadas por los estudiantes. En términos de las tres sesiones de clase que se llevaron a cabo, el trabajo discurrió de la siguiente manera: en la primera sesión, se dieron las instrucciones para que se organizaran en grupos, y la mayoría de los grupos alcanzó a discutir posibles soluciones a los tres primeros problemas; en la segunda sesión los estudiantes abordaron la discusión acerca de las posibles soluciones a los problemas restantes; y en la última sesión se hizo la puesta en común de las soluciones de los grupos y se cerró el proceso con comentarios del profesor acerca de las soluciones expuestas.

A continuación se presenta lo que observamos de manera particular con respecto a la solución de cada uno de los problemas en las producciones de dos de los grupos.

PRIMER PROBLEMA

La solución dada por uno de los grupos consistió en: sumar el total de horas trabajadas por los tres empleados, después realizar la división del total de dinero recibido por el total de horas trabajadas, es decir, \$6000 /10 h, para llegar a obtener como respuesta \$600/1h, es decir, que \$600 era el valor pagado por hora. Con base en este último valor concluyeron que Juan recibiría 2 h × \$600/1 h = \$1200, Pedro recibiría 3 h × \$600/1 h = \$1800 y Lucas 5 h × \$600/1 h = \$3000; incluso verificaron que la suma de los valores así obtenidos era \$6000. En contraste con este grupo, el otro grupo no tuvo en cuenta la necesidad de establecer un reparto del total de dinero y decidió utilizar directamente el valor de \$6000 como el valor que se debía pagar por la hora trabajada, obteniendo entonces, por consenso del grupo, que los pagos debían ser de \$12000, \$18000 y \$30000, para Juan, Pedro y Lucas respectivamente.

En realidad, la inclusión de las unidades de medida en los reportes escritos de los estudiantes no aparece tan consistente como se presenta en la descripción del párrafo anterior y de algunos que describiremos más adelante. Quizás, este es un asunto al que nosotros no hemos prestado suficiente atención y que vale la pena repensar en nuestra práctica docente en lo que a la enseñanza de la proporcionalidad se refiere.

SEGUNDO PROBLEMA

Para la solución de este problema ambos grupos se basan, para comenzar, en la posibilidad de escribir y simplificar la razón entre los kilómetros que se recorrieron en total y el tiempo total empleado, es decir, escriben 360 km/5 h = 72 km/1 h y afirman que en una hora el bus realiza un recorrido de 72 kilómetros. Después, uno de los estudiantes del primer grupo llega a la respuesta: “252 kilómetros los recorren en 3 horas y media”, a través de un proceso sumativo y reiterado que considera de manera paralela la distancia y el tiempo. El estudiante lo explica a sus compañeros escribiendo primero las siguientes “igualdades”:

$$72 + 72 = 144 + 72 = 216 + 72 = 288$$
$$1h + 1h = 2h + 1h = 3h + 1h = 4h$$

y luego argumentando que “como 288 - 252 = 36, entonces hay una diferencia de 36 kilómetros que el bus recorre en 30 minutos que equivale a media hora, por lo tanto el bus se demora tres horas y media en recorrer esa distancia”.

Algo similar ocurrió en el otro grupo observado. En particular, al considerar la segunda pregunta propuesta en este problema, una de las estudiantes argumentó que: “es muy sencillo, si en una hora el bus recorre 72 kilómetros, entonces 72/4 = 18 kilómetros porque en una hora hay cuatro cuartos”.

Así, vimos que para solucionar este problema no se usó la regla de tres y por ello, no supimos si interpretaban la respuesta 3.5 horas —que habrían obtenido al realizar la operación $5 \times 252/360$— como 3 horas y 50 minutos, error que sabemos es frecuente entre los alumnos de este nivel.

TERCER PROBLEMA

La estrategia para resolver este problema fue la misma en ambos grupos: utilizaron una división inicial para obtener las respuestas y una multiplicación para verificar la validez del resultado hallado. Por ejemplo, en el caso de la primera pregunta un estudiante del primer grupo argumentó que “si 320 son los litros de leche que hay que repartir en 20 canecas, entonces 320 litros/20 canecas = 16 litros/1 caneca, porque 16 litros/1 caneca $\times$ 20 canecas = 320 litros. El otro interrogante fue respondido de manera similar: “si 320 litros/64 canecas = 5 litros/1 caneca, entonces son necesarias 5 canecas de 64 litros de leche cada una, para distribuir los mismos 320 litros de leche.

Al igual que en el caso del problema anterior algunas respuestas, inferidas a priori, y que eventualmente esperábamos encontrar, no se registraron. Por ejemplo, pensábamos que como consecuencia de un proceso poco juicioso de ensayo y error, los estudiantes plantearían una combinación de operaciones como $20 \times 4/\ 80 = 1$.

A pesar de que las respuestas de los estudiantes a este problema indican, en general, que las preguntas se interpretaron correctamente, pensamos que la primera pregunta que se plantea debió precisarse un poco más, pues lo que realmente se quiere saber es la capacidad mínima de cada una de las canecas para hacer tal distribución. Igualmente, para la segunda pregunta de este problema, quizás sea necesario aclarar que se espera que las canecas queden completamente llenas o precisar que se espera que el número de canecas sea el menor posible.

CUARTO PROBLEMA

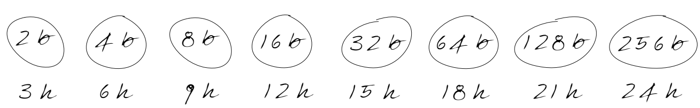
En ambos grupos hubo discusiones previas, antes de llegar a un consenso con respecto a los valores que debían anotar en la tabla para las diferentes cantidades de ingredientes que serían necesarias en los casos de seis y nueve personas. La tabla que presentó uno de los grupos y para la cual no se hizo una observación directa mientras la estaban construyendo, fue la siguiente:

Ingredientes	**3 personas**	**6 personas**	**9 personas**
Carne	2 libras	4 L	6 L
Cebolla	9 onzas	18 O	36 O
Tomate	12 onzas	24 O	48 O
Salsa negra	2 cucharadas	4 C	6 C
Vinagre	1 cucharada	2 C	3 C
Arroz	2 libras	4 L	6 L

Se puede hipotetizar que para encontrar los valores correspondientes a los resultados de la columna titulada “6 personas”, el procedimiento consistió en multiplicar por 2 los valores que se tenían en la columna titulada “3 personas”, sin embargo, para el caso de la columna “9 personas”, no es tan evidente que los valores que la componen hayan sido obtenidos multiplicando por 3 los de la columna “3 personas” ya que los valores 36 y 48 no son resultado de multiplicar respectivamente a 9 y 12 por 3. Quizás, los estudiantes sí querían multiplicar por 3 y en el caso de esos dos valores creyeron, por ejemplo, que 18×2 daría igual que 9×3, pero no tenemos suficiente evidencia para respaldar esta creencia.

QUINTO PROBLEMA

En los grupos observados se presentaron dos estrategias diferentes para solucionar este problema. El primer grupo presentó el siguiente esquema:



Vemos que esta respuesta es similar a una de las que habíamos previsto que podrían dar los estudiantes, salvo por el hecho de que nosotros considerábamos que la presentarían en un arreglo tabular, que apenas se diferencia del que sugerimos en el análisis de una solución de este problema por no incluir los nombres de las magnitudes involucradas.

El segundo grupo esbozó una respuesta que sugiere un razonamiento diferente al realizado por el grupo anterior. Ellos presentaron lo siguiente:

La respuesta dada por el primer grupo, sólo se refiere a la segunda pregunta y nos lleva a inferir que se utilizó un procedimiento aditivo —sumar el resultado obtenido previamente (es decir, 2 + 2 + 4 + 8 + … + 64 + 128)— o multiplicativo —multiplicar por 2 cada resultado que se va obteniendo— para determinar el número total de bacterias en un cultivo al cabo de veinticuatro horas. En contraste, el segundo grupo no respondió la segunda pregunta y en su respuesta a la primera —inesperada para nosotros— se reconoce una especie de razonamiento del que podríamos inferir o bien, que recurrieron al conteo para confirmar la respuesta dada en la división indicada en la esquina superior izquierda del esquema, o bien, que del conteo realizado dedujeron que la operación de división realizada permitía obtener la respuesta a la pregunta.

SEXTO PROBLEMA

Habíamos pensado que de pronto algún grupo podría argumentar en términos de la variable *cantidad de botellas* —por ejemplo, estableciendo que 35 botellas/1 minutos × 60 minutos = 2100 botellas, luego multiplicando esta cifra por 3 y encontrando que 6300 era la cifra de botellas revisadas—; sin embargo, ambos grupos esbozaron, sin muchas dificultad, argumentos muy similares en los que determinaron que “ya que en 3 horas hay 180 minutos y como tenemos que 6732 botellas ÷ 35 botellas /1 minutos = 192.3 minutos, sobrarían botellas por revisar”. Interpretamos que los estudiantes querían decir, en realidad, que el tiempo no alcanzaba para revisar todas las botellas, sin embargo, vemos que en vez de usar la palabra “sobraría” habría sido más apropiado que dijeran “faltarían por revisar”.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En primer lugar, reconocemos que inicialmente pensamos, con respecto a los problemas propuestos, que por el solo hecho de que los estudiantes se enfrentaran a la solución de los mismos, podrían construir sus propias estrategias, procedimientos o algoritmos a partir de su conocimiento previo, y ahora nos parece que los problemas propuestos más que constituirse en el medio que permitiera movilizar construcciones, fueron el ámbito de aplicación de construcciones que ellos de antemano poseían. En otras palabras, consideramos que efectivamente al proponerle a un estudiante un problema, se puede lograr que él se relacione con éste; sin embargo, tal relación no necesariamente implica una actividad de aprendizaje.

En segunda instancia, logramos identificar y esbozar algunas de las estrategias aplicadas por los estudiantes para abordar el tipo de problemas propuestos. Por ejemplo, una de ellas se evidencia en una de las soluciones dadas al segundo problema y contempla un procedimiento que podría ser similar al descrito a continuación:

- adición reiterada de una constante en una de las magnitudes implicadas (en el caso referido, sumar 72 kilómetros varias veces);
- comparación del valor de la suma encontrada con un valor de referencia que hace parte de la información que se da en el problema (en el caso referido, los resultados que se van obteniendo se comparan con el valor 252 kilómetros, dado en el problema);
- detención del procedimiento de adición en el momento en el que la suma encontrada supera por primera vez al valor de referencia (en el caso referido, se deja de sumar cuando la suma da 288);
- cálculo de la diferencia entre la última suma encontrada y el valor de referencia (en el caso referido, se realiza la operación 288 - 252 = 36);
- conteo del número de veces que se realizó la adición y adición reiterada de una constante en la otra magnitud implicada (en el caso referido, según el número de veces que se realizó la suma para los kilómetros, así se hace para el caso de las horas);
- identificación de dos parejas de valores que delimitan el valor que se quiere encontrar (en el caso referido, el valor desconocido se encuentra entre 3 y 4 horas ya que 252 está entre 216 y 288, valores correspondientes a 3 y 4 en la otra magnitud);
- establecimiento de una proporción entre dos razones (en el caso referido, se establece la proporción entre las razones 72 kilómetros es a 60 minutos como 36 kilómetros es a 30 minutos);

- obtención del valor buscado (en el caso referido, sumar media hora a tres horas).

En tercer lugar, y para terminar, queremos hacer un comentario relativo a la forma —que creemos es usual— de abordar la resolución de problemas de proporcionalidad en la escuela, basada en la regla de tres. En primer lugar, tal forma se puede describir así: dado el enunciado de un problema propio del tema proporcionalidad, en un esquema se organizan los datos correspondientes a las variables o magnitudes implicadas, luego se plantea tácita o explícitamente la igualdad de dos razones y finalmente se utiliza el algoritmo de multiplicar en cruz los dos valores conocidos y dividir por el otro valor. Este procedimiento por lo general se presenta como si fuera un dogma. En segundo lugar, a pesar de que los resultados mostraron que los estudiantes producen respuestas que, con bastante frecuencia, se apoyan en el planteamiento de razones o cocientes y, en principio, se podrían aceptar como correctas y coherentes con el uso de la regla de tres, sólo al avanzar en el proceso de análisis de las respuestas nos dimos cuenta de que considerar los hechos que justifican por qué se pueden plantear unas ciertas razones o cocientes y por qué se puede establecer la igualdad entre ellos, es un asunto álgido que amerita un trabajo cuidadoso e intencionado de parte del profesor y de los estudiantes; el resto del procedimiento no reviste tanta complejidad y dificultad para los estudiantes. En otras palabras, lo que queremos destacar es que cuando se procede a resolver un problema de proporcionalidad en el que se requiere determinar una cuarta proporcional, es necesario reconocer inicialmente que las variables están relacionadas a través de una función de proporcionalidad, lo cual justifica que se puedan establecer algunas proporciones, que son precisamente aquellas que se estructuran en la disposición de los datos en configuraciones que para el caso del primer problema propuesto en el estudio, puede tener, por ejemplo, la siguiente forma:

$$\begin{array}{rlrl} 6000 & \text{pesos} & 10 & \text{horas} \\ x & \text{pesos} & 2 & \text{horas} \end{array}$$

Luego de ello, se puede proceder a encontrar la cuarta proporcional relacionando convenientemente los datos a través de multiplicaciones y divisiones. Este asunto, realmente no se contempló en el estudio y probablemente es lo más complejo de tener en cuenta al abordar la solución de este tipo de problemas y por supuesto debería constituirse en indicio para valorar la actividad matemática de los estudiantes.

Margélica Salas
Marjorie Martínez
Luz Gómez
William Vidal
Escuela Normal Superior Miguel Ángel Álvarez de Frontino
Tel.: (094) 8596593
E-mail: fronns01@edatel.net.co

UNA PROPUESTA PARA INICIAR EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA

CONSUELO BAQUERO, NORA BENÍTEZ,
ELIZABETH NARANJO, FANNY RODRÍGUEZ Y
EDUARDO VILLAMIL

Presentamos algunos resultados del desarrollo de una secuencia de talleres con estudiantes de grado octavo, codiseñada e implementada con el fin de iniciar el estudio de la proporcionalidad inversa. Nos propusimos así explorar con los estudiantes el reconocimiento de magnitudes relacionadas inversamente y de su constante de proporcionalidad para poder establecer diferencias entre magnitudes inversas no proporcionales e inversamente proporcionales en situaciones cotidianas. El trabajo con la relación de proporcionalidad directa realizado previamente con los estudiantes, contribuyó a su buen desempeño en la implementación de los talleres.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se describe en este artículo —llevado a cabo por los profesores de matemáticas de la Escuela Normal de Pasca— se generó como parte del “Programa de desarrollo profesional de profesores de matemáticas de Escuelas Normales Superiores”, a cargo de “una empresa docente” de la Universidad de los Andes.

En el primer seminario de este Programa se plantearon una serie de reflexiones acerca de la forma de abordar la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad con estudiantes de educación básica secundaria; como producto de estas reflexiones, de revisar nuestra experiencia y de los resultados de una prueba diagnóstico realizada con algunos alumnos sobre la proporcionalidad directa, nos dimos cuenta de dificultades relevantes en el proceso de aprendizaje de nuestros estudiantes; creemos que éstas se deben en parte a que el estudio de la proporcionalidad se da usualmente como un tema aislado, no se continúa ni conecta con otros temas y no se aplica de forma contextualizada en diferentes áreas y grados. Surgió entonces en nuestro grupo de profesores, una propuesta de indagación en el aula sobre el tema de la proporcionalidad inversa, en la que se pretendía no sólo diseñar actividades para el aula, sino también observar su desarrollo y analizar los resultados. Esta propuesta logró trascendencia a nivel de la institución, dado el trabajo en equipo que se generó en los profesores, las relaciones de colabo-

PERRY, P., GUACANEME, E., ANDRADE, L. Y FERNÁNDEZ, F. (EDS.) (2003). TRANSFORMAR LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA: UN HUESO DURO DE ROER (PP. 222-240). BOGOTÁ: UNA EMPRESA DOCENTE.

ración que se establecieron entre ellos y el interés y motivación que despertó el trabajo en varios de los cursos de estudiantes.

En los seminarios siguientes del Programa pudimos complementar aspectos de la propuesta relativos a la observación y análisis de los resultados, y a la escritura del reporte de la experiencia.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

LA PROBLEMÁTICA ABORDADA

En noviembre de 2001, los profesores elaboramos y aplicamos una prueba de diagnóstico con la intención de detectar el reconocimiento por parte de los estudiantes de relaciones entre magnitudes y de su variación directamente proporcional, mediante la interpretación y manejo de tablas de datos. La prueba fue desarrollada por un grupo de ocho estudiantes de los grados séptimo a décimo, dos por cada nivel. En los resultados de la prueba se observó la dificultad de los estudiantes en primer lugar, para establecer una relación entre las magnitudes implicadas, y por lo tanto para reconocer las características de una relación de proporcionalidad directa en las situaciones planteadas. Por ejemplo, para completar las tablas de datos los estudiantes analizaron por separado las dos magnitudes, intentando relacionar entre sí los valores de una misma magnitud por medio de procedimientos aditivos o de usar la estrategia del cálculo de dobles y mitades para establecer la secuencia dentro de esa magnitud; no aplicaron la propiedad fundamental de las proporciones para calcular los datos desconocidos. Resultados similares han sido analizados por Carretero (1989) al estudiar los diferentes tipos de estructuras multiplicativas implicados en la noción de proporcionalidad. Además, no se evidenció un reconocimiento de la constante de proporcionalidad directa ni del carácter creciente de la relación entre las magnitudes.

Ante esta problemática, y considerando necesario que los estudiantes tuvieran más claridad sobre las relaciones de proporcionalidad directa antes de iniciar el trabajo con la proporcionalidad inversa, se dedicaron algunas de las clases de matemáticas de grado octavo para trabajar la relación de proporcionalidad directa en diversas situaciones con contextos de la vida cotidiana. Se destacaron características de dicha relación como la monotonía de la variación entre los valores de las dos magnitudes, la existencia de una constante de proporcionalidad directa definida como el cociente entre cualquier par de valores correspondientes de las magnitudes, y la representación gráfica de la relación como una serie de puntos colineales o una recta —dependiendo de si la magnitud es discreta o continua— que pasa por el origen. En tales clases, los profesores expusieron la información y los estudiantes trabajaron en algunas situaciones. No se hizo un seguimiento puntual de los logros obtenidos por los estudiantes, pero la percepción general fue que al menos relacionaron las magnitudes, asociaron el nombre de *proporcionalidad directa* con las características establecidas y pudieron ver situaciones de la vida real donde están implicadas estas relaciones.

Para trabajar la proporcionalidad inversa quisimos entonces utilizar otras estrategias metodológicas, donde se propiciaran espacios para que el estudiante explorara las relaciones y descubriera sus características, por ejemplo a partir de nociones geométricas y situaciones propias del entorno. Se pensó en consecuencia favorecer el trabajo con talleres en grupo y permitir la manipulación de material didáctico. En el diseño de los talleres se tuvieron en cuenta las orientaciones expuestas en el documento oficial de lineamientos curriculares (MEN, 1998), en el cual se considera el contexto como uno de los tres aspectos básicos para organizar el currículo de matemáticas. Intentamos entonces relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes para que los ambientes que los rodean le den sentido a las matemáticas que aprenden.

LOS TALLERES PROPUESTOS

Se diseñaron así tres talleres (ver Apéndice) para iniciar el estudio de la proporcionalidad inversa, centrados en el reconocimiento de tres de sus características básicas, que son destacadas por Fiol y Fortuny (1990): la relación de variación inversa entre las magnitudes, la monotonía de dicha variación y la existencia de la constante de proporcionalidad inversa. Cabe anotar que a pesar de que al hablar de la monotonía de la variación entre las magnitudes se abarca tanto las relaciones de proporcionalidad inversa decrecientes como las crecientes, en los talleres solamente se trabajaron relaciones cuya variación es monótona decreciente. El primer taller tiene como intención el reconocimiento de las magnitudes relacionadas y el análisis de su variación desde el punto de vista de la monotonía, mediante el manejo de tablas de datos en tres situaciones de la vida cotidiana. También se propician aquí los primeros pasos para el reconocimiento de la existencia de una constante de proporcionalidad inversa como el producto de cualquier par de valores correspondientes de las magnitudes.

El segundo taller propende por la diferenciación de la relación entre magnitudes inversamente proporcionales y magnitudes inversas (correlacionadas de manera inversa). En este taller se plantean dos situaciones: una relacionada con la construcción de posibles rectángulos de una misma área, con el objeto de determinar la variación del largo y el ancho, e identificar la constante de proporcionalidad inversa; otra, en la que no existe constante de proporcionalidad inversa. Es aquí donde se hace referencia a los nombres convencionales para denominar la relación, *proporcionalidad inversa* y a la *constante de proporcionalidad inversa*, y se presenta una definición para éstas, que se espera que el estudiante asocie con las características encontradas en el trabajo intuitivo que ha hecho. También en este taller se busca que el estudiante represente gráficamente la relación y pueda ver características de la gráfica.

El propósito del tercer taller es la resolución de problemas sencillos de proporcionalidad inversa, para lo cual, los estudiantes deben comenzar por determinar si la relación es de proporcionalidad inversa, luego encontrar la constante de proporcionalidad inversa, y finalmente resolver los problemas mediante el planteamiento de ecuaciones e igualdades a partir de operar con la constante. También en una situación deben formular un problema contextualizado a partir de unos datos dados.

IMPLEMENTACIÓN

Experimentamos la primera versión de los talleres en una prueba piloto con cuatro estudiantes del grado noveno; se detectó así la falta de claridad en la formulación de algunas preguntas y también la poca coherencia de éstas con las intenciones propuestas. Los talleres se modificaron y ya reestructurados se implementaron con todos los estudiantes del grado octavo, en el horario de clase de matemáticas establecido para el curso 803. Su desarrollo tomó tres sesiones de noventa minutos. Los estudiantes se organizaron en parejas; para la observación y análisis de resultados se seleccionaron al azar cuatro parejas del curso.

PAPEL DE LOS PROFESORES

La coordinación de los talleres estuvo a cargo de la profesora titular de la asignatura, quien daba las orientaciones generales y las explicaciones a todo el grupo. Los demás docentes se encargaron de la observación directa del desarrollo del trabajo realizado por las parejas de estudiantes seleccionadas e intervenían solamente para pedir que los estudiantes explicaran respuestas relevantes. En el desarrollo de cada taller se hizo un seguimiento detallado de la forma como los estudiantes daban solución a las situaciones planteadas, mediante un plan de observación establecido.

ACTITUD DE LOS ESTUDIANTES

Al iniciar la primera sesión se notó inseguridad en las cuatro parejas de estudiantes al responder las preguntas del taller, que en parte pudo ser causada por no estar acostumbrados a la presencia de más de un profesor en clase. Al comienzo veían con extrañeza que quien los observaba, estaba todo el tiempo realizando anotaciones; no obstante, con el transcurrir de la actividad se fueron familiarizando con su observador e incluso se dirigían a él para aclarar dudas. En términos generales todos los estudiantes mostraron una actitud positiva durante la aplicación de los talleres, que se manifestó en su disposición a realizar el trabajo y en la persistencia para terminarlo. Sin embargo, hubo diferencias en la forma de trabajo en las cuatro parejas: dos de ellas mostraron facilidad de comunicación, trabajaron concentradamente y ahondaron en el análisis, mientras que en las otras dos, su atención era un poco dispersa y tuvieron dificultad para ponerse de acuerdo e interpretar las preguntas de los talleres.

Al final de la última sesión, se pidió a los estudiantes que evaluaran de manera general la metodología empleada y el trabajo realizado. Hicieron afirmaciones como: “Todos los talleres nos parecieron entretenidos y no nos pareció tan aburrida la clase”, “Nos pareció un poco complicado pero divertido”, “Los talleres nos parecieron motivadores porque implican mucha concentración e imaginación”, “Nos parecieron muy importantes porque aprendimos más que haciendo clase”.

PLAN DE OBSERVACIÓN

De acuerdo con las características definidas como foco de estudio en los talleres y las intenciones de los mismos, se establecieron unos aspectos para tener en cuenta en la observación y como indicios del logro o no de las intenciones establecidas. Así, en las respuestas de los estudiantes se intentó determinar si reconocen las magnitudes implicadas en la situación que se plantea, si establecen una relación entre ellas, si ven la monotonía de la variación entre los valores de las dos magnitudes, si identifican la constante de proporcionalidad inversa; todo esto se miró a través de las estrategias planteadas, las ecuaciones usadas, las representaciones empleadas y su traducción, y la respuesta expresada en términos de la situación en el taller de resolución de problemas.

Estos aspectos dieron origen a unos indicadores de logro con los cuales al terminar cada sesión los profesores analizábamos el resultado de los talleres. Estos indicadores de logro son:

- Reconoce las magnitudes que intervienen en cada situación.
- Determina valores correspondientes de dos magnitudes.
- Identifica la variación inversa entre las dos magnitudes y su monotonía.
- Determina la constante de proporcionalidad inversa entre los valores de dos magnitudes.
- Utiliza la constante de proporcionalidad inversa para formar igualdades entre los valores correspondientes de las magnitudes.
- Identifica la variación inversamente proporcional entre dos magnitudes.
- Plantea y soluciona situaciones que requieren del manejo de proporcionalidad inversa.

ANÁLISIS DE RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

En esta sección destacamos algunas de las soluciones de los estudiantes para cuatro de las situaciones planteadas en los talleres (ver Apéndice), y presentamos el análisis de dichas soluciones con nuestras interpretaciones al respecto.

SITUACIÓN 2 DEL PRIMER TALLER

Todas las parejas de estudiantes identificaron las magnitudes que intervienen en la situación y reconocieron la relación de variación inversa entre el *número de pollos* y el *número de días*, mediante afirmaciones como "al disminuir el número de pollos, la comida alcanza para más días y al aumentar los pollos, la comida alcanza para menos días".

También los estudiantes establecieron con facilidad la correspondencia entre valores numéricos de las magnitudes, utilizando operadores como el doble o la mitad sobre los datos presentados, como cuando expresaron: "si para alimentar 400 pollos la comida alcanza para 25 días, entonces para alimentar 200 pollos que es la mitad, la comida alcanzará para el doble que serán 50 días". De esta manera reconocieron intuitivamente que la relación no sólo variaba inversamente sino que era proporcional, obviamente sin denominarla de tal modo. Sin embargo, se les dificultó encontrar los valores correspondientes a valores particulares de ambas magnitudes que no podían encontrarse con los datos conocidos mediante ese tipo de operadores. Por ejemplo, el número de días para alimentar 20 pollos y el número de pollos que se pueden alimentar en 100 días.

Posteriormente, los estudiantes se dieron cuenta de que al multiplicar los valores correspondientes de las dos magnitudes, incluidos en la tabla, siempre el resultado era el mismo número; esto les permitió entonces hallar los datos restantes de la tabla, planteando en forma verbal una ecuación "¿qué número debemos multiplicar por 20 para que nos dé 10000?". Se evidencia en consecuencia, que interpretaron el producto como una constante que caracteriza esta relación de variación inversa y por lo tanto, que tácitamente trabajaron la relación como de proporcionalidad inversa aunque no la designaran así.

El reconocimiento del producto constante fue la base para determinar otros valores de las magnitudes y la correspondencia entre ellos. Al responder la pregunta, "Si Paco comprara 1000 pollos ¿para cuántos días le duraría la comida?", dos parejas afirmaron "la comida alcanza para 10 días" y las otras dos parejas contestaron que alcanzaba para 40 días; al interrogarlos sobre las razones de su respuesta, los primeros además de explicarla, refutaron las respuestas de los compañeros, diciendo que "1000 multiplicado por 40 no da como resultado 10000, que es lo que tiene que dar; entonces el número de días es 10".

SITUACIÓN 1 DEL SEGUNDO TALLER

Todas las parejas identificaron las dos magnitudes, *largo* y *ancho*, pero solamente dos de ellas reconocieron la relación de variación inversa, mientras que las dos restantes afirmaron: “al aumentar la medida de la longitud de uno de los lados del rectángulo, el otro también aumenta”. Al ser interrogadas por la justificación de esta respuesta dijeron que habían realizado un taller de construcción de rectángulos en el que las medidas aumentaban. Los profesores dedujimos que se trataba de un taller de proporcionalidad directa en el que se relacionaban el lado de un cuadrado con su perímetro. Se les sugirió observar nuevamente sus rectángulos y entonces, dichas parejas de estudiantes establecieron la relación de variación inversa correctamente pues a la pregunta “¿Qué sucede con el ancho del rectángulo si el largo se va haciendo cada vez más pequeño?” dieron respuestas como las siguientes: “El ancho baja y el largo sube”, “El ancho se vuelve más pequeño y el largo aumenta”, “El largo se va alargando”.

Cuando se les preguntó “¿qué sucede con el ancho del rectángulo si el largo se va haciendo cada vez más pequeño?”, las respuestas de todas las parejas fueron “el ancho aumenta”, “va creciendo”, “se agranda”.

Las cuatro parejas lograron establecer valores de las magnitudes y su correspondencia. Al responder la pregunta sobre el ancho de un rectángulo con área de 24 unidades cuadradas y que mida 10 unidades de largo, los estudiantes respondieron planteando ecuaciones verbales y escritas, con base en el conocimiento de que el área del rectángulo es igual al producto del largo por el ancho. Algunos afirmaron “10 por algo es 24”, otros lo expresaron de diferente forma, como “hay que buscar un número que multiplicado por 10 dé 24”. Una pareja planteó la ecuación “$10 \times x = 24$”**.** Se hace patente así que en esta situación también los estudiantes reconocieron el valor dado del área, como el resultado del producto de los valores correspondientes de las dos magnitudes y por consiguiente lo vieron como una constante para la relación inversa, lo que los llevó a trabajar tácitamente esta relación como de proporcionalidad inversa. Como para las definiciones formales que se incluyen en esta situación no se planteó trabajo alguno, sólo a través de las explicaciones que se pidieron a los estudiantes se pudo establecer que no usaron los nombres convencionales para referirse a la relación y a la constante.

En el trabajo con la gráfica cartesiana de esta relación los estudiantes ubicaron en el plano los puntos correspondientes a las longitudes de los lados de los rectángulos construidos. Aunque mediante otras preguntas de esta situación se había intentado que vieran el carácter continuo de la magnitud, para así sustentar la posibilidad de conectar estos puntos con una línea, no podemos afirmar que haya sido la razón que los estudiantes consideraron para trazar la línea. En general, lo hacen porque el modo usual de construir gráficas cartesianas en la escuela, es determinar y ubicar unos puntos y luego conectarlos. Para la pregunta “¿Será posible construir un rectángulo donde uno de sus lados mida cero?", que intentaba abordar el comportamiento de la relación para el valor cero de alguna de las magnitudes, los estudiantes contestaron que no es posible, y lo argumentaron de diversas maneras. Una pareja afirmó "si hay un cero ya no da 24". Al interrogarlos acerca de su respuesta afirmaron que "no se puede formar un rectángulo de área 24 unidades cuadradas porque sólo queda un lado y se convierte en una línea". Los demás estudiantes indicaron que "al multiplicar no da 24, no tiene unidades cuadradas, no hay 24 unidades cuadradas y queda una sola línea". Para estas explicaciones los estudiantes se basaron en su conocimiento de la fórmula del área de un rectángulo y en las construcciones de rectángulos que hicieron en el geoplano; este material didáctico les permitió ver el orden relativo de las longitudes de los lados del rectángulo, lo que ayudó a establecer las características de la relación. Sin embargo, no fue claro que los estudiantes relacionaran el hecho de no poderse construir un rectángulo de área 24 y medida de lado cero, con la gráfica cartesiana realizada.

SITUACIÓN 2 DEL SEGUNDO TALLER

Esta situación involucra magnitudes inversas, pero no inversamente proporcionales. En este caso, los estudiantes después de reconocer las dos magnitudes y detectar que hay una relación de variación inversa entre ellas, lograron identificar que esta relación a pesar de variar inversamente se diferencia de la relación entre el largo y el ancho de los rectángulos, estudiada anteriormente. Es decir ven que la relación no es de proporcionalidad, pero tampoco aquí utilizan expresamente estas palabras. Este reconocimiento se evidencia cuando al calcular el producto de los valores correspondientes a las dos magnitudes, los estudiantes dieron una respuesta negativa a las siguientes preguntas: "¿El resultado de multiplicar los años de uso del carro por su precio es constante en todos los casos?", "¿Encuentra en esta situación una constante de proporcionalidad inversa como en la construcción de rectángulos?". Como argumentos, describieron de distintas maneras que las magnitudes que intervenían eran inversas pero que "no se encuentra una constante de proporcionalidad inversa como en la situación de la construcción de rectángulos" pues explicaron que "no da el mismo resultado", "todos los productos no son iguales", "los resultados de las multiplicaciones no son iguales", "sólo hay dos productos iguales por lo tanto no existe constante". Los estudiantes percibieron así que una diferencia de la relación entre magnitudes inversas no proporcionales y las magnitudes inversamente proporcionales radica en que para esta última relación el producto de cualquier par de valores correspondientes de las magnitudes, es constante. Hallaron otra diferencia entre esos dos tipos de relaciones, en la forma de sus gráficas cartesianas, al comparar la gráfica de esta situación con la elaborada en la situación relativa a la construcción de rectángulos. Al ubicar los datos de la magnitud "años de uso de los autos" y de la magnitud "precio" en el plano cartesiano, los unieron también sin que fuera evidente que tienen en cuenta si la magnitud es discreta o continua; reconocieron que la línea recta obtenida así, es distinta de la línea curva que representa la relación entre el largo y el ancho de rectángulos de área igual a 24 unidades cuadradas. Unos estudiantes mencionan que "la gráfica de la relación de esta situación en línea recta no se parece a las rectas que representan las relaciones de proporcionalidad directa", pero no indican por qué.

SITUACIÓN 1 DEL TERCER TALLER: LA EXCURSIÓN

Los estudiantes relacionaron fácilmente las magnitudes involucradas en esta situación y detectaron la variación inversa entre ellas; obtuvieron la constante de proporcionalidad inversa calculando el producto de los valores correspondientes entre las dos magnitudes; las explicaciones de dos parejas acerca del significado de esta constante fueron que la distancia recorrida por los buses corresponde a 120 kilómetros y se obtiene "multiplicando velocidad por el tiempo, siempre da 120 kilómetros", "el resultado de todas las operaciones es 120".

Finalmente pudo observarse que la mayoría de las parejas utilizaron la constante de proporcionalidad inversa para calcular los datos restantes de la tabla y otros datos, por ejemplo, mediante el planteamiento y solución de ecuaciones de la forma: $(6\,\text{h})\,x = (60\,\text{km})\,(2\,\text{h})$, tal y como se sugería en el taller. La pregunta del problema, planteada en el literal 8 de esta situación, (ver Apéndice) también fue respondida por medio de la solución de ecuaciones de este tipo que involucran la constante de proporcionalidad.

CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados del desarrollo de los talleres permiten concluir que en general los estudiantes fueron capaces de identificar las magnitudes que intervienen en las situaciones; así mismo, reconocieron que la variación que se presenta entre ellas es inversa. Aunque casi todos los estudiantes reconocieron el producto de valores correspondientes entre las magnitudes como constante en varias de las relaciones, y casi siempre calcularon este producto adecuadamente, la aproximación que se observó a la constante de proporcionalidad fue intuitiva y particular a cada relación. Los estudiantes no expusieron razones que explicaran sus implicaciones. No obstante que en el primer taller hay una pregunta que intenta que los estudiantes vean características comunes de las relaciones, se ha debido promover un trabajo más específico que les permitiera hacer un proceso de generalización y dar un significado más amplio a la constante y a la relación de proporcionalidad inversa.

Los estudiantes establecieron además que una semejanza de la relación entre magnitudes inversas no proporcionales y entre magnitudes inversamente proporcionales es que ambas varían de manera inversa; al darse cuenta de que en la relación entre magnitudes inversas el producto entre los valores correspondientes no es constante identificaron una diferencia entre tales relaciones. Adicionalmente, por la forma de la línea determinaron que las gráficas que representan las relaciones son disímiles, pues vieron que en las primeras, la gráfica usualmente es una línea recta que no pasa por el origen mientras que en las segundas, la gráfica es una línea curva. No hicieron análisis de otros aspectos de la variación de estas magnitudes que permitiera ir más allá de estas descripciones. Las preguntas de los talleres al respecto son bastante generales y no necesariamente se propicia el que vean otras características de las gráficas. Tampoco con respecto a esto, en los talleres se favorece llevar a cabo un proceso de generalización que permita asociar un tipo de gráfica con estas relaciones.

No obstante que en el tercer taller (ver Apéndice) se plantean problemas sencillos de proporcionalidad, tanto inversa como directa, que los estudiantes lograron solucionar a través de un manejo adecuado de la constante de proporcionalidad en igualdades y ecuaciones formuladas para valores correspondientes de las magnitudes, consideramos que el trabajo en torno a la resolución de problemas en el desarrollo de los talleres no fue muy profundo. Por un lado, las preguntas formuladas para guiar la resolución del problema no permitieron ver si el estudiante hizo realmente un análisis de la situación y de la relación implicada en ella, y cuál fue dicho análisis; por otro lado, el estudiante tampoco tuvo elección sobre la estrategia a seguir para solucionar el problema, ya que se pedía el planteamiento de la ecuación y no se propició que el estudiante llegara a formular por su cuenta problemas de proporcionalidad. Plantear la ecuación de manera escrita en lenguaje algebraico causó dificultades en algunos estudiantes y se evidenció que a partir de la información de las tablas de datos, les resulta más fácil hacerlo en forma verbal.

Dadas las dificultades detectadas en estudiantes con quienes anteriormente hemos abordado la proporcionalidad, consideramos que la selección de contextos de la vida real para las situaciones de los talleres, que les fueran familiares y en concordancia con las condiciones económicas del medio al cual pertenecen, fue un elemento que aportó no sólo a la motivación de los estudiantes y a la adecuada interpretación de los enunciados, sino también a la comprensión misma del tema matemático tratado. Además, la forma de los talleres permitió a los estudiantes desarrollar de manera autónoma las actividades planteadas. A través de las preguntas que llevaban a los estudiantes a darse cuenta de si su interpretación y análisis de la situación eran adecuados o a modificarlos en caso contrario, se promovió la comprensión de lectura de enunciados; el uso de materiales como los mismos talleres, el geoplano, las hojas milimetradas y la calculadora, facilitaron el trabajo. La comunicación requerida para el trabajo en parejas, les permitió a los estudiantes adquirir confianza para expresar sus ideas oralmente y confrontar sus resultados con los de sus compañeros.

El diseño de los talleres fue una actividad que demandó gran esfuerzo y dedicación de parte de los profesores. La propuesta inicial de los talleres estuvo sometida permanentemente a modificaciones, en especial porque algunas actividades o preguntas no respondían a las intenciones planteadas. Aun así, luego de la implementación percibimos que algunas preguntas no eran pertinentes pues dieron la posibilidad de que el estudiante las interpretara de manera que sus respuestas no apuntaban al tema de estudio. En general, consideramos que los talleres propuestos no son suficientes para abordar en su totalidad la exploración de la proporcionalidad inversa. Para una futura implementación de los talleres nos parece conveniente impulsar procesos de generalización para identificar y comprender características de las relaciones de proporcionalidad y enfatizar en la representación gráfica de las magnitudes relacionadas para inducir a complementar el tipo de variación correspondiente.

La experiencia que vivimos al participar en el Programa creó un clima favorable para fortalecer el trabajo en equipo: pudimos compartir y ahondar en diversas actividades que usualmente se hacen de manera individual o no se hacen, como son el diseño, la observación del trabajo de los estudiantes y el análisis del mismo. Además nos condujo a reflexionar acerca de la importancia que merece la planeación consciente, responsable y crítica de nuestra labor con los estudiantes. Por sencillo que nos parezca un tema debemos pensar en sus implicaciones didácticas y metodológicas y principalmente en las repercusiones para la vida del estudiante.

REFERENCIAS

MEN (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Carretero, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad, según diferentes tipos de estructuras multiplicativas, por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología, 42*. París: Laboratorio de Psicología.

Consuelo Baquero
Nora Benítez
Elizabeth Naranjo
Fanny Rodríguez
Eduardo Villamil
Escuela Normal Superior de Pasca
Tel.: 091- 8688004
E-mail: consubav@yahoo.com

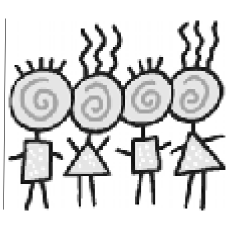
APÉNDICE

PRIMER TALLER

Intencionalidad. Que el estudiante explore la noción de proporcionalidad inversa a través de la interpretación de situaciones de la vida cotidiana, mediante la obtención de datos, su tabulación y análisis.

Forma de trabajo. En grupos de dos personas, analicen y discutan las siguientes situaciones.

Situación 1. De compras en la papelería



Consuelo, Elizabeth, Eduardo, Raúl, Fanny y Nora tienen cada uno $20000. Han decidido comprar, cada uno, distinto número de esferos de un mismo precio, sin que les sobre o falte dinero.

Precio de los esferos

Corrientes:

$400, $450, $500, $600, $700, $800, $1000, $1500, $2000

Finos:

$3500, $5000, $8500, $20000

Registren las posibles compras en la tabla siguiente:

	Consuelo	Elizabeth	Eduardo	Fanny	Nora	Raúl
Número de esferos						
Precio de cada esfero						

1) Según el listado de precios:
   a. ¿Cuál es el mayor número de esferos que se puede comprar con $20000?
   b. ¿Cuál es el mínimo número de esferos que se puede comprar con los $20000?

2) Si cada esfero vale \$1250, ¿cuántos esferos se pueden comprar con los \$20000?
3) Si alguno de los compradores decidiera llevar 40 esferos del mismo precio, ¿cuánto tendría que pagar por cada uno?
4) Cuando el precio del esfero es menor, ¿qué pasa con el número de esferos que puede comprar?
5) ¿Qué resultado obtienen cuando multiplican el número de esferos que compra cada persona por el precio que tiene que pagar por cada uno?
6) En esta situación de la compra de esferos, ¿qué magnitudes o variables se relacionan?

Situación 2. La granja de Paco

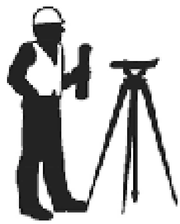
Paco está pensando en colocar un criadero de pollos en su granja. Él estuvo averiguando, con los encargados de otras granjas, el tiempo que dura el alimento dependiendo del número de pollos que se crían; halló la información que aparece en la tabla siguiente. Paco pensó en completar la tabla con los siguientes interrogantes: -Si criara 200 pollos, ¿para cuántos días alcanzaría la comida?, y, ¿si criara 20? Si comprara comida para 100 días, ¿cuántos pollos podría criar?

Analicen la tabla y den respuesta a los interrogantes de Paco.

Número de pollos	500	400	250	200	20	?
Días	20	25	40	?	?	100

1) Cuando disminuye el número de pollos, ¿la comida alcanza para más días o para menos días?
2) Si comprara más pollos, ¿la comida le alcanzaría para más o para menos días?
3) En esta situación “La granja de Paco”, ¿cuáles son las magnitudes que se relacionan?
4) ¿Si se multiplica el número de pollos por el número de días que dura la comida, ¿qué valor se obtiene?
5) Si Paco comprara 1000 pollos, ¿para cuántos días le duraría la comida?
6) ¿Cuántos pollos podría alimentar Paco en 50 días?

Situación 3. Una obra en construcción



La siguiente tabla relaciona el número de obreros con el número de días que gastan para realizar una obra.

Número de obreros	**Número de días**
120	2
80	3
30	8
15	16
10	24

Analicen la tabla anterior y de acuerdo con ella, contesten:

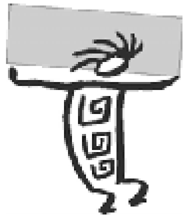
1) Si trabajaran 100 obreros, ¿cuántos días gastarían en realizar la obra?
2) ¿Cuántos obreros se necesitan para realizar la obra en 48 días, trabajando en las mismas condiciones?
3) Digan si la siguiente afirmación es cierta: “Para construir una obra, a mayor número de obreros, se gasta menos tiempo”. ¿Por qué?
4) En esta situación “Una obra en construcción”, ¿cuáles son las magnitudes o variables que se relacionan?
5) ¿Qué valor obtienen al multiplicar el número de obreros por el número de días?
6) Revisando las tres situaciones descritas, ¿en qué se parecen las variaciones de las magnitudes?

SEGUNDO TALLER

Intencionalidad. Que el estudiante establezca diferencias y semejanzas entre magnitudes inversas y magnitudes inversamente proporcionales, mediante la obtención de datos, su tabulación y análisis.

Forma de trabajo. Trabajando en parejas, en un tiempo máximo de 90 minutos, realicen las actividades siguientes.

Situación 1. Construyamos rectángulos



a. En el geoplano, construyan el mayor número posible de rectángulos de 24 unidades cuadradas de área.

b. Dibujen en sus hojas de trabajo todos los rectángulos que lograron construir, colocando las medidas correspondientes al largo y al ancho de cada rectángulo.

c. Comparen el número de rectángulos obtenidos con otros grupos de trabajo y completen la tabla.

Largo (l)						
Ancho (a)						
Área						

Analicen los datos que registraron en la tabla y contesten las preguntas siguientes:

1) ¿Cuáles magnitudes o variables se relacionan en la construcción de rectángulos?

2) Si aumenta la medida de la longitud de uno de los lados del rectángulo, ¿qué sucede con la medida de la longitud del otro lado?

3) Si el largo de un rectángulo mide 8 cm y el ancho mide 3 cm, para construir otro rectángulo de igual área, que mida 10 cm de largo, ¿cuánto debe medir su ancho? Y, si el largo midiera 2.4 cm, ¿cuál sería la medida del ancho?

4) Con las medidas de largo y ancho de cada rectángulo que aparecen en la tabla anterior, calculen el área y completen la tabla. ¿Cómo son estas áreas: constantes o variables?

5) Construyan un plano cartesiano en una hoja de papel milimetrado, y ubiquen las medidas de los rectángulos que aparecen en la tabla así: el largo, en el eje $\boldsymbol{x}$ y el ancho, en el eje $\boldsymbol{y}$.

6) Observen que la pareja (1, 24) determina un rectángulo de 1 unidad de largo y 24 unidades de ancho. ¿Cuál es su área? Coloreen su superficie en el plano cartesiano. ¿Qué significa la pareja (2, 12)? Coloreen el rectángulo que determina la pareja (2, 12). Repitan el proceso anterior con los demás rectángulos en el plano cartesiano.

7) A partir de la gráfica anterior expliquen qué sucede con el largo del rectángulo si el ancho se vuelve muy pequeño.

8) ¿Qué sucede con el ancho del rectángulo si el largo se va haciendo cada vez más pequeño?

9) ¿Será posible construir un rectángulo donde uno de sus lados mida cero? ¿Por qué?

Cuando el producto de los valores correspondientes a dos magnitudes *A* y *B* es constante, dichas magnitudes son **inversamente proporcionales**. La constante se denomina **constante de proporcionalidad inversa**.

Situación 2. Comprando autos

Se realizó un estudio sobre el costo de autos nuevos y usados y se registraron los siguientes datos:

Años de uso	0	2	4	6	8	10
Precio en millones de pesos	30	25	20	15	10	5
Años de uso por precio						

Teniendo en cuenta la información de la tabla contesten las preguntas siguientes:

1) ¿Cuáles magnitudes intervienen en esta situación?

2) ¿Cuál es el costo de un auto nuevo?

3) ¿Cuánto vale el auto más viejo?

4) ¿Qué sucede con el precio a medida que un auto es más antiguo?

5) Si alguien desea un auto más barato, ¿debe comprar un auto más nuevo o uno más antiguo? Expliquen.

6) Multipliquen los años de uso del carro por su precio. Coloquen los resultados en la tabla. ¿El resultado es constante en todos los casos? ¿Encuentran en este caso una constante de proporcionalidad inversa como en la situación de construcción de rectángulos? Expliquen.

7) Construyan un plano cartesiano, en una hoja de papel milimetrado, y ubiquen los datos que aparecen en la tabla así: los años de uso, en el eje ***x*** y el precio, en el eje ***y***.

8) ¿Los resultados obtenidos en esta gráfica son similares a los obtenidos en la construcción de rectángulos? ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

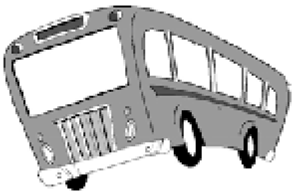
> Dos magnitudes *A* y *B* son inversas y no proporcionales cuando al aumentar una, la otra disminuye, o, lo contrario, y el producto de valores correspondientes de las dos magnitudes no es constante.

TERCER TALLER. RESOLVAMOS PROBLEMAS

Intencionalidad. Que los estudiantes resuelvan problemas de proporcionalidad inversa mediante el manejo de ecuaciones a partir de la constante de proporcionalidad inversa.

Forma de trabajar. Por parejas discutan en un tiempo de 90 minutos las siguientes situaciones.

Situación 1. La excursión



En una excursión, 5 buses deben recorrer 120 km, cada uno. Todos llevan una velocidad promedio diferente.

Buses	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Velocidad promedio (km / h)	120	60	40		75
Tiempo (horas)	1	2		6	

Con ayuda de las siguientes preguntas, completen la tabla anterior.

1) ¿Cuáles magnitudes intervienen en esta situación?
2) ¿Para que el bus gaste menos tiempo en su recorrido, ¿cómo debe ser la velocidad promedio?
3) Si un bus viaja a una velocidad mayor, ¿el tiempo debe aumentar o disminuir?
4) ¿Cómo varían las dos magnitudes que intervienen en esta situación?
5) Calculen la constante de proporcionalidad inversa en este caso y expliquen qué significa dicha constante en este caso.

> Sabemos que la constante de proporcionalidad inversa en este caso es 120 kms y se obtiene así:
> 120 km = (120 km/h)(1 h)
> 120 km = (60 km/h)(2h)

6) Obtengan la constante de proporcionalidad inversa, utilizando los otros datos de la tabla.
   120 km =
   120 km =

> Podemos formar igualdades y ecuaciones como las siguientes:
> (120 km/h)(1h) = (60 km/h)(2h)
> (120 km/h)(1h) = (40 km/h)x

7) Encuentren el valor que le corresponde a x en la anterior ecuación.

> Otra ecuación que resulta según los datos de la tabla es:
> (6h)x = (60 km/h)(2h).

8) ¿Cuánto tiempo emplea el bus E para recorrer los 120 km? Resuélvanlo planteando la ecuación.

Resuelvan los problemas siguientes

1) Ocho personas pintaron una pared en 6 días. ¿Cuántos días emplearán si sólo trabajan 3 personas? Ubiquen los datos en la tabla siguiente:

Número de obreros		
Número de días		

   a. ¿Cuáles magnitudes intervienen en esta situación?
   b. ¿Tales magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales?
   c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   d. ¿Cuál es la ecuación?
   e. ¿Cuántos días emplearán las tres personas en construir la pared?

2) El consumo de gasolina de un automóvil es de 12 litros por cada 100 kilómetros recorridos. ¿Cuántos litros gasta para recorrer 600 kilómetros? Ubique los datos en la tabla siguiente.

Kilómetros		
Litros de gasolina		

   a. ¿Cuáles magnitudes intervienen en esta situación?
   b. ¿Tales magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales?
   c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   d. ¿Cuál es la ecuación?
   e. ¿Cuántos litros de gasolina gasta el automóvil para recorrer 600 kilómetros?

3) Analicen la información que aparece en la tabla siguiente y contesten las preguntas que se les formulan a continuación.

A	8	16	4
B	24	12	

a. ¿Cuáles magnitudes intervienen en esta situación?

b. ¿Tales magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales?

c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

d. ¿Cuál es la ecuación?

e. Si el valor de A es 4, ¿cuál será el valor de B?

f. Planteen una situación que esté relacionada con la información anterior.

4) Un cuadrado que mide de lado 5 cm, tiene un perímetro de 20 cm. ¿Cuánto mide de lado otro cuadrado cuyo perímetro es 72 cm?