PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE

Editores

PEDRO GÓMEZ

BERT WAITS

una empresa docente® **Universidad de los Andes**

Bogotá, 2000

PRIMERA EDICIÓN: FEBRERO DE 2000

PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE
EDITORES: PEDRO GÓMEZ Y BERT WAITS

Diseño carátula: INTERLÍNEA EDITORES LTDA.

una empresa docente®
Universidad de los Andes
Cra. 1 Este # 18 A - 70
Apartado Aéreo 4976 Tel.: (57-1) 339-4949 ext. 2717
Fax: 339-4949 ext. 2709
Servidor WWW: http: //ued. uniandes.edu.co
Bogotá. Colombia

Primera edición: febrero de 2000

Impresión: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A.

ISBN 958-9216-25-0

Impreso en Colombia

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática tuvo lugar en Sevilla, España en julio de 1996. El grupo temático 18, *Papel de las calculadoras en el salón de clase*, centró su trabajo en las calculadoras gráficas, los nuevos computadores portátiles y su papel en la educación matemática. Su público objetivo eran profesores de secundaria con poca experiencia con calculadoras.
Los objetivos de este grupo temático eran:

- Informar, desarrollar y apoyar la reflexión y la discusión sobre el papel que las calculadoras han jugado y pueden jugar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de secundaria.
- Mostrar por qué y cómo los profesores pueden tener interés en que sus estudiantes usen la tecnología portátil.
- Presentar el "estado del arte" sobre calculadoras y computadores portátiles y su papel en la educación matemática.

El grupo temático realizó dos reuniones de una hora y media cada una. Cada una de las sesiones estuvo compuesta de tres actividades.

Presentaciones plenarias. Se hicieron dos conferencias plenarias (de veinte minutos cada una) en cada sesión. Estas conferencias fueron hechas por investigadores invitados. Ellos presentaron sus opiniones sobre la relación entre las calculadoras gráficas y los objetivos, el contenido, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Presentaciones cortas. Se presentaron diversos proyectos y experiencias en charlas de cinco minutos cada una.

Preguntas. Se utilizaron los últimos veinte minutos de cada sesión para discusiones y preguntas.

La reunión atrajo gran cantidad de público y fue muy variada en los temas que se discutieron. Este libro presenta las versiones extendidas de las presentaciones realizadas durante las reuniones.

Las reuniones fueron coordinadas por Pedro Gómez y Bert Waits. Juan Manuel García y Néstor Aguilera colaboraron con la organización local. Queremos agradecer a Patrick (Rick) Scott, quien tradujo al español dos de los capítulos del libro.

Pedro Gómez
Bert Waits
Editores

CAPÍTULO 1

DESCUBRIR LAS MATEMÁTICAS AVANZADAS A TRAVÉS DE ACTIVIDADES CON CALCULADORAS

JOHN BERRY Y BOB FRANCIS

"Descubrir las matemáticas avanzadas" es el resultado de dos años de desarrollo de una serie de textos para respaldar el aprendizaje de matemáticas durante los últimos años de secundaria en el Reino Unido. Durante la etapa de desarrollo del proyecto, se elaboró una serie de actividades con calculadoras gráficas con el objeto de introducir varios temas en el currículo. Una vez que se ha adquirido confianza en el manejo de la calculadora gráfica para introducir un tema, se estimula a los estudiantes a que hagan uso de la tecnología apropiada en el proceso de resolución de problemas. Este trabajo describe nuestra experiencia con el uso de las calculadoras en el desarrollo de conceptos matemáticos y en el proceso de resolución de problemas.

EL PAPEL DE LA CALCULADORA

El potencial del uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es enorme. Desde las simples calculadoras programables pasando por las calculadoras gráficas para llegar a la última Texas TI-92 con álgebra simbólica, la integración de la tecnología en los cursos de matemáticas puede ofrecer beneficios considerables.

Uno de los beneficios de los "métodos de enseñanza modernos" es el mejoramiento de las habilidades de investigación de los estudiantes, a quienes se anima a descubrir por sí mismos las reglas matemáticas. Es esta habilidad la que debemos aprender a explotar por medio de la tecnología. Nos gustaría demostrar algunas formas de abordar las matemáticas avanzadas desde un enfoque investigativo que empleamos con grupos de estudiantes de una universidad local. Se han realizado muchos estudios sobre el uso de las calculadoras gráficas y los sistemas de álgebra por computador en la enseñanza y el aprendizaje (ver por ejemplo Mayes, 1994; Jaworski, 1993). Estos estudios emplean a menudo hojas de cálculo o experimentos de laboratorio como tareas adicionales a la enseñanza tradicional. Por ejemplo, Watkins, en su investigación con estudiantes de ingeniería de primer año, utilizó DERIVE para introducir varios temas de cálculo a la vez que empleaba un texto tradicional (sin un enfoque tecnológico) y actividades con DERIVE. Watkins descubrió un mejoramiento en la comprensión y habilidades básicas a través de estas actividades.

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 3-14

El papel de la tecnología de las calculadoras está cambiando. Hace unos pocos años habríamos usado una calculadora gráfica para manipular números y calcular valores para expresiones. La calculadora programable permitió a los estudiantes la escritura de programas simples para realizar algoritmos; y aún más, recientemente la calculadora gráfica ha cambiado nuestra visión de la enseñanza de las matemáticas. La nueva serie de calculadoras que incluyen sistemas algebraicos, tal como la Texas TI-96, ha creado una ola de preocupación entre los examinadores del Reino Unido. Ahora tenemos una "calculadora" "casi" de bolsillo con la cual los estudiantes pueden responder la mayor parte de una evaluación sin tener que demostrar su propia comprensión. Tal tecnología puede revolucionar la manera en que los estudiantes "ven" y "sienten" las matemáticas.

El uso de la calculadora en clase puede cumplir con dos papeles.

La calculadora como una herramienta para realizar y visualizar matemáticas

- Evalúe $v(t) = \ln\left(m_0 + gt^2\right) + gt$ dados los valores de m_0, g y t (una calculadora científica).
- Trace un gráfico de $y = x^3 - 2x^2 + 1$ (una calculadora gráfica).
- Encuentre la integral de $\dfrac{1}{1+x^4}$ (una calculadora de álgebra simbólica).

La calculadora como herramienta para presentar temas matemáticos nuevos a los estudiantes

La figura 1 muestra el resultado en una TI-92 cuando sen $(2x)$, sen $(4x)$ y sen $(x^3 + x)$ son diferenciados

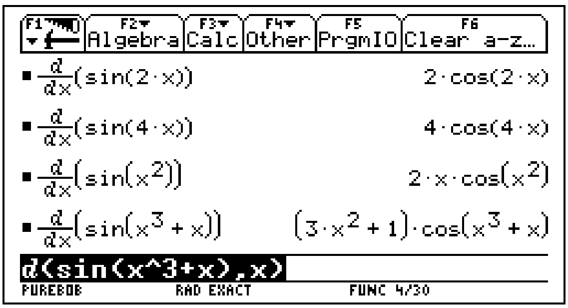


Figura 1. Investigación de la regla de la cadena para la diferenciación

El guiar a los estudiantes a través de una selección cuidadosa de tales ejercicios, rápidamente los lleva a darse cuenta de que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(u(x)) = \cos(u(x))\frac{du}{dx}\,.$$

En última instancia, es la habilidad en el primero de estos papeles (una herramienta para realizar matemáticas) lo que es realmente importante para el matemático, el científico y el ingeniero. Tal vez el segundo papel haga el aprendizaje de las matemáticas más interesante, pero su objetivo principal puede ser más importante para ayudar a los estudiantes a aprender cómo usar su calculadora a manera de herramienta.

El currículo del Reino Unido ha experimentado cambios significativos durante los últimos años. En 1988 se introdujo en las escuelas un nuevo currículo para niños de 5 a 16 años. Para las matemáticas esto ha significado un mayor énfasis en la resolución de problemas, investigaciones, trabajo con números y la transmisión de habilidades de manipulación algebraica. Para cerrar la brecha abierta a los 16 años, se introdujeron nuevos cursos en los últimos años de secundaria en 1994. Estos cursos llevaron a la creación del "Certificado General de Educación, Nivel Avanzado".

La implantación de estos currículos especiales para edades de 16 años en adelante no está prescrita por ley como sí lo está el Currículo Nacional. Los estudiantes escogen dos o tres materias y por ende, la especialización empieza a los 16 años. Hay un currículo común de fondo en el cual todas las Juntas de Evaluación basan sus currículos. Esta parte central constituye hasta cincuenta por ciento de un premio de Nivel Avanzado. Hay bastante que escoger en lo que queda restante.

Existen dos componentes del currículo básico que están causando una gran preocupación entre profesores y examinadores:

- la habilidad para reconocer situaciones de la vida real que puedan ser modeladas matemáticamente y un conocimiento de los procedimientos apropiados para resolver tales problemas;
- la habilidad para reconocer la manera de usar la tecnología apropiada, como computadores y calculadoras, como una herramienta matemática y tener conciencia de sus limitaciones.

Al desarrollar recursos, uno de nuestros objetivos es mitigar estas preocupaciones.

Existe preocupación por los estudiantes que progresan hacia la educación superior. En el Reino Unido muchas universidades están introduciendo reglamentaciones que prohiben el uso de calculadoras gráficas y calculadoras con un teclado QWERTY. Esto conducirá a una situación irregular. Los estudiantes habrán sido introducidos al uso de calculadoras de tecnología avanzada en la escuela, estarán familiarizados con su uso durante los cursos universitarios, pero no se les permitirá utilizar esta tecnología en la fase de evaluación. Parece que por algunos años tendremos que asegurar que nuestros estudiantes sean aún capaces de realizar manipulaciones con el "método tradicional" para que no se encuentren en desventaja al dar un paso adelante y usar las matemáticas en el siguiente nivel.

Ahora demostraremos cuatro ejemplos del uso de actividades con calculadoras en nuestro proyecto "Descubrir las matemáticas avanzadas".

UNA INVESTIGACIÓN NUMÉRICA

Comenzamos con la siguiente actividad con calculadora para explorar la fórmula iterativa Newton-Raphson.

- Use el diagrama para escribir un programa para la iteración Newton-Raphson y utilícelo para encontrar tres raíces de la ecuación $x^3 - 7x + 3 = 0$.
- ¿La iteración produce siempre una secuencia convergente, sin importar el valor de x_0 que se escoja?
- ¿En qué rangos debe encontrarse la aproximación inicial para que converja en:

  a. la raíz más baja,

  b. la raíz media,

  c. la raíz más elevada?

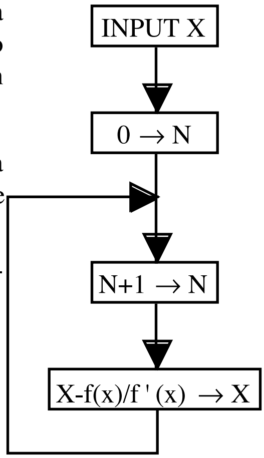


Figura 2. Exploración de la fórmula Newton-Raphson

Los estudiantes pueden descubrir por sí mismos que la fórmula de iteración convergirá para una función continua, $f(x)$, para cualquier aproximación inicial x_0 (dado $f'(x_0) \neq 0$), pero el predecir qué raíz se encontrará desde un punto de partida particular puede ser difícil. Es importante que los estudiantes vean estos puntos por ellos mismos. Una calculadora gráfica permite la investigación rápida de más funciones.

UNA INVESTIGACIÓN DE GRÁFICOS

La actividad en la figura 3 muestra la introducción de las propiedades de gráficos de línea recta. La característica trascendental de las exploraciones

> Necesitará una calculadora gráfica y un graficador. Establezca los límites de x y y para que el origen quede en el centro de la pantalla y los dos ejes tengan la misma escala.
>
> Corrobore la disposición de los datos: el gráfico de $y = x$ debe formar un ángulo de 45° con los ejes x y y.
>
> - Trace gráficos de $y = x + c$ escogiendo diferentes valores para c *(-5, -2, 0, 1, 3, etc.).*
> - Trace gráficos de $y = mx$ escogiendo diferentes valores para m *(-2, -1, 0.5, 0, 0.5, 1, 2, etc.).*
> - Para la línea recta $y = mx + c$, describa el efecto de:
>
>   a. variar c mientras se conserva m fija
>
>   b. variar m mientras se conserva c fija
>
>   c. variar m y c

Figura 3. Exploración de las propiedades de un gráfico

de este tipo es que permite a los estudiantes responder a una pregunta fundamental en el aprendizaje de las matemáticas

¿Qué pasa si?

INTRODUCCIÓN DE LA INTEGRACIÓN

A menudo la integración se introduce sólo como el proceso inverso de la diferenciación. Esto, por supuesto, lleva a las reglas algorítmicas de la integración, pero deja a un lado el concepto clave de integración como límite de una adición. Es fácil comprender por qué ha surgido esta visión. Sin la ayuda de la tecnología, la evaluación de una adición infinita no es fácil.

Pero ahora podemos abordar el tema de la integración partiendo de una suma y mostrar que las reglas son, de hecho, el proceso inverso. Una de las aplicaciones más útiles de la integración es el límite de una suma y esta aproximación al concepto casi siempre empieza con un cálculo del área bajo el gráfico mediante el uso de franjas rectangulares delgadas. La figura 4 muestra un diagrama típico de esta actividad en los textos.

Un procedimiento ampliamente utilizado lleva a la expresión

$$AREA = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(ih)\, h \right) \; cuando \; h = \frac{x}{n}$$

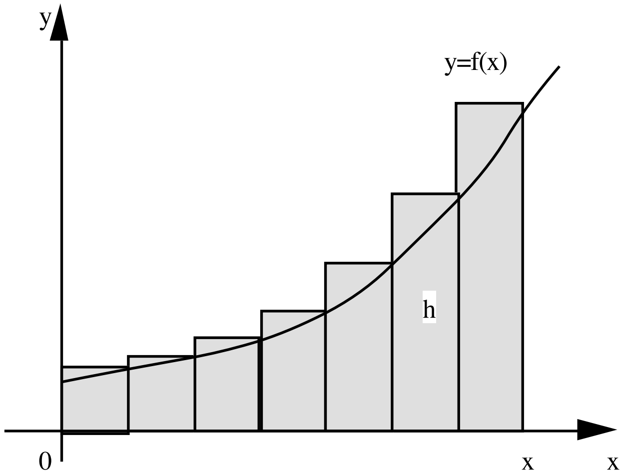


Figura 4. Aproximación del área bajo un gráfico

Sin tecnología es difícil demostrar la conexión entre esta fórmula algebraica y las reglas algebraicas que establecen que la integración es el proceso inverso de la diferenciación. Ahora con la TI-92 podemos crear una conexión al investigar esta adición para funciones diferentes *f*(*x*). Las pantallas en la figura 5 muestran los resultados de dos exploraciones.

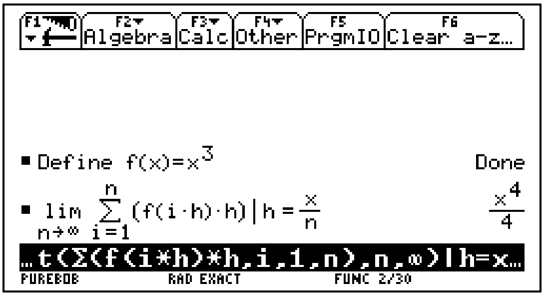


Figura 5. Resolución de problemas en matemáticas

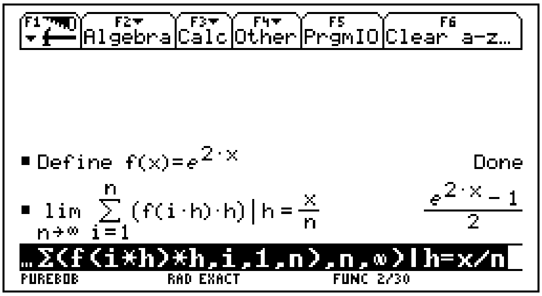


Figura 5. Resolución de problemas en matemáticas

¿Puede esto llevar a una reorganización del cálculo en donde la integración se dé antes que la diferenciación? Una ventaja sería la desconexión de la diferenciación y la integración en la mente de los estudiantes de manera que las consideren como conceptos distintos, separados.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Una parte importante del currículo escolar de matemáticas básico es el desarrollo de la habilidad para aplicar y usar las matemáticas. Esto, que suele denominarse modelaje matemático, se encuentra resumido en la figura 6.

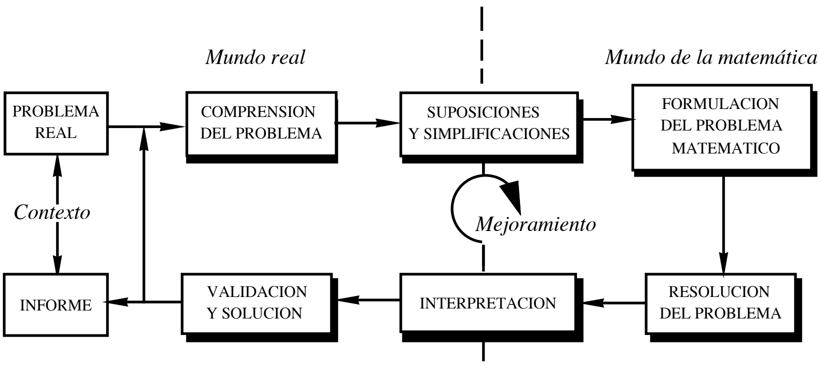


Figura 6. Modelaje matemático o proceso de resolución de problemas

La experiencia sugiere que el desarrollo y evaluación de estas habilidades, especialmente la formulación del modelo, no es fácil. Es importante para los estudiantes ver cómo trabajan los modelos y después formular modelos para ellos mismos. Es a través de la tecnología que nos podemos empezar a concentrar en las etapas de formulación y validación del proceso de resolución de problemas. Pero hay más valor en la utilización de la tecnología para explorar los modelos algebraicos.

Considere el siguiente problema sobre tráfico (The MEW Group, 1995).

Las colas en el tráfico de las autopistas se ocasionan, a menudo, cuando tres carriles del tráfico se ven forzados a reducirse a dos carriles, o a un carril debido a reparaciones en la calzada. Esto representa una gran molestia para los automovilistas y con frecuencia alarga el viaje por horas.
Considere el problema de reducir dos carriles de tráfico a uno. ¿Qué velocidad de tráfico logra el mayor flujo de vehículos por la autopista?

No daremos la solución exacta, pero los pasos a seguir se encuentran esquematizados a continuación.

El objetivo es maximizar el número de vehículos que pasan por la sección de la autopista por hora; este es el promedio de flujo que designamos con *F*. Suponga que los vehículos entran en la sección separados por *t* segundos. Entonces el número de automóviles entrando por segundo es $1/t$ y el promedio de flujo es $F = \dfrac{3600v}{t}$.

Suponga que la distancia entre los frentes de dos vehículos es *d*. A una velocidad de v ms^{-1} las cantidades *t, v* y *d* están conectadas por la ecuación $d = vt$.

Entonces la expresión para el promedio de flujo es

$$F = \frac{3600v}{d}.$$

La distancia *d* está conformada por dos partes, la longitud *L* del auto y la separación entre los autos *s*, de tal manera que $d = s + L$ y la expresión para el promedio de flujo es

$$F = \frac{3600v}{s + L}.$$

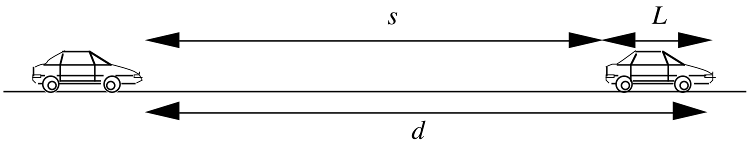


Figura 7. Distancia entre autos

MODELAJE DE LA DISTANCIA DE SEPARACIÓN

El Código de Autopistas Británico recomienda las siguientes distancias entre vehículos para las diferentes velocidades.

Velocidad	Distancia de reacción		Distancia de frenado		Distancia total de parada	
(mil./hr)	m	pies	m	pies	m	pies
20	6	20	20	6	12	40
30	9	30	14	45	23	75
40	12	40	24	80	36	120
50	15	50	38	125	53	175
60	18	60	55	180	73	240
70	21	70	75	245	96	315

En un terreno seco, un buen vehículo con frenos y llantas en buenas condiciones y con un conductor alerta, frenará en las distancias especificadas.

Recuerde que éstas son las distancias de parada mínimas. Las distancias de parada aumentan significativamente con terrenos mojados y resbalosos, frenos y llantas en malas condiciones y conductores cansados.

Figura 8. Distancias entre vehículos

Primero considere una aproximación numérica a la resolución de este problema. Este es desafortunadamente el método moderno aplicado en el currículo de matemáticas de los últimos años de nuestras escuelas secundarias —en la resolución de problemas introducir números en las primeras etapas en vez de desarrollar una aproximación algebraica.

Al emplear los datos del Código de Autopistas Británico, es claro que la distancia en pies es igual a la distancia en millas por hora (u). Con la ayuda del álgebra y/o gráficos se puede observar que la distancia de frenado es $\frac{u^2}{20}$.

Por lo tanto,

$$s = u + \frac{u^2}{20}$$

si además suponemos que todos los vehículos son automóviles familiares de tamaño promedio, entonces L = 13 pies. El problema matemático es encontrar el máximo de la función.

$$F = \frac{3600v}{13 + v + \dfrac{v^2}{20}}.$$

La figura 9 muestra la pantalla de una TI-92 para esta actividad.

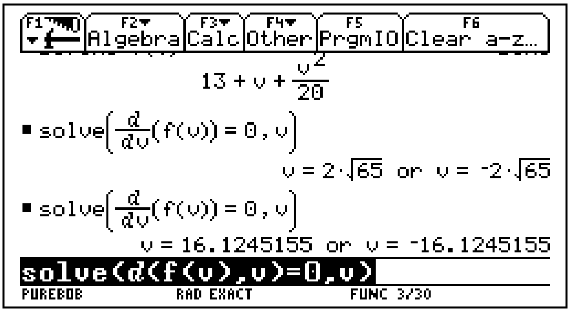


Figura 9. Búsqueda de un máximo para F(v)

La conclusión es que los vehícuios deben viajar a una velocidad promedio de 17 m.p.h (o 27 km./h en carreteras europeas).

El siguiente paso en el proceso de modelaje es criticar y mejorar el modelo. Es muy improbable que los vehículos viajen a las “distancias recomendadas de frenado seguro”. Entonces hay que revisar la fórmula para las distancias de parada.

Es normal que los estudiantes sostengan que la “distancia de reacción” puede ser reducida e inclusive ignorada. Sin embargo, como veremos, esto hace que se pierda información esencial.

Considere, en cambio, un modelo algebraico en el que tomamos la distancia de separación como la expresión

$$s = av + bv^2.$$

Ahora el problema matemático es encontrar un máximo de la función

$$F = \frac{3600v}{L + av + bv^2}.$$

La figura 10 muestra una pantalla de la TI-92 para esta actividad.

La aproximación algebraica lleva a la solución $v = \sqrt{\frac{L}{b}}$ (resulta sorprendente para muchos estudiantes que el valor de v para el promedio máximo de flujo es independiente de la distancia de reacción). Este ejemplo demuestra lo importante que es para el matemático la habilidad de investi-

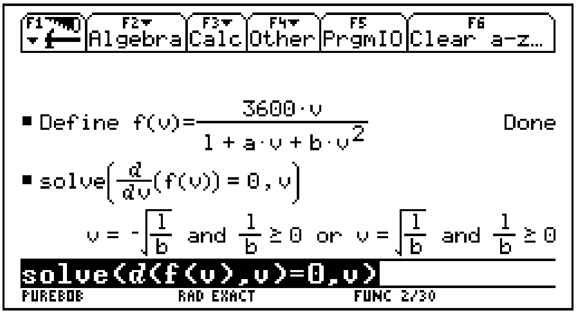


Figura 10. Búsqueda de un máximo F(v)

gar algebraicamente las situaciones que involucran parámetros. Si uno de los papeles de las matemáticas es explorar conjuntos de datos reales, los matemáticos deben empezar a darse cuenta de que la tecnología debe usarse en todos los niveles del aprendizaje para poder explorar problemas más reales.

CONCLUSIONES

Creemos que el futuro de la enseñanza de las matemáticas asistida por la tecnología será estimulante para profesores y alumnos. El uso de las investigaciones para introducir temas nuevos cambiará el estilo de aprendizaje; el uso de la tecnología como herramienta para resolver problemas permitirá la resolución de problemas más reales y el uso de la tecnología en las evaluaciones nos hará reflexionar sobre lo que estamos realmente tratando de evaluar.

En resumen, nuestra experiencia en Plymouth sugiere que los estudiantes que utilizan la tecnología de una manera investigativa se hacen preguntas muy importantes:

- ¿Qué pasa si?
- ¿Por qué?

¡Sólo cuando los estudiantes hacen estas preguntas, puede empezar el aprendizaje y comprensión de los conceptos!

REFERENCIAS

Francis, R. (1996). *Discovering Advanced Mathematics: Berry, J. (Ed.). Pure Mathematics*. London: Collins Educational.

Jaworski, B. (Ed.) (1993). *Technology in Mathematics Teaching*. Conference Proceedings, University of Birmingham, UK.

Mayes, R.L. (1994). Implications of Research on CAS in College Algebra. *The International DERIVE Journal, 1* (2), 21-38.

The MEW Group (1995). Berry, J. (Ed.). *Exploring Mechanics*. London: Hodder and Stoughton.

Watkins, A.J.P. (1994). MPhil thesis. University of Plymouth, UK.

John Berry
Centre for Teaching Mathematics
Charles Cross Centre
University of Plymouth
Drakes Circus
Plymouth PL4 8AA
England
jberry@plymouth.ac.uk

Bob Francis
Exeter College
Hele Road
Exeter EX4 4JS
England

CAPÍTULO 2

POSIBILIDADES Y TEMORES

PER BROMAN

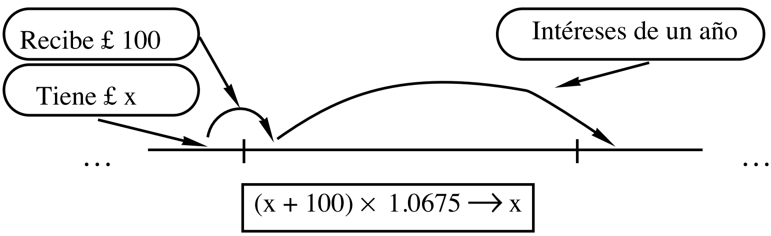
La calculadora gráfica es mucho más que una calculadora que puede trazar gráficos. Se ha convertido en un eficiente computador matemático portátil, razón por la cual, las posibilidades de usarla como laboratorio de matemáticas han aumentado. La calculadora es adecuada para el aprendizaje y la enseñanza "basada en problemas" de matemáticas. Sin embargo, ni los profesores ni los libros de texto parecen haberse dado cuenta de las ventajas que ésta ofrece a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

UN EJEMPLO

Es posible introducir problemas de calcular máximos y mínimos mucho antes de presentar el concepto de derivada. Los problemas que incluyen iteraciones y aquellos abiertos a la derecha pueden introducirse a un nivel relativamente básico gracias a las capacidades de la calculadora. Los problemas pueden llegar a ser bastante complicados y sin embargo se pueden resolver con tan sólo algunas reglas de aritmética. Véase el ejemplo.

Cuando Linda nació, su abuela decidió darle £ 100 cada Navidad. El Año Nuevo siguiente este dinero fue puesto en la cuenta de ahorros de Linda en donde ganaba 6.75% de interés anual. Ella continuó recibiendo este regalo de Navidad hasta que cumplió 18 años. En el siguiente Año Nuevo, cumplió 19 y pudo disponer de su dinero. ¿Cuánto dinero tenía Linda en su cuenta en ese momento?

Una solución al problema se muestra en la figura:



Si comenzamos con el valor 0 en x, que era el capital de Linda cuando nació, podemos introducir la fórmula en la calculadora y obtener el resultado sola-

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 15-19

mente presionando EXE 19 veces (dependiendo de la calculadora que se use).

La manera tradicional de resolver un problema como éste es usar una suma geométrica. Por consiguiente, usted nunca verá un ejemplo como éste en un capítulo de un libro de matemáticas donde se introduzca el factor de cambio. Lo verá en el capítulo sobre sumas geométricas, y entonces como un ejemplo muy avanzado. Sé que menos de 50% de los estudiantes resolvería el problema de esta manera si se les hiciera una evaluación inmediatamente después de estudiar el método, y apuesto a que cerca de 100% no estaría en capacidad de resolverlo un año después.

El uso de la iteración para resolver este problema (como arriba) en vez de una suma geométrica es mucho más fácil y, desde el punto de vista del alumno, mucho más lógico. El problema como tal está bastante cerca de la realidad que toda persona debe manejar en la sociedad moderna; entonces, no logro entender por qué se debe esconder su solución bajo tanta abstracción matemática.

Le di este problema (dentro del contexto de iteraciones) a profesores graduados que estaban recibiendo entrenamiento adicional. Cuando dije: "Nunca han oído hablar de sumas geométricas", no pudieron resolver el problema. (Bueno, eventualmente hubieran podido pero no tuvimos suficiente tiempo). Lo que encuentro de serio en todo esto es que hasta los profesores de matemáticas creen que existe una relación unívoca entre los problemas y los métodos de fórmulas.

TECNOLOGÍA Y LIBROS DE MATEMÁTICAS

Los libros de matemáticas no han integrado aún la electrónica moderna con el aprendizaje de éstas. Esto es realmente sorprendente si se tiene en cuenta que los estudiantes de secundaria han tenido acceso a calculadoras bastante avanzadas durante los últimos veinte años. En el libro de texto que he venido usando hay sólo un problema que utiliza la calculadora de manera adecuada. Mucho antes de presentar la ecuación $a^x = b$ los estudiantes reciben el siguiente problema:

¿Cuánto tiempo se necesita para que el capital de £ 100 se doble si la tasa de interés es 4.5%?

Tal y como está planteado aquí, este problema perturba bastante a los estudiantes:

"¿Cómo es que voy a resolver este problema?"

"¿Se puede tal vez tratar de hacer una estimación? ¿Se puede usar la calculadora?"

"¡Estimar no es un método realmente matemático! Tiene que haber una fórmula o algo..."

Es verdad que, una vez se encuentra la solución de un problema a través de un método o fórmula, se le prohibe a los estudiantes usar cálculos sistemáticos y estimaciones para obtener resultados. Deben usar el "método correcto". No es de extrañarse, entonces, que los estudiantes piensen que cada problema tiene una, y sólo una, manera correcta de resolverse ni que se queden atascados en problemas relativamente simples cuando no recuerdan el método correcto.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TECNOLOGÍA

El currículo nacional de matemáticas en Suecia dice que la calculadora (así como los programas de hoja de cálculo y otras aplicaciones para computadores) debe usarse en las matemáticas de secundaria a partir de los niveles más básicos. Esto ha afectado los textos de matemáticas de una manera más bien extraña: usted encontrará una presentación de la calculadora y el programa de hoja de cálculo en el apéndice o en un capítulo al final del libro. De esta manera, los equipos electrónicos modernos se han convertido en algo más que se debe aprender. Estas herramientas, sin embargo, no se explotan apropiadamente como herramientas de aprendizaje. Las matemáticas se presentan casi de la misma manera que se han presentado siempre.

Usted, como estudiante, gasta algunas horas de clase en aprender matemáticas y otras horas de clase en aprender a utilizar la calculadora (ya que el currículo lo exige). Debido a que las matemáticas requieren tanto tiempo, no quedará casi tiempo para la calculadora. Su papel es entonces igual al papel tradicional de las tablas matemáticas y la regla de cálculo.

La resolución de un problema según George Polya (1945) consiste en cuatro partes, no necesariamente independientes, (y una quinta a mi parecer):

1) Se debe entender el problema.

2) Se debe idear un plan.

3) Se debe poner en práctica el plan.

4) Se debe revisar lo hecho.

5) Se debe estar en capacidad de explicar la solución.

Las estadísticas dicen que más de 90% del tiempo en matemáticas se usa comúnmente en el paso 3: cálculos. Pero esto es lo que las calculadoras hacen mejor, y por esta razón mucho más tiempo se podría emplear en otras partes del proceso de resolución de problemas. Es imposible eludir las demás etapas cuando se resuelve un problema. Ya que estas etapas son frecuentemente descuidadas en las matemáticas escolares, yo diría que los estudiantes para quienes la resolución de problemas no hace parte de una tradición familiar, son de hecho discriminados contra esto en la escuela.

PROFESORES Y TECNOLOGÍA

Es extremadamente raro (por lo menos en Suecia) que un profesor sea lo suficientemente hábil en el uso de la calculadora gráfica. Sin embargo, con esto no pretendo decir que se deba culpar a los profesores.

Hay tanto dentro del trabajo de un profesor, que no existe tiempo para jugar con la calculadora. Tampoco existen el tiempo y dinero necesarios para programas para profesores en ejercicio y programas de desarrollo que valgan la pena, cuando consideramos todo lo que se necesita para la ulterior educación de los profesores. (La sociedad para la cual educamos a nuestros estudiantes es diferente a aquella para la cual fuimos educados nosotros. La investigación en educación avanza, y eso debe interesarnos a los que hacemos la educación. El estado de la tecnología de aprendizaje está cambiando drásticamente, y el currículo nos obliga a utilizarla). Debo decir que por lo menos 10-15% del tiempo total de trabajo del profesor debería emplearse formal y oficialmente en continuar su formación. Deberían organizarse programas de educación para profesores en ejercicio y hacerse accesibles a nivel local, regional e internacional; y el profesor mismo debería ser responsable de participar. Sin suficientes programas de este tipo, los profesores nunca llegarán a ser tan profesionales como las autoridades dicen que son.

Observemos por un momento la situación. Normalmente a los estudiantes no se les permite el uso de la calculadora en las etapas más tempranas de la escuela. Los profesores alegan que los alumnos deben aprender las matemáticas por métodos manuales primero, sin tomar en cuenta que las matemáticas son algo que se debe hacer primordialmente en la mente. Los cálculos hechos a mano tienden a ser tan importantes que los niños no se ejercitan de manera apropiada en el cálculo mental, resolución de problemas o sentido numérico.

Al comienzo de la secundaria los estudiantes compran calculadoras avanzadas y las emplean de manera ineficaz para el aprendizaje. De la misma manera, los profesores no se interesan por cómo éstas son usadas. Los estudiantes se sienten tan aliviados de poder hacer cálculos en la calculadora que hacen cualquiera (como 10×125) en ella. Debido a la creencia de que matemáticas es sinónimo de calcular, muchos estudiantes sienten (sea verdad o no) que están retrocediendo en matemáticas en vez de estar aprendiendo.

Mi pregunta es: ¿No será que este tipo de uso erróneo de la calculadora en combinación con una enseñanza de las matemáticas demasiado tradicional (donde los métodos, fórmulas y algoritmos son lo más importante) hace de los estudiantes más "digitadores" que "aprendices de matemáticas"? (Nótese que enseñanza y aprendizaje son dos conceptos separados que no tienen necesariamente algo en común). ¿Puede el uso inadecuado de la tecnología llegar a impedir el aprendizaje?

REFERENCIAS

Polya, G. (1945). *How to solve it*. London: Open University.

Per Broman
Broman Planetarium
Casio Electronics Co. Ltd.
S Rudebeck's High School, Göteborg Sweden
Karnvedsg 11
S-416 80 Goteborg
Sweden
per.broman@planetarium.se

¿SON LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EL CATALIZADOR PARA UN CAMBIO REAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA?

JAIME CARVALHO E SILVA

En muchos países, la enseñanza de las matemáticas ha tomado siempre la forma clásica de clase magistral. Para la mayoría de los profesores, esto se hace más obvio en los niveles de secundaria y universidad. Se han dado experiencias muy satisfactorias y cambios significativos en el currículo oficial en casi todas partes, a la vez que se han producido grandes cantidades de material. Pero dentro de la clase de matemáticas, los profesores hablan y los estudiantes escuchan. El conjunto de los exámenes nacionales, evalúan más el conocimiento rutinario que el pensamiento crítico o independiente. Pero con la diseminación de la calculadora gráfica las cosas tendrán que cambiar. Casi todas las rutinas usuales se volverán triviales. Y las máquinas nunca resolverán los problemas; los que las utilizan tendrán que reflexionar sobre lo que deben hacer, y cómo interpretar los resultados expuestos por la calculadora. Por supuesto, los computadores pueden tener el mismo efecto; pero no son, y nunca serán tan accesibles como la calculadora gráfica. Por lo menos desde el grado décimo, la accesibilidad de la calculadora gráfica tendrá un impacto en la enseñanza comparable al impacto de la disponibilidad de los textos escritos después de Gutenberg.

NO HAY UN USO GENERALIZADO DE LOS COMPUTADORES EN EL SALÓN DE CLASE

Muchos matemáticos y educadores piensan que la tecnología debería ser ampliamente empleada en la clase de matemáticas. No vamos a explicar las razones que sustentan esta idea porque ya se han discutido en una multitud de lugares (por ejemplo en Smith, 1988), y al respecto se conocen muchos ejemplos interesantes y variados (como los de Ponte, 1991). Igualmente, varios capítulos de este libro se refieren al tema.

La realidad, sin embargo, es que no se hace un uso generalizado de la tecnología en la clase, tanto a nivel secundario como universitario. En Portugal podemos decir que muy pocas escuelas tienen computadores disponibles para la enseñanza de las matemáticas (la mayoría se usan para enseñar informática). En la universidad no existe ningún curso en el cual los computadores se utilicen de alguna manera para enseñar cálculo o álgebra

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 21-30

lineal. En Brasil, en 1995, Gilda Palis se refirió a un curso en la Universidad de Río de Janeiro como "el primero en utilizar herramientas tecnológicas a este nivel de estudios" (Palis, 1995).

En otros lugares, como los Estados Unidos o el Reino Unido, muchas escuelas y universidades tienen computadores, pero no podemos decir que se utilicen rutinariamente (como puede inferirse, por ejemplo: de las actas de sesiones del séptimo ICTCM —como los artículos de Antonio López et al. y Adrian Oldknow—; del hecho de que muchas escuelas todavía están aplicando para recibir donaciones para comprar computadores; o de las discusiones de la lista de la reforma CALC.). Bert Waits escribió: "Los estudiantes de una clase típica rara vez tienen acceso a un computador durante la clase de cálculo" (Waits, 1992).

La razón principal para esto es de origen financiero. De hecho, aunque los computadores son relativamente baratos, aún no es posible equipar las escuelas con computadores ni crear laboratorios porque el problema involucra a miles de alumnos y varias materias diferentes que quieren usar estos recursos. El gran número de estudiantes implicado es la razón por la cual un autor concluyó: "La única actividad para las masas en la escuela es, prácticamente, la explicación del profesor con base en un texto" (Teodoro, 1992).

Bert Waits confirma esta afirmación: "[la mayoría de los profesores de cálculo] se quejan de que es casi imposible programar las clases de matemáticas en un laboratorio de computadores porque los laboratorios están completamente reservados para clases que no son de matemáticas" (Waits, 1992). En un estudio realizado en Portugal se informa que: "Como dificultades en el uso de computadores para la enseñanza de matemáticas, Julia hace referencia esencialmente al aspecto logístico, como la inexistencia de un salón equipado con suficientes computadores para que todos los alumnos de un grupo puedan trabajar simultánea e individualmente" (Canavarro, 1994).

Así pues, las ventajas del uso de la tecnología en la clase de matemáticas no se encuentran al alcance de todos los estudiantes simplemente porque no hay suficientes computadores en las escuelas. Esto continuará siendo un problema por un buen tiempo. Además, porque la nueva tecnología convierte a la anterior en obsoleta, y los programas nuevos y más interesantes no correrán en computadores viejos. Aun más, en muchos países la situación económica impide la adquisición masiva de computadores para las escuelas.

LAS CALCULADORAS PUEDEN USARSE DE MANERA GENERALIZADA EN EL SALÓN DE CLASE

Las calculadoras gráficas son tan baratas hoy en día, que muchas escuelas ya están comprando grandes cantidades para que las usen sus alumnos. Muchos estudiantes pueden incluso comprar su propia calculadora y está dentro de los límites de la realidad esperar que los programas de apoyo estatal compren calculadoras para los estudiantes con dificultades económicas, si se reconoce la importancia de tal necesidad.

El hecho de que las calculadoras puedan utilizarse en los exámenes locales y nacionales, constituye una razón para su uso generalizado en la clase, como fue señalado por varios participantes en la reforma CALC para el caso de los Exámenes de Clasificación Avanzados en Estados Unidos. Es imposible permitir el uso de computadores en los exámenes, pero lo mismo no se cumple para las calculadoras; de esta manera los exámenes pueden incluir preguntas que puedan responderse sólo con la ayuda de una calculadora gráfica, y así, se incrementaría el número de habilidades que los profesores y alumnos consideran importantes desde el punto de vista de los exámenes nacionales.

Hoy en día en Portugal muchos estudiantes usan calculadoras científicas; su uso fue recomendado por primera vez en 1994. El uso de las calculadoras gráficas fue recomendado en septiembre de 1995 para la escuela secundaria, pero sólo recientemente el Ministro de Educación aprobó su uso en los exámenes nacionales a partir de 1998.

Como dijo Bert Waits: "Las calculadoras gráficas baratas traen el poder de la visualización a todos los estudiantes de cálculo en formas que no son posibles con computadores de escritorio costosos" (Waits, 1992).

LAS CALCULADORAS PUEDEN CAMBIAR NUESTRA MANERA DE ENSEÑAR

Bert Waits menciona diez actividades fundamentales realizadas con "tecnología de visualización de apoyo" en el trabajo de clase de los estudiantes durante el proyecto de Calculadoras y Pre-cálculo por Computador (un proyecto que involucraba más de 1.000 escuelas en los Estados Unidos). Estas actividades son:

1) Abordar los problemas numéricamente.
2) Utilizar manipulaciones algebraicas analíticas para resolver ecuaciones y desigualdades y luego sustentar por medio de métodos visuales.
3) Utilizar métodos visuales para resolver ecuaciones y desigualdades y luego confirmar por medio de métodos algebraicos analíticos.

4) Modelar, simular y resolver situaciones de problema.
5) Utilizar escenarios generados por computador para ilustrar conceptos matemáticos.
6) Utilizar métodos visuales para resolver ecuaciones y desigualdades que *no* pueden ser resueltas o resultan poco prácticas al utilizar métodos algebraicos analíticos.
7) Realizar experimentos matemáticos y formular y comprobar conjeturas.
8) Estudiar y clasificar el comportamiento de diferentes clases de funciones.
9) Intuir conceptos de cálculo.
10) Investigar y explorar las conexiones varias entre las diferentes representaciones de una situación de problema.

El hecho de que las calculadoras gráficas puedan utilizarse de manera generalizada, permite el uso efectivo de todas estas actividades. Estos son diferentes tipos de actividades esenciales para lograr los objetivos que normalmente se plantean en las matemáticas de secundaria. En Portugal algunos de los objetivos del currículo oficial son:

- Interpretar fenómenos y resolver problemas recurriendo a funciones y sus gráficos.
- Expresar el mismo concepto en diferentes maneras y lenguajes.
- Analizar situaciones de la vida real por medio de la identificación de modelos matemáticos que permitan su interpretación y solución.

Estos objetivos pueden ser alcanzados sólo si la dimensión gráfica se explora correctamente. Ejemplos escogidos cuidadosamente pueden hacer una gran diferencia en la clase de matemáticas. Sebastião e Silva (Silva, 1965 - 66) dice que esto es muy importante al discutir un ejemplo de integrales en cálculo: "[...] tomado como *centro de interés*, un ejemplo bastó para poner inmediatamente al estudiante en contacto con varios de los principales lineamientos del cálculo integral, desde el punto de vista teórico-práctico. Además, ayudó a mostrar finalmente, dentro del campo de análisis, en qué consistía la práctica real, muy diferente de la pseudo-práctica de los cursos tradicionales, secundaria o universidad, basada en innumerables recetas que en la mayoría de los casos nunca se aplicarán". En un momento en que los computadores no eran tan accesibles, él juzgó que la enseñanza con tecnología a la manera del laboratorio resultaría una gran ventaja: "Se adelantaría mucho, si normalmente se orientara la enseñanza de estos temas desde centros de interés como el anterior —tan semejante como sea posible a la actividad de laboratorio; es decir, basado en el uso de computadores, dentro o fuera de las escuelas, en los laboratorios de cálculo".

Si se permite la entrada de las calculadoras gráficas a las escuelas, entonces la realidad será muy diferente de como es ahora: "Aparentemente no hay duda de que crear ambientes en donde los estudiantes puedan producir —experimentar, escribir, investigar, discutir, construir— parece ser una tarea casi imposible en nuestras escuelas" (Teodoro, 1992).

La experiencia que ya tenemos muestra que la situación de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas cambiará bastante: "Cuando un profesor utilizó la calculadora gráfica con alumnos del Año 10, se encontró con que no sólo estaban completando el trabajo asignado, sino que también estaban buscando patrones en los resultados para poder realizar predicciones acerca de las nuevas expresiones. La velocidad de progreso que las calculadoras permitieron, llevó a todos los grupos a aumentar su conocimiento y comprensión de los gráficos, una tarea que habría tomado mucho más tiempo, si cada estudiante hubiese tenido que trazar cada gráfico; y posiblemente no habría llevado a todos los estudiantes al mismo nivel de superación" (Stradling, 1994).

Estas nuevas formas de trabajar en la clase pueden catalizarse a través del uso generalizado de las calculadoras gráficas de una manera que no habría sido posible con computadores. Lo anterior, cambiará totalmente la forma en que los estudiantes comprenden las matemáticas: "Experimentar, discutir y reflexionar son tres elementos esenciales que la integración progresiva del computador en el trabajo práctico puede ofrecer al profesor" (Canavarro, 1994).

UN EJEMPLO

El nuevo curículo de secundaria que será usado en Portugal a partir de 1997 incluye varios ejemplos del uso de las calculadoras gráficas en las matemáticas de la clase. Uno de ellos se relaciona con el estudio de las desigualdades. Mencionamos cuatro ejemplos.

Ejemplo 1

Resuelva la desigualdad

$$2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 9 \leq 0 \, .$$

Al emplear la calculadora gráfica en la ventana $[-10, 10] \times [-10, 10]$, se encuentran inmediatamente cuatro ceros.

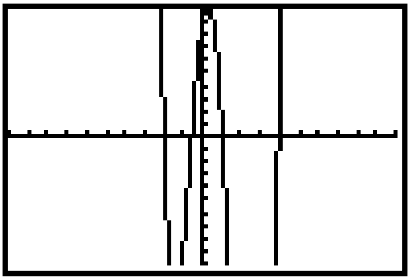


Figura 1.

El gráfico que se obtiene contiene toda la información relevante porque este es un polinomio de cuarto grado y por lo tanto tiene máximo cuatro ceros reales. Los ceros son aproximadamente -1.98, -0.55, 1.03, y 3.9 y la solución para el conjunto de la desigualdad es [-1.98 ..., -0.55 ...] ∪ [1.03 ..., 3.9 ...].

Ejemplo 2

Si miramos una tabla de valores con variaciones de 0.5 para el polinomio del ejemplo anterior (figura 2), observamos que en los puntos -2, -0.5, 1 y 4 el polinomio toma siempre el valor de 1. Debe haber una explicación para este hecho.

X	Y1	
-2.500	46.500	
-2.000	1.000	
-1.500	-12.75	
-1.000	-9.000	
-.500	1.000	
0.000	9.000	
.500	9.750	
X= -2.5		

X	Y1	
1.000	1.000	
1.500	-16.50	
2.000	-39.00	
2.500	-59.75	
3.000	-69.00	
3.500	-54.00	
4.000	1.000	
Y1=2X^4-5X^3-15...		

Figura 2.

Ejemplo 3

Resuelva la desigualdad

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 2 \leq 0 .$$

Aquí podemos apreciar con facilidad que 1 es una raíz. Al dividir el polinomio por $(x - 1)$ obtenemos

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x^2 + 5x + 2).$$

El polinomio de segundo grado tiene raíces $\dfrac{-5-17^{1/2}}{2}$ y $\dfrac{(-5)+17^{1/2}}{2}$, y por lo tanto la desigualdad dada puede resolverse fácilmente. La solución es

$$\left(-\infty, \frac{-5-17^{1/2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5+17^{1/2}}{2}, 1\right].$$

Esta conclusión extraída por el método manual puede ser corroborada con la calculadora gráfica:

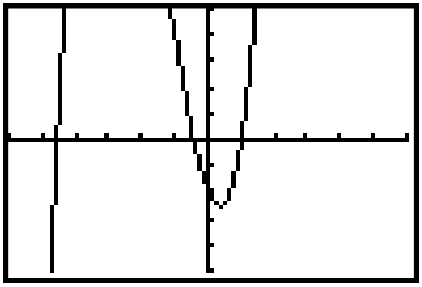


Figura 3.

Ejemplo 4

Resuelva la desigualdad

$$x^3 + 10x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

Si utilizamos la calculadora gráfica en la ventana de $[-10, 10] \times [-10, 10]$, no vemos nada interesante.

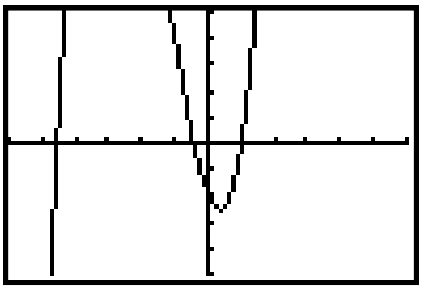


Figura 4.

Necesitamos una ventana diferente. Al escoger la ventana $[-1, 1] \times [0, 20]$ aparece una curva similar a una parábola, que no corta el eje x.

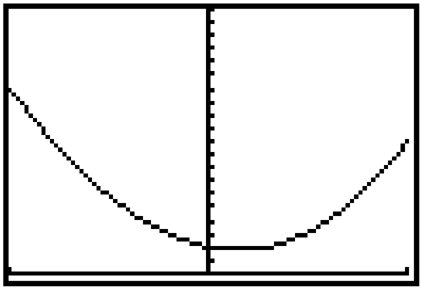


Figura 5.

Sabemos que debe haber algo más en el gráfico porque cualquier polinomio de tercer grado tiene por lo menos una raíz real. Después de experimentar con algunas ventanas más, encontramos una cerca a -10.2. Así pues la solución es (-∞, -10.2...].

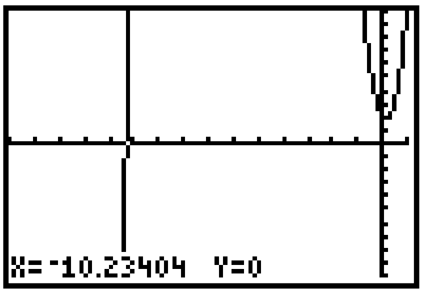


Figura 6.

EL FUTURO

Tal como señaló Ian Stewart, hoy en día se piensa que "la manera de llegar a las ideas es tan importante como las ideas mismas" (Stewart, 1995). Ya no se puede tener una actitud pasiva ante las matemáticas, si se pretende comprender alguna parte de las matemáticas o lo que éstas representan en realidad.

La tecnología es una parte de esto y los estudiantes deben estar preparados para ella: "Lo importante es su habilidad para establecer un diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, algunas de las cuales los estudiantes ya poseen y otras que adquirirán en el futuro" (Guzmán, 1993).

Todo esto, incluso las nuevas "matemáticas experimentales" (Stewart, 1995), se puede poner en práctica con las calculadoras gráficas. A su vez, la accesibilidad de las calculadoras gráficas obligará a todos a enfrentar estos aspectos.

El problema económico no será un obstáculo: "Muchos de los problemas críticos relacionados con el uso de la tecnología de la información en el tercer mundo quizá puedan resolverse a través del uso de la calculadora gráfica" (Laridon, 1995).

La diseminación de las calculadoras gráficas llevará a un gran cambio. Casi todas las rutinas para efectuar cálculos se volverán triviales. Y las máquinas nunca resolverán los problemas; los que las utilizan tendrán que reflexionar sobre lo que deben hacer, y cómo interpretar los resultados expuestos por la calculadora. Por supuesto, los computadores pueden tener el mismo efecto; pero no son, y nunca serán tan accesibles como la calculadora gráfica. Por lo menos desde el grado décimo, la accesibilidad de la calculadora gráfica tendrá un impacto en la enseñanza comparable al impacto de la disponibilidad de los textos escritos después de Gutenberg.

REFERENCIAS

Canavarro, A. P. (1994). Computador na Educação Matemática: instrumento par entusiasmar, para facilitar ou para possibiltar? *Profmat*. Leiria: APM.

Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en la educación matemática. *Boletim da S.P.M., 25*, 9-34.

Laridon, P. (1995). Graphing calculator developments in calculus and precalculus courses in South Africa. *7th ICTCM* (pp. 269-273). Orlando: Addison-Wesley.

Palis, G. (1995). Convergence of numerical sequences in precalculus. Too difficult for students? *8th ICTCM*. Houston: Addison-Wesley.

Ponte, J. P. et al. (Ed), (1991). *Using computers in Mathematics Teaching - a collection of case studies*. Lisboa: Projecto Minerva.

Ponte, J. P. (1988). *O Computador como Instrumento de Mudança Educativa*. Lisboa: Projecto Minerva.

Silva, J. C. (1981). Decorar a tabuada ou utilizar as calculadoras? *Contacto, 8,* 1-4.

Silva, J. C. (1995). The Mathematics Education Reform Movement in Portugal and the use of Calculators. *7th ICTCM* (pp. 66-70). Orlando: Addison-Wesley.

Silva, J. C., & Rosendo, A. I. (1995). Computers in Mathematics Education - an experience. *7th ICTCM*. Orlando: Electronic Proceedings of the ICTCM: http://archives.math.utk.edu/ICTCM/.

Silva, J. S. (1965-66). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2º e 3º vol)*. Lisboa: Min.Educação/OCDE.

Smith, D. et al. (Ed). (1988). *Computers and Mathematics-The use of computers in undergraduate instruction*. MAA Notes, 9. MAA.

Stewart, I. (1995). Bye–bye Bourbaki —paradigm shifts in mathematics. *Mathematical Gazette, 79* (486), 496-498.

Stradling, R. (1994). *Portable computers pilot evaluation project*. Coventry: NCET.

Teodoro, V. D. (1992). Educação e Computadores. En V. D. Teodoro & J. C. Freitas (Eds.), *Educação e Computadores* Lisboa: GEP/ME.

Waits, B. K. (1992). *The power of Visualization in Calculus*. TICAP Project.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Apartado3008
3000 Coimbra
Portugal
jaimecs@mat.uc.pt

CAPÍTULO 4

MUCHO MÁS QUE UN JUGUETE. IMPACTO DEL USO DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN SECUNDARIA

THOMAS P. DICK

A menudo las calculadoras gráficas son descartadas como simples "juguetes" en comparación con los poderosos computadores. Sin embargo, su accesibilidad en términos de portabilidad, facilidad de manejo y costo ha resultado en una influencia e impacto sobre la educación matemática que ha sobrepasado al de los computadores. Este trabajo discute el efecto importante que las calculadoras gráficas han tenido sobre la enseñanza de cálculo en la educación secundaria. Hacemos una aproximación a las experiencias del Proyecto de Conexiones en Cálculo que involucra cerca de 400 profesores de secundaria en los Estados Unidos que emplean las calculadoras gráficas para enseñar cálculo desde un punto de vista "multi-representacional". También resaltamos las maneras en que las calculadoras gráficas pueden ser empleadas para la visualización en una instrucción matemática más avanzada y cómo la última generación de aparatos de bolsillo ha evolucionado hasta convertirse en un grupo de verdaderas máquinas para aprender matemáticas.

A menudo las calculadoras gráficas son descartadas como simples "juguetes" en comparación con los poderosos computadores. Sin embargo, su accesibilidad en términos de portabilidad, facilidad de manejo y costo ha resultado en una influencia e impacto en la educación matemática que ha sobrepasado al de los computadores. En este trabajo deseo discutir cómo una calculadora gráfica puede ser utilizada como herramienta para la investigación matemática, la exploración y el análisis en cálculo. Haré un acercamiento riguroso a mis experiencias y a las de otros profesores en el Proyecto de Conexiones en Cálculo, un programa para el mejoramiento de la actividad pedagógica financiado por la National Science Foundation con el fin de diseminar los esfuerzos de reforma relacionados con el cálculo a cerca de 400 escuelas secundarias en Estados Unidos.

El programa de Clasificación Avanzada (AP) proporciona oportunidades para que estudiantes de secundaria ganen créditos en la universidad o se clasifiquen en lugares avanzados en cursos universitarios en muchos establecimientos de los Estados Unidos. Aunque no existe un "currículo nacional" para el cálculo en Estados Unidos, la descripción de cursos AP

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 31-48

podría casi aspirar a esta función. De los aproximadamente 600.000 estudiantes que se inscriben en cursos de cálculo en los Estados Unidos cada año, cerca de 120.000 son estudiantes de secundaria que toman los exámenes de Clasificación Avanzada en cálculo.

El programa de Clasificación Avanzada se encuentra en una posición única dentro de esta era de reforma curricular del cálculo. Por un lado, la credibilidad del programa depende en gran parte de que la descripción de un curso (y la evaluación del desempeño del estudiante en el curso) refleje un curso de cálculo con un nivel universitario apropiado. No obstante, las diferencias entre los cursos universitarios de cálculo son probablemente una constante alta a causa de los varios proyectos de reformas emprendidos simultáneamente en todo el país. En consecuencia, para tratar de mantener el ritmo de las reformas, el programa AP ha tenido que implementar los cambios más profundos en los últimos 30 años, incluyendo el requerimiento de las calculadoras gráficas en sus exámenes y cambios sustanciales en la filosofía y dirección de sus descripciones de los cursos.

En este trabajo, me concentraré en los cambios ocurridos en el cálculo de las escuelas secundarias sobre el cual, tengo la sensación, las calculadoras gráficas han actuado como un catalizador. Estos cambios incluyen la manipulación de la imagen en la pantalla como instrumento básico de investigación del comportamiento de las funciones. De manera particular, la noción de *linealidad local*, un tema común a muchos proyectos de reforma en cálculo, ha cambiado profundamente la aproximación básica al problema de diferenciación. La explotación de esta idea simple pero poderosa también ha motivado una introducción temprana de los *campos de pendientes* y el *método de Euler* al curso de cálculo (temas anteriormente pospuestos hasta cursos de ecuaciones diferenciales más avanzadas y/o análisis numérico). La capacidad numérica computacional ha permitido el surgimiento de un nuevo énfasis en modelación. Diré que estos cambios reflejan mucho más que la simple adición o reemplazo de temas en un currículo —ellos cambian la dinámica de la clase y nos dan una nueva perspectiva para apreciar las facultades fundamentales del cálculo.

EL PODER DEL ACERCAMIENTO EN LA PANTALLA

En muchas ocasiones simplemente deseamos generar rápidamente un gráfico para nuestra inspección y consideración en la clase de matemáticas. Si fuera para estos fines, la calculadora gráfica ya sería una ayuda invaluable, al permitir a todos los estudiantes participar activamente en la producción de sus propios ejemplos y no sólo en la aceptación de los del profesor. Para que este punto no pase de largo como una simple introducción, déjenme decir que ésta no es una diferencia trivial en la clase donde se emplea la calculadora gráfica. En mi propia enseñanza del cálculo, uso muchos de los mismos ejemplos gráficos que siempre he usado. Lo que he notado ahora con las calculadoras gráficas es un cambio real en el lenguaje de los estudiantes. Por ejemplo, si dibujo en el tablero un gráfico de la función

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

y destaco el "hueco" en el gráfico representado por la discontinuidad removible en $x = 1$, éste es el gráfico del profesor. Pero si todos los estudiantes en la clase grafican exactamente la misma función en una pantalla que muestra el "hueco", se escucha un significativo cambio en el tono:

> *"Oigan, ¿por qué mi gráfico tiene un hueco?"*
> *(dirigiéndose a otro estudiante)*
> *"¿Tu gráfico también tiene un hueco?"*

La calculadora gráfica otorga una sensación de *posesión personal* de los gráficos, y este fenómeno por sí solo puede hacer una tremenda diferencia en la dinámica de una clase.

El acercamiento como herramienta para investigar el comportamiento de las funciones —límites

No hay duda de que los límites son parte del lenguaje básico en cálculo (el debate está en el nivel de rigor más apropiado para un curso introductorio de cálculo). Si pensamos en el límite de una función en un punto como una descripción matemática de su *comportamiento local*, entonces, la calculadora gráfica es nuestro microscopio de investigación.

He aquí una colección básica de funciones (ninguna exótica) que muestran tipos clásicos de comportamientos locales de funciones, cada uno de los cuales puede ser muy bien investigado usando una calculadora gráfica:

Una discontinuidad removible en $x = 1$	$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
Una asíntota vertical en $x = 1$	$y = \frac{1}{x - 1}$
Un salto discontinuo en $x = 0$	$y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
Otra discontinuidad esencial en $x = 0$	$y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
Otra discontinuidad removible en $x = 0$	$y = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

El uso de la calculadora gráfica para explorar el comportamiento de las funciones es una herramienta pedagógica poderosa, pero su naturaleza discreta nos impone limitaciones. Por ejemplo, un hueco en el gráfico de una función no será apreciable en una calculadora gráfica a menos que i) la posición del hueco se encuentre en la visualización de la pantalla y ii) las dimensiones de la pantalla coloquen la ubicación del hueco precisamente en la localización del pixel. De manera similar, el tener una calculadora en modo de gráficos de puntos o de *puntos conectados* ejerce influencia en la forma en que la discontinuidad pueda aparecer.

Los épsilons y los deltas del escalamiento

Si pudiéramos imaginarnos una máquina gráfica infinitamente precisa, podríamos volver a plantear, de manera inflexible, muchas de las definiciones de cálculo en términos de la visualización en pantalla. Por ejemplo, he aquí una definición rigurosa del límite de una función en un punto: podemos escribir

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

para decir que dada una escala vertical cualquiera (en el rango y) de $L - \varepsilon$ a $L + \varepsilon$, podemos encontrar una escala horizontal correspondiente (en el rango x) de $a - \delta$ a $a + \delta$ tal que el gráfico de $y = f(x)$ se mantiene en la pantalla de izquierda a derecha (excepto tal vez en $x = a$).

La altura de nuestra visualización en pantalla juega el papel de la vecindad de nuestro épsilon de L, y el ancho juega el papel de la vecindad de delta de a. Imagínese un juego en el que un jugador asigna la tolerancia de épsilon por colocar el rango de y entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$. El otro jugador no puede modificar estos parámetros y debe encontrar un rango en x que esté entre $a - \delta$ y $a + \delta$ para tener la gráfica de $y = f(x)$ en la pantalla (la única excepción que está permitida es cuando $x = a$). Si el segundo jugador tiene *siempre* una estrategia ganadora entonces la función f tiene un límite L cuando x se aproxima a a. De hecho, si este es el caso, entonces una selección suficientemente pequeña de δ resultará en un gráfico horizontal.

Una consecuencia natural de esta definición corresponde a un fenómeno comúnmente observado en las calculadoras gráficas: cuando se hace un acercamiento horizontal de una gráfica de una función continua, ésta se aplana. Por acercamiento horizontal, quiero decir utilizar una nueva escala en la pantalla de tal manera que el rango vertical permanece constante pero el rango horizontal representado en la pantalla se convierte en un intervalo menor. En términos de un *comportamiento global* de una función, un fenómeno similar puede ser observado: si la función tiene una asíntota horizontal, los alejamientos horizontales hacen que la gráfica se vea como la asíntota. En realidad, las calculadoras gráficas no son infinitamente precisas.

Para ver estas limitaciones representadas de forma espectacular, trate de hacer un acercamiento horizontal repitiendo de a factor de diez en el gráfico de $y = (1 + x)^{1/x}$.

LA DERIVADA Y LA LINEALIDAD LOCAL

Diga la palabra "cálculo" a alguien que ha tomado el curso, inclusive si fue hace años, y casi con seguridad se mencionará la derivada. Sin embargo, si ahonda en el problema un poco más en busca de detalles, no se sorprenda que los recuerdos estén dominados por la manipulación de símbolos: "Sí claro, es donde bajas el 2 de x^2 al frente para producir su derivada $2x$." (Inclusive escuché una vez a alguien decir que era de allí que provenía el término diferenciación —¡el mover el exponente había diferenciado la nueva expresión de la vieja!).

No, no estoy aquí para decir que las habilidades algebraicas no son importantes en cálculo. De hecho, muchos sostendrán que las habilidades algebraicas, o la carencia de éstas, determinan en última instancia, en qué medida el cálculo es un filtro o una barrera para el ulterior estudio de las matemáticas y de la ciencia. Pero sostendré que algo verdaderamente trágico ha sucedido si la manipulación de símbolos es un recuerdo más duradero de la noción de derivada que su interpretación geométrica como curva de una gráfica de una función, o su interpretación física como la proporción de cambio instantáneo.

Si el cálculo fuera una religión, entonces estas dos nociones centrales de derivada serían parte del evangelio, y los profesores de cálculo serían los predicadores. Mientras que, sin duda, predicamos el evangelio, deberíamos recordar el viejo proverbio: "Escucho y olvido. Veo y recuerdo. Hago y comprendo." Lo que los estudiantes *ven* y *hacen* bastante es manipular símbolos, ya que las técnicas de lápiz y papel habían sido la única tecnología al alcance general hasta hace muy poco. Por consiguiente, no es una sorpresa que para muchos, los recuerdos sobre derivada sean de reglas, fórmulas y recetas algorítmicas —los rituales del cálculo. Cuando los rituales se desarrollan con atención y aprecio por sus significados de base, entonces cobran un valor intrínseco. De otra manera, son prácticas superficiales más recordadas por la forma que por la función.

¿Cómo puede la nueva tecnología, particularmente en la forma de calculadoras gráficas, ayudarnos a enseñar cálculo? Permítanme compartir con ustedes una experiencia que llega al fondo del asunto. En uno de mis primeros talleres con calculadoras gráficas, los participantes estaban experimentando y practicando con el cambio de escala de los gráficos. En un momento dado, uno de los profesores de cálculo en el fondo del salón levantó su calculadora y exclamó: "¡Acerqué tanto este gráfico que se ve una línea recta!" (ver figura 1).

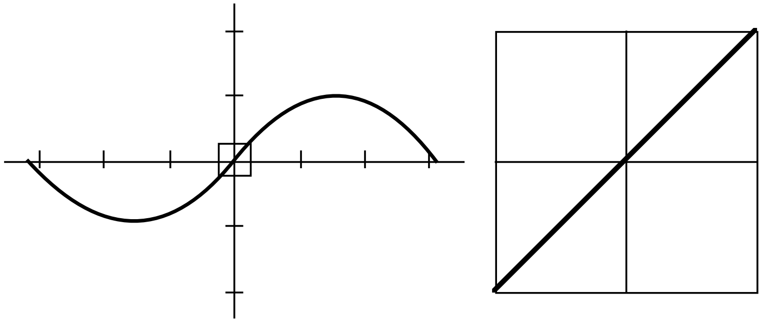


Figura 1. La linealidad local aproximada de y = sen x se aprecia al hacer un acercamiento

De pronto se detuvo, y casi se podía ver el bombillo encendido encima de su cabeza. “Eso es algo realmente significativo, o no?” En este momento quedó capturado lo que yo creo es uno de los cambios en énfasis más interesantes que la tecnología puede aportar al cálculo: la noción de *linealidad* local aproximada como la propiedad clave de las funciones diferenciables. Esta noción es precisamente fuente de resultados importantes y profundos en cálculo diferencial, y el combustible de muchas de sus aplicaciones.

Lo que resulta trascendental de la nueva tecnología gráfica es que hace de la linealidad local un evento visual accesible y dinámico. Con la simple aproximación al gráfico de una función diferenciable, nos volvemos testigos activos de este comportamiento local de la función (tal y como al alejarnos podemos observar directamente el comportamiento global o asintótico de la función). Permítanme resaltar algunas de las ventajas de este cambio de énfasis.

Tangentes y las mejores aproximaciones lineales

En el curso tradicional de cálculo, la derivada en un punto es a menudo descrita como la pendiente de la tangente, la cual a su vez se define como el límite de las inclinaciones de las secantes. La construcción de esta tangente rápidamente se convierte en un problema de la gallina y el huevo. El estimar visualmente la pendiente de una tangente dibujada a mano en un gráfico también dibujado a mano, constituye una propuesta engañosa (y poco exacta), que puede incluso llegar a crear dudas en las mentes de los estudiantes sobre la existencia de esa recta tangente. Encontrar el límite de las pendientes de las secantes a mano es un trabajo considerable aun para funciones polinomiales simples. Por lo tanto, el problema de hallar la ecuación de una recta tangente generalmente es uno que *viene* después del desarrollo de las reglas de manipulación simbólica para fórmulas derivativas. El resultado final de la manipulación simbólica es una función lineal definida *globalmente* $y = mx + b$ (esto es, definida para todos los números reales).

Ahora, la idea de una tangente como gráfico de una aproximación lineal parece extraña, ya que la recta tangente es claramente una horrible aproximación para la mayoría de los valores. Por ejemplo, la función constante $y = 0$ parece ser una mejor aproximación lineal global a la curva del seno, que la aproximación de tangente lineal en el origen (ver figura 2).

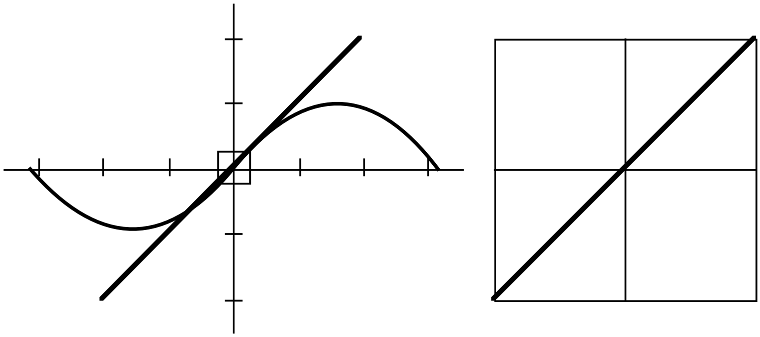


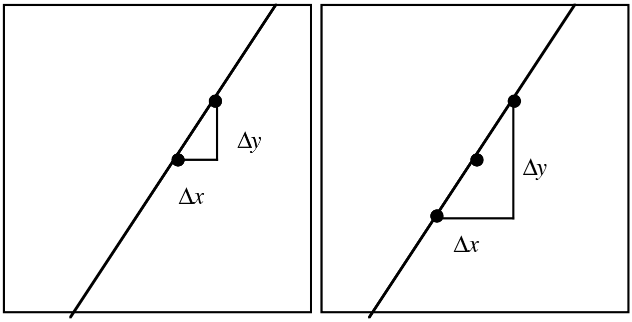
Figura 2. La tangente es una buena aproximación local sólo a la gráfica de una función

El contraste, el simple acercarmiento en una gráfica de una función diferenciable hace que la noción de una aproximación lineal única sea evidente por sí misma. De hecho, si se tuviera que graficar tanto la función original como la recta tangente en una escala que acercara lo suficiente, los gráficos no podrían distinguirse el uno del otro. Es más, es claro que esta aproximación realmente sólo es "mejor" en un sentido local.

Estimación numérica de la derivada

Escoger dos puntos para obtener la pendiente de esta línea aparentemente recta es equivalente a encontrar la pendiente de una secante, y el cálculo de una secuencia de estos cocientes se facilita en gran medida por la presencia de la tecnología. Esta es una característica no gráfica invaluable de la nueva generación de calculadoras: la habilidad de definir con facilidad una función o una expresión para su evaluación repetida. Para calcular el cociente diferencial de un polinomio cúbico para una secuencia de este tipo, se necesita una cantidad ridícula de pulsaciones en la mayoría de las calculadoras científicas, pero para una calculadora gráfica, el cociente diferencial sólo tiene que ser definido una vez y la convergencia de una secuencia y sus valores pueden ser investigados fácilmente.

La decisión sobre la pareja de puntos que se debe utilizar para una buena aproximación de la pendiente de la línea tangencial constituye una pregunta interesante. La figura 3 muestra dos posibilidades (el punto de tangencia es el punto en el centro de la ventana).



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Figura 3. Cocientes diferenciales y simétricos diferenciales

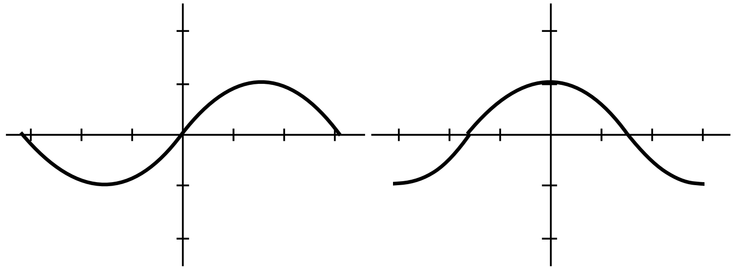
La primera elección de puntos representa el cociente diferencial para un cambio positivo en la entrada de Δx; el segundo representa lo que se denomina cociente simétrico diferencial, donde los dos puntos utilizados se localizan simétricamente con respecto al punto de tangencia. El cociente simétrico diferencial tiende a ser una aproximación mucho más precisa de la pendiente en la mayoría de los puntos. No obstante, genera más errores provenientes de las consideraciones de simetría. Por ejemplo, el cociente simétrico diferencial es 0 en $x = 0$ para la función de valor absoluto, donde ninguna pendiente está definida.

La derivada como función

Cuando progresamos de la noción de derivada en un punto a la de derivada como función, de nuevo la tecnología proporciona maravillosas oportunidades para establecer la conexión entre las dos a nivel gráfico. Al considerar el cociente diferencial en sí mismo como una función, este puede ser utilizado para aproximar la función derivada. La figura 4 ilustra esto para la función seno (al utilizar $\Delta x = .01$ se produce una gráfico notablemente cercano al gráfico de la función coseno).

La posibilidad de graficar fácilmente tanto una función como su derivada en el mismo conjunto de ejes nos da la oportunidad de considerar la relación gráfica libre de trabas, sin el filtro de las manipulaciones simbólicas.

Esto ha dado origen a dos de mis ejercicios de clase favoritos: uno es graficar una función y su derivada, sin proporcionar las fórmulas para ninguna de las dos, y hacer que los estudiantes determinen cuál es cuál. Otro, consiste simplemente en pedirle a los estudiantes que predigan la apariencia del gráfico de la derivada a partir de la apariencia del gráfico de la función original. Al usar la tecnología se obtiene acceso a una realimentación inmediata y satisfactoria.



$y = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + 0.01) - \operatorname{sen}(x)}{0.01}$

Figura 4. La gráfica del cociente diferencial se aproxima a la derivada del gráfico de la función

Los papeles se han invertido. Los gráficos generados por la tecnología pueden ser usados para comunicar eficientemente y discutir el significado de la derivada en lugar de usar la derivada como una herramienta para graficar. ¡Graficar se ha convertido en el medio y no en el fin del cálculo!

Las capacidades numéricas y gráficas de las calculadoras entran a jugar un papel en el estudio de derivadas de orden mayor. Los cocientes de la segunda derivada pueden ser fácilmente evaluados y el gráfico de una segunda derivada superpuesto al gráfico de la función original y su primera derivada, lleva a un verdadero aprendizaje por descubrimiento por parte de los estudiantes. Es más probable que los estudiantes noten que un cero de la segunda derivada indica una proporción de cambio extrema más que un cambio en concavidad. Inclusive las derivadas parciales de primer y segundo orden de funciones de varias variables, pueden ser investigadas en una simple calculadora gráfica. Al “congelar” los valores de todas las variables independientes menos una y hacer un acercamiento al gráfico de la función resultante de esta variable, se puede identificar las derivadas parciales de primer orden. Al examinar secuencias de estos gráficos parametrizadas por valores de otra variable, se obtiene una película que proporciona información acerca de las derivadas parciales de segundo orden.

RECUPERAR LA GRACIA DE LAS ANÉCDOTAS DEL CÁLCULO

La habilidad de exhibir la linealidad local aproximada de funciones diferenciales de una manera visual tan dinámica, sólo con hacer un acercamiento al gráfico, ha ocasionado un cambio profundo en la manera de enseñar cálculo. Permítanme compartir algunas “anécdotas” sobre las nuevas percepciones que mis estudiantes y yo hemos compartido a través del uso de las calculadoras gráficas.

Una anécdota de dos líneas –La regla de l'Hôpital

Primero, consideremos un problema de álgebra: dadas dos rectas no verticales que se cruzan en el mismo punto a sobre el eje x (ver figura 5), compare la razón de las coordenadas y en $x = b$ con la razón de las respectivas pendientes de las líneas.

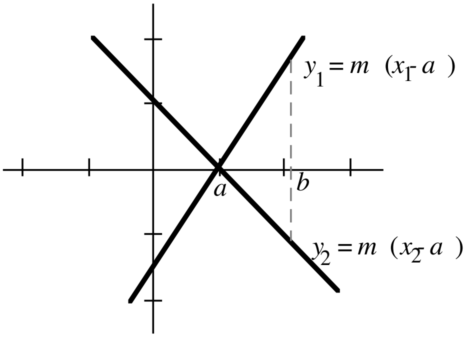


Figura 5. ¿Cuál es la razón y_1 / y_2 en $x = b$?

Unos pocos cálculos revelan que las razones son las mismas:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Ahora, supongan que tenemos dos funciones f y g que tienen un cero en común y que son diferenciales en $x = a$. Ya que f y g son aproximadamente "localmente lineales" en $x = a$, el hacer un acercamiento en su gráfico puede crearnos una imagen exactamente como la de abajo (ver figura 6).

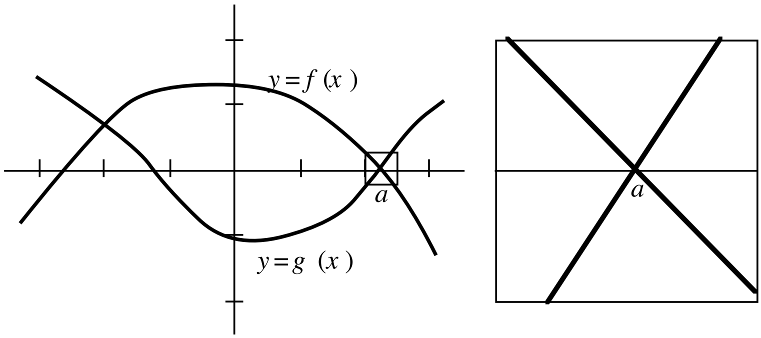


Figura 6. Manera de motivar la regla de l'Hôpital gráficamente: Si $f(x)$ y $g(x)$ se aproximan a 0 cuando x se aproxima a a, entonces el límite de la razón $f(x)/g(x)$ es el mismo que la razón de $f'(x)/g'(x)$

Una anécdota de dos ecuaciones diferenciales —Campos de pendientes

La noción de linealidad local puede ser sacudida para proporcionar una herramienta visual fantástica con el objeto de visualizar las propiedades cualitativas de una *antiderivada*, o más generalmente, las soluciones a funciones diferenciales. Para ilustrar la simplicidad de la idea, considere la ecuación diferencial simple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Recordemos que la derivada nos da esencialmente información sobre la pendiente local. En otras palabras, esta ecuación diferencial nos dice que un acercamiento del gráfico de una solución $y = f(\mathrm{x})$ en cualquier valor particular de x se vería como un trozo de la línea con pendiente$1/x$. Para plasmar esta información gráficamente, podríamos trazar varios acercamientos representativos de estas curvas de solución en un tramado de puntos de nuestra elección, como muestra la figura 7.

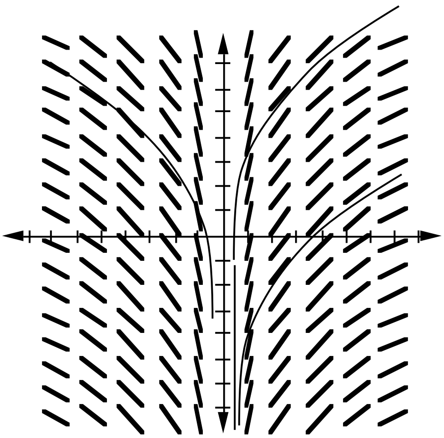


Figura 7. Un campo de pendiente para la ecuación diferencial dy/dx =1/x y algunas curvas posibles de solución (los puntos de la cuadrícula están espaciados 0.25 unidades aparte en la ventana [-2,2] por [-2,2])

Los campos de pendientes permiten a los estudiantes ver muchos de los aspectos gráficos cualitativos de las antiderivadas, incluyendo lo que relaciona a miembros de la familia de curvas. Ellos pueden estar acostumbrados a investigar ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dx = G(x, y)$, donde G es una expresión en x y y. ¡Estas ecuaciones diferenciales pueden desafiar la solución analítica!

Ahora, echemos otro vistazo a nuestro ejemplo de campo de pendiente para $dy/dx = 1/x$. Una solución $y = f(x)$ a esta ecuación diferencial satisface $f'(x) = 1/x$. Si g es un inverso de esta función f, entonces, por el teorema de la función inversa para las derivadas, debemos tener

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(1/x)} = x = g(y) .$$

En otras palabras, g debe ser su propia derivada y la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y .$$

Simplemente al reflejar nuestro campo de pendiente previo con respecto a la línea $y = x$ (tal y como hacemos con los gráficos de funciones inversas), obtenemos el campo de pendiente para esta ecuación diferencial nueva y una nueva apreciación de las relaciones fundamentales entre logaritmo natural y funciones exponenciales (ver figura 8).

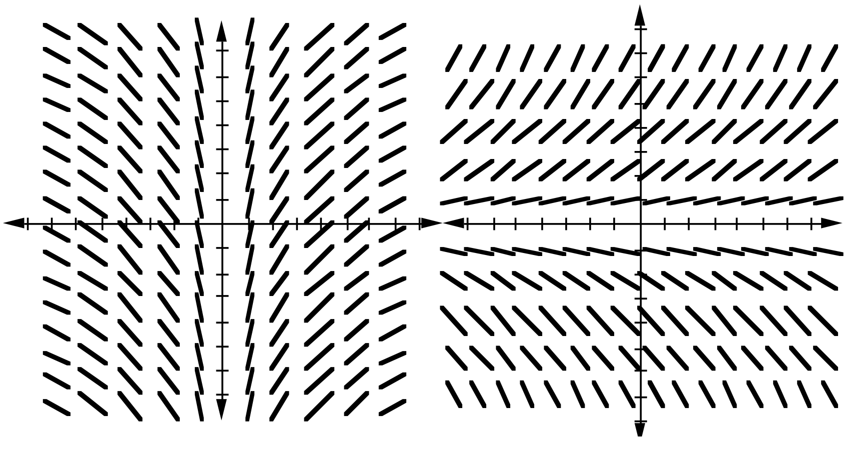


Figura 8. Campos de pendientes para $(dy)/(dx) = 1/x$ *y para* $(dy)/(dx) = y$

Una anécdota de dos problemas —El teorema fundamental del cálculo

La principal anécdota de todos los que cursan el primer año de cálculo es el teorema fundamental del cálculo. Desafortunadamente, la enseñanza tradicional del cálculo tiende a relegar este profundo teorema al nivel de una ayuda computacional para integrales definidas, por lo menos en la mente de los estudiantes. El teorema fundamental establece que podemos fabricar una antiderivada “por pedido” para cualquier función continua: dada una función continua f, la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

satisface la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$ (con la condición inicial $F(a) = 0$). En su lugar, los estudiantes quedan impresionados con un simple corolario de este resultado: si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ni mencionemos el hecho de que se necesita ser increíblemente afortunado para encontrar una función para la cual uno conozca una antiderivada cerrada. ¡Por eso nos aseguramos de que los estudiantes corran con esta suerte en los libros de texto! (Un profesor de química, en sus sesenta, una vez me comentó que usaba la integración diariamente en su investigación y sin embargo no había visto una integral como ésta desde el cálculo para principiantes).

Si queremos que los estudiantes aprecien el teorema fundamental del cálculo y de hecho descubran por ellos mismos este extraordinario resultado, entonces la tecnología nos proporciona nuevas perspectivas y oportunidades. Aquí tenemos tres aproximaciones diferentes que he empleado para llevar a los estudiantes a encontrar esta importante “gracia” por ellos mismos.

1) Use la calculadora gráfica para trazar la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,.$$

Trace el gráfico de esta derivada y compárelo con el de $y = f(x)$.

2) Use la calculadora gráfica para trazar un campo de pendiente para la ecuación diferencial $(dy)/(dx) = f(x)$ y luego superponga el gráfico de la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,.$$

¿Se ajusta el gráfico al campo de pendiente?

Para estos dos métodos, una buena interrogación que continúe con el proceso es preguntar el efecto de cambiar el límite menor de integración de a a algún otro número (una translación vertical). El tercer método compara las soluciones a dos problemas muy diferentes.

Problema I

Use una sumatoria de Riemann con un número n de subintervalos de igual longitud para estimar

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Solución I

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \ldots + f(a+(n-1)\,\Delta x)\,\Delta x\,.$$

Problema II

Use el método Euler con n pasos para predecir $F(b)$, dado que F satisface la ecuación diferencial $F'(x) = f(x)$ y la condición inicial $F(a) = 0$.

Solución II

El método Euler es fácil de motivar con campos de pendientes. Tenemos un punto inicial $(a, 0)$ en el gráfico de nuestra solución $y = F(x)$. También tenemos la pendiente de la curva en ese punto, $F'(a) = f(a)$ a saber. Al usar nuestro diferencial determinado como $\Delta x = (b-a)/n$, podemos estimar el valor de $F(a+\Delta x)$ como $F(a) + \Delta y \approx f(a)\,\Delta x$. Podemos repetir nuevamente este proceso en el punto nuevo $(a+\Delta x, f(a)\,\Delta x)$, y continuar hasta obtener una predicción.

$$F(b) \approx f(a)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \ldots + f(a+(n-1)\,\Delta x)\,\Delta x\,.$$

La “gracia” proviene de notar que la solución aproximada para la ecuación diferencial y su condición inicial es exactamente la misma de la solución aproximada para nuestro primer problema de encontrar la integral definida. ¡Esto sugiere fuertemente que los dos problemas originales deben estar relacionados muy de cerca!

Una anécdota de dos funciones —acercamientos de potencia

Suponga que $f(0) = g(0)$. Podríamos decir que f y g *concuerdan* en $x = 0$, pero ¿qué tan bien? ¡Podemos medirlo empíricamente usando una calculadora gráfica! Nuestro criterio está dado por los gráficos de $y = |x|^n$. Si se acerca sucesivamente en el gráfico de tal función en (0,0) con una escala horizontal factor de 10 y una vertical factor de 10^m (a esto lo llamamos un *acercamiento de potencia* de orden m), entonces, algunos cambios cualitativos pueden hacerse evidentes en la apariencia del gráfico:

- Si $m < n$, entonces, el acercamiento de potencia hace que el gráfico se vea más puntudo.
- Si $m > n$, entonces, el acercamiento de potencia hace que el gráfico se vea aplanando.
- Si $m = n$, entonces, el acercamiento de potencia no modifica la apariencia del gráfico.

Al emplear los acercamientos de potencia de varios órdenes en el gráfico de $y = |f(x) - g(x)|$, podemos determinar empíricamente el orden de acuerdo de las dos funciones en $x = 0$. Si una elección particular de m en el acercamiento de potencia hace que el gráfico se vea más puntudo en el origen, fue que escogimos un m muy pequeño. De la misma manera, si nuestra elección hace que el gráfico se vea aplanado, fue que escogimos un m muy grande. Cuando hemos encontrado una elección de m que después de varios acercamientos repetidos no modifica la apariencia del gráfico de $y = |f(x) - g(x)|$ fue que encontramos el orden de acuerdo de f y g en $x = 0$.

En cambio, si tenemos $f(a) = g(a)$, entonces podemos usar los acercamientos de potencia centrados en el punto $(a, 0)$ para detectar el orden de acuerdo entre dos funciones en $x = a$. Se deja al lector la consideración de la relación entre el orden de aproximación que se encontró al experimentar con los acercamientos de potencia y el término principal de la expansión de la serie de Taylor de $f(x) - g(x)$. Ensáyelo con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ en $x = 0$.

COMENTARIOS FINALES

Comenzamos con el poder del acercamiento para introducir la idea de límite en cálculo y terminamos con los acercamientos de potencia como herramienta para la investigación de aproximaciones de funciones. La calculadora gráfica puede ser empleada para obtener ventajas a lo largo del primer año de cálculo y está cambiando de manera dramática la naturaleza del cálculo en la escuela secundaria en Estados Unidos.

Las capacidades numéricas y gráficas de la nueva tecnología están trayendo herramientas verdaderamente nuevas a la clase de cálculo. En particular, tenemos ahora los medios para realizar una aproximación multi-representacional al concepto de derivada: numéricamente al usar la calculadora para aproximar cocientes diferenciales de manera rápida y fácil; gráficamente para explotar la linealidad local de diferenciabilidad de una manera visual dinámica, y simbólicamente al usar tal vez los dos métodos tradicionales tanto como algunas capacidades simbólicas algebraicas que se encuentran hoy en día hasta en las máquinas portátiles. Se nos presenta la oportunidad de ayudar a los estudiantes a construir un tejido valioso de comprensión de la derivada, con múltiples conexiones entre las tres representaciones.

Algunos han comparado la comprensión de los estudiantes luego de un curso de cálculo con una curva exponencial de disminución (algunos sostienen que hay un salto de discontinuidad inmediatamente después del examen final). La asíntota horizontal de esta curva representa la esencia que los estudiantes retienen mucho después de que el curso ha terminado. Al proporcionarles la oportunidad de ver y hacer más con el cálculo, creo que podemos aumentar significativamente la comprensión asintótica de nuestros estudiantes. Tal vez la reacción más común que obtendremos en un futuro de la palabra ‘derivada’ será: “Ah, sí, es como cuando uno hace un acercamiento a un gráfico hasta que es lineal, y mide su pendiente”.

Calculadoras gráficas —la nueva generación

La capacidad de las generaciones más recientes de calculadoras gráficas para trabajar estadísticamente con datos tabulares (y en el caso de aparatos como el Laboratorio Basado en Calculadoras TI que puede inclusive *recolectar* los datos directamente) y adaptar los diferentes modelos a esos datos, proporciona las herramientas para ayudar a hacer posible este nuevo énfasis. En particular, el método estándar de examinar diferencias de primer y segundo grado en modelación produce una unión excelente con las derivadas de primer y segundo grado en cálculo. Por ejemplo, la figura 9 muestra datos que representan la población de bacterias durante un periodo de tiempo en un ambiente con recursos limitados.

Tanto la TI-83 como la HP-38G permiten calcular diferencias de primer y segundo orden de estos datos y trazar gráficas dispersas de listas de datos de los puntos. En la figura 9 se muestran los gráficos de los datos de puntos originales y las diferencias de primer orden donde podemos ver el punto de inflexión de una curva que corresponde al extremo de la otra curva.

tiempo en horas	población	primer Δ's	segundo Δ's
1	210		
2	232	22	
3	260	28	6
4	293	33	5
5	333	40	7
6	382	49	9
7	438	56	7
8	500	62	6
9	562	62	0
10	618	56	-6
11	667	49	-7
12	707	40	-9
13	740	33	-7
14	768	28	-5
15	790	22	-6
16	809	19	-3
17	825	16	-3
18	839	14	-2
19	850	11	-3
20	860	10	-1

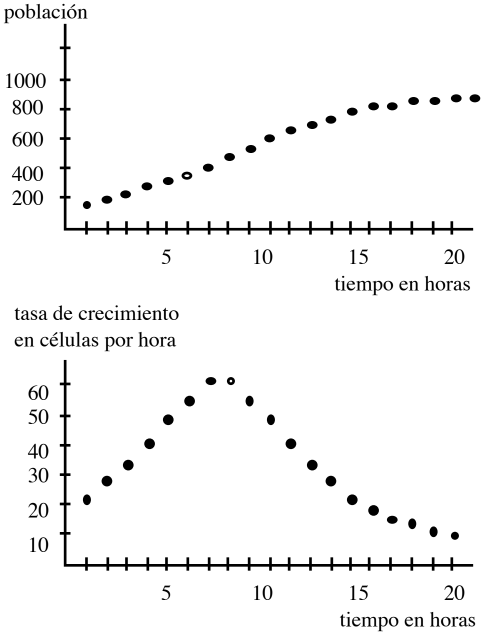


Figura 9. Análisis de diferencias de primer y segundo grado de una población de células de bacterias

Cada nueva generación de calculadoras gráficas trae herramientas más rápidas, fáciles y poderosas para las clases de matemáticas. Para enseñar cálculo con un enfoque multi-representacional, las avenidas numéricas y gráficas creadas por estas máquinas son casi esenciales. A medida que los nuevos aparatos portátiles traen más capacidad de manejo algebraico de símbolos a la clase de matemáticas (por ejemplo, la Texas Instruments TI-92), el debate sobre lo que constituye habilidades tradicionales esenciales se hará más pronunciado.

He encontrado muy útil la distinción entre herramientas matemáticas (máquinas diseñadas como herramientas generales de computación y generación de gráficos para las cuales los profesores diseñan actividades pedagógicas) y micromundos (programas de computador diseñados pedagógicamente para el aprendizaje de un área particular de las matemáticas). En general, las calculadoras gráficas han caído en la categoría de herramientas. Los ambientes de investigación geométrica de tipo Cabri proporcionan un ejemplo de micromundo portátil. Sin ser tan poderosa, la nueva Hewlett Packard 38G suministra ApLets creados para el usuario que son esencialmente micromundos miniatura en una amplia variedad de áreas matemáticas. Mientras la tecnología continúe transformando el panorama educativo, jugará, sin duda, un papel importantísimo en las clases de matemáticas a medida que nos acomodamos a un nuevo milenio.

Thomas P. Dick
Mathematics Department
Oregon State University
Corvallis, OR 97331-4605 USA
tpdick@math.orst.edu

LA TEXAS INSTRUMENTS TI–92 COMO VEHÍCULO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE FUNCIONES, GRÁFICOS Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

GREGORY D. FOLEY

Entre 1986-1990 el autor fue investigador principal del proyecto de Pre-cálculo Asistido por Computador y Calculadora (C^2PC) de la Universidad del Estado de Ohio, proyecto que desarrolló un currículo para estudiantes de últimos años de secundaria con el objetivo de reforzar sus habilidades de resolución de problemas, y mejorar su compresión de funciones, gráficas y geometría analítica. Este trabajo explora el interrogante: ¿Cómo debería revisarse este currículo a la luz de la Texas TI-92, un elemento de apoyo híbrido de calculadora gráfica y computador?

ANTECEDENTES

El proyecto C^2PC creado hace unos 13 años, es un esfuerzo continuo de desarrollo curricular y perfeccionamiento docente dirigido por Franklin Demana y Bert K. Waits. El componente de perfeccionamiento docente está basado en unos cursos intensivos de verano, de algunas semanas de duración, para profesores en ejercicio. Miles de profesores han asistido a estos cursos dictados en todo Estados Unidos. Los cursos están dirigidos por un grupo de profesores de secundaria como parte del programa Profesores Enseñando con Tecnología (Teachers Teaching with Tecnology, T^3), cuya dirección general se encuentra en la Universidad de Texas en Arlington. El componente de desarrollo curricular ha llevado a la creación de una serie de textos para secundaria y universidad cuya primera edición regular fue Demana y Waits (1990). Desde un comienzo, el currículo ha sido diseñado para ayudar a los estudiantes a adquirir las habilidades y compresión necesarias para el estudio exitoso del cálculo y las ciencias. Los materiales del texto se enfocan en funciones y gráficas porque la falta de comprensión de las gráficas y las funciones por parte de los estudiantes explica la mayor parte de sus dificultades en cálculo y porque el enfocar la atención de los estudiantes en estos puntos, mejora su disposición hacia la materia.

Demana, Waits, Clemens y Foley (1997) es una revisión y reelaboración importante de las anteriores ediciones que refleja la experiencia ganada durante dos años y medio de evaluación piloto y de campo, junto

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 49-59

con el proceso de maduración de siete años en los que se utilizaron las ediciones anteriores. El proceso de perfeccionamiento ha sido influenciado por las recomendaciones de la Asociación Matemática Americana de Universidades (1996) y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989) y por los movimientos de reforma al cálculo en Estados Unidos. Para proporcionar apoyo y balance al enfoque en funciones y gráficas, el currículo desarrolla habilidades y comprensión en álgebra y trigonometría a la vez que ayuda a los estudiantes a aprender cómo modelar problemas de la vida real.

Se han realizado numerosos estudios de investigación relacionados con este proyecto. Algunos ejemplos son Browing (1989), Dunham y Osborne (1991) y Quesada y Mazwell (1994). Otras investigaciones están resumidas en Dunham y Dick (1994).

Las características distintivas del currículo C^2PC incluyen aplicaciones reales a datos genuinos (à la Freundenthal, 1991); la conexión de representaciones verbales, algebraicas, numéricas y gráficas; el uso de calculadoras gráficas y tecnología asociada; una aproximación sistemática a la resolución de problemas; y el desarrollo de los cimientos del cálculo. El uso de la calculadora gráfica está integrado a lo largo del currículo. Esta tecnología se utiliza para ayudar a visualizar y resolver problemas y desarrollar las habilidades de visualización de gráficas por parte de los estudiantes. Las funciones de creación de tablas, matrices y estadísticas se explotan también. Los énfasis matemáticos que se abarcan son la visualización de pantallas y escala, comportamiento local de funciones, comportamiento final de funciones, soluciones gráfico-numéricas, transformaciones geométricas y representaciones de conexión múltiple.

El proceso sistemático de resolución de problemas que se repite a lo largo del material del currículo, depende de la conexión de las representaciones verbales, algebraicas, numéricas y gráficas de los problemas. Se espera que los estudiantes lean el enunciado para su comprensión, que determinen la situación de los problemas, qué respuesta se busca y los datos o condiciones relevantes y, a menudo, que dibujen una figura. El segundo paso es modelar el problema. Después, el problema se resuelve algebraicamente, o si esto es difícil o imposible, el problema se resuelve gráfica o numéricamente. A menudo un segundo método es empleado para sustentar o confirmar la solución. Si el segundo método es algebraico, usamos el verbo *confirmar* para enfatizar que el método establece el resultado de manera lógica y firme. Por otro lado, si el método de la segunda solución es numérico o gráfico, usamos el verbo *sustentar* para sugerir que estos métodos gráficos no son exactos sino aproximados y que ellos no establecen el resultado sino que solamente corroboran evidencia. El paso final de interpretación hace referencia al paso de revisión de Pólya (1957). Interpretar significa poner los resultados matemáticos de vuelta en el contexto de la situación problemática verbal. A lo largo de este proceso de resolución de problemas, los estudiantes establecen conexiones direccionales entre las representaciones verbales, algebraicas, numéricas y gráficas. La figura 1 muestra las 12 conexiones direccionales. La situación problemática se cierne sobre las otras como el contexto de soporte. La representación algebraica está en el centro del diagrama para indicar el papel central determinante del álgebra. Las tres representaciones matemáticas —algebraica, numérica y gráfica— están estrechamente relacionadas como se sugiere por el triángulo angosto que forman en la figura. La resolución, confirmación y sustentación ocurren dentro de este triángulo. Los nodos numéricos y gráficos están por debajo de los algebraicos para mostrar que estos primeros sustentan el álgebra. Las tres conexiones interiores sugieren los diferentes pasos que pueden estar involucrados en la realización de una interpretación de la solución; a menudo debemos pasar a través del álgebra para darle significado a tablas y gráficos.

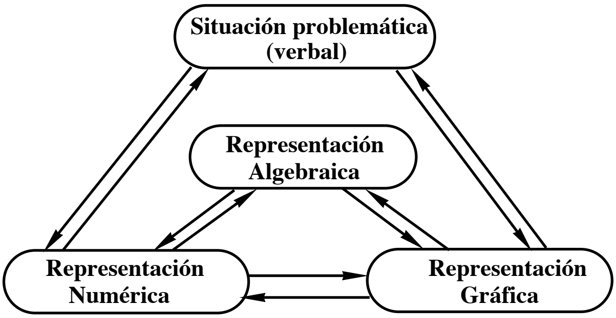


Figura 1. Conexiones entre las representaciones de un problema

OBJETIVOS DEL TRABAJO

¿Cómo debería revisarse el currículo C^2PC a la luz de la Texas TI-92, un elemento de apoyo híbrido de calculadora gráfica y computador? Este trabajo examina el interrogante teniendo en cuenta las capacidades de la TI-92:

- operar con enteros, números racionales, números reales o números complejos;
- definir, manipular algebraicamente, graficar y tabular funciones de una variable y ecuaciones paramétricas (funciones de valor vectorial en dos dimensiones definidas paramétricamente); y
- resolver ecuaciones, encontrar ceros de funciones y factorizar y expandir expresiones.

La pregunta acerca de cómo debería revisarse el currículoC^2PC a la luz de otras características de la TI-92 (que se enumeran a continuación) no se considera aquí, aunque merece una investigación cuidadosa:

- definir, manipular algebraicamente, graficar y tabular secuencias, ecuaciones polares y funciones de dos variables;
- operar en listas, vectores y matrices cuyos datos sean enteros, números racionales, números reales o números complejos;
- organizar, presentar, procesar y analizar datos;
- escribir, almacenar, editar y ejecutar programas; y
- construir y explorar objetos geométricos de manera dinámica e interactiva.

Se consideran brevemente las capacidades algebraicas, que junto con otras características similares a las de un computador separan a la TI-92 de las calculadoras gráficas ordinarias. En el nivel introductorio de álgebra la pregunta ha sido respondida, por lo menos parcialmente, en forma de artículo por Heid (1989) y en forma de texto por Fey, Heid, et al. (1995). El trabajo realizado por Fey, Heid y sus colegas proporciona una base sobre la cual se puede construir. Además, la investigación extensiva y el desarrollo del álgebra por computador como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas de pre-grado en los proyectos de reforma al cálculo en los Estados Unidos (resumidos en Leitzel & Tucker, 1994, y Tucker, 1990), en la misma línea el trabajo de Tall (1992) y muchos otros dan posibles direcciones hacia las cuales se puede apuntar. Artículos recientes sobre la TI-92 (Fischbeck, 1996; Waits y Demana, 1995) ofrecen ideas adicionales.

EJEMPLOS PARA CONTEMPLAR

La Texas Instruments TI-92 con capacidades de *Derive* es una magnífica calculadora de cuatro funciones. De hecho, sería interesante investigar el uso de la TI-92 en manos de niños de 5 a 10 años de edad, quienes podrían explorar conteo y otros patrones básicos con números ya que la TI-92 no salta a notación científica tan pronto como lo hacen otras calculadoras (ver la figura 2).

A medida que los niños se hacen más grandes, ellos pueden investigar cuántas manos son posibles en el juego de cartas “bridge” (635 013 559 600), descubrir por qué la representación decimal de 25 termina en seis ceros al considerar su primera factorización y realizar aritmética racional exacta con facilidad. Estas tres actividades se sugieren en la figura 3.

La capacidad de realizar aritmética racional de la TI-92 va más allá de la computación básica. Por ejemplo, la aproximación racional a π, de

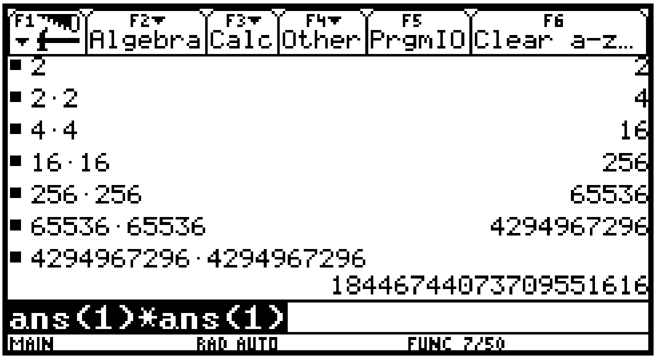


Figura 2. Patrón de números de escuela primaria

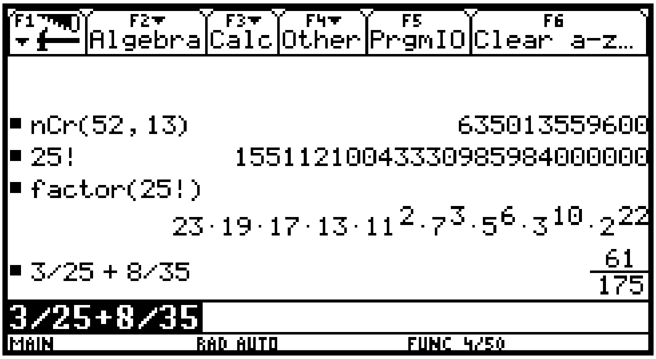


Figura 3. Combinatorios, teoría de números, aritmética racional

Ramanujan's, que no puede distinguirse del π real en la mayoría de las calculadoras, no es un problema para la TI-92, como se ilustra en la figura 4. Esto nos lleva al reino de las matemáticas de pre-cálculo, donde, entre otras cosas, deseamos distinguir entre valores aproximados y exactos y entre números racionales e irracionales. (A propósito, el comando "approx" empleado en la figura 4, puede evitarse fácilmente al usar la tecla especial con el diamante verde).

La TI-92 con su inclinación a las respuestas exactas, produce algunos resultados para funciones transcendentales que dan qué pensar, como se muestra en la figura 5. (Las dos últimas respuestas se obtienen solamente cuando el modo complejo ha sido escogido con anterioridad).

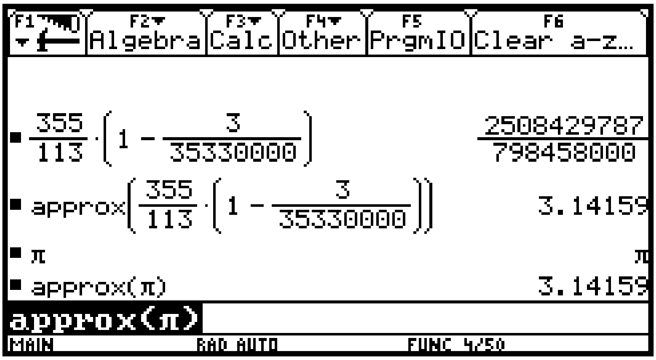


Figura 4. Aproximación a π de Ramanujan's

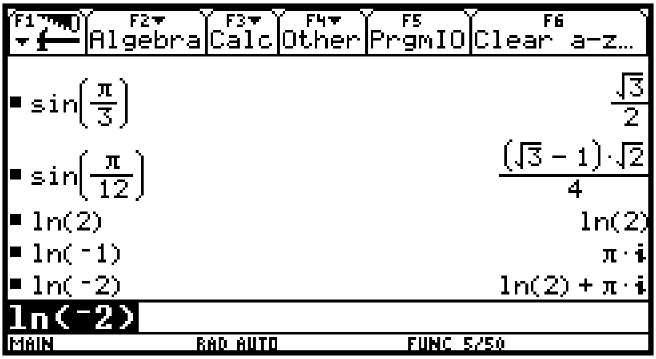


Figura 5. Valores transcendentales de funciones

La resolución de ecuaciones cuadráticas, también, puede ser realizada en el contexto de los números complejos o reales como se indica en la figura 6.

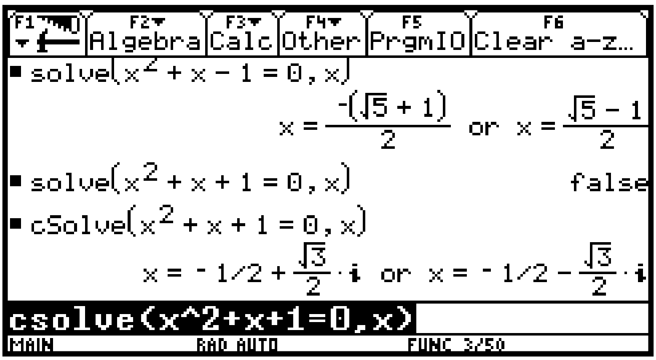


Figura 6. Resolución de ecuaciones cuadráticas

La factorización de polinomios puede realizarse a través del campo de números racionales, reales, complejos o inclusive a través de los números complejos con partes reales, racionales e imaginarias, como se expone en las figuras 7 y 8. La figura 8 también ilustra la potencia del comando “define”, que abre las puertas a una aproximación funcional a las matemáticas.

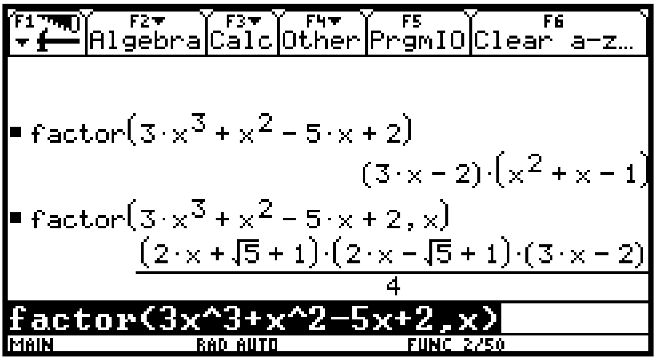


Figura 7. Factorización de una raíz cúbica a través de los números racionales y reales

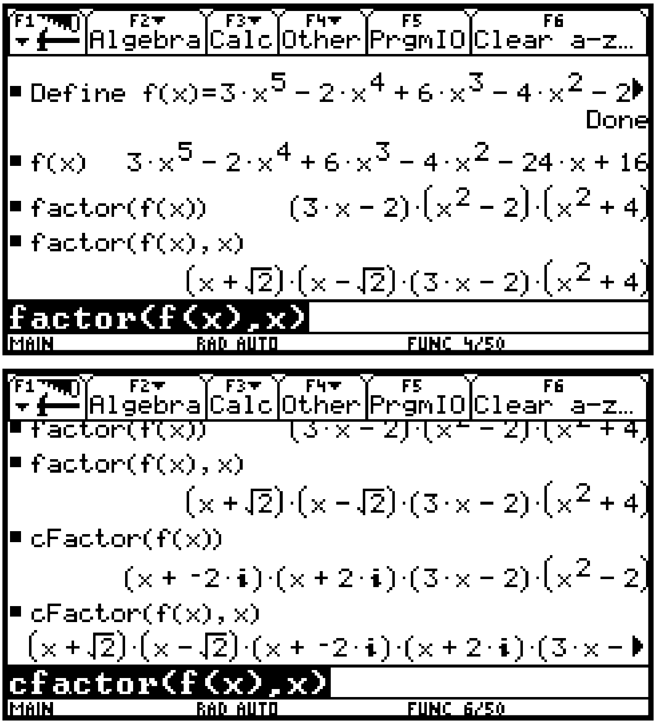


Figura 8. Definición y factorización de un polinomio de quinto nivel

Los ejemplos restantes provienen de mi experiencia como profesor de un curso preparatorio sobre resolución de problemas matemáticos para profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad Estatal Sam Houston, en enero-mayo de 1996. El texto del curso era “Números complejos y geometría” por Hahn (1994), un libro maravilloso para tal curso. El grupo también trabajó con Dunham (1991) y Embse (1993). El artículo de Sunham encaja con los ejemplos mostrados en las figuras 6-8, y las ideas de Embse inspiraron la siguiente solución a uno de los problemas de Hahn: encuentre los menores enteros positivos m y n que satisfagan

$$(1 + i\sqrt{3})^m = (1 - i)^n \quad \textit{(Hahn, 1994, p. 51).}$$

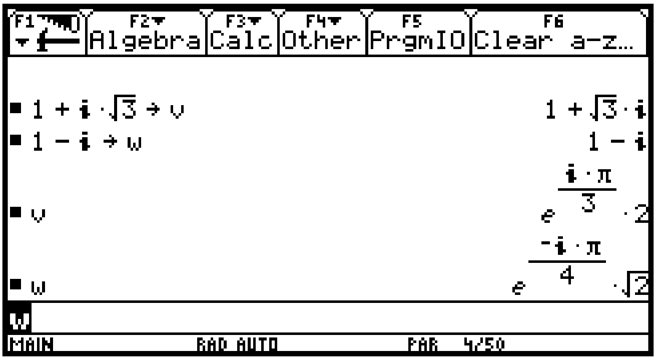


Figura 9. Números complejos v y w en formatos polar y rectangular

Solución

Almacene $1 + i\sqrt{3}$ como v y $1 - i$ como w. Cambie a formato de visualización polar y evalúe v y w para revelar sus argumentos (ángulos) y módulos (valores absolutos), como se muestra en la figura 9. Observe que debido a que $|w|^2 = |v|$, n debe ser el doble de m. Así que en modo de gráficos paramétricos, sea $m = t$ y $n = 2t$ (vea la figura 10).

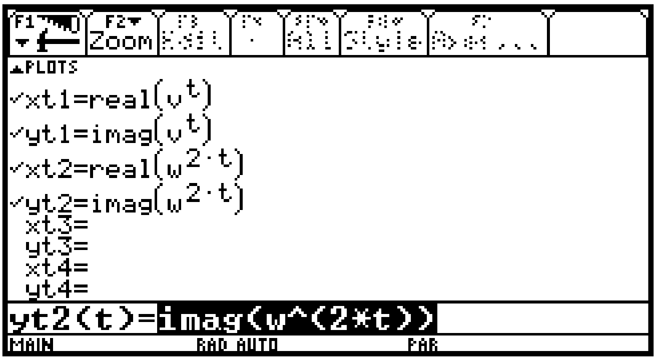


Figura 10. Ecuaciones paramétricas para graficar las potencias de v y w

Establezca un rango apropiado de valores t y una pantalla de visualización apropiada, como en la figura 11. Grafique las partes reales e imaginarias de v^t y w^{2t} y trace a lo largo del gráfico hasta la solución $t = 12$ (vea la figura 12), lo que implica $m = 12$ y $n = 24$. QED.

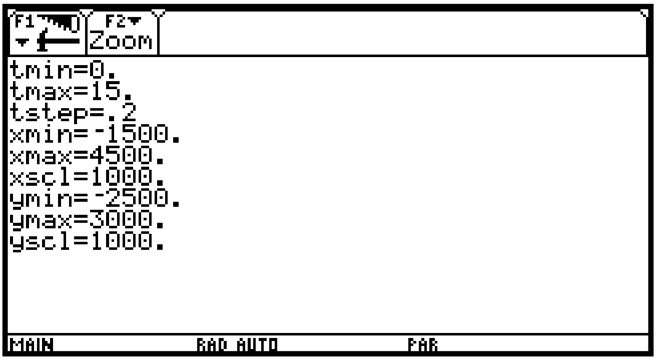


Figura 11. Los valores t y la pantalla para las potencias de v y w

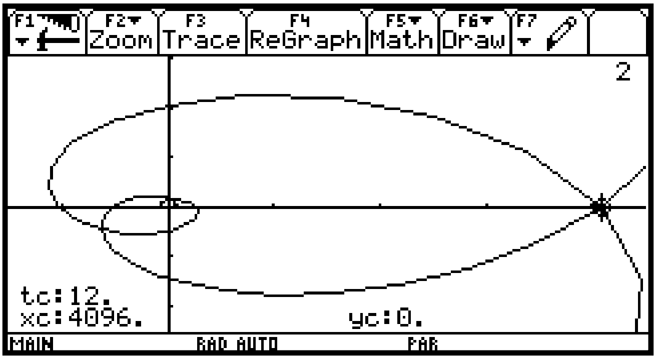


Figura 12. Gráfico de las potencias de v y w, con coordenadas para w^{24}

El siguiente ejemplo muestra el poder de la geometría analítica y compleja y la TI-92: para cualquier número complejo $z \neq 0$, mostrar que $z, -\bar{z}, 1/z, -1/\bar{z}$, 1, y 1 son cocíclicos (Hahn, 1994, p. 117).

Solución

Cuatro puntos en el plano euclidiano son cocíclicos si y sólo si la razón cruzada de la representación de sus números complejos es un número real. Así pues definimos la razón cruzada y z en la TI-92 y conmutamos la razón cruzada de cuatro de los puntos. Como el resultado es un número real, los cuatro puntos involucrados en el cómputo son cocíclicos. Los otros dos puntos, -1 y $-1/\bar{z}$, son las imágenes espejo a través del eje imaginario de 1 y $1/z$

respectivamente y porque el centro de los cuatro puntos originales debe, por simetría, descansar en el eje imaginario, todos los seis puntos son cocíclicos. QED.

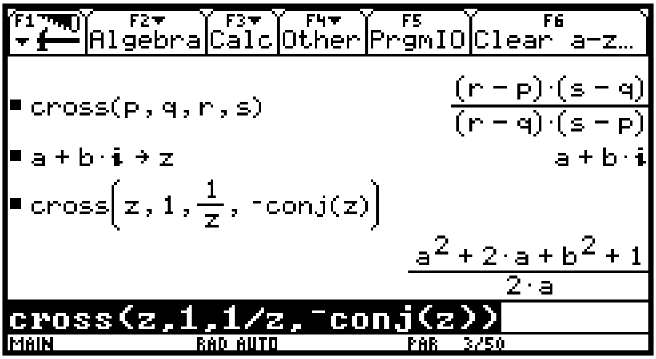


Figura 13. Combinatorios, teoría de números, aritmética racional

La TI-92 abre de par en par el campo de la geometría analítica y compleja —un campo en donde los puntos en el plano son números que gozan del campo de propiedades y pueden ser considerados alternativamente como vectores, como pares cartesianos, o como pares polares, según lo indique la situación. Este es sólo uno de los muchos reinos matemáticos que se han hecho más accesibles para el estudiante de pre-cálculo gracias a la TI-92. Esta es una calculadora del futuro cercano. ¿Qué contenido, secuencia y didáctica requiere el nuevo mundo para la enseñanza y aprendizaje de funciones, gráficas y geometría analítica?

REFERENCIAS

American Mathematical Association of Two-Year Colleges (1995). *Crossroads in mathematics: Standards for introductory college mathematics before calculus*. Memphis, TN: AMATYC.

Browning, C. A. (1989). Characterizing levels of understanding of functions and their graphs (Doctoral dissertation, The Ohio State University, 1988). *Dissertation Abstracts International*, *49*, 2957A.

Demana, F., & Waits, B. K. (Authors); Osborne, A., & Foley, G. D. (Collaborators). (1990). *Precalculus mathematics, a graphing approach*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Demana, F., Waits, B. K., Clemens, S. R., & Foley, G. D. (1997). *Precalculus: A graphing approach* (4th ed.). Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Dunham, P. H., & Dick, T. P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, *87*, 440-445.

Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning how to see: Students graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13* (4), 35-49.

Dunham, W. (1991). Euler and the fundamental theorem of algebra. *College Mathematics Journal*, *22*, 282-293.

Fey, J. T., Heid, M. K., et al. (1995). *Concepts in algebra: A technological approach*. Dedham, MA: Janson.

Fischbeck, S. (1996). TI-92 graphing calculator [software review]. *College Mathematics Journal*, *27*, 224-230.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hahn, L.-s. (1994). *Complex numbers and geometry* [Spectrum series]. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Heid, M. K. (1989). How symbolic mathematical systems could and should affect precollege mathematics. *Mathematics Teacher, 82*, 410-419.

Leitzel, J. R. C., & Tucker, A. C. (Eds.). (1994). *Assessing calculus reform efforts: A report to the community.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Quesada, A. R., & Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 205-215.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Tucker, T. W. (Ed.). (1990). *Priming the calculus pump: Innovations and resources* [MAA Notes No. 17]. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vonder Embse, C. B. (1993). Graphing powers and roots of complex numbers. *Mathematics Teacher*, *86*, 589-597.

Waits, B. K., & Demana, F. (1995). *The TI-92: The next revolution in hand-held computer enhanced mathematics teaching and learning*. Manuscript submitted for publication.

Gregory D. Foley
Associate Professor of Mathematics
Department of Mathematical and Information Sciences
Sam Houston State University
Huntsville, Texas 77341-2206
mth_gdf@shsu.edu

CAPÍTULO 6

CALCULADORAS GRÁFICAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN PAÍSES EN DESARROLLO

PEDRO GÓMEZ

Al permitirle al estudiante experimentar con "nuevas" formas de aprender y de "ver" las matemáticas, las calculadoras gráficas afectan el proceso de aprendizaje y, como consecuencia, pueden ejercer presión sobre profesores y diseñadores de currículo en el proceso de enseñanza. De esta forma, cuando se dan las condiciones adecuadas, esta nueva tecnología puede reforzar el proceso de cambio que está teniendo lugar en la enseñanza y el aprendizaje de algunas áreas de las matemáticas. Sin embargo, en los países en desarrollo no existen necesariamente las condiciones para que se establezca esta relación dinámica entre el currículo y la nueva tecnología. La utilización de las calculadoras presenta entonces una serie de riesgos y oportunidades. El efecto que ellas pueden tener en el comportamiento de los estudiantes y, por consiguiente, en el cuestionamiento que los profesores pueden hacer sobre su propia práctica, puede utilizarse en estos países como un medio para iniciar y consolidar un proceso de cambio a través de la innovación curricular y la formación de profesores. Los países desarrollados y la comunidad internacional pueden hacer aportes importantes en este sentido.

INTRODUCCIÓN

Este capítulo comienza presentando una breve descripción de los tres niveles del currículo y de dos visiones acerca de lo que significa enseñar y aprender matemáticas. En seguida, se describen las implicaciones de la introducción de las calculadoras en el currículo. Se consideran después el estado de la educación matemática en los países desarrollados y el papel de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esos países. Se describe a continuación el estado de la educación matemática en los países en desarrollo, para después identificar algunos de los riesgos y de las oportunidades que presenta la introducción de las calculadoras gráficas en estos países. Finalmente, se sugieren algunos de los aportes que los países desarrollados y la comunidad internacional de investigación en educación matemática pueden hacer a los países en desarrollo de tal forma que la utilización de las calculadoras gráficas se pueda emplear como uno de los medios para iniciar y potenciar un proceso de cambio en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en estos países.

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 61-73

CALCULADORAS GRÁFICAS Y CURRÍCULO

Los diversos capítulos que se publican en este volumen muestran algunas de las formas como la utilización de las calculadoras gráficas puede aportar a la comprensión de los estudiantes a través de un proceso más rico de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en el salón de clase[1]. No obstante, éste no es un efecto inmediato. No basta con tomar la decisión de introducir las calculadoras gráficas en el salón de clase para que se obtengan los efectos positivos de su utilización. Se debe indagar acerca de las condiciones que son necesarias para que la utilización de esta nueva tecnología sea provechosa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto nos lleva a reflexionar acerca de los efectos de la utilización de las calculadoras gráficas en el currículo y acerca de las visiones que se pueden tener sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

NIVELES DEL CURRÍCULO

Una perspectiva amplia del currículo involucra tres niveles de análisis: uno "macro" o social donde intervienen los factores sociales, políticos, economicos y culturales que definen las visiones, valores y tradiciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y también las necesidades y expectativas de la formación matemática de los ciudadanos; un nivel *meso* o intermedio en el que se ubica la institución educativa como espacio donde se encuentran elementos como las concepciones institucionales acerca del profesor, el estudiante y las matemáticas como saber cultural y saber a enseñar; y un nivel *micro* o didáctico donde se relacionan el profesor con sus conocimientos y creencias, y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático, a través del desarrollo de un currículo.

Los elementos culturales, políticos, económicos y sociales definen las características del entorno del sistema educativo en el área de las matemáticas. Estas características se manifiestan en las direcciones que toma la política educativa del gobierno y en la manera como se llevan a la práctica, a través de su influencia en las instituciones educativas. Allí se presentan una serie de concreciones de esas líneas sociales, las cuales se expresan en el diseño de un currículo que no sólo abarca la organización de los contenidos de la enseñanza, sino las posiciones ideológicas de la institución sobre lo que son las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, el perfil del profesor y del estudiante. Este currículo se desarrolla en la relación didáctica que se entabla entre el profesor y el estudiante en la construcción del conoci-

1. A lo largo de este capítulo el término "matemáticas" se refiere a aquella porción del currículo de matemáticas para el que tiene sentido utilizar las calculadoras gráficas. Esto es, las matemáticas del último ciclo de bachillerato y el primer ciclo universitario que incluye, entre otros, el álgebra avanzada, el precálculo y el cálculo diferencial e integral.

miento matemático cuando se manifiestan los objetivos a lograr, los principios de evaluación, la metodología de enseñanza y la organización del contenido (Rico, 1991; Gómez y Valero, 1995).

Visiones de las matemáticas

De acuerdo con la visión "tradicional" de lo que significa enseñar y aprender matemáticas, la comprensión del estudiante es esencialmente procedimental y simbólica. "Saber matemáticas" significa para el estudiante conocer un número suficiente de procedimientos (algoritmos) que le permiten transformar una expresión simbólica en una sucesión de otras expresiones, de tal forma que la última expresión de la lista tenga la forma que él reconoce como válida para proponer una respuesta. El estudiante debe ser capaz de reconocer qué algoritmos le corresponden a qué situaciones, debe conocer una forma válida del algoritmo y debe ser capaz de aplicarlo de manera correcta. Esta forma de ver y de trabajar en matemáticas es muy común; por ejemplo, la mayoría de los estudiantes que entran a la Universidad de los Andes en Bogotá la tienen (Gómez, 1995) y las evaluaciones que se han realizado en los colegios colombianos así lo demuestran (MEN, 1992). Este tipo de formación matemática es producto, al menos parcialmente, de una tradición de las matemáticas escolares de la cual el estudiante no es el único partícipe (Gregg, 1995). Esta visión de las matemáticas escolares no sólo se refiere al tipo de comprensión que tiene el estudiante, sino también al tipo de visión que él, el profesor, la institución y la sociedad tienen acerca de lo que son las matemáticas, de lo que significa aprender y comprender matemáticas y de lo que para ellos debe ser la enseñanza de las mismas. Para ellos, las matemáticas son principalmente un gran conjunto de expresiones simbólicas (fórmulas); saber matemáticas es conocer los algoritmos que permiten transformar estas expresiones en otras; y el buen profesor es aquel que presenta con mayor claridad los algoritmos, logra que los estudiantes los retengan y evalúa justamente este conocimiento (poniendo en las evaluaciones ejercicios que mantengan la forma de los ejemplos y ejercicios que se han hecho en clase, es decir, que sean equivalentes desde el punto de vista del algoritmo).

Por otro lado, se puede también describir una "visión alternativa" de lo que significa enseñar y aprender matemáticas. De acuerdo con esta visión, los objetos matemáticos existen para el estudiante (Cobb, 1993). Estos objetos matemáticos se encuentran representados en un conjunto interrelacionado de estructuras mentales. Estas estructuras se componen de nodos intensamente conectados de tal forma que un mismo concepto puede ser evocado desde diversos tipos de representación —no sólo la representación simbólica (Hiebert y Carpenter, 1992; Kaput, 1992)— y con diferentes niveles en su status operacional-estructural (Sfard, 1991; Douady, 1995). De esta forma el concepto no sólo evoca procedimientos, sino que el conjunto de procedimientos y el concepto en sí mismo se pueden ver como una globalidad que puede relacionarse con otros conceptos y procedimientos matemáticos. Cuando el estudiante "ve" los objetos matemáticos (en el sentido de que hay una multiplicidad de representaciones dentro de una estructura, que pueden ser evocadas por una situación problemática que involucra el concepto), entonces el estudiante puede construir un discurso matemático: puede y sabe que puede hablar acerca de estos objetos; el estudiante es consciente de la existencia de una realidad matemática que es independiente de la autoridad del profesor y del libro de texto; el formalismo del lenguaje matemático deja de ser un fin y se convierte en un medio; las expresiones simbólicas se perciben como uno de los múltiples sistemas de representación con los cuales puede referirse a dicha realidad matemática; y el conjunto de reglas sintácticas que lo rigen es visto como una consecuencia de las propiedades de los objetos matemáticos que conforman esta realidad. El estudiante tiene entonces una "sensación del símbolo" (Arcavi, 1994). Cuando el estudiante ve las matemáticas de esta manera él puede escribir y hablar sobre los objetos matemáticos en el mismo sentido en el que lo haría un matemático y esta actividad se convierte en parte central de su visión de las matemáticas como discurso acerca de unos objetos, sus características y sus relaciones que debe ser compartido, discutido y validado con los demás (Kilpatrick, 1995; Sterrett, 1992). Y cuando él ve los objetos matemáticos en este sentido, hay mayor probabilidad de que los recuerde con el transcurso del tiempo y de que pueda transferir ese conocimiento a entornos diferentes de aquellos donde los construyó. Desde esta perspectiva, saber más matemáticas significa tener nuevas formas de conocimiento, más complejas en su estructura, que le permitan al estudiante ver el conocimiento matemático con mayor amplitud y que, además de darle la oportunidad de aprender más y mejor, le permiten utilizar el conocimiento adquirido de maneras más potentes (Mayer, 1986).

Implicaciones de las calculadoras gráficas

Una implantación apropiada de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede tener efectos positivos en los tres niveles del currículo.

La calculadora ofrece al estudiante un medio y un sistema de representación adicional a los que ya tiene a su disposición. Al poner rápida y "automáticamente" a disposición del estudiante la representación gráfica de los objetos matemáticos que se encuentran involucrados en la tarea a realizar, la calculadora gráfica influye en el tipo de estrategias que él puede seguir para realizar la tarea (Mesa y Gómez, 1996). El estudiante tiene a su disposición el tiempo de trabajo que habría utilizado produciendo la gráfica por otros medios. El estudiante "ve" el problema, en el sentido de que la solución a éste deja de ser exclusivamente una situación en la que es necesario efectuar una sucesión de procedimientos que transforman unas expresiones simbólicas en otras. Cuando se efectúan manipulaciones simbólicas, éstas tienen sentido, al menos en cuanto a su relación con la representación gráfica. El estudiante puede y tiende a experimentar y a formular conjeturas, dado que la calculadora le permite rápidamente conocer los resultados de estos experimentos ("¿cómo es la gráfica de …?") y contrastar estas conjeturas ("¿qué pasa si …?"). El estudiante tiende, de manera natural, a verificar el resultado de su trabajo; a identificar cuándo el resultado no es válido; a reconocer que ha cometido errores; a buscar e identificar estos errores; a reconocer las causas que los produjeron; y a corregirlas. Finalmente, las características físicas (e.g., tamaño) de este nuevo medio de trabajo matemático inducen al estudiante a compartir y justificar sus realizaciones, a criticar el trabajo de sus compañeros y, en general, a generar un espacio más fértil de interacción social (Gómez y Rico, 1995; Gómez et al., 1996).

La introducción de esta nueva tecnología puede entonces tener un efecto dinámico en el sistema curricular en general y en el proceso de enseñanza, en particular. Las calculadoras le permiten al estudiante experimentar con "nuevas" formas de aprender y de "ver" las matemáticas. Al hacerlo, ejercen presión sobre los diseñadores del currículo y sobre los profesores para que ellos tengan en cuenta estos espacios dentro del proceso de enseñanza. De esta manera, la institución, al diseñar el currículo, y el profesor, al llevarlo a la práctica, pueden sentir la necesidad de adaptar sus visiones acerca del conocimiento matemático, de la forma como los estudiantes aprenden matemáticas y la forma como se debe enseñarlas, para reformular los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación (Carulla y Gómez, 1996).

Este proceso dinámico de interacción entre las calculadoras gráficas y el currículo puede entonces inducir y potenciar otro proceso: el de pasar de una visión "tradicional" de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje a una visión "alternativa" que siga más de cerca los lineamientos propuestos por la comunidad de educación matemática (i.e., NCTM, 1991).

Por otra parte, al aportar al proceso de transición de la visión "tradicional" de las matemáticas a la visión "alternativa" y, por ende, al enfatizar una comprensión más profunda y compleja que permite utilizar el conocimiento matemático de maneras más potentes, disminuyendo la importancia del conocimiento puramente algorítmico de tipo simbólico, la utilización de las calculadoras puede aportar a un cambio en la visión social de las matemáticas (Zarinnia y Romberg, 1987). La formación matemática deja de ser exclusivamente un requisito para que el individuo sea más productivo y capaz de utilizar la tecnología de una manera irreflexiva y pasa a ser un elemento central de la capacidad del individuo para analizar, reflexionar y tomar decisiones racionales acerca de su entorno (Skovsmose, 1992). De esta forma, la sociedad puede mirar a las matemáticas como un factor potenciador del desarrollo económico y de las capacidades del individuo para participar en los procesos políticos y sociales que le atañen.

Sin embargo, el aporte de las calculadoras gráficas a este proceso depende del estado de desarrollo de la sociedad en la que éste tiene lugar y de las condiciones en las que se encuentra la educación matemática en esa sociedad. Es por esta razón que se da una diferencia importante en los efectos sociales, institucionales y didácticos de la introducción de las calculadoras gráficas dependiendo del nivel de desarrollo del país en el que se realiza esta innovación curricular.

CALCULADORAS GRÁFICAS Y PAÍSES DESARROLLADOS

Desde hace varios años, la educación matemática de los países desarrollados está viviendo un proceso de cambio. Es el caso, por ejemplo, del movimiento de renovación que se ha generado en los Estados Unidos con motivo de la publicación de los estándares curriculares y de evaluación, los estándares para la enseñanza profesional de las matemáticas y los estándares para la valoración de las matemáticas escolares, entre otros (NCTM, l991a, 1991b, 1995). Es posible argumentar que este proceso de reforma se ha centrado en los aspectos técnicos, dejando a un lado los aspectos éticos; que ha subestimado la importancia de los profesores y de la escuela en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y que no ha llegado sino a una proporción relativamente pequeña de los profesores (Stanic y Kilpatrick, 1992; Usiskin, 1985). No obstante, este proceso de cambio se basa en una nueva visión acerca de las metas de la educación matemática, de la naturaleza de las matemáticas, de la forma en que ellas se pueden aprender y se deben enseñar, y de la utilización de la tecnología, entre otros. Esta es una visión compartida por toda una comunidad, tanto de profesores como de investigadores, que trabaja en pos de unos ideales determinados (Romberg, 1993). Por otra parte, en los países desarrollados se evidencia una gran disponibilidad de máquinas, junto con libros de texto y esquemas de formación de profesores que apoyan la utilización apropiada de la nueva tecnología. Finalmente, la comunidad de educación matemática de estos países ve con buenos ojos la utilización de la nueva tecnología, se están realizando gran cantidad de proyectos de investigación e innovación que involucran la tecnología y tanto las instituciones educativas, como la sociedad, apoyan este proceso de cambio (Demana et al., 1996).

Por estas razones, es posible esperar que las calculadoras gráficas aporten de manera positiva a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los países desarrollados. Ellas se convierten en un elemento catalizador de un proceso que ya se encuentra en marcha.

CALCULADORAS GRÁFICAS Y PAÍSES EN DESARROLLO

La situación es diferente en los países en vías de desarrollo. En Colombia, por ejemplo, la sociedad, el sistema educativo, las instituciones educativas y la mayoría de los profesores continúan teniendo una visión tradicional de las matemáticas (Agudelo, 1995). La comunidad de educación matemática se encuentra en un estado incipiente de desarrollo y no ha asumido aún una posición con respecto a las metas de la educación matemática, ni con respecto a su papel en la formación matemática del ciudadano. Los profesores de matemáticas se encuentran mal preparados, tanto en su conocimiento didáctico, como en su conocimiento matemático. Ellos no están acostumbrados a innovar. Su trabajo se restringe a seguir los lineamientos impuestos por un currículo oficial anticuado (Gómez y Perry, 1996). No existen libros de texto, ni esquemas de formación de profesores que apoyen la utilización de la tecnología, y hay una mínima disponibilidad de máquinas a precios relativamente altos. Esta situación genera dos tipos de actitudes con respecto a la utilización de las calculadoras gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: una actitud negativa y una actitud ciega.

Quienes asumen la actitud negativa consideran que la utilización de las calculadoras gráficas va a ser perjudicial para la formación matemática del estudiante. Por esta razón, los profesores las rechazan o, en caso de que se vean obligados a utilizarlas, adaptan la nueva tecnología a sus formas de ver y hacer las cosas, consolidando la visión tradicional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Como es natural, los exámenes de estado y los exámenes de admisión a las universidades están basados en y refuerzan esta visión tradicional acerca de lo que debe ser la formación matemática del estudiante y la forma como se puede lograr.

Quienes asumen la actitud ciega consideran que las calculadoras gráficas son “la” solución a los problemas de la educación matemática y que su simple introducción en el currículo puede aportar a resolver estos problemas. En este caso, los profesores buscan “recetas” que les indiquen como pueden utilizar la nueva tecnología y las instituciones educativas esperan resultados inmediatos como consecuencia de este “cambio metodológico”. Pero estos resultados no van a aparecer, dado que ni los profesores, ni los diseñadores del currículo han cambiado sus visiones. En poco tiempo, como ha sucedido en algunos casos con la informática educativa, se culpará a las calculadoras del bajo rendimiento de los estudiantes y se eliminará su uso.

RIESGOS

La introducción de las calculadoras gráficas presenta entonces riesgos y oportunidades para la educación matemática en los países en desarrollo. Al percibir la calculadora gráfica como la solución a los problemas de la formación matemática de los estudiantes, diferentes sectores de la sociedad, del sistema educativo y de las instituciones educativas, pueden presionar una "introducción forzada" de la tecnología dentro del salón de clase. En este caso, los profesores pueden asumir diferentes posiciones. Ya sea las rechazan de plano y no las utilizan en el salón clase; adaptan la tecnología a su manera tradicional de hacer las cosas; o aplican ciegamente un conjunto de recetas para su utilización. La utilización de la tecnología no tendrá entonces un efecto positivo en el rendimiento de los estudiantes. Por el contrario, se culpará a las calculadoras del bajo rendimiento de los estudiantes y ya sea se eliminará su uso o se utilizarán para reforzar la visión tradicional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De esta forma, las calculadoras gráficas no aportarán a la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. Por el contrario, reforzarán un *status quo*, opuesto a lo que se considera actualmente que debe ser la formación matemática del ciudadano.

El segundo riesgo consiste en que la tecnología sea rechazada de plano a todos los niveles. En este caso, el *status quo* no se modificará y se habrá perdido una oportunidad de cambiarlo.

OPORTUNIDADES

La utilización de las calculadoras gráficas en el currículo presenta grandes oportunidades para la educación matemática en los países en desarrollo. En cambio de consolidar y potenciar un proceso de cambio (como es el caso en los países desarrollados), la nueva tecnología puede aportar a que los diferentes actores inicien este proceso de cambio. Para comprender cómo esta nueva tecnología podría aportar en este aspecto, es necesario reflexionar sobre las características del proceso de cambio y su relación con las visiones y las creencias de los profesores.

La forma como el profesor se comporta en el salón de clase es la expresión de las creencias y de los conocimientos que él tiene acerca del tema de estudio, de las metas de la educación, de la forma como los estudiantes aprenden y de la forma como se debe enseñar y utilizar la tecnología, entre otros (Ernest, 1989; Thompson, 1984). Por consiguiente, para iniciar el proceso de cambio es necesario que el profesor tenga la oportunidad de vivir experiencias que pongan en juego sus visiones acerca de estos temas de tal forma que se produzcan conflictos que lo obliguen a cuestionarse sobre su práctica (Perry et al., 1995). Esta búsqueda del propio cuestionamiento es la que puede generar cambios en la forma como el profesor “ve” su interacción con los estudiantes en el proceso de construcción del conocimiento y en la aproximación que él tiene hacia la utilización de la tecnología y a la mejora de su formación matemática y didáctica.

Los esquemas tradicionales de formación de profesores encuentran dificultades para crear los espacios en los que los profesores puedan poner en juego sus visiones y cuestionarse acerca de su práctica. La utilización de las calculadoras gráficas es una oportunidad para resolver algunas de estas dificultades. Quienes están a cargo de la formación de los profesores pueden aprovechar el hecho de que la calculadora gráfica le permite al estudiante asumir un nuevo papel en el proceso de aprendizaje y, por lo tanto, ejerce presión sobre el profesor en el proceso de enseñanza. Cuando el profesor se encuentre dentro de un ambiente en el que está dispuesto a experimentar y a reflexionar sobre su práctica, las calculadoras gráficas, al afectar el comportamiento de los estudiantes en el salón de clase, pueden aportar a la generación del conflicto y del cuestionamiento que se busca en el profesor (Valero, 1996).

La utilización de las calculadoras gráficas como medio para iniciar un proceso de cambio es una responsabilidad que deben asumir los encargados de la formación de profesores y la comunidad de educación matemática en general. En este sentido, se debe aprovechar circunstancias de descentralización curricular como las que se dan en Colombia en la actualidad, para involucrar a profesores e investigadores en procesos de innovación curricular que incluyan la utilización de las calculadoras gráficas. Por otra parte, se debe iniciar un proceso de promoción de la tecnología dentro de la sociedad y el sistema educativo como medio para dinamizar el proceso de cambio a través de la formación de los profesores. Finalmente, se deben revisar y reformular los esquemas actuales de formación de profesores para que tengan en cuenta la necesidad de generar cuestionamiento en ellos y para que aprovechen las oportunidades que ofrecen las nuevas tecnologías.

APORTE DE LOS PAÍSES DESARROLLADOS

Los países desarrollados y, en particular, la comunidad internacional de educación matemática, pueden aportar a este proceso. Por un lado, se hace necesario que la comunidad, partiendo de una visión amplia del currículo que incluya las cuestiones éticas y morales, reflexione sobre la forma como las calculadoras gráficas han tenido efectos en la educación matemática de los países desarrollados, los problemas que se han encontrado, los errores que se han cometido en su implantación y las estrategias exitosas que se han puesto en práctica. Esta experiencia debe adaptarse a las necesidades de los países en desarrollo, con el propósito de aportar conocimiento que sea útil para estos países. La comunidad debe también hacer una pausa en esta veloz carrera tecnológica en la que no se ha terminado de experimentar con un modelo de máquina, cuando aparece uno nuevo que ofrece nuevas posibilidades y genera nuevos problemas de investigación y experimentación. Basta con que una calculadora le permita ver al estudiante las gráficas de las funciones para que esta tecnología pueda convertirse desde ahora en un medio importante para la solución de algunos de los problemas de la educación matemática de los países en desarrollo. Dadas las condiciones que se viven estos paises, lo importante no es que se utilice la última tecnología existente, sino que se introduzca la nueva tecnología de manera planificada, sistemática y reflexiva. Por esta razón, es necesario que la comunidad internacional de educación matemática le ofrezca a estos países de manera clara y concisa la información necesaria para iniciar el proceso. En este sentido es importante que se hagan esfuerzos para adaptar algunos de los materiales existentes y muchos de los esquemas de formación de profesores de tal forma que las comunidades de educación matemática de los países en desarrollo tengan los recursos necesarios que les permitan iniciar y consolidar el proceso de cambio.

CONCLUSIONES

La introducción de las calculadoras gráficas ofrece grandes oportunidades para el desarrollo de la educación matemática en los países en desarrollo. Pero la nueva tecnología no es la solución mágica a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en estos paises. Esta tecnología puede apoyar el inicio de un proceso de reforma en todos los niveles al favorecer el diseño y puesta en práctica de experiencias que ponen en juego la visión tradicional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, por lo tanto, generar situaciones en las que los diversos actores se cuestionen acerca de sus creencias y su conocimiento, iniciando así un proceso de cambio dentro del sistema. Pero esta tecnología genera también riesgos. Debemos ser conscientes de ellos. Al reflexionar sobre el proceso que ella ya ha vivido con la nueva tecnología y al ofrecer estrategias para su utilización que estén acordes con las necesidades de los países en desarrollo, la comunidad internacional de educación matemática puede ayudar a que se eviten los riesgos y se aprovechen las oportunidades.

REFERENCIAS

Agudelo, C. (1995). Improving mathematics education in Colombian Schools: Mathematics for all. *International Journal of Educational Development*.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense–making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14* (3), 24-35.

Carulla, C., y Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (pp. 1-161). Valencia: Universidad de Valencia.

Cobb, P. (1993). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. *American Educational Research Journal, 29* (3), 573-604.

Demana, F., Waits, B.K., Jones, J., & Hollister, M. (1996). *Proceedings of the seventh annual international conference on technology in collegiate mathematics*. Reading, MA: Addison Wesley.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-96). México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15* (1), 13-33.

Gómez, P. (1995). Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en las actitudes de los estudiantes (documento no publicado). Bogotá: una empresa docente.

Gómez, P., Carulla, C., Gómez, C., Mesa, V. M., y Valero, P. (1996). Calculadoras gráficas y precálculo. En H. Escobar (Ed.), *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Bogotá: SENA.

Gómez, P., y Perry, P. (Eds.). (1996). *La problemática de las matemáticas escolares. Un reto para directivos y profesores*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, P., y Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En L. Meira, D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (pp. I-205) Recife: Universidad Federal de Pernambuco.

Gómez, P., y Valero, P. (1995). La potenciación del sistema de educación matemática en Colombia. En P. Gómez, et al. *Aportes de "una empresa docente" a la IX CIAEM* (pp. 1-10). Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (5), 442-466.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (1995). Curriculum change locally and globally. *Paper presented at the IX meeting of the CIAEM* (Chile).

Mayer, R. (1986). Capacidad matemática. En R. J. Sternberg (Ed.), *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información* (pp. 165-194). Madrid: Labor Universitaria,

MEN (1992). *Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación*. Bogotá: MEN.

Mesa, V.M., y Gómez, P. (1996). Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (pp. 1-16). Valencia: Universidad de Valencia.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Perry, P., Gómez, P. y Valero, P. (1995). Proyecto MEN–EMA: exploración de la problemática de las matemáticas escolares en colegios oficiales de Bogotá. En P. Gómez, et al. *Aportes de "una empresa docente" a la IX CIAEM*. (pp. 19-44). Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1991). Los tetraedros del currículo. Diseño, desarrollo y evaluación del currículo (documento no publicado). Granada: Universidad de Granada.

Romberg, T. A. (1993). NCTM's Standards: A Rallying Flag for Mathematics Teachers. *Educational Leadership, 50* (5), 36-41.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Skovsmose, O. (1992). Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12* (2), 2-11.

Stanic, G., y Kilpatrick, J. (1992). Mathematics curriculum reform in the United States: A historical perspective. *International Journal of Education Research, 17,* 407-419.

Sterrett, A. (1992). *Using writing to teach mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 105-127.

Usiskin, Z. (1985). We need another revolution in secondary school mathematics. En NCTM (Ed.), *The secondary school mathematics curriculum*. Reston: NCTM.

Valero, P. (1996). Precalculus and graphic calculators: the influence on teacher's beliefs. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (pp. 1-161). Valencia: Universidad de Valencia

Zarinnia, E. A., & Romberg, T. A. (1987). A new world view and its impact on school mathematics. En T. A. Romberg, & D. M. Stewart (Eds.), *The monitoring of school mathematics: Background papers. Vol. 1: The monitoring project and mathematics curriculum* (pp. 21-62). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Pedro Gómez
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
Apartado Aéreo 4976
Bogotá, Colombia
pgomez@uniandes.edu.co

CAPÍTULO 7

MODELAJE MATEMÁTICO CON CALCULADORAS GRÁFICAS

FIONA GRANT Y JOHN SEARL

El Laboratorio Texas Instruments de Trabajo con Calculadora (CBL) utilizado con calculadoras gráficas, permite al estudiante iniciarse en el modelaje matemático a través de la resolución de problemas con datos generados en la clase. La transferencia fácil de datos a la calculadora de cada estudiante permite que ellos trabajen a su propio ritmo de manera independiente ya sea individualmente o en grupos pequeños. Las actividades generan oportunidades de discusión entre los mismos alumnos o entre estos y el profesor; aún más, las actividades pueden facilitar conexiones intercurriculares entre las matemáticas y las ciencias además de proporcionar un medio para el desarrollo de conceptos en los estudiantes y demostrar aplicaciones prácticas de las matemáticas. En este estudio se ha evaluado el uso del CBL en un número de escuelas escocesas y se ha llegado a la conclusión de que las actividades son ricas en conceptos matemáticos, que pueden ser modificadas según la madurez matemática de los estudiantes y que mejoran la calidad del aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

Las calculadoras se están volviendo más sofisticadas, más accesibles y menos costosas. Se han hecho muchas proclamaciones ambiciosas sobre los beneficios de estas herramientas en la educación matemática, pero no debemos confiar en el entusiasmo, opiniones o ilusiones. Las matemáticas son un medio poderoso de comunicación y pueden usarse para resolver problemas, describir la realidad y evaluar afirmaciones. La experimentación, observación y crítica reflexiva nos informarán sobre el papel potencial de la calculadora en estos aspectos de las matemáticas para que la tecnología pueda mejorar el ambiente de aprendizaje y enseñanza. En este trabajo describiremos uno de una serie de trabajos a pequeña escala que comprendían el uso de calculadoras en escuelas escocesas.

El Laboratorio Texas Instruments de Trabajo con Calculadora (CBL) es un instrumento portátil de baterías que sirve para recolectar datos. Al CBL se le pueden conectar una variedad de sondas para que datos tales como la temperatura, intensidad de la luz, niveles de sonido y distancia puedan ser recolectados y luego enviados a una calculadora gráfica para su análisis. El

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 75-91

equipo permite a los estudiantes iniciarse en el modelaje matemático a través de la resolución de problemas con datos reales.

Este estudio ha evaluado el uso del CBL en un número de escuelas escocesas de secundaria, entre 1995 y 1996. El proyecto abarcó 12 escuelas y 530 estudiantes de la región de Lothia. Las actividades fueron realizadas con grupos completos de estudiantes de 13 + (S2) a 17 + (S6) años de edad, en clases de tamaños que variaban entre 8 y 30. Las observaciones de clase, los informes y la discusión con los profesores proporcionaron información acerca de los resultados que sirvieron para el desarrollo y la modificación de las actividades.

Las actividades requerían que los alumnos recolectaran y analizaran datos con la ayuda de una calculadora gráfica TI-82. La transferencia fácil de datos a la calculadora de cada estudiante, a través del cable de conexión, permite que ellos trabajen a su propio ritmo de manera independiente ya sea individualmente o en grupos pequeños. Adicionalmente, el uso de un proyector y una pantalla permite ver a toda la clase e integrar grupos grandes.

GRÁFICOS DE DISTANCIA-TIEMPO GENERADOS POR LOS ESTUDIANTES

El detector ultrasónico de movimiento registra la distancia de un objeto o persona, en un rango de 0.5m. a 6m. Los estudiantes se mueven frente al sensor para crear gráficos propios de distancia-tiempo que se reproducen en la pantalla al mismo tiempo que la persona camina.

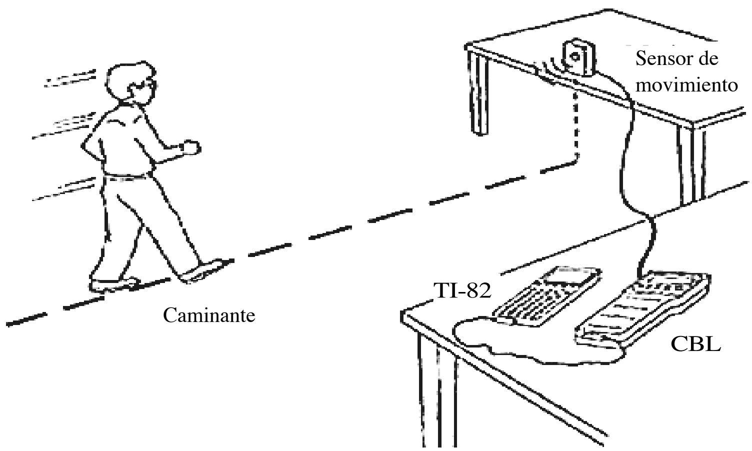


Figura 1.

Los estudiantes describen el gráfico y relacionan su forma con la velocidad y dirección del movimiento. La discusión sobre las diferentes formas de los gráficos (rectos, parabólicos, discontinuos, etc.) y si todos los gráficos son posibles, anima a los estudiantes a verbalizar sus ideas. ¡Los puntos fijos adquieren un verdadero significado!

La calculadora puede generar gráficos de línea recta para que los estudiantes los imiten con una caminata. Los estudiantes analizan los gráficos para las distancias de partida y de llegada, la velocidad y la dirección.

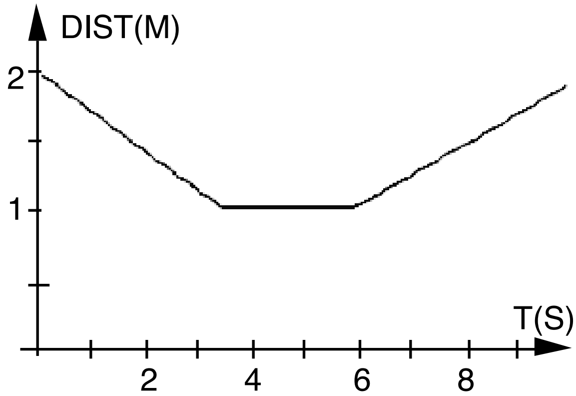


Figura 2.

Estas actividades son relevantes ya que son personales y por lo tanto poseen sentido. Hemos encontrado que las actividades no sólo resultan entretenidas, sino que además pueden proporcionar a estudiantes de todos los niveles una mejor comprensión intuitiva de los gráficos de distancia-tiempo. La disposición inmediata de información sobre los resultados y la posibilidad de experimentar y progresar, fomentan la discusión y crítica constructiva entre compañeros. A menudo los estudiantes son bastante sagaces para poner a prueba sus propias preguntas. Por ejemplo, ¿cómo se vería el gráfico de alguien abriendo la puerta? ¿Habría dos líneas separadas, si dos personas caminaran frente al sensor?

Hemos observado que los estudiantes tienen preconcepciones que pueden ser puestas en tela de juicio, lo que lleva a una adaptación cognitiva a través de la acomodación de la experiencia nueva en los esquemas existentes (Skemp, 1986). Algunas investigaciones han mostrado que los alumnos a menudo interpretan un gráfico de distancia-tiempo como un dibujo del movimiento en el plano vertical y no como la relación entre dos variables (Kerslake, 1981). Brasell (1987) comparó la efectividad de los gráficos de tiempo real y tiempo retardado. Ella encontró que un retraso, incluso de sólo unos 20-30 segundos entre el movimiento y la imagen, reducía el progreso en la comprensión de los estudiantes de los gráficos de distancia-tiempo. “Los gráficos de tiempo real permiten a los estudiantes procesar la información del evento y el gráfico de manera simultánea en vez de secuencial” (Brasell, 1987, p. 386) hecho que, impone menos esfuerzo a la memoria de corto plazo. Nuestras observaciones sustentan la concepción de Brasell según la cual el aspecto dinámico de los gráficos de tiempo real puede motivar a los estudiantes a enfocarse en las características claves del gráfico, tales como cambios de velocidad y dirección.

Cuando los alumnos discuten y producen gráficos, el profesor logra penetrar un poco más y ver el nivel de comprensión en que se encuentran sus estudiantes. Es así como hemos observado el desarrollo y cambio de los conceptos de los estudiantes a través de los procesos de descripción, predicción y evaluación. Por ejemplo, la viabilidad de los gráficos en la figura 3 ha generado discusiones interesantes.

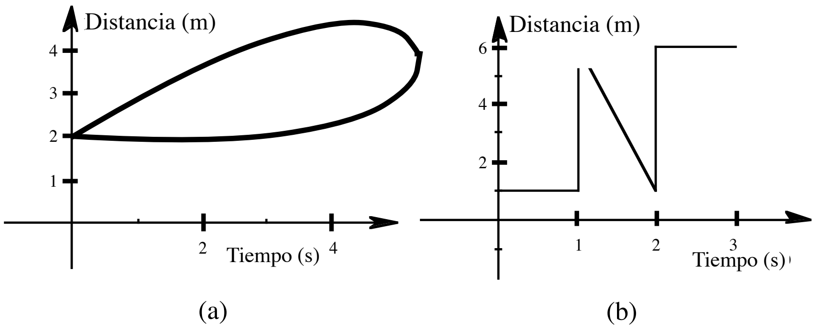


Figura 3.

Para el gráfico (a) los estudiantes sugirieron que se trataba de alguien caminando en curva y volviendo al punto de partida. Este es un ejemplo de su concepción del gráfico de distancia-tiempo como un dibujo del movimiento. Otra sugerencia es que se trata de dos personas caminando al mismo tiempo. Al evaluar todas sus predicciones, los estudiantes encontraron por ellos mismos que el gráfico no es posible y luego justificaron su conclusión con comentarios como:

no es posible viajar de vuelta en el tiempo

el sensor no puede registrar las distancias de dos personas simultáneamente

En el gráfico (b), las líneas horizontales no causaron ningún problema, pero muchos alumnos estaban convencidos de que podían producir una línea vertical. Algunas sugerencias incluyeron saltos, alguien corriendo muy rápido o una línea de personas que se mueven fuera del alcance del rayo por turnos. De nuevo, al evaluar sus ideas, los estudiantes descubrieron que, a mayor velocidad, mayor inclinación del gradiente. Como un objeto no puede viajar una distancia finita en tiempo cero, la mayoría de los estudiantes se dieron cuenta de que una línea vertical era imposible. Ofrecieron explicaciones como

> *uno no puede recorrer una distancia sin que esto*
> *le tome algún tiempo*
>
> *uno no puede estar en todos los lugares de la línea vertical*
> (¡sí!) *al mismo tiempo.*

Algunos alumnos, sin embargo, se resistían a cambiar su arraigada concepción y ofrecían justificaciones como

> *sería posible, si se pudiera viajar lo suficientemente rápido.*

Luego de la verbalización en clase, los estudiantes expresan sus ideas en forma escrita, lo cual los animó a aclarar sus pensamientos. Este informe escrito le da al profesor un mejor conocimiento de lo que cada estudiantes piensa, cosa que no es siempre posible en discusiones dentro de grupos grandes. En el debate sobre un gráfico parabólico descubrimos, por ejemplo, que muchos estudiantes hacen observaciones verbales sobre el cambio de velocidad, pero en las descripciones escritas siguen escribiendo que uno se mueve a una velocidad constante, desacelerando sólo para cambiar de dirección. Parece que muchos estudiantes ven la parábola como dos líneas rectas unidas por un arco y no como una curva con un cambio continuo de gradiente.

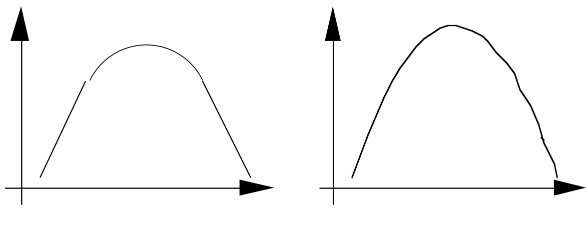


Figura 4.

Para los estudiantes que normalmente no se desempeñan muy bien en las matemáticas escritas, la participación en las actividades con gráficos de distancia-tiempo suministró la oportunidad de tener éxito en las matemáticas.

Estas actividades y tareas que los estudiantes se encuentran durante una lección de matemáticas, influyen en su actitud hacia la materia. Algunos profesores comentaban cuán sorprendidos estaban de ver a alumnos, que generalmente experimentaban una gran dificultad, tomar parte de manera tan exitosa en estas actividades. Los profesores también mencionaron la capacidad de contribución de las actividades a la confianza y motivación de los estudiantes.

En las actividades de introducción a los gráficos de distancia-tiempo, las interpretaciones son principalmente cualitativas. El gráfico puede, sin embargo, ser analizado más cuantitativamente en términos de velocidad y proporción de cambio, lo que permite la comprensión de conceptos de cálculo. Se pueden realizar estimaciones de velocidad al buscar el gradiente de una cuerda y llevar a los estudiantes a observar que esto es constante para una línea recta y varía para una curva. Esto lleva a una discusión sobre gradientes positivos y negativos, así como sobre gradientes infinitos y gradientes cero. Otra actividad permite la comparación entre los gráficos de distancia-tiempo y de velocidad-tiempo de una caminata al frente del sensor.

Los estudiantes encuentran un valor aproximado para el área bajo el gráfico de velocidad-tiempo, al sumar las áreas de los rectángulos, y relacionar esto con la distancia recorrida.

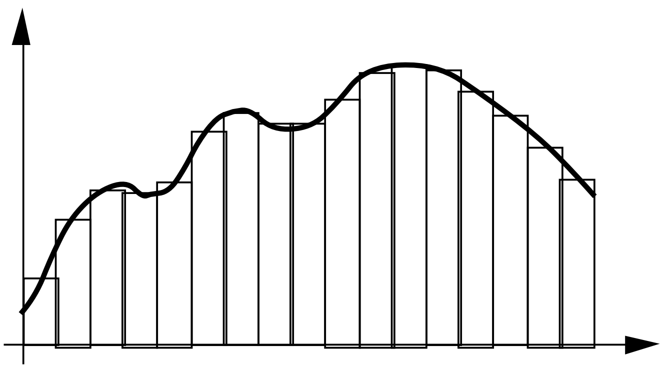


Figura 5.

INTENSIDAD DE LA LUZ

La sonda de luz registra la intensidad de una fuente de luz a diferentes distancias. Un bombillo de luz ordinario o la lámpara de una bicicleta pueden servir muy bien.

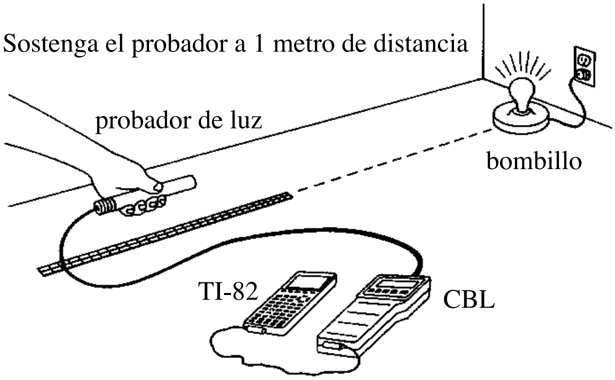


Figura 6.

Desde la fuente de luz, O, la luz irradia sobre la superficie de la esfera. El área iluminada está dada por $a = 4\pi r^2$. La intensidad de la luz, I, es la cantidad de luz por unidad de área, W es la potencia de la fuente de luz y r es el radio de la esfera.

$$I = \frac{W}{A} = \frac{W}{4\pi r^2} .$$

En consecuencia, la intensidad de la luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$I = \frac{k}{r^2}$$

donde k es la constante de proporcionalidad dependiente de la fuente de luz.

Esta demostración práctica de variación inversa es un ejemplo donde el modelo matemático es bastante más fácil de construir para los estudiantes por sí mismos. Los alumnos encuentran un valor para k y consideran que el modelo teórico también se ajusta a los datos experimentales. El método empleado para encontrar el valor de k dependerá de la madurez matemática de los estudiantes. Estudiantes S4 han utilizado el método de ensayo y progreso al considerar algunos datos mientras que estudiantes mayores han utilizado un método de ajuste de raíz mínima.

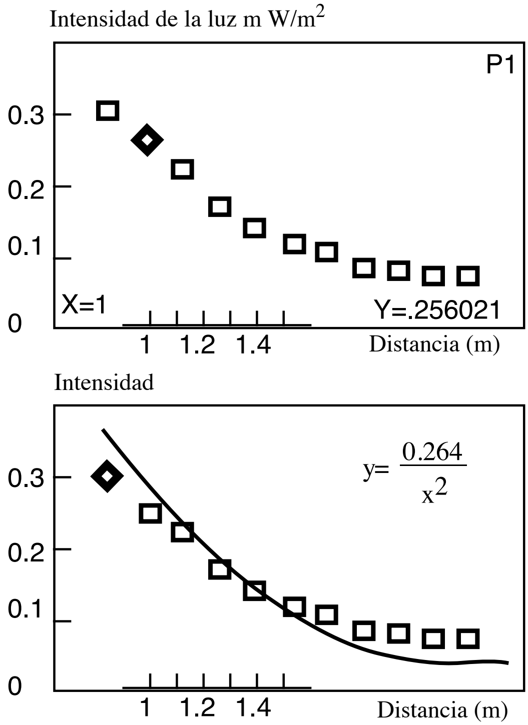


Figura 7.

ONDAS DE SONIDO

El micrófono registra el sonido de un diapasón vibrando, un instrumento musical o una voz humana. Los estudiantes pueden aplicar su comprensión de periodicidad, amplitud, cambio de fase y medida de radianes para modelar la onda de sonido por medio de un sinusoide. Ellos pueden comparar diferentes instrumentos musicales y ver los fenómenos de pulsaciones y armónicos.

Nos hemos dado cuenta de que los estudiantes disfrutan al ver la onda de sonido de una nota que ellos han producido por sí mismos y parecen motivarse a modelar sus “propios” datos. Debido a que los coeficientes involucrados no son enteros pequeños, a diferencia de las mayoría de preguntas de los textos, los estudiantes no pueden “adivinar” fácilmente sus valores. En el proceso de ajustar el gráfico a los datos, los alumnos desarrollan una comprensión intuitiva de cómo los coeficientes afectan el gráfico.

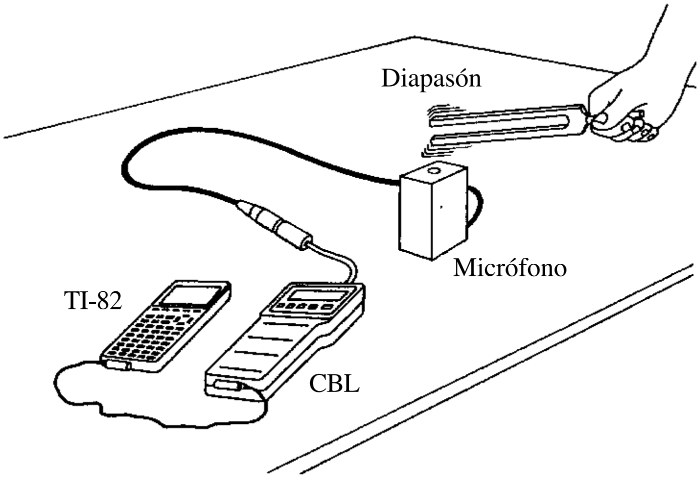


Figure 8.

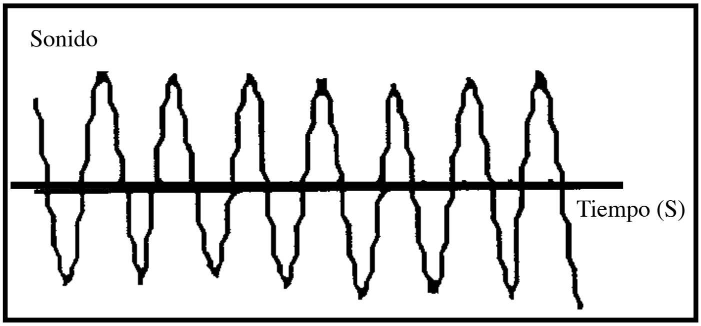


Figura 9.

PELOTA QUE REBOTA

Una pelota rebota bajo el sensor de movimiento y aparece un gráfico de distancia-tiempo.

¡Esta actividad es rica en matemáticas, aunque a veces la recolección adecuada de datos resulte problemática! Los estudiantes pueden analizar varios aspectos de los datos como los rebotes individuales, la altura de los rebotes o el número de rebotes.

Los estudiantes usan el botón TRACE para leer las coordenadas de las alturas de rebote del gráfico. Alternativamente, al usar las listas de datos, estudiantes más avanzados calculan la altura máxima de cada rebote al considerar los tres puntos alrededor del máximo y adecuar una ecuación cuadrática por medio de estos puntos. Al calcular los radios de las alturas y

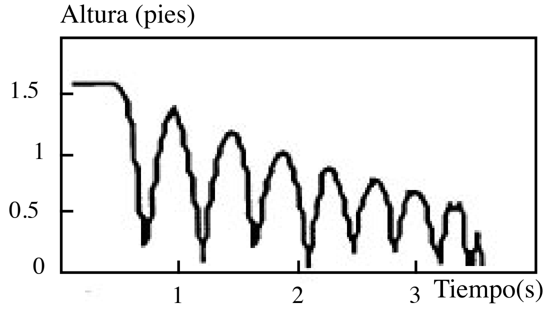


Figura 10.

verbalizar este ejemplo de una secuencia geométrica. Los comentarios de los alumnos en S4, que todavía no conocían el término "secuencia geométrica", pero que habían encontrado un radio común de aproximadamente 0.87, incluían:

La pelota rebota a 87% de la altura anterior

La siguiente altura es 0.87 de la anterior

Si se arroja la pelota desde 1m, ésta debería rebotar a una altura de 87 cm

Esta comprensión de la situación física, les permitió construir una ecuación exponencial. Los estudiantes trazan las alturas de los rebotes individuales y usan la información sobre la primera altura y el radio de rebote para ajustar una curva exponencial por medio de los puntos.

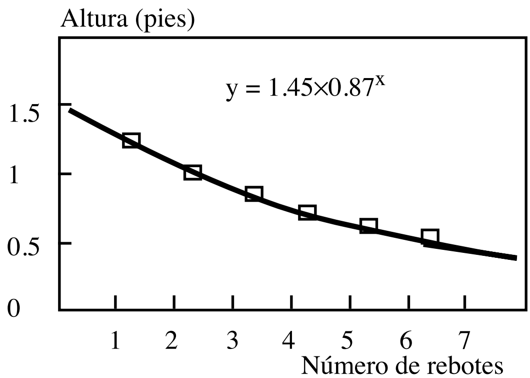


Figure 11.

El tiempo entre cada rebote también forma una secuencia geométrica que puede ser analizada en una manera similar al procedimiento de modelación anterior. Esta idea puede desarrollarse al sumar una serie geométrica para mostrar que, aunque teóricamente hay un número infinito de rebotes, la pelota se detiene en una cantidad de tiempo finita.

Los estudiantes trazan los datos de un rebote. Esto forma una sección parabólica en el tiempo. Luego, emplean la forma de vértice de la ecuación cuadrática, $y = a(x-p)^2 + q$, y las coordenadas del punto crítico para encontrar una ecuación que se adapte a los datos experimentales. Ellos estiman y perfeccionan un valor para a. Durante este proceso hemos observado a muchos estudiantes que comienzan con un valor positivo de a, descubren que debe ser negativo y entonces son capaces de decir por qué. La respuesta inmediata en la pantalla de la calculadora parece motivar a los alumnos a perseverar sin acudir a la ayuda del profesor. Finalmente, el modelo se superpone a los datos originales.

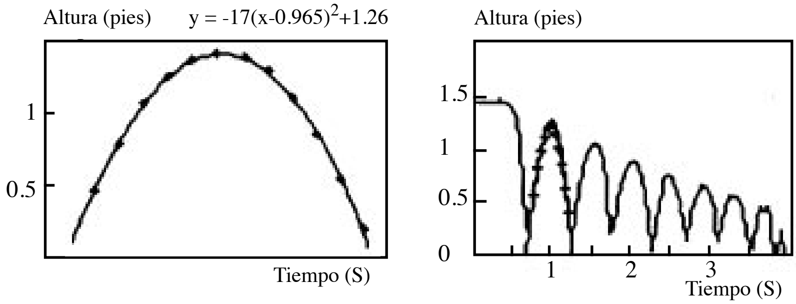


Figura 12.

ENFRIAMIENTO DEL AGUA

Se introduce la sonda de temperatura en agua caliente. Se deja la sonda en el agua para medir la temperatura a medida que el líquido se enfría. Para obtener un tiempo de recolección de datos más corto, luego de haber introducido la sonda en el agua, se puede colocar en agua a temperatura ambiente o sostenerla en el aire para que se enfríe.

Los estudiantes modelan los datos experimentales en este ejemplo de disminución exponencial en el que ellos pueden comparar el efecto aislante de los diferentes recipientes y relacionar sus resultados con la ley de Newton del enfriamiento. Como variación, la sonda también se puede poner en un recipiente con agua congelada.

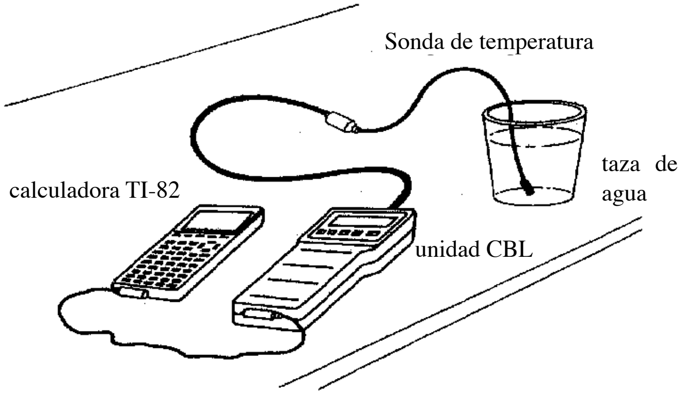


Figure 13.

Esta actividad no ha sido tan usada como las otras mencionadas en este trabajo. Esto se debe a que las funciones exponenciales y logarítmicas tienden a ser enseñadas hacia el final de los cursos más avanzados y, por lo tanto, no se les consideró tan importantes para los alumnos como las otras actividades, en el momento de la realización del proyecto.

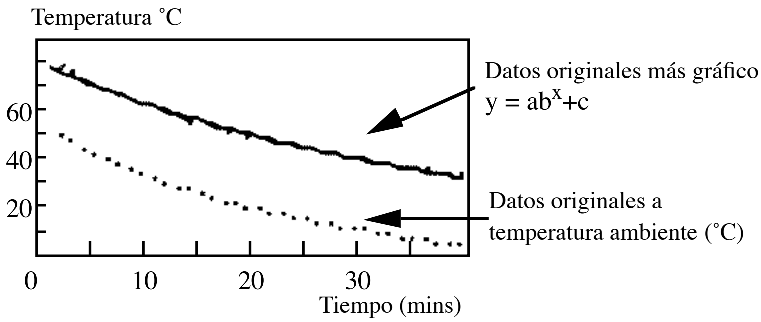


Figura 14.

DISCUSIÓN

En todas estas actividades el manejo del ambiente de aprendizaje es responsabilidad del profesor. El decide cuándo usar la actividad, ya sea como una introducción a un tema, como aplicación, o como consolidación de la teoría del libro. También decide si la recolección de datos será realizada en grupos pequeños o por toda la clase. Hemos descubierto que es posible para un grupo de estudiantes realizar el experimento frente a toda la clase, utilizando una calculadora OHP y una pantalla para que todos puedan ver los datos experimentales. Esto facilita la discusión en clase antes de que los datos sean transferidos a las calculadoras y mantiene a todos los alumnos involucrados. Alternativamente, cada grupo de alumnos podría recolectar su propio conjunto de datos. Por ejemplo, con una clase de 8 estudiantes, cada pareja realizó el experimento del sonido con una nota musical que tocaba o un sonido que producían ellos mismos. Cuando los datos tienen un valor personal para los alumnos, ellos tienen un problema matemático genuino para resolver, no un pseudo-problema impuesto por el profesor o el libro. ¡Esto suministra motivación y recompensa intrínseca para los estudiantes y ayuda a hacer divertidas las matemáticas! También ayuda a demostrar que las matemáticas no son exclusivamente una materia encuadernada en libros, sino que tienen una relación con el mundo real.

El profesor también decide qué tanto apoyo inicial e instrucciones debe dar a los alumnos. Esto podría incluir el suministro de hojas de registro o de guías para usar las funciones de la calculadora gráfica, o la tarea podría dejarse completamente abierta para que los estudiantes la exploren. Así se genera la diferenciación dentro de la clase. Es importante que esta diferenciación sea "determinada en gran medida por las habilidades de los alumnos y sus logros dentro de la actividad misma y no sea predeterminada por el profesor" (DES, 1985, p. 27).

La mayoría de los estudiantes en S5 o S6 habían usado calculadoras gráficas. Normalmente la Casio fx-7000G en vez de la Texas Instruments, ya que éste era el modelo más comúnmente encontrado en las escuelas de Lothia en el momento de la realización del proyecto. Una clase S4 ya tenía experiencia con la TI-82, pero normalmente los estudiantes en S4 no tienen experiencia con ninguna calculadora gráfica. Aquellos con experiencia con un modelo diferente, se adaptaron rápidamente a la TI-82. Los que no tenían experiencia de ninguna clase, necesitaron más tiempo para familiarizarse con algunas de la capacidades como el uso de la tecla TRACE para escoger puntos de un gráfico o cómo trazar un gráfico de dos listas de datos. ¡Los profesores también necesitan tiempo para familiarizarse con la calculadora, para sentirse confiados al usarlas en la clase y para estar en capacidad de enfrentar problemas como la "desaparición" de gráficos cuando un StatPlot es desconectado accidentalmente! Inclusive si los datos no pueden ser recuperados, es fácil transferirlos de otra calculadora.

La falta de familiaridad con la calculadora puede llevar a veces a que la concentración requerida para "presionar el botón indicado" opaque las matemáticas. Unos pocos estudiantes mostraron falta de confianza en el uso de las calculadoras. Esto se evidenciaba en su timidez y por comentarios como "siempre sale mal cuando yo la toco" cada vez que algo inesperado aparecía en la pantalla. Por el contrario, algunos alumnos (sobre todo niños) eran tan hábiles para explorar las capacidades de la calculadora que presionaban las teclas al azar sin detenerse a pensar en las matemáticas del ejercicio.

Las actividades proporcionaron oportunidades de discusión entre los mismos alumnos o entre ellos y el profesor (Cockcroft, 1982). Los estudiantes hicieron sus propias preguntas y buscaron aspectos que les interesaron; expresaron sus propias ideas, formularon sus propias hipótesis y las evaluaron según la evidencia experimental; trataron de adaptar los resultados experimentales al modelo teórico y trataron de explicar cualquier diferencia. Desde un punto de vista constructivista del aprendizaje, el conocimiento lo construye el individuo; no se recibe de manera pasiva de una fuente externa, a menudo el profesor (von Glaserfeld, 1990). En tanto que el individuo es quien realiza la construcción, la interacción social con otros (el profesor y los compañeros) y el conocimiento y experiencias *a priori* son también factores que influyen en el proceso de desarrollo de conceptos del estudiante. "La elaboración de matemáticas por parte del estudiante incluía darle sentido a lo dicho por el profesor tanto como darle sentido a sus propios descubrimientos" (Jaworski, 1994, p. 85).

El profesor proporciona actividades a las cuales los estudiantes llegan con su propio nivel de comprensión y es a través de la interacción con los alumnos que el profesor puede tantear la situación de estos niveles de comprensión. El perfeccionamiento de la comprensión es un proceso dinámico de reorganización (Pirie y Kieran, 1992). Por eso, en vez de planear y aplicar rígidamente una secuencia de enseñanza planeada, el profesor "debe revaluar constantemente el aprendizaje a medida que éste evoluciona dentro de la clase" (Pirie y Kieran, 1992). Es poco probable que las actividades de recolección de datos produzcan exactamente los mismos resultados, si se repiten. Además, los estudiantes contribuyen con sus propias ideas a los experimentos y al proceso de modelaje. Este aspecto "no-duplicable" de una actividad práctica le da la novedad que puede faltarle a una exposición más conocida, a menudo repetida. El profesor aborda la actividad "como si fuera" diferente y todos obtienen información nueva de ella. El puede poner en duda creencias que no corresponden a la concepción general y tratar de guiar a los estudiantes hacia una comprensión más profunda. Estas actividades, entonces, también tienen una función de diagnóstico, tanto en la discusión oral como en los informes escritos de los estudiantes. "Debido a que la compresión es un estado mental interno que debe alcanzarse de manera individual por cada estudiante, no puede observarse directamente por el profesor [...] Se puede obtener, durante la discusión, una indicación mucho mejor del nivel de comprensión que existe por medio de trabajo práctico adecuado a través de actividades más generales de resolución de problemas" (Cockcroft, p. 232).

Muchas de las actividades CBL son de uso apropiado en muchas materias además de las matemáticas, como en las ciencias biológicas y físicas, agricultura, medicina, música y estadística. Las interconexiones curriculares se facilitan aun cuando el enfoque puede ser diferente en las diferentes materias. El uso de esta tecnología personal e independiente permite la realización de proyectos de trabajo de curso, individualmente o en pequeños grupos y la creación de horarios de estudio flexibles.

Una fuente eléctrica no es necesaria, a no ser que se utilice la OHP. Esto quiere decir que los datos pueden ser recolectados fuera de la escuela en lugares sin electricidad, como áreas rurales o países en vía de desarrollo. Las impresiones de los gráficos, las listas de datos y programas pueden obtenerse por conexión por cable. Además los estudiantes pueden conservar una copia de sus datos y grabarlos en disquetes para su posterior análisis. Sin embargo, no es necesario el acceso inmediato a un computador. Lo anterior resulta útil para un departamento de matemáticas que no posea un computador pero pueda acceder a él en otro lugar y para las escuelas rurales de los países en desarrollo, en donde el computador más próximo puede estar en la capital o en la ciudad más cercana.

Las actividades prácticas han sido altamente recomendadas (Crokcroft, 1982, DES, 1985) pero rara vez se llevan a cabo en el salón de matemáticas de secundaria. "Existe una tendencia a minimizar la importancia del [...] trabajo práctico a finales de la primera etapa y durante la segunda. Sin la suficiente experiencia práctica, los estudiantes no están en capacidad de relacionar los conceptos matemáticos abstractos con ninguna forma de realidad. Todos los estudiantes se benefician del trabajo práctico adecuado sin importar su edad o habilidad" (DES, 1985, p. 39).

Esta carencia de trabajo práctico se debe en parte al tiempo requerido para instalar los aparatos y para realizar la actividad. Además, normalmente los datos experimentales no son claros y precisos como una pregunta de texto. Por eso, se deben tener en cuenta los errores y los grados de exactitud perceptibles. A menudo los profesores no están seguros de los beneficios de las actividades prácticas porque ya no se sienten en control de lo que los estudiantes aprenderán y, entonces, prefieren no correr el riesgo de "desperdiciar" su tiempo de enseñanza. Los currículos se ven sobrecargados de contenido. Los profesores, de secundaria especialmente, se sienten bajo presión por los procedimientos de evaluación y en muchos paises por evaluaciones externas. Muchos no se sienten a gusto al usar la nueva tecnología en la clase. Las actividades prácticas y la modulación pueden, por todo lo anterior, ser consideradas como una distracción de lo que se cree es la tarea principal: asegurar que los estudiantes pasen los exámenes. La formación de los profesores a través de cursos de introducción y para profesores en servicio es importante ya que los profesores necesitan tiempo para evaluar y examinar sus creencias acerca de las matemáticas. Las convicciones personales afectan el comportamiento en clase (Ahmed, 1987). El reporte Cockcroft (1982, para 234) recomendaba siete elementos que deberían ser incluidos en las lecciones de matemáticas:

- explicación del profesor
- discusión entre alumnos y entre estos y el profesor
- trabajo práctico apropiado
- consolidación y práctica de las habilidades y rutinas fundamentales
- resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a situaciones de cada día
- trabajo de investigación.

Las actividades aquí descritas contribuyen a proporcionar un ambiente de aprendizaje apropiado para todos los estudiantes. Además, ayudan al desarrollo de conceptos al dar a los estudiantes oportunidades para discutir, cambiar concepciones erróneas, negociar ideas y construir su propia comprensión dentro de una atmósfera relajada. El enfoque no está en los procedimientos algorítmicos, sino en la interpretación gráfica y desarrollo de modelos matemáticos en contextos reales.

El estudio demostró que las actividades son ricas en conceptos matemáticos, que pueden ser modificadas según la madurez matemática de los estudiantes y que, cuando se usan apropiadamente, mejoran la calidad del aprendizaje.

REFERENCIAS

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*. London: HMSO.

Brasell, H. (1987). The Effect of Real–Time Laboratory Graphing on Learning Graphic Representations of Distance and Velocity. *Journal of Research in Science Teaching, 24* (4), 385–395.

Brueningsen, C. et al. (1994). *Real–World Math with the CBL™ System*. Dallas: Texas Instruments.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

DES (1985). *Mathematics from 5 to 16 Curriculum Matters 3*. London: HMSO.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching*. London: Falmer Press.

Kerslake, D. (1981). En K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics* (pp. 11-16). London: John Murray.

Pirie, S. & Kieran, T. (1992). Creating Constructivist Environments and Constructing Creative Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 505-528.

Skemp, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

von Glasersfeld, E. (1990). An Exposition of Constructivism: Why some like it radical. En R. B. Davis, C. A. Maher y N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Learning and Teaching of Mathematics Journal for Research in Mathematics Education Monograph Number 4*. Reston: NCTM.

Fiona Grant
fiona@maths.ed.ac.uk

John Searl
searl@maths.ed.ac.uk

Edinburgh Centre for Mathematical Education
University of Edinburgh
JCMB
Kings Buildings
Mayfield Road
Edinburgh
EH9 3JZ
Scotland

CAPÍTULO 8

TECNOLOGÍA DE APOYO Y MATEMÁTICAS: HACIA LA ASOCIACIÓN INTELIGENTE

PETER JONES

La marcha del cambio tecnológico es tan grande, que probablemente cualquier intento por enfocarnos en una tecnología particular y su posible impacto en la enseñanza y aprendizaje de un tema matemático específico resulte ser de un valor efímero. Cada día emerge una versión nueva y más sofisticada que supera a la tecnología existente en el momento. ¿Cómo podemos progresar en una situación tan volátil? Una manera, es tratar de poner el problema en una perspectiva más amplia al reconocer que siempre hemos usado algún tipo de tecnología para apoyar la actividad matemática en el salón de clase y para comprender lo que esto significa en el pasado y cuáles son las implicaciones para el futuro.

UNA REFLEXIÓN SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL PASADO

Si en la época anterior a las calculadoras se pedía multiplicar doscientos treinta y cuatro por trescientos cuarenta y seis, la mayoría de los estudiantes habrían conseguido papel y lápiz (o tiza y pizarrón). En un principio, para anotar los dos números, muy probablemente en la forma de 234×346, y en segundo lugar, para anotar los pasos del extenso algoritmo de multiplicación de una manera similar a la que se muestra aquí abajo:

$$\begin{array}{r} 234 \\ 346 \\ \hline 1404 \\ 936 \\ 702 \\ \hline 80964 \end{array}$$

El papel y el lápiz, como métodos de registro, y el extenso algoritmo de multiplicación, como herramienta para reducir la multiplicación larga a una secuencia de multiplicaciones y sumas de un solo dígito, son tipos de tecnología que la mayoría de los estudiantes necesitábamos en la era previa a las calculadoras para multiplicar con precisión y confiabilidad números de varios dígitos. Si los números a ser multiplicados involucraban decimales, por ejemplo, 2.34×0.0345 el algoritmo de multiplicación se hacía mucho

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 93-101

más difícil de realizar y era normal recurrir a otro tipo de tecnología, las tablas de logaritmos, para facilitar la tarea. Las tablas de logaritmos permitían la transformación de productos complejos en sumas menos complejas que podían ser resueltas sistemáticamente con la ayuda de lápiz y papel, como se muestra en la figura 1.

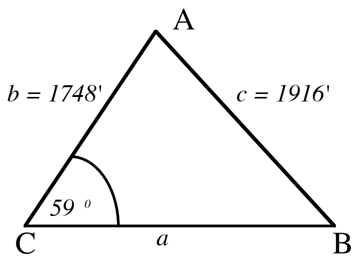
Nº	Log
2.34	0.3692
0.0346	$\bar{1}.4609$
0.08096	$\bar{1}.0917$

Figura 1.

Hasta los años setenta, ésta era la única tecnología de computación al alcance de los estudiantes; de allí, su gran importancia en ciertas áreas del currículo de matemáticas. Esta importancia se aprecia en el siguiente ejemplo basado en la solución dada en el texto de los sesenta, que se muestra en la figura 2 (Rose, 1964).

Ejemplos del uso de la Regla de Seno

Ejemplo 14. - Resuelva el Δ ABC completamente cuando c = 1916 ft., b = 1748 ft. y C = 59° . [Este triángulo está dibujado en la Figura 137].



Para encontrar B– $$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

y por lo tanto– $$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} C}{c}$$

Tomando todos los logaritmos–

$$
\begin{aligned}
\log \operatorname{sen} B &= \log 1748 + \log \operatorname{sen} 59^\circ - \log 1916 \\
&= 3.2425 + \bar{1}.9331 - 3.2823 \\
&= \bar{1}.8933 = \log \operatorname{sen} 51^\circ 28' \\
\therefore B &= 51^\circ 28' \\
\text{Entonces} - A &= 180^\circ - (59^\circ + 51^\circ 28') \\
&= 69^\circ 32'
\end{aligned}
$$

Figura 2. Ilustración del uso de seno basada en una solución dada en un texto de los sesenta

Como consecuencia, en esa época, en los cursos de matemáticas de los primeros años de secundaria, se empleaba una gran cantidad de tiempo y energía en enseñar a los estudiantes a ser hábiles en la realización de cómputos con logaritmos. Desafortunadamente, como estas destrezas no se empleaban sino hasta mucho después en la escuela, y por el tiempo y energía que los estudiantes necesitaban para realizarlas, muchos profesores las consideraron como una parte significativa de las matemáticas de la época, y no como una habilidad necesaria debido a la dependencia de las matemáticas del lápiz y el papel.

Una vez que la calculadora electrónica se hizo común en el salón de clase, se acabó la necesidad de tablas de logaritmos para hacer cómputos. Aun así, en un taller para profesores sobre el uso de las primeras calculadoras científicas a comienzos de los setenta (Barling, 1995), una de las razones que se daba a los profesores para introducir la calculadora en sus clases era que ésta evitaría la necesidad de poseer tablas de logaritmos. ¡Se afirmaba que la calculadora podría ser empleada para generar los logaritmos, hacer las adiciones y luego tomar los antilogaritmos para obtener la respuesta requerida!

¿Por qué pasan cosas como ésta? En parte se debe a una falta de reconocimiento generalizada de que las matemáticas, como toda actividad intelectual humana, siempre están moldeadas por la tecnología existente, pero que, con el tiempo, la tecnología "llega a formar parte de nuestro consciente de una manera tan profunda, que no nos percatamos de su presencia" (Pea, 1993, p. 53). El resultado es que, efectivamente, la tecnología se hace "invisible", mientras que las actividades que genera pueden llegar a ser consideradas como actividades matemáticas por sí mismas, por ejemplo, la realización de cálculos por medio de logaritmos. Por lo tanto, cuando se introduce un nuevo elemento tecnológico, como la calculadora electrónica, es normal que se le promueva como un medio de "intensificar" la enseñanza de tales actividades, a pesar de que la tecnología en sí ha sido diseñada para eliminar la necesidad de tales cálculos. La ironía de usar un elemento tecnológico como la calculadora para ayudar a hacer cálculos con logaritmos no debe pasar inadvertida.

Por ejemplo, digamos que queremos calcular la longitud del arco de una curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ and $x = \sqrt{3}$. La solución en la figura 3 está basada en una solución de un texto de cálculo típico (Grossman, 1977).

SOLUCION. Dado $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ tal que

$$s = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \cdot$$

Sea $u = \tan\theta$ tal que

$$s = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec\theta\ \sec^2\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\sec\theta\,(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \sec\theta\tan\theta\right) d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} = \left(\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \sec\theta\ \tan\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\csc\theta + \sec\theta\ \tan\theta)\,d\theta$$

$$= (-1\mathrm{n}\,(\csc\theta + \cot\theta) + \sec\theta)\,\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \left\{\left[-\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\right] [-\ln(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}]\right\}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln\sqrt{3} + 2 - \sqrt{2} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + 2 - \sqrt{2}$$

Figura 3. Búsqueda de la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = \sqrt{3}$, basada en una solución de un texto de cálculo típico (Grossman, 1977)

Al mirar esta solución, vemos que guarda una similitud peligrosa con la solución al problema de la regla de seno dada en el texto de los sesenta. Primero, se utiliza un conocimiento teórico para exponer la solución del problema con lápiz y papel. En el caso de la aplicación de la regla de seno esto resulta en una expresión aritmética compleja que luego se evalúa con la ayuda de tablas de logaritmos. En el problema de la longitud del arco la solución está expresada en la forma de una integral definida que se evalúa luego mediante una substitución apropiada y manipulación algebraica para permitir la transformación de la integral original en forma estándar. Los resultados de la manipulación se anotan con lápiz y papel y, presumiblemente, al final se usa una tabla de integrales estándares para ayudar a evaluar las integrales que dieron como resultado. De la figura 3 podemos obtener que la longitud del arco es

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+2-\sqrt{2} = 0.91785388.$$

Sin embargo, si tenemos acceso a una calculadora gráfica como la TI-83, podemos utilizar la capacidad de integración numérica para obtener la misma respuesta (vea la figura 4).

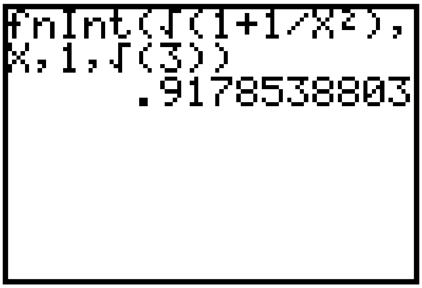


Figura 4. Utilización de una TI-83 para evaluar la integral para obtener la longitud del arco

Para la mayoría de los que aprendimos el cálculo como una actividad de lápiz y papel sería difícil aceptar que los pasos involucrados en la evaluación de una integral definida en el problema de la longitud del arco no constituyen matemáticas útiles. Empero, si el propósito real de la actividad era evaluar la longitud del arco, entonces, el proceso como un todo puede no tener más valor intelectual para la mayoría de los estudiantes que el dominio de un conjunto de habilidades necesarias para realizar cálculos aritméticos complejos con tablas de logaritmos.

Así como la calculadora electrónica fue diseñada para evitar a los seres humanos la necesidad de realizar cálculos aritméticos complejos a mano, la calculadora gráfica con capacidad de integración numérica fue diseñada para evitar a los seres humanos la necesidad de, entre otras cosas, evaluar integrales definidas complejas. Esto representa un desafío para aquellos de nosotros que no conocieron otra tecnología de apoyo a las actividades de cálculo que el lápiz, el papel y, posiblemente, las tablas de fórmulas estándares. Nosotros debíamos manejar a la perfección los métodos de integración para resolver los problemas más avanzados, tal y como los estudiantes en el pasado tenían que ser expertos en el computo con logaritmos. De este modo, vemos que la tecnología al alcance es un determinante primordial del tipo de matemáticas que realizamos en clase y de cómo las realizamos, tanto en el presente como en el pasado. Entonces ¿qué hay de diferente ahora?

TECNOLOGÍA INTELIGENTE

Para analizar esto, a un nivel que nos permita progresar, necesitamos reconocer que la tecnología que hemos usado para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en el salón de clase, tanto ahora como en el pasado, puede ser considerada como “inteligente” ya que puede “llevar a cabo procesos cognitivos significativos en favor del usuario” (Salamon, Perkins & Globerson, 1991, p. 3). Inclusive el papel y el lápiz, cuando se emplean para apoyar la actividad matemática, pueden ser considerados como tecnología inteligente. Por ejemplo, cuando se llevan a cabo manipulaciones algebraicas mediante el uso de papel y lápiz, anotamos los resultados de los pasos intermedios, para no tener que conservar estos resultados en nuestra memoria activa, al mismo tiempo que llevamos a cabo los proceso mentales involucrados en la manipulación. Por esto, el papel y el lápiz pueden ser vistos como inteligentes ya que los usamos para distribuir la carga cognitiva cuando realizamos manipulaciones algebraicas. De manera similar, el uso de una tabla de integrales estándar distribuye la carga cognitiva de evaluar una integral compleja, al reducir la cantidad de información que necesitamos mantener en la memoria activa o recuperar de la memoria a largo plazo, mientras que realizamos los pasos intermedios del proceso.

Si la vieja tecnología del lápiz y el papel puede ser considerada inteligente, ¿qué la diferencia, entonces, de la nueva tecnología informática inteligente? Mientras que la vieja tecnología podía distribuir la carga cognitiva al actuar como instrumento de almacenamiento, la tecnología informática no sólo almacena información sino que además posee la capacidad adicional de procesar bastante de esa información con un mínimo de gasto de energía por parte del usuario. Por ejemplo, una calculadora gráfica con capacidades simbólicas de procesamiento puede almacenar una expresión algebraica; pero luego, cuando se le ordene, puede también realizar una variedad de procesos algebraicos del tipo que hubiera requerido un esfuerzo mental considerable de nuestra parte, si estuviésemos trabajando con lápiz y papel solamente. La habilidad de la tecnología informática de almacenar y procesar la información matemática, aumenta de manera significativa la posibilidad de compartir la carga intelectual con el usuario. Sin embargo, esta tecnología no puede planear, modelar, sintetizar, interpretar, etc. En el presente estas son actividades intelectuales que posee solamente la mente humana, que también puede, por supuesto, almacenar información y realizar procedimientos basados en reglas. En la figura 5 se muestra un esquema de las diferentes capacidades intelectuales de la tecnología del lápiz y el papel, la tecnología informática y la mente humana.

Las habilidades de razonamiento de nivel superior son las que, en última instancia, realmente valoramos en matemáticas; pero en la práctica empleamos la mayoría del tiempo en la enseñanza y desarrollo de procedimientos. En parte, esto de debe a que en una clase basada en el trabajo con

	Tecnología del lápiz y el papel	Tecnología informática	“Tecnología” humana
Almacenamiento de información	✓	✓	✓
Realización de procedimientos basados en reglas		✓	✓
Modelaje, interpretación, etc.			✓

Figura 5. Visión esquemática de las diferentes capacidades intelectuales de la tecnología del lápiz y el papel, la tecnología informática y la mente humana

procedimientos manuales, el dominio de estas habilidades es un pre-requisito para emplear las matemáticas a un nivel intelectual superior. Desafortunadamente, debido al tiempo gastado y al esfuerzo intelectual requerido para desarrollar estas habilidades, la mayor parte de la instrucción en clase se ha dedicado a la adquisición de estas destrezas. Como resultado, el dominio de éstas se ha convertido en el principal objetivo de la mayoría de los cursos de matemáticas, y ha sido igualado a la habilidad en matemáticas. Por lo tanto, cualquier tecnología que al parecer permita a una persona la realización de tales tareas con tan sólo oprimir un botón, pone en peligro nuestro concepto tradicional de lo que constituye habilidad en matemáticas. Sin embargo, esto sólo es un problema, si continuamos considerando que la inteligencia matemática reside por completo dentro del individuo. Como veremos, esta concepción también limita nuestra noción del papel potencial educativo de la tecnología en la educación matemática.

ASOCIACIÓN INTELIGENTE Y HABILIDAD MATEMÁTICA

¿Cuáles son las consecuencias, para la educación, de considerar que la tecnología que empleamos para apoyar las matemáticas es “inteligente”? Una es el potencial desarrollo de lo que ha sido llamado *asociación inteligente*. En una asociación inteligente, existe la posibilidad de que el desempeño intelectual de la asociación sea “mucho más ‘inteligente’ que el del humano solo” (Salamon et al., 1991, p. 4). Por ejemplo, con acceso a elementos de la tecnología como una calculadora gráfica, los estudiantes tienen la posibilidad de buscar métodos gráficos de soluciones y análisis que van mucho más lejos de lo que estos mismos estudiantes hubieran siquiera esperado lograr con lápiz y papel solamente.

Esta posibilidad de que los estudiantes formen una asociación inteligente con la tecnología en matemáticas les da la capacidad de trabajar a un nivel que podría ser completamente inalcanzable sin la ayuda de la tecnología. Esto, en efecto, pone en tela de juicio nuestras nociones tradicionales de lo que constituye inteligencia matemática y cómo tendría que ser evaluada. ¿Se debería medir según el desempeño matemático del estudiante sin ninguna ayuda tecnológica, o surge la posibilidad de ser reconocida como el desempeño matemático de un sistema coyuntural? Si aceptamos que un estudiante que trabaja en asociación inteligente con tecnología informática representa una forma legítima y válida de actividad matemática, entonces, debemos considerar la posibilidad de que la evaluación de la inteligencia matemática involucre la evaluación de dicha asociación. Más aun, dado que, a la larga, casi toda la actividad matemática real incluye el uso de algún tipo de tecnología informática de apoyo, se podría argumentar que uno de nuestros principales intereses pedagógicos debería estar dirigido a la labor de desarrollar estrategias de enseñanza para construir y evaluar la inteligencia matemática de tales asociaciones y no sólo del individuo.

Desafortunadamente, las asociaciones inteligentes no parecen generarse espontáneamente y el reto para los profesores es desarrollar estrategias de enseñanza para promover su formación. Y, más importante aún, es poco probable que se lleven a la práctica a menos que los estudiantes tengan el mismo acceso a la tecnología actual que al lápiz y al papel. En este aspecto, es probable que un elemento de la tecnología de apoyo como la calculadora gráfica tenga más potencial que un computador ya que ésta es lo suficientemente barata y pequeña para estar al alcance de los estudiantes en todo momento. Finalmente, existe también la necesidad de revaluar lo enseñado, ya que al trabajar con tecnología, la comprensión y conocimientos requeridos para desarrollar una asociación matemática inteligente serán casi seguramente diferentes a aquellos requeridos por estudiantes que realicen su trabajo en matemáticas sin acceso a la tecnología.

RESUMEN Y CONCLUSIÓN

En este trabajo he argumentado que cuando se está reflexionando sobre el papel más reciente de la tecnología informática de apoyo en la clase de matemáticas, tenemos que empezar por aceptar que siempre hemos usado la tecnología para apoyar la actividad matemática en clase, pero que por su familiaridad, no hemos logrado separar qué constituye matemáticas en sí y qué es valioso solamente por esta tecnología que tenemos a nuestra disposición. Como consecuencia, cada vez que surge un nuevo elemento, se da una tendencia natural a acomodarlo a las actividades matemáticas con las que estamos más familiarizados, sin tomar realmente en cuenta su relevancia dentro del nuevo ámbito tecnológico. Mientras que al parecer este acomodamiento ha sido, en la superficie, la fuente de beneficios pedagógicos significativos, al mejorar el aprendizaje de habilidades anteriormente difíciles de enseñar, tales usos de son más comunes que permanentes (ver también, Kaput, 1992). En segundo lugar, necesitamos reconocer que la tecnología que hemos empleado para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la clase, ahora y en el pasado, puede considerarse "inteligente" ya que posee la capacidad de reducir la carga cognitiva. Sin embargo, la nueva tecnología informática es cualitativamente diferente a la vieja tecnología del lápiz y el papel por su capacidad para almacenar y procesar información matemática. Finalmente, al reconocer su naturaleza "inteligente", permitimos la futura formación de asociaciones intelectuales que pueden llegar a poseer mucha más inteligencia matemática que la inteligencia humana por sí sola. Hacía allí apuntábamos cuando la tecnología de la clase estaba basada en lápiz y papel, pero no éramos capaces de reconocerlo porque el potencial intelectual de esta tecnología era mucho menos obvio que el de la nueva. Desde este punto de vista, los objetivos de la educación matemática no están en cuestionamiento. Lo que se está discutiendo es la manera de alcanzar estos objetivos.

REFERENCIAS

Barling, C. R. (1995). Personal communication.

Grossman, S. I. (1977). *Calculus*. New York: Academic Press.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligences and designs for education. En G. Salamon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations*. New York: Cambridge University Press.

Rose, W. N. (1964). *Mathematics for Engineers. Part 1*. Ninth Edition. London: Chapman & Hall Ltd.

Salamon, G., Perkins, D.N., & Globerson, T. (1991). Partners in cognition: Human intelligence with intelligent technologies. *Educational Researcher, 20* (3), 2–9.

Peter Jones
Swinburne University of Technology, Australia
pjones@swin.edu.au

CAPÍTULO 9

EVALUACIÓN Y CALCULADORAS GRÁFICAS

BARRY KISSANE, MARIAN KEMP Y JEN BRADLEY

Las calculadoras gráficas son herramientas poderosas en el aprendizaje de las matemáticas y por ello queremos que nuestros estudiantes aprendan a emplearlas de manera efectiva. El uso de estos computadores portátiles personales ofrece oportunidades de aprender de maneras interactivas y dinámicas. Sin embargo, sólo cuando su uso se ha integrado a todos los aspectos del currículo, los estudiantes empezarán a darle la importancia merecida. Esto incluye su uso en todo tipo de actividades de evaluación como tareas, pruebas y exámenes, y en actividades y exploraciones que tienen por objetivo desarrollar la comprensión del estudiante. La incorporación de las calculadoras gráficas a las actividades de evaluación requiere de una construcción cuidadosa de estas actividades. En este capítulo, discutiremos problemas de equidad con respecto a los diferentes modelos de calculadoras, niveles de uso de estas calculadoras y el propósito y diseño de actividades apropiadas. También describiremos una tipología que hemos creado para asistir en el diseño y producción de actividades de evaluación que promuevan el uso apropiado de las calculadoras gráficas, pero que no comprometa objetivos importantes del curso.

INTRODUCCIÓN

La importancia de las calculadoras gráficas dentro de la educación está estrechamente relacionada con la probabilidad de que éstas estén disponibles a los estudiantes en muchas situaciones: en salones de clase, al estudiar en casa y, particularmente para este capítulo, en situaciones de evaluación[1]. El tamaño, carácter portátil y los cómodos precios de las calculadoras gráficas hace necesario reconsiderar la evaluación de las capacidades matemáticas de los estudiantes bajo el supuesto de que les será permitido el uso de las calculadoras gráficas. Este capítulo proporciona un panorama y análisis de las relaciones que existen entre las calculadoras gráficas y la evaluación, al mismo tiempo que identifica una serie de problemas importantes.

En los últimos años hemos trabajado como equipo con el propósito de introducir gradualmente las calculadoras gráficas en un curso de matemáticas de pregrado en la Universidad de Murdoch en Australia Occidental (Bradley, Kemp & Kissane 1994). Nuestra principal motivación para incluir calculadoras gráficas dentro de la estructura del curso era (y todavía

1. El término "evaluación" se utiliza en este capítulo como traducción del término "asesment" (nota del traductor).

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 103-130

es) el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, como otros lo han encontrado en circunstancias similares, algunos problemas de evaluación surgieron de manera natural y requirieron nuestra atención. Aunque algunos de estos problemas son susceptibles de ser analizados en abstracto, la mayoría de ellos ha requerido trabajo práctico en la enseñanza y desarrollo del currículo. El interés del curso comprende trabajo en precálculo, álgebra y trigonometría, aunque incluye también algún trabajo sobre la noción de función derivada. No obstante, el desarrollo curricular que hemos llevado a cabo en este curso nos ha permitido observar las implicaciones más amplias del uso de las calculadoras gráficas en la evaluación dentro de otros contextos educativos. Nuestro trabajo ha sido respaldado, en parte, por una donación del CAUT, el Comité para el Avance de la Enseñanza Universitaria, una iniciativa del gobierno australiano por promover trabajos innovadores de este tipo.

Al parecer aún existe poca literatura acerca de problemas de evaluación relacionados con las calculadoras gráficas (por ejemplo, ninguno de los trabajos de Andrews & Kissane (1994) trataba este asunto). También es interesante resaltar que, a pesar de la aparente disponibilidad de los microcomputadores para la enseñanza de las matemáticas en los últimos tiempos, los problemas de evaluación parecen no haber sido analizados con cuidado por la literatura propia de la materia, que no ha sido prominente en el análisis de las relaciones entre tecnología y educación matemática. La explicación para este fenómeno es que hasta ahora no había sido necesario abordar el tema, ya que en la mayoría de los casos, los estudiantes no habían tenido suficiente acceso a la tecnología como para que se requiriera tomar en cuenta su uso en la evaluación. El desarrollo de la tecnología personal de las calculadoras gráficas ha cambiado esto y, por lo tanto, proporciona una exhortación para el presente trabajo.

¿QUÉ ES EVALUACIÓN?

La evaluación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se interesa por encontrar qué es lo que los estudiantes saben, comprenden y pueden hacer, con miras a usar esta información de alguna manera. La evaluación toma dos formas. Los exámenes formales son reconocidos alrededor del mundo. Estos son algunas veces externos a la escuela, y también hay versiones menos formales como las evaluaciones de clase y cuestionarios, generalmente de menor duración y circunscritos al salón de clase. En la mayoría de los casos de evaluación formal el tiempo es controlado y supervisado. En tanto que existen muchos tipos de preguntas, éstas pueden, a menudo, ser clasificadas en dos grandes grupos: preguntas de respuesta corta, como preguntas de selección múltiple, que requieren que el estudiante examine y analice una situación, y luego seleccione la mejor respuesta entre las ofrecidas; y preguntas abiertas, que requieren que el estudiante estructure una respuesta por él mismo, y generalmente exige que éste dé pruebas de su reflexión, no simplemente de la conclusión. Nuestra experiencia e intereses recaen principalmente sobre la última categoría, aunque mucho de este trabajo también tiene implicaciones para las preguntas de respuesta corta.

La evaluación formal tiene, a veces, un carácter de evaluación definitiva, tal y como una evaluación externa solía determinar en parte si un estudiante sería admitido en una institución o programa determinado o no, o si le era permitido graduarse. En situaciones competitivas a nivel nacional, los niveles de exigencia pueden hacerse muy altos, y los problemas de las calculadoras gráficas y la evaluación pueden volverse de interés publico, no sólo problemas prácticos para el profesor de matemáticas.

Hay mucha información interesante que puede sacarse del trabajo de los estudiantes en ámbitos menos formales, incluyendo tareas semanales, proyectos e investigaciones, que pueden llevarse a cabo por los estudiantes en colaboración con herramientas tales como libros de texto dentro de límites de tiempo mucho menores. Según nuestra experiencia el uso de calculadoras gráficas en estas situaciones es muy importante para el aprendizaje y la evaluación. Además, hay bastante evaluación informal en la clase, basada en observaciones, entrevistas y conversaciones. Aunque este tipo de evaluación formativa puede, discutiblemente, ser inclusive más importante, de hecho, que la evaluación formal, no constituye el tema de este trabajo.

¿POR QUÉ ES IMPORTANTE EL USO DE CALCULADORAS GRÁFICAS EN LA EVALUACIÓN?

Las principales razones para tratar de llegar a un acuerdo en lo relacionado con el uso de calculadoras gráficas están ligadas a la integración de la tecnología al currículo (Kemp, Kissane & Bradley 1995). La coherencia de los contextos de la evaluación y el aprendizaje es básica. Las calculadoras gráficas gozan de un ventaja significativa sobre otros computadores en términos de accesibilidad; los estudiantes están potencialmente en capacidad de usar calculadoras en muchos lugares, como en las aulas, en casa al trabajar en tareas o trabajos, y en situaciones de evaluación formal. Aunque las calculadoras gráficas proveen nuevas oportunidades de aprendizaje importantes y acceso a nuevas formas de enfrentar problemas matemáticos, en nuestra experiencia, algunos estudiantes se sienten inclinados a subvalorar ambas cosas si las calculadoras no están integradas dentro del programa de evaluación, así como dentro del resto del currículo (Bradley, Kissane & Kemp 1996). Esto es especialmente importante en el caso de la evaluación de alto nivel.

Ahora se busca un tipo de cambio diferente, ya que se espera un nuevo logro, con respecto al punto hasta el cual los estudiantes pueden hacer un uso adecuado de la tecnología; esto incluye decidir cuándo usar una calculadora gráfica y cuándo no, usarla de manera eficiente, interpretar los resultados obtenidos y describirlos en lenguaje matemático apropiado. Un logro tan importante debe ser evaluado, lo cual implica cambiar el estilo tradicional de evaluación.

Con respecto a la opinión de los estudiantes sobre el uso de calculadoras gráficas, ya hemos reportado información que sugiere la existencia de un cambio positivo asociado con el uso en todas las áreas de evaluación (Kissane, Kemp & Bradley, 1995). En la tabla, abajo, se presentan las actitudes promedio de grupos de estudiantes de pregrado exitosos hacia el uso de calculadoras gráficas, sumadas a los resultados de 1996. El grupo de 1994 usaba calculadoras en clase y en una evaluación de clase, pero no en tareas o exámenes finales, mientras que los otros dos grupos usaban calculadoras gráficas en todas las fases de la evaluación. La calificación está limitada de 1 a 4, estando la calificación alta asociada con una actitud más positiva, y la de 2.5 con ambivalencia.

	1994	**1995**	**1996**
El uso de las calculadoras gráficas me ayudo a entender gráficos de funciones racionales y polinomiales.	3.15	3.19	3.33
El uso de calculadoras gráficas me ayudo a entender gráficos de funciones trigonométricas.	3.10	3.13	3.23
Fue una buena idea el poder usar las calculadoras gráficas en la evaluación.	3.01	3.22	3.39
El uso de las calculadoras gráficas me ayudo a entender la relación entre gráficos y soluciones a ecuaciones y desigualdades.	2.96	3.20	3.35
El uso de las calculadoras gráficas me ayudo a entender matrices y su uso para resolver problemas de sistemas de ecuaciones.	2.88	3.09	3.33
En general disfruté el uso de las calculadoras gráficas.	2.83	3.03	3.30
Algunas preguntas de los trabajos deberían requerir el uso de calculadoras gráficas.	2.76	3.13	3.23
Creo que se nos deberían permitir el uso de calculadoras gráficas en el examen final.	2.71	3.35	3.53

Tabla 1. Calificación promedio en elementos de Likert seleccionados

Esta tabla ilustra claros cambios en grupos sucesivos de opinión con respecto a las calculadoras gráficas. En tanto que el cambio de posición en asuntos concernientes a la evaluación es bastante predecible, los cambios no directamente relacionados con evaluación apoyan los argumentos que buscan la integración de las calculadoras gráficas en la evaluación, para aprovechar las consecuencias de un uso más amplio. Más detalles sobre nuestras experiencias, lo relativo al curso y otros aspectos de las reacciones de los estudiantes, se pueden encontrar en Kissane, Kemp & Brandley (1995).

CAPACIDADES DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS

Al considerar las relaciones entre evaluación y calculadoras gráficas, la capacidad matemática de las calculadoras necesita ser tomada en cuenta. Dos problemas emergen con rapidez. En primer lugar, sin importar la forma como son descritas, las calculadoras gráficas son computadoras bastante potentes y dan acceso a muchas capacidades matemáticas que no son esencialmente gráficas en su naturaleza. En segundo lugar, hay diferencias considerables entre las capacidades de diferentes modelos. Los pares de pantallas de calculadoras en las figuras 1, 2 y 3 ilustran estos puntos.

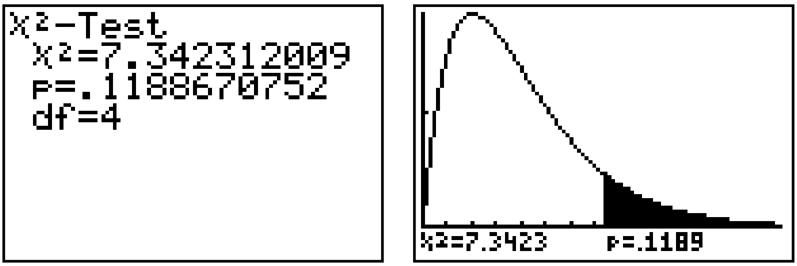


Figura 1. Prueba de hipótesis de chi-cuadrado en una Texas Instruments TI-83

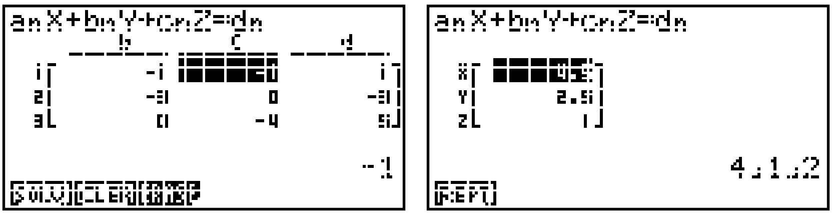


Figura 2. Solución de un sistema lineal de ecuaciones en una Casio fx-9700

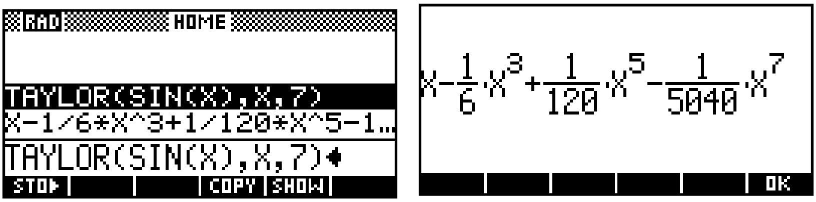


Figura 3. Polinomio de Taylor en una Hewlett Packard HP-38G

Otros ejemplos para los cuales el principal apoyo matemático dado por la calculadora no es esencialmente gráfico, podrían haberse escogido fácilmente (aunque puede tener un elemento gráfico, como en el ejemplo de la prueba de hipótesis arriba). Las calculadoras gráficas pueden ser usadas directamente para encontrar términos sucesivos de una secuencia recursiva definida, construir intervalos de confianza, desarrollar matrices aritméticas, aproximar integrales definidas, operar con números complejos, etc. Algunas calculadoras recientes tienen capacidad de símbolos muy grande, por lo cual generan preocupación creciente tanto en diseño de currículo como en evaluación. Algunos ejemplos ilustrativos se muestran en la figura 4, que contiene pantallas de una Texas Instruments TI-92, el mejor ejemplo que se encuentra del sistema algebraico de una computadora de mano.

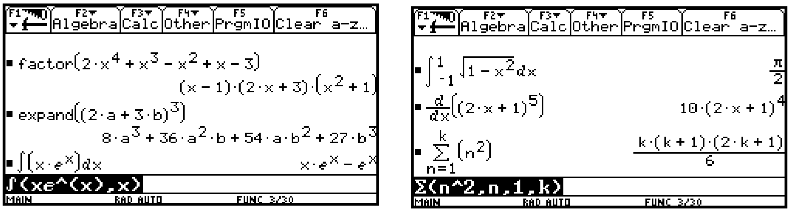


Figura 4. Manipulación simbólica en una Texas Instruments TI-92

Una complicación que se presenta al considerar la evaluación con calculadoras gráficas, especialmente más allá del nivel local, donde se puede esperar que todos los estudiantes tengan la misma calculadora, es que no todas las calculadoras tienen precisamente las mismas capacidades. Las capacidades más sofisticadas de algunas calculadoras no están siempre al alcance en otros modelos. En algunos casos, esto es una consecuencia de variaciones entre las capacidades dentro de una misma marca de calculadoras (tales como las diferencias entre las Texas Instruments TI-81 y TI-83), mientras que en otros casos las diferencias reflejan la heterogeneidad de visiones de los fabricantes sobre lo que es importante a diferentes niveles. En muchos casos, las diferencias se pueden minimizar por medio de la habilidad para usar la calculadora o a través de programas cortos. Por ejemplo, a diferencia de los modelos más poderosos, ni la Texas TI-81 ni la Casio fx-7700 tienen una rutina de búsqueda automática de raíz. Los programas cortos de la figura 5 permiten a los estudiantes actualizar sus calculadoras para lograr el mismo resultado, aunque de manera un poco menos eficaz, una vez que hayan dibujado un gráfico y hayan decidido aproximadamente dónde están localizadas las raíces. Los profesores pueden facilitar tal programa a los estudiantes, quienes no tienen que saber más acerca de programación o del procedimiento de Newton-Raphson para usar el programa, de lo que saben los estudiantes que utilizan versiones de rutinas originalmente incluidas, como éstas en una calculadora más sofisticada.

```
:Lbl 0
:X→D
:X-(Y₁/NDeriv(Y₁
,X)→X
:If abs (X-D)>0.
0000001
:Goto 0
:Disp X
```

```
Lbl 0↵
X→D↵
X-(Y1÷d/dx(Y1,X))→X↵
Abs (X-D)>0.0000001⇒
Goto 0↵
X
```

Figura 5. Programas cortos para una Texas Instruments TI-81 y una Casio fx-7700

Programas similares pueden escribirse para reducir otras diferencias, como la de crear términos recursivos de una secuencia en una calculadora sin capacidad para funciones recursivas o para evaluar integrales definidas numéricamente.

A diferencia de los ejemplos anteriores, algunas capacidades de las calculadoras son más difíciles de reemplazar, y constituyen, por lo tanto, una preocupación más grande cuando se toma en cuenta la evaluación. Algunos ejemplos incluyen los gráficos en coordenadas polares, los cálculos aritméticos con números complejos, la solución automática de sistemas de ecuaciones lineales, la generación de términos de series de Taylor, la comprobación de hipótesis estadísticas y la manipulación simbólica, generalmente.

PROBLEMAS DE EQUIDAD RELACIONADOS CON DIFERENTES MODELOS

Ha surgido una comprensible preocupación por la posibilidad de que los estudiantes más acomodados puedan gozar de ventajas en el momento de la evaluación formal por el simple hecho de poder comprar calculadoras gráficas más sofisticadas, que normalmente cuestan más que los modelos menos avanzados. En tanto que puede ser posible (hasta un punto limitado) resolver tales problemas a nivel local al promover, o inclusive insistir, que todos los estudiantes usen la misma calculadora gráfica, esta estrategia es en sí misma injusta y en última instancia incontrolable. En cualquier caso, estas soluciones no son posibles a un nivel más amplio, fuera del ámbito de una sola clase, escuela, distrito o estado.

Ya se ha empezado a acumular experiencia que indica que en la práctica la mayoría de los estudiantes tienden a usar las partes menos sofisticadas de sus calculadoras de una manera más eficiente, y a estar menos seguros en el manejo de las capacidades más sofisticadas. Con frecuencia, las operaciones más complejas de las calculadoras sólo son valiosas para usuarios más avanzados y experimentados. Nuestras observaciones informales en la Universidad de Murdoch son consistentes con este hecho. También es necesario reconocer que alguien que ha experimentado más tiempo con una calculadora avanzada estará, seguramente, en mejor capacidad de manejar más situaciones matemáticas que otras personas; de hecho, ¡seguramente sabrán más de matemáticas por el solo hecho de haber pasado más tiempo usando su potente calculadora! En otras palabras, no es sólo que la calculadora tenga más capacidades sino también influye quién la esté operando.

No obstante, el problema de la equidad es real, y necesita ser considerado en el contexto de la evaluación, particularmente evaluación de alto nivel como los Exámenes Avanzados de Clasificación en los Estados Unidos, exámenes de nivel A en el Reino Unido y exámenes terciarios de admisión en Australia y cualquier otro lugar (Kissane, Bradley & Kemp, 1994).

Una solución parcial al problema es la especificación y publicación de las capacidades mínimas requeridas por cursos o exámenes (como ocurre con los Exámenes Avanzados de Clasificación en Cálculo en Estados Unidos). Esto traslada la carga a las personas responsables de las evaluaciones para asegurar que las preguntas no se presenten más fáciles para alumnos con calculadoras más sofisticadas y al mismo tiempo, indica a los estudiantes, sus padres y profesores a qué capacidades se debe estar seguro de tener acceso. En el caso de los estudiantes con modelos menos costosos, o simplemente menos avanzados, se les deben facilitar programas cortos como los mostrados en la sección anterior, con la suficiente anticipación como para que se familiaricen con su utilización fluida.

Esta forma de utilización de programas evidencia que los estudiantes necesitan tener acceso a la memoria de las calculadoras, y sugiere que sería bastante injusto que las baterías fueran removidas o la memoria borrada antes de un examen. A su vez, esta posición revela un problema reciente relacionado con la capacidad de almacenamiento de texto en algunos modelos de calculadoras. Aunque se puedan almacenar cantidades limitadas de texto en cualquier calculadora gráfica (simplemente al escribir un programa formado por palabras, por ejemplo), algunas calculadoras ofrecen de hecho la posibilidad de escribir, guardar y recobrar anotaciones. Los estudiantes con tales calculadoras, en una situación de evaluación en la cual no se requiera que las memorias sean borradas, pueden sacar ventaja de esto. Aunque superficialmente este hecho puede ser preocupante, no es conceptualmente diferente a permitir a los estudiantes la referencia a hojas de notas, tablas con fórmulas matemáticas e inclusive exámenes con libro abierto. Desde hace un tiempo, en la Universidad de Murdoch, de manera rutinaria, hemos permitido a los estudiantes llevar consigo a los exámenes una página o dos de anotaciones, para recalcar el énfasis de que el razonamiento matemático no es esencialmente un problema de *memorizar* información, sino de escoger adecuadamente la formulación matemática del problema, interpretar las soluciones de manera inteligente, expresar los argumentos matemáticos y así sucesivamente. Puede ser, sin embargo, que el uso continuado de calculadoras gráficas sirva de vehículo para incitar a los profesores de matemáticas a considerar con más detenimiento cuáles son las características verdaderamente importantes del trabajo matemático.

Así como un mínimo de capacidades, las calculadoras gráficas ya han progresado hasta el punto en el cual es necesario reconocer que algunas capacidades son tan poderosas que la habilidad para manejar modelos menos experimentados, por alta que sea, no podrá superar los problemas de equidad. El ejemplo más obvio de esto es la Texas TI-92, algunas de cuyas pantallas se han mostrado antes. En este momento, aunque las desigualdades a nivel local se puedan reducir de la manera más obvia (asegurándose de que todos los estudiantes tengan acceso similar a la misma calculadora), parece no haber alternativa en contextos de evaluación más amplios que restringir el uso de tales calculadoras, especialmente de aquellas capaces de realizar manipulación simbólica *extensiva*. Un problema esencial es que resulta demasiado difícil encontrar la diferencia entre las respuestas, en un examen, de alguien que sabe mucho de matemáticas y alguien que solamente sabe usar su calculadora. A propósito, esto es un problema aun cuando todos los estudiantes tienen acceso a la misma calculadora. Por supuesto, la "solución" de prohibir el uso de la tecnología en la evaluación no es el mejor recurso a largo plazo, y todavía tenemos mucho que reflexionar acerca de ajustes en los currículos y su evaluación de la siguiente generación de calculadoras gráficas. Este asunto es discutido con mayor profundidad por Bradley (1995).

Algunos problemas de desigualdad pueden ser reducidos e inclusive eliminados a través de un diseño cuidadoso de las actividades de evaluación, como lo argüimos más adelante. Por ejemplo, si se le pide a los estudiantes que encuentren las raíces de una función con una precisión de una sola cifra decimal, en vez de varias cifras decimales, la ventaja normalmente ganada por la capacidad de búsqueda automática de raíces sobre un proceso de rastreo y aproximación desaparece. De hecho, en muchas situaciones prácticas, ni las respuestas exactas, ni los decimales son importantes; lo que importa es el número y naturaleza de las soluciones y su tamaño aproximado. En cualquier caso, incluso si en la práctica se garantiza un nivel de exactitud mayor, esto no quiere decir que tengamos que exigirlo en situaciones de evaluación formal.

NIVELES DE UTILIZACIÓN DE CALCULADORAS EN LA EVALUACIÓN

Hay esencialmente tres opciones para trabajar con calculadoras en situaciones de evaluación: las calculadoras se pueden usar sin ninguna restricción salvo por las limitaciones en modelos y capacidades; pueden ser totalmente excluidas de la etapa de evaluación, que es el caso de muchos planteles alrededor del mundo; o puede darse una combinación de las dos (como cuando se requiere que una sección del examen se realice sin calculadora).

Acceso ilimitado a las calculadoras

El argumento más persuasivo para permitir el uso ilimitado de calculadoras gráficas es que se asemeja más a las situaciones normales de enseñanza y aprendizaje. Si esperamos integrar la tecnología a nuestros currículos, es prudente reducir las diferencias entre las condiciones de evaluación y las de una clase típica. Por esto, nos inclinamos fuertemente por esta estrategia del uso de las calculadoras. Con acceso ilimitado a calculadoras gráficas, se espera que los estudiantes escojan por ellos mismos cuándo y cómo usar una calculadora, aunque se proporcione alguna guía para preguntas particulares. También es posible plantear preguntas que nos permitan descubrir directamente qué tan bien han aprendido los estudiantes a usar las capacidades de sus calculadoras gráficas al servicio de la solución de situaciones matemáticas.

Evaluación independiente del uso de calculadoras

Cuando el uso de calculadoras es permitido en la evaluación, se ha sugerido que el énfasis debería ponerse en el planteamiento de preguntas "neutras" con respecto al uso de calculadoras, para las cuales no exista ventaja de aquellos estudiantes con calculadora sobre otros que no tengan acceso a una. Esta es, a nuestro parecer, una estrategia poco apropiada para resolver los problemas de equidad. En primer lugar, las preguntas que se consideran como "neutras" al uso de calculadoras a menudo no lo son, particularmente para usuarios hábiles. Estos estudiantes pueden, con frecuencia, verificar sus respuestas por medio de las calculadoras, y obtener así, una ventaja relativa sobre aquellos que no cuentan con dicha máquina. Por ejemplo, los estudiantes que al tratar de determinar una integral indefinida, utilicen una calculadora que pueda graficar funciones integrales estarán en una posición aventajada con respecto a aquellos que no cuentan con esta ayuda.

Una forma de volver las actividades de evaluación “neutras” al uso de calculadoras, tal vez la principal forma, es usar expresiones simbólicas en lugar de números. Aunque probablemente esto es efectivo al neutralizar la influencia de las calculadoras gráficas (en muchas, pero ciertamente no en todas las situaciones, al menos como se indica en el ejemplo), puede fácilmente tener la indeseable consecuencia de hacer la evaluación bastante más difícil de lo que se pretendía, o de lo que era necesario (para una discusión más extensa ver Bradley (1995)).

Más aun este tipo de práctica de evaluación se encuentra peligrosamente cerca de enviar el mensaje errado de que las calculadoras y su uso inteligente no son realmente útiles. Las calculadoras gráficas tienen el potencial de ser un poderoso aliado para estudiantes que están aprendiendo matemáticas, para los profesores que las enseñan y para diseñadores que tratan de traer al currículo cambios que acepten y saquen provecho de la invención del microprocesador. Sería una tragedia si enviásemos a la comunidad el mensaje de que las calculadoras gráficas no son realmente aparatos útiles después de todo.

Evaluación sin calculadoras

La alternativa final para enfrentar los problemas de uso de calculadoras es prohibir su utilización. Esto ciertamente soluciona un problema, pero a expensas de la creación de otros. Cuando se deja de utilizar calculadoras gráficas aunque sea en una sola parte de la evaluación, perdemos la capacidad de determinar si los estudiantes han aprendido o no ha hacer un uso inteligente de la tecnología. Cuando los profesores, autores de libros de texto y diseñadores de exámenes controlan cuándo y cómo los estudiantes harán uso de sus calculadoras, cualquier oportunidad o incentivo para hacer que aprendan a tomar estas decisiones por ellos mismos desaparece. La evaluación sin calculadora impide a los estudiantes desarrollar tales habilidades de discriminación, aspecto crucial del uso inteligente de cualquier tipo de máquina. En vez de incentivar el uso de calculadoras gráficas para ayudar a los estudiantes a pensar en matemáticas, este tipo de práctica fomenta que sólo lo hagan cuando se les ordena.

Un problema adicional aparece con los exámenes que permiten el uso de calculadoras gráficas parte del tiempo, pero no siempre, ya que esto puede hacer, inadvertidamente, un curso más dificil. Es posible que una de las consecuencias de esta práctica sea el aumento en los contenidos de un curso, ya que los estudiantes deben saber tanto la forma antigua como la nueva manera de resolver un problema matemático. De este modo, mientras que invertir una matriz de 2×2 es bastante fácil de hacer a mano, y posiblemente también con una calculadora, lo mismo no es cierto para matrices con dimensiones de 3×3 o más. Así, en vez de considerar los algoritmos numéricos para la inversión de una matriz de 3×3 como un curioso anacronismo histórico, si se le pide a los estudiantes que hagan esto a mano además de que usen su calculadora a veces (discutiblemente una manera mucho más inteligente de emplear su tiempo), el efecto que se produce es que la calculadora ha creado más trabajo para los estudiantes, lo cual sería una consecuencia irónica del uso de un instrumento originalmente creado para ahorrar tiempo. El argumento de que los estudiantes comprenderán mejor lo que hacen si desarrollan fluidez con largos métodos manuales es muy difícil de defender, aunque algunas veces se hacen intentos. Para discutir usando una analogía, muy pocos estudiantes, si es que hay alguno, desarrollaron una mejor percepción de la naturaleza de la raíz cuadrada al sacarla por medio del tedioso, complicado y antiguo algoritmo que se enseñaba en las escuelas hasta hace sólo 30 años, que a través del uso de tablas o calculadoras científicas.

Por supuesto, algunos problemas matemáticos son "neutros a las calculadoras" por naturaleza. Estos incluyen nociones de prueba, traducción de palabras a símbolos, análisis de situaciones reales, manipulación simbólica, modelamiento matemático y la mayoría de los aspectos de las matemáticas modernas; algunos ejemplos aparecen en la siguiente sección. Tales actividades pueden fácilmente ser incluidas en exámenes que permitan el uso de calculadoras gráficas.

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN PARA LOGRAR LA INTEGRACIÓN DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS

Cuando se le permite a los estudiantes el uso de las calculadoras gráficas en situaciones de evaluación, es esencial que las actividades de evaluación sean diseñadas cuidadosamente con eso en mente. Esto requiere una visión clara de lo que buscamos con una actividad de evaluación específica y una buena comprensión del papel de las calculadoras gráficas en lo que estamos tratando de encontrar. La integración de las calculadoras gráficas en la evaluación requiere más atención detallada que la simple aprobación de su uso en instrumentos de evaluación existentes. En esta sección proponemos y ejemplificamos un análisis de las relaciones entre actividades de evaluación y las calculadoras gráficas.

La primera etapa del diseño ocurre antes de que alguna actividad de evaluación sea planeada. Tal y como la sección precedente indica, se pueden adoptar diferentes niveles de uso de las calculadoras y se debe tomar una decisión al respecto y comunicársela, adecuadamente, a los estudiantes. En términos prácticos, si suponemos que la evaluación no será independiente de la calculadora, la decisión primordial que se debe hacer está entre "permitir" y "exigir" el uso de calculadoras gráficas. Las dos posibilidades invocan imágenes diferentes para la tarea del diseñador. En el caso de "permitir" el uso de las calculadoras, hay un tono implícito de renuencia y refrenamiento en vez de estímulo. También hay una sugerencia implícita de que algunos estudiantes pueden inclinarse por rechazar la oferta de usar la calculadora gráfica, o pueden no estar en capacidad de aceptar la oferta por no tener acceso al equipo adecuado. En consecuencia, se debe prestar atención a cómo asegurar que no exista ninguna desventaja asociada con este hecho.

Los mensajes asociados con "requerir" el uso de calculadas gráficas son bastante diferentes. Se supone que la calculadora gráfica forma parte de las "herramientas de trabajo" de los estudiantes, y se espera de estos, a su vez, que demuestren que son capaces de usarla en forma eficiente y autónoma en las circunstancias apropiadas, al trabajar con problemas matemáticos. También se espera que se den cuenta de que algunas veces no es apropiado usar una calculadora gráfica, o que su uso debe ir apoyado y complementado de varias maneras a través de análisis matemáticos cuidadosos. En pocas palabras, cuando las calculadoras son integradas a la estructura de un curso, su uso será requerido en la evaluación y no simplemente tolerado.

Como resultado de nuestra experiencia en el proceso de integrar las calculadoras gráficas a la estructura de los cursos, hemos desarrollado una tipología (tabla 2) de las posibles relaciones entre las actividades asignadas a los estudiantes en la evaluación y nuestras intenciones con respecto al uso de las calculadoras gráficas.

	Se cuenta con un uso generalizado de las calculadoras gráficas
1	A los estudiantes se les aconseja de manera explícita o inclusive se les ordena el uso de calculadoras gráficas
2	Las alternativas de uso de las calculadoras gráficas son muy ineficaces
3	Las calculadoras gráficas son usadas sólo como calculadoras científicas
	Se cuenta con que sólo algunos estudiantes usen las calculadoras gráficas
4	Tanto el uso como el no-uso de las calculadoras gráficas resulta conveniente
	No se cuenta con el uso de las calculadoras gráficas
5	Se requieren respuestas exactas
6	Se requieren respuestas simbólicas
7	Se requieren explicaciones de razonamiento escritas
8	Las actividades requieren la extracción de las matemáticas de una situación o la representación matemática de una situación
9	El uso de las calculadoras gráficas es ineficaz
10	Las actividades requieren que una representación de una calculadora gráfica sea interpretada

Tabla 2. Uso esperado de las calculadoras gráficas y exámenes (De Kemp, Kissane & Bradley, 1996)

Esta tipología está descrita más extensamente en Kemp, Kissane & Bradley (1996). Aquí sólo tenemos espacio para describir e ilustrar brevemente los diferentes tipos de relaciones intencionales. La siguiente sección también contiene un buen número de ejemplos.

Se cuenta con el uso de las calculadoras gráficas

Existe un número de razones por las cuales podríamos diseñar actividades de evaluación para las cuales se contara con el uso de las calculadoras gráficas. La más apremiante entre éstas es que algunas veces no hay otra alternativa para el *estudiante* que usar la calculadora gráfica para resolver un problema. En otras ocasiones, pueden haber alternativas, pero son poco prácticas porque toman demasiado tiempo, o son muy complicadas. En nuestra tipología, hemos identificado separadamente la situación en la que a los estudiantes se les aconseja explícitamente el uso de calculadoras gráficas para una actividad en particular, en vez de esperar que decidan esto por su propia cuenta. Por ejemplo, considérense las siguientes preguntas de un examen:

a. Haga el gráfico de la función $f(x) = 2x \operatorname{sen} x + \cos x$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ mostrando los puntos críticos.

b. Use el gráfico para solucionar $2x \operatorname{sen} x + \cos x \geq 2$ sobre este intervalo.

Existen procedimientos tradicionales, usando el cálculo, para identificar los puntos críticos de una función y por lo tanto para realizar un gráfico de la función en un intervalo. Sin embargo, los estudiantes que aún no hayan estudiado cálculo (e inclusive aquellos que hayan estudiado cálculo, pero deseen sólo una solución aproximada y no una exacta) encontrarán una valiosa ayuda en la calculadora gráfica en situaciones como ésta. No obstante, a menudo, el buen uso de las calculadoras gráficas para trazar curvas no es un asunto trivial. La pantalla de calculadora que se muestra en la figura 6 ejemplifica algunas de las maneras en las que los estudiantes utilizan la calculadora para ayudarlos en su reflexión.

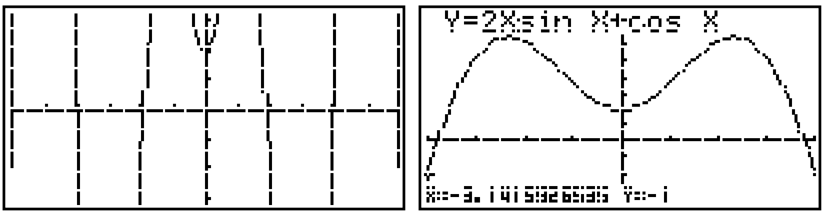


Figura 6. Uso de una Casio fx-9700 para graficar una función

La primera pantalla muestra qué pasaría si un estudiante usara los ejes predeterminados, aún si la calculadora estuviera puesta en radianes (lo que, por supuesto, no es siempre el caso). Para producir un gráfico como el de la segunda pantalla se requiere que el estudiante realice algunos análisis matemáticos, incluyendo una reflexión acerca de cuáles puntos del gráfico son "críticos".

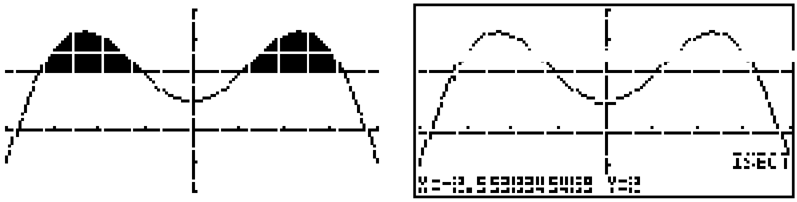


Figura 7. Uso de una Casio fx-9700 para examinar una desigualdad

Tal y como lo sugiere la figura 7, la solución de la desigualdad en la parte (b) puede requerir que los estudiantes sombreen (en la realidad o en sus mentes) el área sobre $y = 2$, y también puede requerir trazado o uso de procedimientos automáticos para encontrar puntos de intersección. En cada caso, una reflexión substancial de tipo matemático está involucrada. Puede ser preferible aconsejar a los estudiantes menos experimentados el uso de sus calculadoras gráficas (una pregunta tipo 1 según nuestra tipología) y podemos inclusive sugerirles cómo hacerlo. Sin embargo, abordar esta pregunta sin el uso de una calculadora gráfica no sería apropiado para la mayoría de los estudiantes, como para esperar que nos permitiera evaluar bien algunos aspectos importantes del logro en matemáticas.

Como anotamos anteriormente, el caso del uso de las calculadoras gráficas en matemáticas no está restringido al trazado y análisis de gráficos de funciones. El siguiente ejemplo ilustra otro contexto en el cual se contaría con el uso de una calculadora gráfica.

Ejemplo

Un estudio de salud entre los adultos compara el promedio de horas empleadas ejercitándose (x) con la medida del estado físico en que se encontraban (y), dentro de una muestra pequeña. Los datos se muestran a continuación.

x	5.3	19.2	9.1	11.3	2.1	8.1	4.5	9.0	6.2	5.8	19.2	14.0	15.5	16.2	10.9	14.1
y	2.6	12.9	6.1	5.9	2.4	5.8	5.3	8.0	3.7	14.8	12.9	9.8	10.3	13.1	8.0	12.3

(Para comprobar que ha insertado los datos correctamente, note que las medias de x y y son 10.65625 y 8.36875 respectivamente).

a. Encuentre la recta que mejor corresponda a estos datos. En una oración o dos describa qué tan bien pueden ser modelados los datos con una línea.

b. Una de las anteriores observaciones parece ser un agente intruso. ¿Cuál? Explique cómo puede usar una gráfica de dispersión para detectar el intruso.

c. Extraiga el intruso más obvio identificado en la parte (b), y encuentre la recta más apropiada para el conjunto de datos restante.

d. Describa dos maneras, una gráfica y una numérica, de decir qué recta de (c) es más apropiada para los datos que en (a).

e. Use la recta en (c) para predecir el estado físico de alguien que ejercita 12 horas a la semana en promedio.

Una ventaja significativa de las calculadoras gráficas sobre las científicas es que ofrecen la oportunidad de efectuar análisis de datos del tipo enunciado aquí. Una vez los datos están almacenados en la calculadora, estos pueden ser analizados en diferentes maneras, los intrusos pueden ser extraídos para determinar sus efectos directamente y se puede esperar iniciativa por parte de los estudiantes para decidir cómo abordar preguntas importantes. Es más probable que la evaluación de este tipo de actividades sea congruente con los objetivos del curso, con la enseñanza en clase y con prácticas estadísticas adecuadas.

Se cuenta con que sólo algunos estudiantes usen las calculadoras gráficas

Si un estudiante escoge o no hacer uso de la calculadora para una tarea en particular depende tanto del estudiante como de la tarea. Creemos que es apropiado que ocurra alguna variación y que se espere que los estudiantes necesiten ayuda en la toma de buenas decisiones sobre cuándo y cómo utilizar sus calculadoras gráficas. Como ilustración, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Una microbiologa está estudiando el crecimiento acelerado de un virus. Ella estima que un espécimen contiene 14 mil células de virus y que el número de ellas que se incrementa es el 6% cada hora.

a. ¿Cuántas células tendrá el virus al cabo de 15 horas?

b. ¿Cuánto tiempo tomará antes de que el espécimen alcance 20 mil células?

Hay muchas formas de que los estudiantes respondan a la parte (a). Por ejemplo, un estudiante experimentado puede simplemente calcular

$14(1.06)^{15}$ en una calculadora científica. Un estudiante menos experimentado puede construir una secuencia recursiva como la que mostramos en la figura 8, en la que un término nuevo es generado cada vez que se ejecuta el comando Ans* 1.06 al presionar la tecla “Enter”.

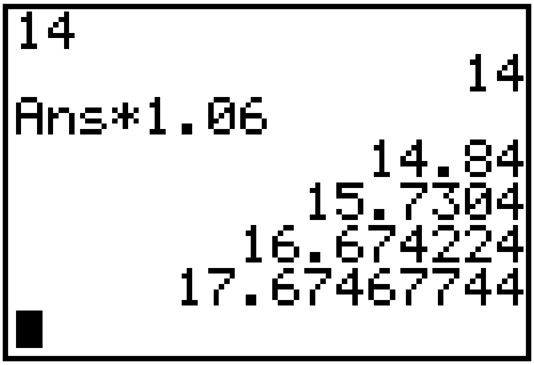


Figura 8. Uso de una Texas TI-81 para generar una secuencia recursiva

Otro estudiante puede usar las capacidades de funciones recursivas de su calculadora y construir una tabla de valores, o un gráfico de valores discretos que pueden ser trazados. Similarmente, cuando respondan a la parte (b) de la pregunta, algunos estudiantes harán uso de varias capacidades de las calculadoras gráficas (tales como encontrar puntos de intersección de $y = 14\ (1.06)^x$ y $y = 20$, usar un comando de “resolver”, desplazarse sobre una tabla de valores, etc.). Algunos estudiantes que saben de logaritmos pueden preferir resolver la ecuación $14\ (1.06)^x = 20$ comenzando por eliminar el logaritmo de cada lado. Sin importar el método empleado, los estudiantes tendrán que lidiar con problemas de exactitud e interpretación de su respuesta.

No se cuenta con el uso de las calculadoras gráficas

Hay un número de situaciones de evaluación en las que las calculadoras gráficas no son apropiadas, y la tipología resume cuáles son. La siguiente pregunta ofrece un ejemplo de un curso elemental de cálculo:

Encuentre el valor exacto de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx$.

Preguntar por el valor exacto requiere que la respuesta sea expresada como $\ln(4/3)$ luego de que la integral se haya resuelto simbólicamente. Si una calculadora gráfica (sin grandes capacidades de manipulación simbólica) fuera usada por los estudiantes, la integral numérica que se obtiene se podría utilizar como verificación de la respuesta simbólica. Sin embargo, esto no se podría considerar como una respuesta apropiada.

USO PLANEADO DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS

En esta sección utilizamos la tipología para ilustrar cómo las actividades de evaluación pueden ser diseñadas y adaptadas con el propósito de reflejar los diferentes usos apropiados de las calculadoras gráficas. Hemos escogido tomar un contexto particular, relacionado con la comprensión de las relaciones entre funciones y sus gráficos, para mostrar cómo la tipología puede ayudar a considerar el diseño de actividades de evaluación adecuadas. Otros contextos se pueden considerar de manera semejante. Para el que hemos escogido, cada uno de los diferentes tipos es relevante, aunque éste no sea necesariamente el caso para todos los contextos.

Cada una de las preguntas ilustrativas está relacionada con una función cúbica particular $f(x) = x^3 - x + 4$. Para conveniencia del lector, un gráfico de esta función se muestra en la figura 9, creado en una Texas Instruments TI-92 dado $-5 \leq x \leq 5$ y $-4 \leq y \leq 6$. El gráfico tiene la misma forma del gráfico de $g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ desplazado hacia arriba cuatro unidades.

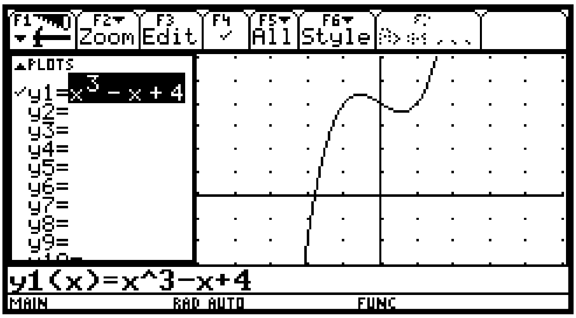


Figura 9. Gráfico de $f(x) = x^3 - x + 4$ en una Texas Instruments TI–92

Las diez actividades de evaluación proporcionadas aquí han sido escogidas para mostrar cómo diferentes aspectos del razonamiento y comportamiento matemático de los estudiantes pueden ser abordados al formularse preguntas de diferentes maneras. Por conveniencia, nos referimos aquí a la tipología por número. Las preguntas no deberían verse como simples alternativas; ellas tratan diferentes aspectos de esta función y sus gráficos. Similarmente, no es probable que se le exija a los estudiantes que respondan a varias de estas preguntas en el mismo examen o trabajo. El propósito de proporcionar estos ejemplos es el de ilustrar las clases de razonamiento necesarios cuando se diseña actividades de evaluación con el posible uso de las calculadoras gráficas en mente.

Tipo 1

Use su calculadora gráfica para encontrar soluciones $x^3 - x + 4 = 0$, con exactitud de dos cifras decimales.

Los estudiantes inexpertos pueden necesitar consejo acerca de cuándo e inclusive cómo usar su calculadora gráfica. Una actividad como ésta puede emplearse para determinar si los estudiantes pueden utilizar un proceso de refinamiento numérico y comprender el concepto de la solución de una ecuación o no. La figura 10 muestra algunas posibles iteraciones sucesivas en una Texas Instruments TI-82. La primera pantalla puede ayudar a los estudiantes a darse cuenta de la probabilidad de la existencia de una única solución, localizada en algún lugar entre $x = -2$ y $x = -1$; la segunda pantalla verifica que de hecho sólo existe una solución en este intervalo; la tercera pantalla permite una aproximación a la solución de la exactitud aproximada que se debe obtener.

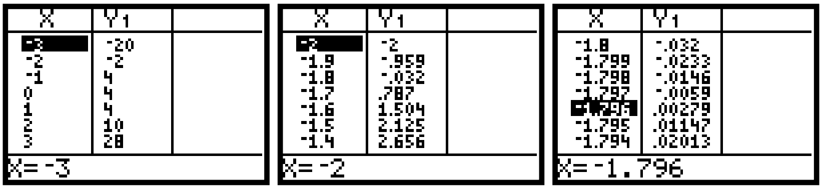


Figura 10. Uso de tablas en una Texas Instruments TI-82 para resolver una ecuación

Esta actividad también evalúa si los estudiantes comprenden el significado de “con exactitud de dos cifras decimales”. Los estudiantes más experimentados o hábiles que han descubierto cómo usar las funciones de solución automática de sus calculadoras (si las tienen) pueden preferir usarlas en vez de la iteración tabular.

Tipo 2

Resuelva con exactitud de dos cifras decimales $x^3 - x + 4 = 0$.

Sin guía alguna, los estudiantes deben decidir en este punto qué procedimiento es el apropiado. En varias calculadoras gráficas, existen muchas posibilidades. Por ejemplo, la figura 11 y la figura 12 muestran un método gráfico en una Texas Instruments TI-82 y el uso de una función de búsqueda automática de raíz en una HP-38G.

Sin importar qué máquina o método sea escogido, el estudiante necesita saber cómo preparar la calculadora para resolver una ecuación, y además se le exige que proporcione una solución al nivel de exactitud especificado. Los estudiantes necesitan estar en capacidad de desenvolverse en los diferentes modos, menús y sintaxis de la calculadora y saber cómo interpretar las pantallas que resulten. Por ejemplo, el procedimiento de extracción

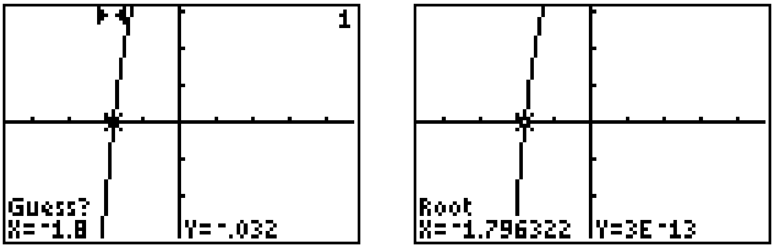


Figura 11. Utilización de la búsqueda automática de raíz en la Texas Instruments TI–82

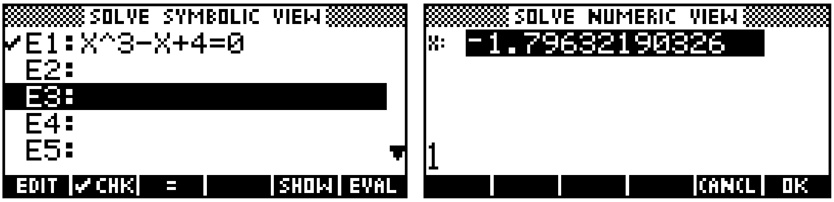


Figura 12. Utilización de la aplicación Solve en la Hewlett Packard HP–38G

automática de raíces de la TI-82 está ejecutada con precisión, sin embargo, el estudiante aún necesita percatarse de que la “raíz” es necesaria (aún cuando la actividad de evaluación no utiliza este término), conocer la importancia de la “conjetura” y ser capaz de reconocer 3E-13 como un número muy cercano a cero. Una actividad de evaluación como la que hemos mostrado suministra muestra que los estudiantes pueden hacer uso de sus calculadoras gráficas y evidenciar su razonamiento matemático.

Tipo 3

Dado $f(x) = x^3 - x + 4$

a. Evaluar $f(-1.795)$ y $f(-1.799)$.

b. Proporcionar un estimado (con tres cifras decimales) para el valor de c si $f(c) = 0$.

Aunque esta pregunta no requiere más cálculo que el que se puede obtener de una calculadora científica, y también requiere algún conocimiento de interpolación lineal, un usuario habilidoso de una calculadora gráfica puede fácilmente encontrar formas eficientes de completar la parte (a) y puede usar un método alterno que le ayude con la parte (b).

Tipo 4

Dado $f(x) = x^3 - x + 4$, resolver $f(x) = 12 - x$.

Algunos estudiantes preferirán resolver esta ecuación analíticamente desde el principio, reduciendo la ecuación a $x^3 = 8$. Sin embargo, otros pueden usar sus calculadoras para encontrar el resultado ($x = 2$) y luego buscar una solución analítica, antes de percatarse de que ésta parece ser un entero. (Esto no es diferente a darse cuenta que una expresión cuadrática pudo haber sido factorizada después de usar la formula cuadrática que produce una raíz racional).

Tipo 5

Resuelva exactamente $x^3 - x + 4 = x + 4$.

Reconocer la diferencia entre números exactos y aproximados y, por lo tanto, ser capaz de resolver ecuaciones es más bien difícil, y muchos estudiantes no lo logran hasta que alcanzan etapas más avanzadas de su conocimiento matemático. Hoy en día, en muchas calculadoras gráficas, uno de los resultados exactos ($x = 0$) se puede obtener rápidamente a través de rutinas de solución o de una solución gráfica. Aunque la mayoría de las calculadoras no dan de hecho un entero como resultado, *parece* que lo hicieran, ya que no existe punto del decimal después del cero, como consecuencia de la aproximación hecha por la calculadora. Por esto, un estudiante usando una Casio fx-9700 puede generar pantallas como la de la figura 13 luego de replantear la ecuación en la forma de $x^3 - 2x = 0$:

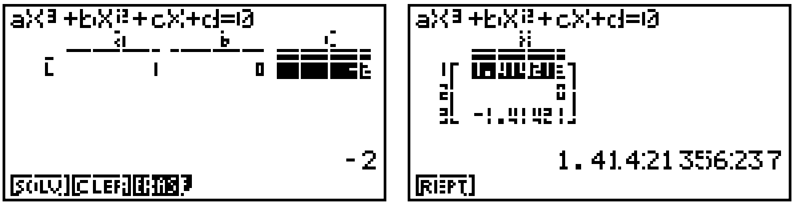


Figura 13. Resultados aproximados de una ecuación cúbica en una Casio fx–9700

Sin embargo, los demás resultados están dados como decimales (e.g., 1.41421356237). Aunque algunos estudiantes reconocerán los resultados como $\pm\sqrt{2}$, otros no; además, muchos estudiantes usando aquí una calculadora que requiera hacer conjeturas iniciales para obtener soluciones, pueden no encontrar el tercer resultado (e inclusive el segundo). Sólo una solución analítica sería una respuesta matemáticamente adecuada para una pregunta de esta naturaleza, y se espera que el estudiante se de cuenta de que el comando “resuelva exactamente” tiene este significado. Aunque la solución presentada por un estudiante en respuesta a esta pregunta puede no referirse para nada a la calculadora, el razonamiento del estudiante puede ser asistido por ésta, o la solución numérica proporcionada por la máquina podría ser usada para reafirmar que su respuesta analítica es correcta.

Tipo 6

Resuelva para x: $x^3 - x + 4 = (a-1)x + 4$.

A diferencia de la ilustración del tipo 5, sólo una solución analítica es posible aquí; los estudiantes que ingresan la ecuación directamente al área de solución de la calculadora pueden encontrar que ésta parece proporcionar una respuesta incorrecta. De hecho, la calculadora considerará la variable a como una constante, usará su valor numérico actual (dato ingresado previamente) y luego procederá a "resolver" la ecuación.

Tipo 7

Use el hecho de que la solución a $x^3 - x = 0$ sea x = -1, 0, y 1 para explicar por qué $h(x) = x^2(x^2 - 2)$ tiene puntos de inflexión en (-1,-1), (0,0) y (1,-1).

Esta pregunta requiere que el estudiante escriba una explicación, basada en su comprensión de las relaciones entre estos dos gráficos. Aunque pueda resultar útil graficar las dos funciones para entender a cabalidad la pregunta, la respuesta a esta pregunta debería depender de la observación de que una de la funciones sea la derivada de la otra.

Tipo 8

El recipiente de un líquido tiene la forma de una caja rectangular con un pequeño cuello cilíndrico en el centro de la parte superior de la caja. El cuello puede contener 4cc de líquido. Las dimensiones de la caja son tales que la longitud de uno de los lados de la base es 1 cm menos que su altura y la longitud del otro lado es 1 cm más. Exprese el volumen del recipiente como una función de su altura.

Claramente, preguntas como la del ejemplo del tipo 8 no se ven afectadas por la disponibilidad de las calculadoras gráficas.

Tipo 9

La solución a $x^3 - x + 4 = 0$ es -1.796 (con tres decimales). Encuentre la(s) solución(es) a $(x-1)^3 - (x-1) + 4 = 0$.

La intensión de la pregunta es determinar si los estudiantes comprenden las relaciones entre los gráficos y las ecuaciones y el efecto de las transformaciones horizontales en el gráfico de una función o no. Los estudiantes que comprendan estas relaciones tendrán poca dificultad en escribir rápidamente la solución de x = -0.796. Sería bastante ineficaz usar las calculadoras gráficas para resolver este problema, aún cuando es posible hacerlo. La figura 14 muestra cómo los usuarios experimentados de una Texas TI-83 o de una Hewlett Packard HP-38G pueden empezar a abordar el problema gráficamente.

Para cada una de estas calculadoras, el gráfico apropiado será trazado por los comandos mostrados. Sin embargo, los estudiantes con suficiente experiencia como para reconocer que la translación horizontal está involu-

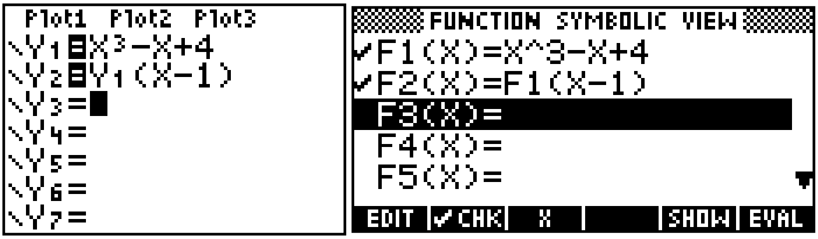


Figura 14. Funciones definidas con translación horizontal en una TI–83 y una HP–38G

crada, no necesitarán los gráficos para luego manipularlos y poder resolver la ecuación; esto resultaría ineficaz para alguien con ese nivel de comprensión. Similarmente, por supuesto, sería innecesario e ineficaz ingresar la ecuación $(x-1)^3-(x-1)+4=0$ directamente en la calculadora gráfica para resolverla.

Tipo 10

El gráfico aquí abajo muestra una función cúbica y la curva $y = 4$ graficada para $-4.7 \leq x \leq 4.7$ y $-2 \leq x \leq 6$. Encuentre la expresión simbólica de la función cúbica.

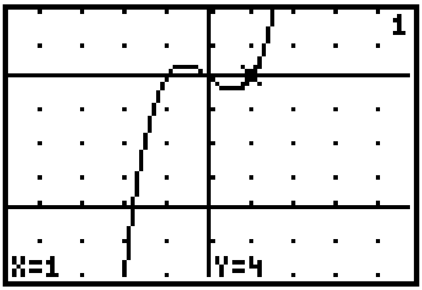


Figura 15. Pantalla de una Texas Instruments TI-82 para ser interpretada

Las preguntas del tipo 10 sirvieron a un propósito muy útil, y pueden llegar a ser bastante reveladoras sobre los conceptos erróneos de los estudiantes, aunque se debe prestar cuidado a que la respuesta no sea ambigua (o el método de calificación sea tolerante con un rango de respuestas correctas). El punto (1,4) trazado en la figura 15 está incluido para permitir a los estudiantes corregir sus respuestas de una manera eficiente. La intención de esta pregunta es que los estudiantes razonen, partiendo de su conocimiento de la forma del gráfico, las raíces y las transformaciones verticales, que la función graficada es una translación vertical de 4 unidades de una función con raíces en -1, 0 y 1(*aparentemente*, por lo menos para el gráfico). Por lo tanto una posible opción para la función es $y = x(x-1)(x+1) + 4$. A muchos estudiantes les gustaría asegurarse de que su razonamiento estaba correcto al graficar la función en sus calculadoras gráficas.

Las diez ilustraciones que hemos presentado de diseño de actividades de evaluación sugieren que no existe una alternativa fácil a la consideración cuidadosa del posible razonamiento de los estudiantes y su respuesta a actividades de evaluación en la etapa de diseño, lo cual, por supuesto, también es el caso de tipos de evaluación más comunes que aquellos que involucran el uso de calculadoras gráficas. Las posibles respuestas de los estudiantes a las actividades dependen de los niveles de experiencia de estos, tanto en términos de razonamiento matemático como en términos de fluidez del uso de las calculadoras.

Si los estudiantes poseen calculadoras, seguramente tratarán de hacer uso de ellas para resolver preguntas (como las de arriba) para las que se supone que el uso de la calculadora no es necesario. Cuando se evalúa la respuesta de los estudiantes a las actividades, normalmente la única evidencia disponible para nosotros es aquello que ellos escriben; como se muestra arriba, existen muchas oportunidades para que el razonamiento matemático de un estudiante se vea apoyado, retado e influenciado por el uso disciplinado de las calculadoras gráficas. Es precisamente por esta razón, que las calculadoras gráficas son potencialmente útiles tanto a estudiantes como a profesores de matemáticas. Aun cuando las respuestas de los estudiantes a una pregunta no muestren necesariamente estos efectos de manera explícita, es necesario tenerlos en cuenta en la etapa de diseño.

IMPLICACIONES DEL USO DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EN LA EVALUACIÓN

Tal y como ya sugerimos, el uso de las calculadoras en la evaluación es un paso importante hacia la integración de la tecnología en el currículo. Antes de que se dé este paso, no es probable que se den cambios substanciales en el currículo, ya que es factible que las calculadoras gráficas se tomen simplemente como una herramienta extra, opcional, aunque deseable. Luego de que se da el paso, sin embargo, es más posible que los que desarrollan el currículo, los profesores y sus estudiantes vean a las matemáticas con nuevos ojos. El uso de las calculadoras gráficas tiende a producir el efecto de motivar el uso y posesión de calculadoras, sobre todo para evaluaciones de alto nivel.

Un efecto probable es que la disponibilidad de las calculadora gráficas puede trivializar algunos procedimientos matemáticos que hoy en día toman mucho tiempo. Un buen ejemplo es la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Muchos estudiantes (probablemente demasiados) aprenden esto como un procedimiento más bien complicado, especialmente para sistemas con más de dos ecuaciones. A los estudiantes les toma un buen tiempo aprender estos procedimientos, y se emplea una gran cantidad de tiempo extra desarrollando y manteniendo la fluidez. Aun así, pocos discutirán que este tiempo fue bien empleado, en términos de lograr que los estudiantes desarrollen y comprendan la naturaleza de las ecuaciones lineales. Sin embargo, no es mucho lo que se comprende cuando se sabe cómo y cuándo utilizar la eliminación de Gauss-Jordan o la regla de Cramer, y muchos profesores consideran el tiempo empleado en esto como un mal necesario más que como una producción intelectual. De hecho, toma tanto tiempo desarrollar habilidad en la solución de sistemas, que muchos de nosotros no hemos tenido tiempo para dedicar a la más importante tarea de construir dichos sistemas; en consecuencia, hemos enseñado, frecuentemente, a nuestros estudiantes cómo resolver una sistema que alguien más a construido, pero hemos sido mucho menos exitosos al enseñarles cómo construirlos por ellos mismos. Tal vez podremos restaurar un poco el balance si los estudiante pueden usar una calculadora gráfica para trabajar con los procedimientos de rutina. El uso de la calculadora gráfica posiblemente nos permitirá reconocer mejor a qué aspectos de las matemáticas vale la pena prestar atención y cuáles son menos merecedores del ya demasiado escaso tiempo disponible para enseñar y aprender.

Un segundo tipo de efecto de usar las calculadoras gráficas en la evaluación se relaciona con el potencial de los estudiantes de desarrollar percepción matemática. Un ejemplo tiene que ver con el trazado de gráficos de funciones elementales. Antes de las calculadoras gráficas, se esperaba que los estudiantes aprendieran a trazar los gráficos de las funciones, y a menudo requerían de bastante tiempo para lograrlo. Sin embargo, la experiencia real de los estudiantes estaba relacionada con la mecánica de dibujar el gráfico, y mucho menos relacionada con lo que el gráfico realmente significaba, para qué servía, y por qué alguien podría necesitar dibujar uno, excepto por la obvia razón de que el libro de texto ordenaba que así se hiciera. Al dibujar los gráficos a mano, los estudiantes, con frecuencia, marcan muchos más, o muchos menos puntos de los que en realidad necesitan porque han desarrollado muy poca intuición acerca de cómo se debe ver un gráfico. Esto es extremadamente ineficaz. Resulta irónico que antes de la disponibilidad de las calculadoras gráficas, tan pocos estudiantes dibujaran un gráfico por su propia iniciativa, como si no creyeran realmente en la utilidad de estos. Si muchos de los detalles mecánicos pueden relegarse a una máquina, los estudiantes podrán prestar más atención a usar el gráfico para algún propósito; inclusive existe la posibilidad de que se percaten de que algunas preguntas son bastante apropiadas para buscar un apoyo gráfico. Si se libera tiempo para trabajar con gráficos en vez de trabajar haciéndolos, podemos ser más optimistas en cuanto a que nuestros estudiantes perciban las conexiones reales entre los gráficos y las ecuaciones, o vean que los gráficos de funciones continuas se ven como líneas rectas si se les mira lo suficientemente cerca, o que el gradiente de una curva cambia de negativo a positivo en un punto mínimo local, y así sucesivamente. Los gráficos tienen mucho que decirnos, pero parece que los estudiantes han estado muy ocupados dibujándolos como para poder escuchar. El uso de las calculadoras gráficas en la evaluación, y por ende su integración en un curso, puede incrementar los niveles de percepción matemática de manera significativa.

Una tercera clase de implicación es que podemos aprovechar la oportunidad dada por las calculadoras gráficas para ampliar el currículo. Un buen ejemplo de esto ocurre con el análisis de datos. Antes del uso de las calculadoras gráficas en la evaluación, era irracional esperar que los estudiantes emprendieran un análisis de datos, y cuando tal análisis estaba incluido en la evaluación, el conjunto de datos era siempre muy reducido (o se daba resumido). Con frecuencia, el énfasis estaba en la computación de estadísticas numéricas, y se le prestaba poca atención a las relaciones entre las variables y a las inferencias que se podían hacer de los datos. Sólo se utilizaban las regresiones lineales con mínimos cuadrados, ya que todo lo demás era demasiado complicado. Sin embargo, si los estudiantes tienen una calculadora gráfica con un número de modelos de regresión, como todas las calculadora gráficas tienen hoy en día, tiene sentido un ligero cambio en el currículo para examinar datos con miras a encontrar, comprender y usar las relaciones, aunque no aparezcan en forma lineal. Pese a que la estadística matemática relevante es muy sofisticada para una audiencia de secundaria, la idea de que los datos pueden ser modelados con varios tipos de funciones, de los cuales la lineal es sólo una, es bastante accesible para la gran mayoría.

Desde la perspectiva del desarrollo de currículo, una implicación del uso de calculadoras gráficas en la evaluación es que aprender a escoger y usar la tecnología puede ser contemplado como una meta explícita. Por ejemplo, en revisiones recientes los cursos de una escuela de secundaria en el oeste de Australia para sacar ventaja de las calculadoras gráficas, se añadió un nuevo objetivo general: "Los estudiantes seleccionarán y harán uso de la tecnología apropiada". Con este objetivo hecho explícito, podríamos esperar que el tiempo y energía de clase sea empleado en tratar de ayudar a los estudiantes a alcanzar el objetivo, y que un tipo de evaluación del punto hasta el cual los estudiantes se sienten inclinados y son capaces de usar las calculadoras gráficas de manera inteligente se convierta en algo normal.

La preocupación por los problemas de equidad se ha presentado con frecuencia en Australia, con respecto a la disponibilidad de las calculadoras gráficas en las actividades de evaluación. Algunas personas han estado bastante preocupadas por las consecuencias para las comunidades con menos recursos, con menos posibilidades de adquirir tecnología sofisticada. De hecho, la inclusión de las calculadoras gráficas dentro de las estructuras de evaluación, especialmente las estructuras de evaluación de alto riesgo, proporcionan una razón poderosa para de que la tecnología no sea un adorno sino una parte necesaria del currículo. Esto, a su vez, puede motivar más que nunca a las directivas de los planteles para proveer fondos para reducir las desigualdades.

Una aplicación final está ilustrada en algunos de los ejemplos de la sección precedente. Cuando las calculadoras gráficas están disponibles en la etapa de evaluación, una variedad de métodos pueden ser incentivados, en vez del enfoque tradicional de hacer matemáticas de la manera "correcta". Un ejemplo extensivo de esto, en el contexto de las ecuaciones, es ofrecido por Kissane (1995). Mientras que puede argumentarse que es intrínsecamente mejor para los estudiantes aprender varias maneras de trabajar con problemas matemáticos en vez de una sola, la principal razón para esta multiplicidad de aproximaciones es que parece posible reforzar el desarrollo conceptual para obtener múltiples perspectivas accesibles para los estudiantes.

CONCLUSIÓN

Todo tipo de evaluación requiere de una reflexión cuidadosa, si se quiere estar seguro de obtener información útil y confiable sobre los logros y dificultades de los estudiantes. El uso de las calculadoras gráficas en la evaluación presenta nuevos retos, que requieren un buen conocimiento de las capacidades de la tecnología y de los logros académicos que se buscan. Aunque existen muchos problemas relacionados con el uso de las calculadoras gráficas en la evaluación, ninguno de ellos presenta obstáculos insuperables para el uso inteligente de las calculadoras. A pesar de que algunos de los problemas están relacionados con falta de familiaridad con la tecnología, y el hecho es que no es todavía universalmente accesible para los estudiantes, hay problemas más fundamentales y menos transitorios. Pero es mucho lo que se puede ganar al integrar las calculadoras gráficas a las estructuras de evaluación. En particular, la educación matemática podrá finalmente sacar provecho de las nuevas oportunidades que la tecnología personal ofrece. Se puede esperar que del esfuerzo por ajustarse a los problemas se deriven beneficios substanciales.

REFERENCIAS

Andrews, T. & Kissane, B. (Eds.) (1994). *Graphics calculators in the classroom*. Adelaide: The Australian Association of Mathematics Teachers.

Bradley, J., Kissane, B. & Kemp, M. (1996). Graphics calculators in the mathematics curriculum: Integration or differentiation? En J. Abbott & L. Wilcoxson (Eds.), *Teaching and learning within and across disciplines: Teaching and Learning Forum* (pp 21-26). Murdoch University: Academic Services Unit.

Bradley, J., Kemp, M. & Kissane, B. (1994). Graphics calculators: A (brief) case of technology. *Australian Senior Mathematics Journal, 8* (2), 23-30.

Bradley, J. (1995). *Technology and assessment – An international experience*. Paper presented at the 5th Annual Australian Bridging Mathematics Network Conference, Batchelor, NT.

Kemp, M., & Kissane, B. (1995). Integrating technology into undergraduate mathematics. En L. Summers (Ed.). *A focus on learning: Teaching and Learning Forum* (pp 130-134). City: Joondalup.

Kemp, M., Kissane, B., & Bradley, J. (1996). Graphics calculator use in examinations: accident or design? *Australian Senior Mathematics Journal*, *10* (1), 33-50.

Kemp, M., Kissane, B., & Bradley, J. (1995). Graphics calculators and assessment. En A. Richards (Ed.). *FLAIR: Forging links and integrating resources* (pp 235-241). Darwin: Australian Association of Mathematics Teachers.

Kissane, B. (1995). How to solve an equation. *Australian Mathematics Teacher*, *51* (3), 38-41.

Kissane, B., Bradley, J., & Kemp, M. (1994). Graphics calculators, equity and assessment. *Australian Senior Mathematics Journal*, *8* (2), 31-43.

Kissane, B., Kemp, M., & Bradley, J. (1995). Student reactions to the use of graphics calculators. En S. Flavel & I. Isaacs (Eds.). *Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia 18th Annual Conference* (pp. 235-241). Darwin, NT.

• Barry Kissane
School of Education
kissane@murdoch.edu.au

• Marian Kemp
Academic Services Unit
kemp@murdoch.edu.au

• Jen Bradley
School of Physical Sciences, Engineering and Technology
jbradley@murdoch.edu.au

Murdoch University
Murdoch
Western Australia
Australia 6150

CAPÍTULO 10

VISUALIZACIÓN DE SOLUCIONES A CIERTAS ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES EN LA TI–85

JOHN F. LUCAS

El tratamiento serio de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden es un enfoque relativamente nuevo que aparece en el segundo curso de cálculo en varios currículos de reforma. Este trabajo elabora sobre la perspectiva gráfica del Consorcio del Cálculo en Harvard (CCH), mediante el uso de la tecnología de la calculadora gráfica programable Texas Instruments TI-85. Los estudiantes pueden llegar a alcanzar una comprensión considerable sobre la naturaleza y las soluciones de ecuaciones diferenciales a través del uso de una combinación de programas y la opción gráfica **DifEq** *de la TI-85. Investigamos cinco soluciones diferentes. Primero, examinamos una ecuación presentada algebraicamente (modelo de inyección de droga) a partir de la cual los estudiantes producen una ecuación diferencial, luego una solución de campos de pendientes, y finalmente, una solución específica presentada con opción* **DifEq,** *que puede superponerse al campo de pendientes y ser corroborada al trazar allí la solución algebraica conocida. Después de esto, ayudamos a resolver el misterio de un asesinato por medio de la Ley de Enfriamiento de Newton y una dimensión de tiempo de "incremento negativo", utilizando la capacidad de rastreo para aproximar el momento del asesinato. Las siguientes dos aplicaciones tratan sistemas de ecuaciones de primer orden — un modelo S-I-R de una epidemia y un modelo depredador-presa con campos de pendientes, trayectorias y análisis de series de tiempo. El último ejemplo, considera la oscilación en amortiguación de un sistema de resortes, donde primero se dibuja la curva de solución y luego se utilizan estimados para aproximar sus funciones de amortiguación y oscilación.*

En la Universidad de Winsconsin-Oshkosh, desde el otoño de 1992, hemos estado empleando el currículo del Consorcio de Cálculo en Harvard y calculadoras gráficas programables (TI-85) para la enseñanza de todas las secciones de nuestro curso principal de cálculo. Seleccionamos los materiales CCH porque estábamos buscando un respiro para introducir una reforma al cálculo y el de Harvard enfatizaba una fusión de varias perspectivas —gráfica, numérica, simbó1ica y verbal— en el contexto de problemas interesantes no estandarizados. La TI-85 era una pareja tecnológica apropiada para el currículo por su accesibilidad, bajo costo, carácter portátil y variedad de op-

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 131-149

ciones de menú, incluyendo opciones gráficas y numéricas. Ninguna de las dos elecciones nos ha decepcionado. Por lo menos una docena de profesores de nuestra facultad ha enseñado un curso de nuestra secuencia de tres semestres, y cinco de nosotros hemos enseñado la secuencia completa que incluye cálculo de variables múltiples.

Este trabajo está enfocado en las ecuaciones diferenciales elementales, que comprenden alrededor de 40% del segundo semestre del curso CCH. La TI-85 tiene un menú (**DifEq**) que realiza gráficos de solución bastante buenos para las ecuaciones de primer y segundo orden que aparecen en el cálculo de Harvard; esto permite a los estudiantes un acceso visual excelente para el análisis, interpretación y, en algunos (pero no en todos) los casos, comparación con soluciones algebraicas. Se escribieron varios programas auxiliares del método Euler (Numérico, Gráfico y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales), Trayectorias, Campos de Pendientes y Series de Tiempo para ayudar al estudiante con el trabajo gráfico y numérico con ecuaciones diferenciales.

Aquí examinaremos cinco problemas (cuatro de los cuales se han tomado directamente del texto CCH) que ilustran el matiz del currículo y la aplicación de la TI-85 como ayuda para el aprendizaje, particularmente el aprendizaje *visual*. Estas situaciones incluyen ecuaciones diferenciales abstractas (modelo de inyección de droga), un modelo de epidemia S-I-R, el misterio de un asesinato (con la Ley de Enfriamiento de Newton), un sistema depredador-presa (petirrojos y gusanos) y un oscilador lineal armónico (amortiguación de un sistema de resortes).

HACIA ADELANTE Y HACIA ATRÁS EN UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Este ejemplo se introduce en clase luego de que los estudiantes han explorado ecuaciones diferenciales fáciles (predecibles), como

a. $\frac{dy}{dx} = 0.5y$ con $y(0) = 100$ (o $y(1) = 17.3$).

b. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ con $y(0) = 1$ (o cualquier otra condición límite).

En este punto, los estudiantes están familiarizados con los campos de pendientes y el menú **DifEq** de la TI-85 (donde la variable dependiente es **Q1** y la independiente es **t**).

Se les da la ecuación

$$y = Cxe^{-0.2x} \ (si\ y(1) = 8.19,\ C \approx 10)$$

y se les pide que diferencien, obteniendo

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-0.2x}(1-0.2x) .$$

Ahora, ellos reemplazan $Ce^{-0.2x}$ con $\frac{y}{x}$ de la ecuación original, y obtienen una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1-0.2x)$$

(ya conocemos la solución específica para esta ecuación diferencial si la condición límite es $y(1) = 8.19\ldots$. Es $y = 10xe^{-0.2x}$).

Después, exploramos la situación de forma visual de dos maneras:

a. Use el programa Campos de Pendientes en la TI-85 (ver Apéndice) para construir un campo de pendientes en la ventana $[0, 20]_{x \text{ e } y}$.
Salve la ilustración del campo de pendientes seleccionando **STPIC** y dándole el nombre de **DE1**.

b. Luego, prepare el menú de gráficas **DifEq** como se muestra a continuación:
   - **Q'1**= (Q1/t)*(1-0.2t)
   - **RANGE** $[1, 20]_t$, t–step .05, tplot 1 (el trazado empieza en el valor t de 1), $[0, 20]_x$ y $[0, 20]_y$
   - **INITC QI1** = 8.19 (este es el valor de Q1,o “y”, cuando t (o “x”) es 1)
   - **GRAPH** la curva de solución, vemos la ventana mostrada en la figura 1.

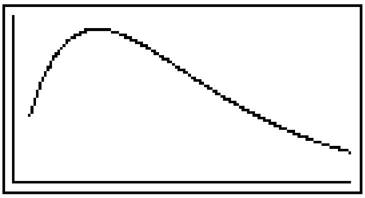


Figura 1.

   - Algebraicamente, compare la solución $y = 10xe^{-0.2x}$ con nuestro gráfico seleccionado **DRAW**, luego **DRAWF** y teclee

10xe^(-0.2x). La curva trazada empezará en $x = 0$ (y llenará el intervalo $0 \leq x \leq 1$) y de ahí en adelante, seguirá muy cercanamente el camino de la curva de solución.

c. Finalmente, superponga el campo de pendientes sobre la curva de solución de **DifEq** al seleccionar **RCPIC** del menú y presionar la tecla **F** que corresponde a **DE1**. De hecho ahora estamos viendo una trayectoria en un campo de pendientes como se ve en la figura 2.

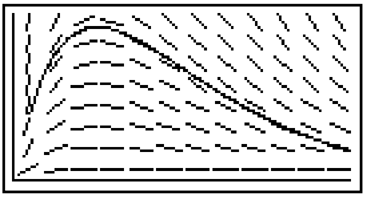


Figura 2.

EL MISTERIO DE UN ASESINATO

Este es el problema número 16 de la sección 9.5 (página 511) de Hughes Hallet et al. (1994) con la temperatura cambiada a ° Celsius. Un detective encuentra la víctima de un asesinato a las 9 a.m. La temperatura del cuerpo es 31.7° C. La temperatura ambiente permanece constante a 20° C. Suponga que la temperatura T del cuerpo obedece a la Ley del Enfriamiento de Newton, escriba una ecuación diferencial para T y resuélvala para estimar la hora del asesinato.

La ecuación diferencial es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

con valores límite $T(0) = 32.4$ y $T(1) = 31.7$.

Al usar la separación de las variables, los estudiantes resuelven primero la ecuación diferencial algebraicamente y establecen constantes a través de valores límites para obtener

$$T = 20 + 12.4e^{-0.06t}.$$

A partir de esto, la solución requiere hallar el tiempo t (en horas desde las 9 a.m., que es $t = 0$) para el cual $T = 37°$ (temperatura normal del cuerpo de una persona con vida). La solución produce $t = -5.26$ horas, que significa 5.26 horas antes de las 9 a.m., ó 3:44 a.m. (Se le pide a los estudiantes que interpreten el significado del tiempo negativo aquí).

La solución visual a este problema involucra un uso creativo de **DifEq**. Durante la solución algebraica (que tiene que preceder a la visualización, por lo menos para establecer la constante k) encontramos que $k = -0.06$. Así que la ecuación diferencial es

$$\frac{dT}{dt} = -0.06\,(T - 20).$$

Al utilizar **DifEq**, definimos

Q'1= -0.06(Q1-20).

Establezca **tMin** en 0 (9 a.m.) y **tMax** en -12 (doce horas antes de las 9 a.m.), y tome **tStep** de -0.1 (como 6 minutos), **tPlot** de 0, y la ventana $[-12, 0]_x$ y $[0, 50]_y$. Establezca **INITC QI1** = 32.4 (la temperatura correspondiente a **tMin**, que es $t = 0$ o 9 a.m.). El gráfico se desarrolla de derecha a izquierda (las flechas son añadidas) en la figura 3.

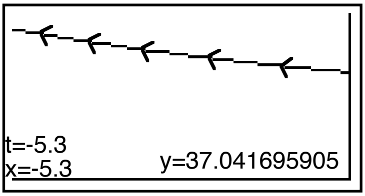


Figura 3.

Para confirmar nuestra respuesta, ejecutamos **TRACE** al punto más cercano a un valor *y* de 37, y obtenemos $t = -5.3$, que corresponde a 3:42 a.m. para la hora aproximada del asesinato.

MODELO S–I–R PARA UNA EPIDEMIA DE INFLUENZA

Este es el primer ejemplo de la sección 9.8 de Hughes-Hallet et al. (1994). La situación inicial se desarrolla en un internado para varones con 163 estudiantes. Una semana después de las vacaciones de invierno (enero de 1978), un niño había desarrollado la gripe, luego dos más, y para finales del mes, casi la mitad de los jóvenes habían enfermado. La mayoría de la escuela había sido afectada cuando la epidemia se acabó a mediados de febrero.

El modelo S–I–R incluye los tres grupos:

S: el número de *susceptibles*	(no enfermos aún pero que podrían llegar a estarlo)
I: el número de *infectados*	(aquellos enfermos en el momento)
R: el número de *recuperados*	(aquellos que habían estado enfermos y ya no pueden infectar o ser infectados)

Una discusión de la situación conduce al siguiente *sistema* de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -0.0026SI \\ \dfrac{dI}{dt} = 0.0026SI - 0.5I \end{cases}$$

Al eliminar t, tenemos la ecuación diferencial con *I* (dependiente), *S* (independiente)

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{192}{S}$$

con condición inicial $S = 762$ (susceptibles), $I = 1$ (infectado).

Existe una variedad de opciones disponibles en la TI-85 para ayudar en la visualización de las relaciones entre I, *S*, y *t* (tiempo en días).

a. Podemos esbozar el gráfico *I* vs. *S* como un ecuación diferencial de primer orden en el menú **DifEq**

Q'1 = -1 + (192/t)

(Aquí, **t** *se refiere a los susceptibles así que* **t** *esta representado nuestra S.)*

- Establecemos el **RANGE** en $[762, 0]_t$,
- **t–step** en -1 (variación para el máximo número de susceptibles y 0 infectados), y
- ventana $[0, 763]_x$ y $[0, 500]_y$.
- la condición inicial **QI1** (que corresponde al **tMin** de 762) es 1.

El gráfico se desarrolla de derecha a izquierda (flechas añadidas) en la figura 4.

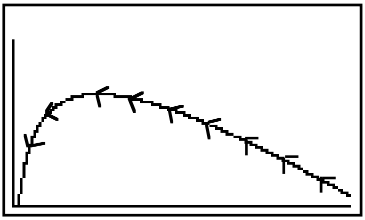


Figura 4.

b. Podemos usar el programa **TRAJECTORY** (Trayectoria, ver Apéndice) para esbozar una curva de solución apropiada para el sistema original de ecuaciones diferenciales. Este programa produce una contraparte visual para el método Euler de dos variables. En este programa, **X** se refiere a la variable independiente (aquí, *S*) y **Y** se refiere a la variable *dependiente* (aquí, *I*). Nuestro sistema se vuelve, luego de convertirlo a estas variables:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -0.0026*X*Y \\ \dfrac{dY}{dt} = 0.0026*X*Y-0.5*Y \end{cases}$$

- Respondemos (al programa de subrutina llamado **RANGE** Rango) con:

xMin	0	**xMax**	763	**xScl**	0
yMin	0	**yMax**	500	**yScl**	0

- luego **X(0)** = 762 (número inicial de susceptibles), **Y(0)** = 1 (número inicial de infectados), y una variación de tamaño Δ**t** = 0.1.

- Al presionar la tecla **ENTER** muchas veces sucesivamente (una por cada paso), vemos una trayectoria que se parece a nuestra curva de solución de a., que se muestra en la figura 5.

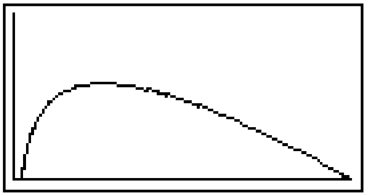


Figura 5.

c. Finalmente, empleamos el programa **TIMESERIES** (Series de Tiempo, ver Apéndice) para visualizar el comportamiento del individuo *S* y la población *I* con el paso del tiempo. En esta situación, **X** se refiere a una de las variables dependientes, (aquí *S*, susceptibles) y **Y** se refiere a las otras variables dependientes (aquí, *I*, infectados).

- Se nos pide que registremos

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = 0.0026*X*Y - 0.5*Y \\ \dfrac{dX}{dt} = -0.0026*X*Y \end{cases}$$

- Examinaremos esto por 20 unidades de tiempo (aquí t, en días). De tal manera que nuestros datos de entrada son:

xMin	0	**xMax**	20	**xScl**	1
yMin	0	**yMax**	763	**yScl**	0

- Continuamos con **X(0)** = 762 (número inicial de susceptibles), **Y(0)** = 1 (número inicial de infectados), y una variación de tamaño Δ **t** = 0.1.
- Dos curvas se desarrollan simultáneamente. Los susceptibles empiezan en 763 (tiempo **t** = 0) y bajan dramáticamente para finalmente desaparecer. Los infectados empiezan en 1, llegan a un máximo de casi 300, y luego desaparecen hacia el 0. Nuestro gráfico se muestra en la figura 6.

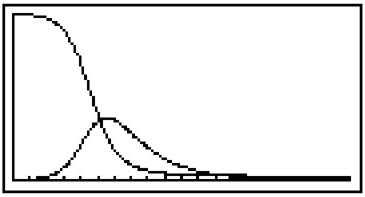


Figura 6.

MODELO DEPREDADOR-PRESA: PETIRROJOS Y GUSANOS

Este es el segundo ejemplo de análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales presentado en la sección 9.8 de Hughes-Hallett et al. (1994).

- w = número de gusanos en millones
- r = número de petirrojos en miles

Se da un sistema simplificado como:

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = w - wr \\ \dfrac{dr}{dt} = -r + wr \end{cases}$$

A partir de este sistema, se le pide a los estudiantes que interpreten el crecimiento o disminución de cada población en ausencia de la otra, y luego que interpreten el efecto de la interacción (que es proporcional al término del resultado). Podemos ver que los gusanos crecerán exponencialmente en ausencia de los petirrojos (el depredador), los petirrojos disminuirán exponencialmente en ausencia de los gusanos (la presa). La presencia de los petirrojos afecta la población de gusanos y la presencia de gusanos ayuda a la población de petirrojos.

Comenzamos nuestro análisis visual con un campo de pendientes donde los gusanos (variable x) son independientes y los petirrojos (variable y) son dependientes. Nuestro sistema se traduce en

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{dw}{dt}} = \frac{dr}{dw} = \frac{dy}{dx} = \frac{-y + xy}{x - xy}.$$

Examinaremos las poblaciones de 0 a 3 millones de gusanos ($[0, 3]_x$) y de 0 a 3 mil petirrojos ($[0, 3]_y$).

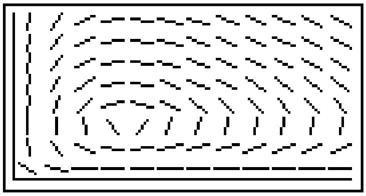


Figura 7.

Se le indica a los estudiantes que visualicen el punto de partida (0.5, 0.5) —medio millón de gusanos y 500 petirrojos— y sigan una curva de solución que contenga este punto. Los petirrojos disminuyen ligeramente a medida que los gusanos aumentan, luego los gusanos y petirrojos aumentan hasta que los gusanos llegan al máximo (cerca de 2 millones). Después de esto, los petirrojos aumentan hasta que llegan a un máximo de alrededor de 200 a medida que los gusanos disminuyen. Ambos disminuyen hasta una población mínima de gusanos de 400.000 y el ciclo se vuelve a repetir. Esto se puede apreciar mejor al salvar la gráfica (**STPIC**) del campo de pendientes, llamar el programa **TRAJECTORY** para bosquejar la trayectoria en la misma ventana empezando en **X(0)**= 0.5 **Y(0)**= 0.5 con una variación de tamaño Δ **t** = 0.1, y luego recuperar (**RCPIC**) el campo de pendientes y superponerlo a la trayectoria. Esto se muestra en la figura 8.

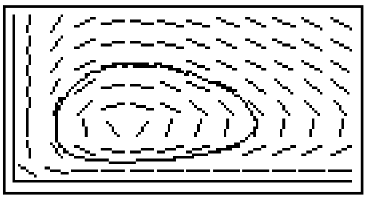


Figura 8.

Al tener los campos de pendientes y las trayectorias a nuestra disposición, podemos visualizar fácilmente el efecto ecológico de empezar con una relativa falta de balance en la población como (2, 2.2).

El comportamiento cíclico de las poblaciones de petirrojos y gusanos a través del tiempo se muestra al aplicar el programa **TIMESERIES** con las siguientes especificaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = -Y+X*X \\ \dfrac{dX}{dt} = X-X*Y \end{cases}, \textit{(X = gusanos; Y = petirrojos)}$$

Utilizamos una ventana de $[0, 20]_x$ por 20 unidades de tiempo, y $[0, 3]_y$ para incluir tanto la población de petirrojos como la de gusanos como variables dependientes, con valores iniciales de 0.5 para las dos poblaciones, y una variación de tamaño $\Delta t = 0.1$. La primera curva en alcanzar un máximo es la población de gusanos. Estas parecen ser periódicas y estar separadas por un cuarto de ciclo. La figura 9 muestra la serie de tiempo.

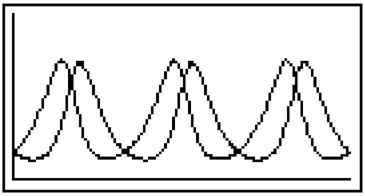


Figura 9.

OSCILACIÓN AMORTIGUADA: UN RESORTE CON FRICCIÓN

Este es el tema de la sección 9.11 de Hughes-Hallett et al. (1994). Al aplicar la ley de la fuerza de Newton (en su relación con masa y aceleración), la Ley de Hooke's que indica que la fuerza es proporcional al desplazamiento y el hecho de que la fricción en un sistema de resortes tiene el efecto de disminuir la velocidad, tenemos como resultado una ecuación diferencial de segundo orden que modela la situación (ver figura 10).

Si s(t) = posición de la masa en tiempo t,

entonces $\frac{ds}{dt} = v(t)$ = velocidad de la masa en el tiempo t

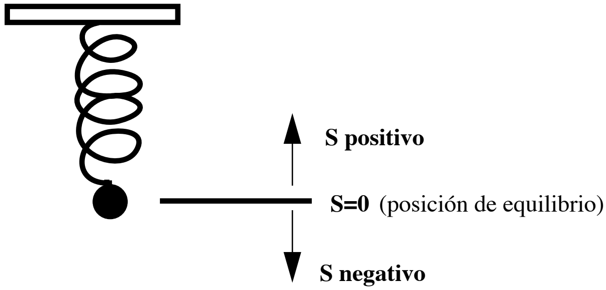
y $\frac{d^2s}{dt^2} = a(t)$ = aceleración de la masa en el tiempo t

tenemos

$$-ks - c\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{c}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right) - \frac{k}{m}(s)$$



Tres fenómenos físicos:

Ley de la fuerza de Newton: Fuerza = masa $*$ aceleración

Ley de Hooke´s: La fuerza es proporcional al desplazamiento

Fricción: Velocidad disminuye

Figura 10.

Para el ejemplo en la página 570 de Hughes-Hallett et al. (1994), asignamos constantes para que la ecuación diferencial se convierta en

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4\left(\frac{ds}{dt}\right) - 4.04s$$

para la cual la velocidad inicial $v(0) = 0.9123$ metros/seg. (un movimiento ascendente) y la posición inicial $s(0) = 0.8415$ metros (por encima del punto de equilibrio).

Antes de aplicar cualquier método algebraico para resolver la ecuación diferencial sujeta a estas condiciones iniciales, podemos explorar la situación gráficamente como se hace a continuación.

En el modelo **DifEq**, **Q1** representa la variable dependiente (aquí, la posición *s*), **t** representa la variable independiente (aquí, tiempo *t*). Entonces, **Q'1** representa una nueva cantidad (velocidad) que llamaremos **Q2**, y **Q'2** representa la derivada de la velocidad, o aceleración.

Así, tenemos las especificaciones

- **Q'1** = Q2 (Q2 es velocidad)
- **Q'2** = -0.4 Q2 - 4.04 Q1 (esta es la ecuación diferencial).

Seleccionamos **Q'2** para que las dos ecuaciones se consideren como relacionadas y no como ecuaciones diferenciales separadas. Los datos **RANGE** son los siguientes:

- $[0, 10]$ para **t** (intervalo de 10 segundos) y **x** (variable de ventana horizontal, o tiempos)
- **tStep** = .1 (incremento de una décima de segundo)
- $[-1, 1]$ para **y** (coordenadas de ventana vertical, o posiciones).

Nuestras condiciones iniciales son:

- **QI1** = 0.8415 (valor inicial de Q1, o posición)
- **QI2** = 0.9123 (valor inicial de Q2, o velocidad)

Cuando realizamos el gráfico, obtenemos la oscilación amortiguada que se muestra en la figura 11.

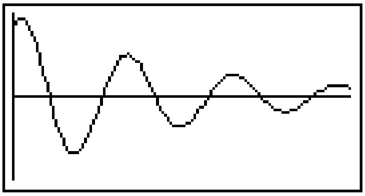


Figura 11.

En este punto, los estudiantes saben que la forma algebraica básica de la solución es

$$S(t) = \text{(función de amortiguación)}\,(C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t).$$

El problema ahora es estimar la función de amortiguación. Empleamos **TRACE** a lo largo de la curva de solución para aproximar los valores (t, s) en los cuatro puntos máximos, y obtener así, (.2, .9466), (3.4, .5012), (6.5, .2631), y (9.7, .1359). Luego, colocamos los valores t en **STAT EDIT** como una **xList** y los valores s como la **yList**, correspondiente, hacemos una regresión exponencial (**CALC**, **EXPR**), y obtenemos la función exponencial aproximada de disminución

$$y = 1\,(0.8149)^x$$

que a través de álgebra se convierte en

$$y = 1e^{-0.2x}.$$

Volvemos al gráfico de la curva de solución para la ecuación diferencial, y utilizamos **DRAW**, luego **DrawF** $e^{-0.2x}$, para trazar una corroboración visual de nuestra función de amortiguación (ver figura 12).

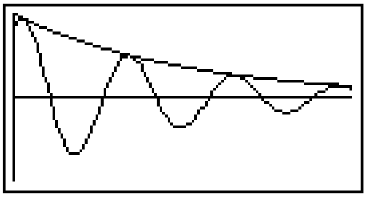


Figura 12.

De esta manera, hemos combinado aproximación visual y un poco de álgebra para obtener la función

$$S(t) = e^{-0.2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t).$$

Cuando imponemos la condición inicial $s(0) = 0.8415$ y $v(0) = 0.9123$, obtenemos constantes $C_1 = 0.8415$ y $C_2 = 0.5403$, y por ende la solución específica

$$S(t) = e^{-0.2t}(0.8415 \cos 2t + 0.5403 \operatorname{sen} 2t)$$

que puede ser corroborada visualmente en comparación con la solución gráfica al usar el menú **DRAW** función **DrawF**.

Como una perspectiva gráfica final, podemos examinar la velocidad *vs* la solución de la posición de la fase en el plano al hacer los siguientes ajustes en nuestros datos **DifEq**. Necesitamos cambiar el **RANGE** para reflejar *posiciones* a lo largo del eje x, (por lo tanto, $[-2, 2]_x$) y las *velocidades* a lo largo del eje y (por lo tanto $[-3, 3]_y$). Una configuración adicional incluye el menú **AXES**, donde el eje x está dado para Q (posiciones) y el eje y está dado para Q' (velocidades). Empleamos **GRAPH** para obtener la representación de la fase en la figura 13. Se le pide a los estudiantes que interpreten físicamente dentro del sistema de resortes la dirección y magnitudes de las cantidades involucradas en esta representación.

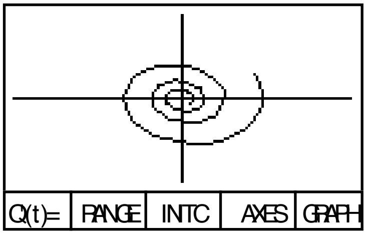


Figura 13.

Una manera alternativa de ver el esquema de la fase es emplear el programa **TRAJECTORY** donde **Y** representa velocidades (Q2), y **X** representa posiciones (Q1), con

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = -0.4*Y-4.04*X \\ \dfrac{dX}{dt} = \text{'}Y \end{cases}$$

y datos **RANGE** $[-2, 2]_x$, $[-3, 3]_y$, con **X(0)** = 0.8415, **Y(0)** = 0.9123, y Δ **t** = 0.1. Al presionar **ENTER** repetidamente, generamos la imagen en la figura 14.

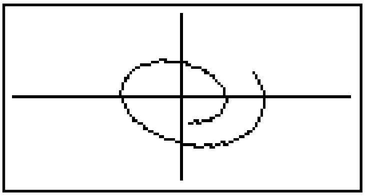


Figura 14.

Los ejemplos anteriores llevan a los estudiantes por una excursión a través de la variedad de ecuaciones diferenciales elementales, presentadas en el currículo del Consorcio de Cálculo en Harvard para el segundo curso. Para los profesores del nuevo cálculo en escuelas o en universidades, estos ejemplos ofrecerán un vistazo de la ayuda visual que puede proporcionar la tecnología actual de las calculadoras gráficas. ¡Con los adelantos que están por venir, tanto los estudiantes como los profesores de matemáticas pueden esperar experiencias verdaderamente agradables e interesantes!

APÉNDICE (PROGRAMAS DE LA TI-85)

Programa de campo de pendientes (SLOPE FIELD)

```
:ClLCD
:Outpt(1,5, "[SLOPE FIELD]")
:Pause
:ClLCD
:Func
:FnOff
:ClDrw
:Outpt(3,1, "Enter dy/dx")
:Disp " "
:InpST ST1
:ST►Eq(ST1,y1)
:FnOff
:RANGE
:7(xMax-xMin)/83 → H
:7(yMax-yMin)/55 → K
:1/(.4H)² → A
:1/(.4K)² → B
:xMin+.5H → x
:yMin+.5K → Z
:1 → I
:Lbl ONE
:1 → J
:Z → y
:Lbl TWO
:y1 → T
:1/√(A+B*T^2) → C
:T*C → S
:y → AA
:Line(x-C,y-S,x+C,y+S)
:AA → y
```

```
:y+K → y
:IS>(J,8)
:Goto TWO
:x+H → x
:IS>(I,12)
:Goto ONE
:Pause
```

Programa de rango (RANGE)

```
:Input (“xMin=”,xMin)
:Input (“xMax=”,xMax)
:Input (“xScl=”,xScl)
:Input (“yMin=”,yMin)
:Input (“yMax=”,yMax)
:Input (“yScl=”,yScl)
:Return
```

Programa de trayectoria (TRAJECTORY)

```
:ClLCD
:Outpt(1,6,”[TRAJECTORY]”)
:Pause
:ClLCD
:Func
:FnOff
:Outpt(3,1, “Enter dY/dt = f(X,Y)”)
:Disp “ ”
:InpST ST1
:St►Eq(ST1,y1)
:Outpt(5,2, “Enter dX/dt = g(X,Y)”)
:Disp “ ”
“InpST ST2
:ST►Eq(ST2,y2)
:RANGE
```

```
:FnOff
:Disp "X(0)"
:Input X0
:X0 → X
:Disp "Y(0)"
:Input Y0
:Y0 → Y
:Disp "Step size Δ t"
:Input Δ t
:Lb1 ONE
:Line(X,Y,X+y2*(Δ t), Y+y1*(Δ t))
:X+y2*(Δ t) ~ X
:Y+yl*(Δ t) ~ Y
:Pause
:Goto ONE
```

Programa de series de tiempo (Time series)

```
:CLCD
:Outpt(1,5, "[TIME SERIES]")
:Pause
:CLCD
:Func
:FnOff
:ClDrw
:Outpt(3,1, "Enter dY/clt=f(X,Y)")
:Disp " "
:InpST ST1
:ST►Eq(ST1, yl)
:Outpt(5,2, ":Enter dX/dt=f(X,Y)")
:Disp " "
:InpST ST2
:StEq►(ST2,y2)
:RANGE
```

```
:FnOff
:Disp "Initial X"
:Input X
:Disp "Initial Y"
:Input Y
:Disp "Step size Δt"
:Input Δt
:0 → t
:Lbl ONE
:Line(t,X,t+Δt,X+Δt*y2)
:Line(t,Y,t+Δt,Y+Δt*yl)
:X+Δt*y2 → X
:Y+Δt*yl → Y
:t+Δt → t
:If ((xMax-t)*(t-xMin))> 0
:Goto ONE
:Stop
```

REFERENCIAS

Hughes–Hallett, D., et al. (1994). *Calculus*. First Edition. New York: John Wiley and Sons.

Lucas, J. (1994). *Perspectives on calculus as viewed through the window of a TI–85*. New York: John Wiley and Sons.

John F. Lucas
Mathematics Department
University of Wisconsin-Oshkosh
Oshkosh, Wisconsin 54901-8631
lucasj@vaxa.cis.uwosh.edu

CAPÍTULO 11

SOBRE EL IMPACTO DE LA PRIMERA GENERACIÓN DE CALCULADORAS GRÁFICAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO

ANTONIO R. QUESADA

Antes de que la segunda generación de calculadoras gráficas con verdaderas capacidades de manipulación simbólica empiecen a influenciar las clases de matemáticas, es importante meditar sobre las principales contribuciones hechas por la primera generación. En este capítulo presentamos cinco de estas contribuciones a través de una selección de ejemplos que ilustran el impacto de las capacidades numéricas y gráficas, de las representaciones múltiples y los métodos y de las soluciones iterativas y recursivas.

Como suele ser el caso, la marcha rápida de la tecnología ha traído al mercado la segunda generación de calculadoras gráficas antes de que hubiéramos tenido tiempo de analizar a profundidad el impacto de la primera generación en las clases de matemáticas. La reciente introducción de la Texas Instruments TI-92, la primera calculadora con verdaderas capacidades simbólicas, crea nuevos interrogantes sobre qué cambios se necesitan, si se necesitan, en el currículo de matemáticas, y sobre cómo integrar apropiadamente su uso en la enseñanza de matemáticas. Sin embargo, las capacidades numéricas y gráficas de la primera generación se conservan en la segunda generación. Por lo tanto, es apropiado detenerse y reflexionar sobre algunas de las lecciones importantes que aportó la primera generación; lecciones que no se han aceptado del todo, y que en la mayoría de los casos aún no se han implantado en el currículo.

Hay muchas áreas del currículo en donde la calculadora gráfica puede tener un gran impacto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este capítulo, se considerarán cinco áreas básicas como representativas de este impacto. La primera hace referencia a la variedad de enfoques disponibles en la actualidad para resolver problemas, y, en particular, a las ecuaciones y desigualdades. Luego, se considerarán las contribuciones numéricas y gráficas de estas herramientas. Los ejemplos que se dan mostrarán cómo estas capacidades hacen posible la introducción a niveles más bajos de los conceptos y modelos matemáticos, así como de los métodos de resolución de problemas, tradicionalmente estudiados en los niveles superiores por audiencias más reducidas y avanzadas. La cuarta área conside-

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 151-172

rada se refiere al uso de la iteración y la recursión, principalmente en la pantalla principal.

La habilidad para representar visualmente los datos o para hacer cálculos por medio de representaciones múltiples, facilita la comprensión de los estudiantes (NCTM, 1989). Las calculadoras gráficas, en particular las últimas representativas de la primera generación, están equipadas con una variedad de estructuras de datos que pueden almacenarlos, manipularlos y presentarlos de muchas maneras diferentes. Las funciones y las relaciones también pueden ser representadas mediante diferentes sistemas de coordenadas. La quinta área de consideración investiga esta flexibilidad en la representación y manipulación de datos y relaciones en múltiples formas. Esto se ilustrará resolviendo de diferentes maneras, mediante el uso de varias representaciones, algunos de los ejemplos incluidos en las otras cuatro áreas.

Varios ejemplos han sido escogidos en cada una de las primeras cuatro categorías. En cada categoría la selección de problemas fue hecha de tal manera que da una idea de la variedad de aplicaciones posibles; pero de ninguna manera esta selección agota la categoría. Todos los ejemplos deben hacerse accesibles a los estudiantes de secundaria. La sintaxis utilizada en los enunciados y las pantallas de todos los ejemplos corresponden a una TI-82. Las pantallas incluidas, algunas veces en exceso, servirán para aliviar cualquier duda al reproducir las soluciones dadas.

DIFERENTES ENFOQUES PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

La resolución de ecuaciones que involucran funciones algebraicas y trascendentes es un tema repetitivo a lo largo de la escuela secundaria. Los estudiantes aprenden diferentes técnicas para resolver ecuaciones según las propiedades de las funciones involucradas. A menudo, las ecuaciones propuestas son cuidadosamente seleccionadas para que tengan coeficientes y soluciones “amables”. Las calculadoras gráficas expanden el grado de dificultad y el rango de ecuaciones que pueden ser propuestas. Estas calculadoras facilitan la evaluación de una solución, para mayor precisión y para lograr enfoques unificados a las soluciones, independientemente del tipo de funciones involucradas. Tradicionalmente, las preguntas sobre desigualdades involucraban expresiones lineales, cuadráticas y racionales. En una investigación informal de libros de precálculo en 1992, encontramos que noventa por ciento de los textos no incluían desigualdades que involucraran funciones trascendentes. Dado que la realización de gráficos ya no es una actividad que toma mucho tiempo y las desigualdades ayudan a los estudiantes a pensar globalmente, puede valer la pena incrementar el número de desigualdades que proponemos.

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = x$.

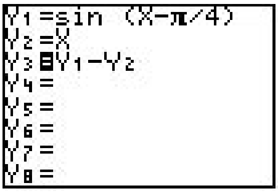
Solución

Sin el uso de la tecnología sería imposible proponer este mismo problema a los estudiantes antes de estudiar el algoritmo de Newton-Raphson en cálculo. La versatilidad de la calculadora gráfica se ilustra al resolver esta ecuación por medio de métodos diferentes, ahora al alcance de los estudiantes de secundaria.

Empecemos por graficar las funciones

$$y_1 = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ y } y_2 = x$$

y determinar visualmente un intervalo, digamos (-2,0), que contenga la solución (figuras la y lb).



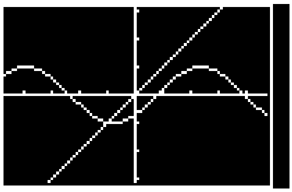
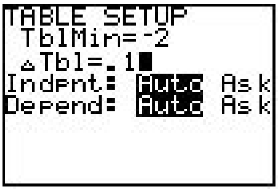


Figura 1a. *Figura 1b.*

Solución numérica mediante el uso del Teorema del Valor Intermedio

Desactive y_1 y y_2, y sea $y_3 = y_1 - y_2$.



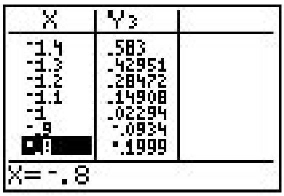


Figura 1c. *Figura 1d.*

Las figuras lc. y ld. indican la preparación inicial y la correspondiente tabla de valores. Luego de buscar en esta tabla, se encuentra un intervalo donde la función cambia de signo. Ahora el subintervalo más pequeño $[-1, -0.9]$ que contiene a cero es usado para redefinir **Tblset**, así dejamos **TblStart=-0.1** y **ΔTbl=0.01**. El proceso continua hasta que se alcanza el grado de precisión deseado. Se puede retar a los estudiantes a determinar numéricamente, es decir, sin mirar el gráfico, el intervalo inicial que contiene una raíz. Vale la pena recordar que se puede escribir un simple programa para emular la capacidad **Table** en las calculadoras gráficas más viejas.

Solución numérica con el método de bisección

Determinando la variable independiente en la configuración de la tabla en **Ask**, se obtienen los valores de la función correspondientes a cualquier valor o expresión para x que se inserte en la línea de comandos al final de la pantalla. Así, si *(a,b)* es el menor subintervalo que contiene la raíz, el estudiante puede introducir $c = \frac{(a+b)}{2}$ y escoger el nuevo subintervalo, digamos *(a,c)*, de tal manera que la condición $f(a)f(c) < 0$ se satisfaga (figura le).

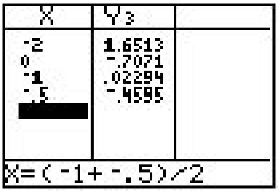


Figura 1e.

Es común encontrar que cuando la solución es un número real negativo, una cantidad sorprendentemente grande de estudiantes comete errores. Estos errores no parecen ser causados por conceptos erróneos de cómo funcionan los algoritmos sino por falta de familiaridad con el orden de los números reales.

Iteración en un punto fijo (método de Picard)

Inicialice *x* en **Home Screen**. Luego, proceda a asignar sucesivamente a x el valor de la función evaluada en el valor anterior de x hasta que la diferencia entre dos resultados consecutivos sea menor o igual a la precisión deseada.

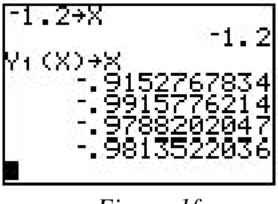


Figura 1f.

Método de Newton

Sea

$$y_4 = nDeriv(y_3, x, x).$$

Primero inicialice x con un valor cercano a la raíz, luego, recursivamente calcule $x - \frac{y}{y'}$ y asigne el resultado a x. Los estudiantes podrán apreciar cuán rápido converge este método en comparación con los anteriores.

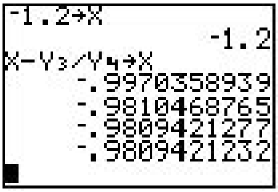


Figura 1g.

Utilizando la capacidad de resolución automática

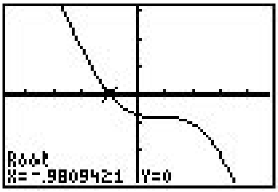


Figura 1h.

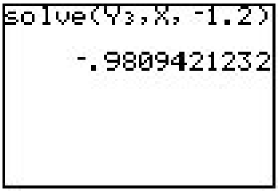


Figura 1i.

En la pantalla seleccione **root** de y_3 como se muestra en la figura 1h, o **intersect** de y_1 y y_2. Alternativamente la figura 1i muestra el uso de la capacidad de resolución automática de **Home Screen** con un valor inicial apropiado.

UTILIZACIÓN DE LAS CAPACIDADES NUMÉRICAS DE LA CALCULADORA GRÁFICA

Antes del uso de la tecnología, la aproximación numérica a muchos conceptos matemáticos era omitida o simplemente enunciada. Algunas veces un ejemplo era presentado por el profesor o el libro. En general la gran cantidad de tiempo necesario para desarrollar muchos métodos numéricos (aun con una calculadora científica) impedía su presentación completa a la mayoría de los estudiantes, y hacía que se les relegara como parte de la colección de técnicas que los estudiantes utilizan para mejorar la comprensión o para resolver problemas.

En la sección anterior hemos visto dos métodos numéricos para resolver ecuaciones trascendentes. Ahora, presentaremos algunos ejemplos adicionales para ilustrar la variedad de aplicaciones de ideas numéricas fácilmente accesibles hoy en día.

Calcular por ensayo y error

Ejemplo 2

Se ha estimado que una colonia de bacterias crece a una velocidad de 12.5% cada hora. Si el tamaño inicial de la colonia es de 50.000, ¿cuánto tiempo le tomará a la colonia alcanzar el tamaño de 200.000?

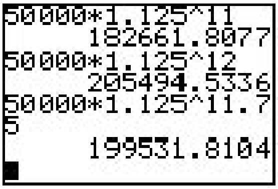


Figura 2.

Solución

Como lo ilustra la figura 2, realizando estimaciones y comprobándolas podemos aproximar la solución en un periodo corto. Es importante resaltar que la solución requiere sólo de la comprensión del modelo exponencial, pero el uso de logaritmos no fue requerido.

Búsqueda numérica de extremos locales

Ejemplo 3

Encuentre el máximo local de

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3 .$$

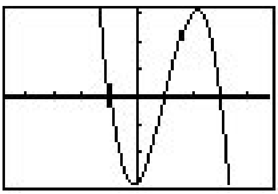


Figura 3a.

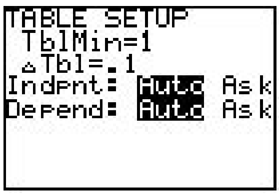


Figura 3b.

Solución

Una exploración o una simple mirada al gráfico de $y_1 = f(x)$ en la figura 3a muestra que existe un máximo relativo en el intervalo (1,3). Prepare la tabla para que empiece en $x = 1$ con un incremento de **ΔTbl=0.1.** Al explorar la tabla (figura 3c) encontramos un subintervalo donde hay un pico. Al redeterminar la tabla para que empiece en $x = 2.1$ con **ΔTbl=0.01**, en la figura 3d, un nuevo subintervalo más pequeño (2.14,2.16) (figura 3e). Este proceso de obtención de subintervalos encajados que contienen los extremos continúa hasta que la longitud del subintervalo obtenido es igual a la precisión deseada.

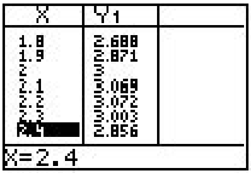


Figura 3c.

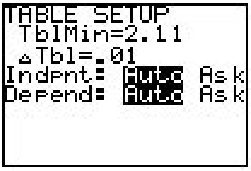


Figura 3d.

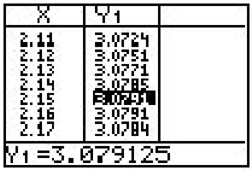


Figura 3e.

Exploración numérica del comportamiento local de una función

Ilustramos dos aproximaciones diferentes por medio de dos ejemplos. El primero muestra que la velocidad de las calculadoras gráficas modernas hace que la característica de la tabla sea una herramienta simple pero poderosa para realizar análisis.

Ejemplo 4

Explore el comportamiento $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cerca a $x = 0$.

Solución

Sea

$$y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

y escoja **Ask** para la variable independiente en **Table Setup**. Luego dé a x valores arbitrarios cercanos a cero, primero desde la derecha y luego desde la izquierda; vemos en la ilustración de la figura 4 que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$. La simetría del gráfico con respecto al eje puede leerse fácilmente en la tabla.

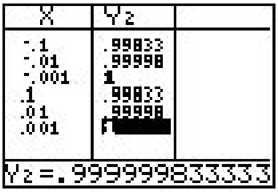


Figura 4.

La segunda aproximación es más sofisticada, ya que requiere del uso de secuencias y listas. Sin embargo, la variedad e importancia de las aplicaciones accesibles en cálculo a través del uso de esta estructura de datos justifica la inversión inicial de tiempo. Lo hemos empleado con éxito con estudiantes de cálculo de primer año.

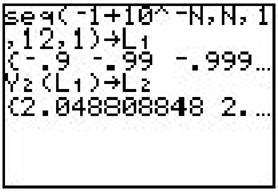
Ejemplo 5

Estime numéricamente $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x+1|}{\left|\sqrt{x+2}-1\right|}$.

Solución

Sea

$$y_2 = \frac{|x+1|}{\left|\sqrt{x+2}-1\right|}.$$



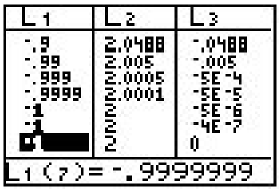


Figura 5a. *Figura 5b.*

En la figura 5a tenemos una secuencia definida

$$\{-0.9, -0.99, -0.999, \ldots\}$$

que se aproxima a -1 por la derecha. Así pues, el comportamiento de la función puede ser observado al dejar $y_2(L_1) \to L_2$. Como ilustra la lista $L_3 = 2 - L_2$ en la figura 5b, la función y_2 parece estar aproximándose a 2. Similarmente al ser

$$seq\left(-1-10^{-N}, N, 1, 12\right) \to L_4,\ y_2(L_4) \to L_5,\ y\ L_6 = 2 - L_5$$

podemos ver que la función se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1 desde la izquierda.

Resaltamos que, a diferencia del enfoque algebraico, la estimación numérica de límites es un proceso directo que no cambia con el tipo de funciones bajo consideración.

Exploración numérica del comportamiento global de una función

Ejemplo 6

Estime numéricamente $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Solución

Sea

$$y_1 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Nuevamente se pueden usar dos enfoques diferentes para observar el comportamiento de y_1 a medida que x crece de manera ilimitada.

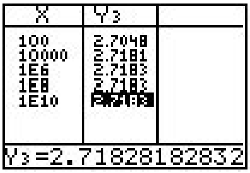


Figura 6a.

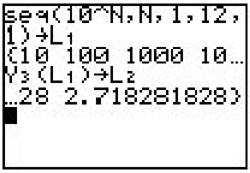


Figura 6b.

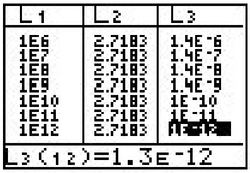


Figura 6c.

1) Utilización de **Table**. Con la variable independiente determinada en **Ask**, se asignan valores arbitrariamente grandes a x. Como muestra la figura 6a, la función parece aproximarse a e.

2) Utilización de **lists**. Cualquier secuencia divergente de términos positivos puede ser empleada para emular $x \to \infty$. Los elementos de la lista L_2 obtenida al evaluar y_2 en la secuencia escogida (figura 6b) parecen converger hacia e. La figura 6c confirma que los elementos de $L_3 = e - L_2$, se aproximan a 0, y por lo tanto

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e \quad como \quad x \to \infty.$$

Continuidad de funciones exponenciales

Antes de que una prueba formal de este hecho se presente en cálculo avanzado, se le pide al lector de textos de álgebra básicos que acepte que, para los exponentes irracionales es suficiente pensar que, digamos $a^{\sqrt{2}}$, tiene el valor de aproximaciones sucesivamente cercanas $a^{1}, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \ldots$ Algunos libros de texto presentan una tabla de valores para ilustrar este hecho, pero los estudiantes rara vez hacen algún cálculo. Las calculadoras gráficas permiten un enfoque participativo que puede ayudar a desarrollar la comprensión numérica de este concepto (mientras que se emplea la misma idea que se necesita para una prueba formal).

Ejemplo 7

Explore la continuidad de $y = 3^x$ en $x = \sqrt{2}$.

Solución

Ya que $\sqrt{2} = 1.41421356$, podemos escribir

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$$
$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \Rightarrow 3^{1.4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5}$$
$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \Rightarrow 3^{1.41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.42}$$
$$\ldots$$
$$1.41421356 < \sqrt{2} < 1.41421357 \Rightarrow 3^{1.41421356} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.41421357}$$
$$\ldots$$

1) Siendo $y_1 = 3^x$ y al utilizar **Table**, las columnas de la derecha y de la izquierda pueden parecer aproximarse al mismo valor. La figura 7a muestra los valores de 3^x para la secuencia de valores de x aproximándose a $\sqrt{2}$ desde la izquierda.

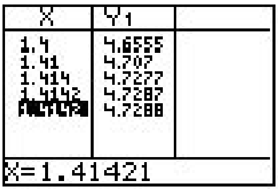


Figura 7a.

2) Utilización de **lists**. Una lista de valores aproximándose a $\sqrt{2}$ por la izquierda puede ser introducida manualmente

$$\{1, 1.4, 1.141, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \ldots\} \to L_1$$

o puede ser generada, como se ve en la figura 7b. Similarmente, se puede aproximar a $\sqrt{2}$ desde la derecha al ingresar

$$\{2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, \ldots\} \to L_2,$$

o al generar la lista de una manera similar (ver figura 7c). Luego al definir

$$L_3 = 3^{L_1} \text{ y } L_4 = 3^{L_2}$$

se puede apreciar en la figura 7d que las dos secuencias parecen aproximarse al mismo valor. De manera equivalente, la secuencia $L_5 = L_3 - L_4$ se aproxima a cero. Parece claro ahora que la secuencia de puntos

$$\left(\frac{p}{q}, 3^{\frac{p}{q}}\right) \to \left(\sqrt{2}, 3^{\sqrt{2}}\right) \textit{cuando } \frac{p}{q} \to \sqrt{2}$$

se aproxima por cualquiera de los dos lados. Por lo tanto, el gráfico de $y = 3^x$ parece ser continuo $x = \sqrt{2}$.

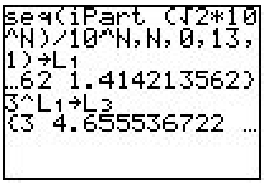


Figura7b.

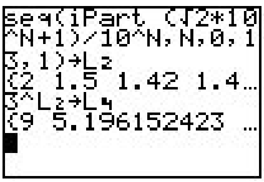


Figura 7c.

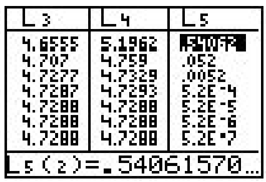


Figura 7d.

Exploración numérica de la convergencia de una serie

Ejemplo 8

¿Converge la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$?

Solución

Se necesita añadir un gran número de términos para obtener una idea de si las sumas parecen convergir o no. Ya que la TI-82 permite listas de hasta 99 elementos procedemos a añadir subsecuencias consecutivas de este tamaño (figura 8). A medida que se añade cada grupo adicionales de 99 elementos, se puede observar que la suma parcial tiende a estabilizarse. A la luz de este ejemplo, vale la pena mencionar que el tamaño máximo de la lista se ha incrementado a 999 en la TI-83.

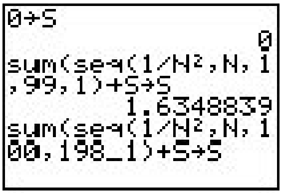


Figura 8.

UTILIZACIÓN DE LAS CAPACIDADES GRÁFICAS DE LA CALCULADORA GRÁFICA

Exploración gráfica de problemas epsilon-delta

Sea

$$\lim_{x \to a} f(x) = L .$$

Encuentre gráficamente el mayor valor de δ correspondiente a un ε dado. Siendo

$$y_1 = f(x) \text{ , } y_2 = L - \varepsilon \text{ y } y_3 = L + \varepsilon .$$

Estime el valor inicial de δ y haga un gráfico de las tres funciones en la ventana

$$W = [a - \delta, a + \delta] \times [L - \varepsilon, L + \varepsilon].$$

Utilizando **Intersect** calcule $x_1 = y_1 \cap y_2$ y $x_2 = y_1 \cap y_3$. Entonces el mayor valor de δ es

$$\delta = min(|a - x_1|, |a - x_2|) .$$

Inicialmente, en vez de pedirle a los alumnos que usen **Intersect**, se les puede pedir que adivinen un valor para δ y, mirando el gráfico, lo modifiquen apropiadamente para obtener valores sucesivos más pequeños. El valor de δ será aceptable cuando el gráfico de $y = f(x)$ vaya de izquierda a derecha de la ventana.

Ejemplo 9

Dado que $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + x - 6} = \sqrt{6}$, estime gráficamente un δ para $\varepsilon = 0.1$.

Solución

Las figuras 9a y 9b muestran las funciones definidas y sus gráficos en la ventana $[2.9, 3.1] \times [\sqrt{6} - 1, \sqrt{6} + 1]$. Las intersecciones en x de y_1 con y_2 y y_3 están guardadas en A y B respectivamente (figura 9c). Por lo tanto

$$\delta = min(3 - B, A - 3)$$

proporciona el radio del intervalo simétrico más grande alrededor de 3.

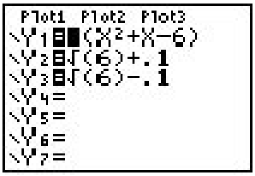


Figura 9a.

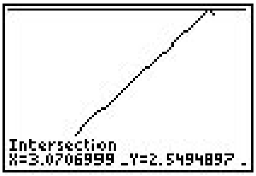


Figura 9b.

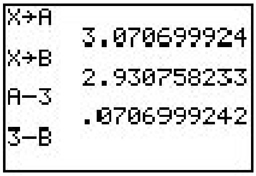


Figura 9c.

Resolución gráfica de desigualdades

Ejemplo 10

Resuelva $|x^2 + 3x - 2| < 5 - |x^2 + 3x + 1|$

Solución

Sea

$$y_1 = |x^2 + 3x - 2| \text{ y } y_2 = 5 - |x^2 + 3x + 1|.$$

Los gráficos de y_1 y y_2 en la figura 10a, $y_3 = y_2 - y_1$ en la figura 10b y $y_4 = y_1 < y_2$ en la figura 10c han sido dibujados en la ventana $[-4.7, 2.5] \times [-3.1, 5.5]$ Ya que la última función es booleana, es conveniente seleccionar **Axesoff**. Al utilizar **intersect**, o **root**, o **Zoom In** respectivamente, obtenemos la solución: $(-3.7913, -2) \cup (-1, -0.7913)$.

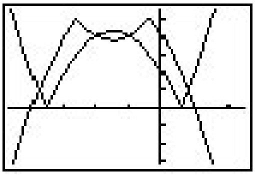


Figura 10a.

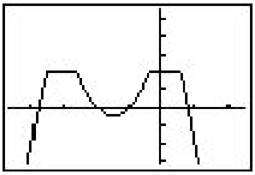


Figura 10b.

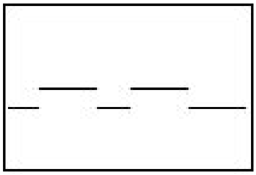


Figura 10c.

Aproximaciones polinomiales

Ejemplo 11

¿Para qué valores de x es exacta (con exactitud de 0.1) la aproximación cúbica $x - \frac{x^3}{6}$ de sen$x$, cerca a $x = 0$?

Solución

Para la condición

$$\left|\operatorname{sen}x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| < 0.1 ,$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}x - 0.1 < x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen}x + 0.1 .$$

Sea

$$y_1 = \operatorname{sen}x - 0.1 \text{ , } y_2 = x - \frac{x^3}{6} \text{ , y } y_3 = \operatorname{sen}x + 0.1 \text{ (figura 11a).}$$

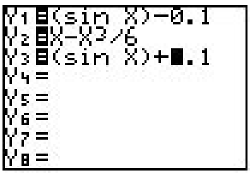


Figura 11a.

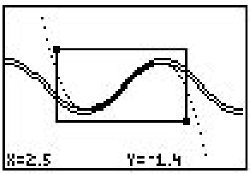


Figura 11b.

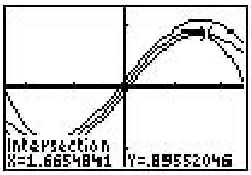


Figura11c.

Las figuras 11b y 11c muestran cómo obtener la solución $x \in (-1.665, 1.665)$ a la última desigualdad por medio de la realización de un gráfico y la búsqueda de puntos de intersección de y_2 con y_1 y y_3.

Factorización de polinomios sobre los reales

Ejemplo 12

Factorice $p(x) = 2x^5 - x^4 - 59x^3 - 39x^2 - 17x - 6$ sobre los reales.

Solución

Las figuras 12a y 12b muestran el gráfico de *p(x)* en la ventana definida por

$$[-6.1, 6.1] \times [-3000, 200] \;\; y \;\; [0.6, 0.15] \times [-10, 2.7] \; .$$

Claramente este polinomio tiene tres raíces reales. Además, mediante una simple observación o el uso de **trace**, el conjunto de ceros racionales posibles

$$S = \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6\}$$

puede ser reducido al menos extenso

$$S' = \{-6, -\frac{1}{2}, 6\}.$$

La figura 12c confirma que $\frac{1}{2}$ y 6 son los únicos ceros racionales. Por lo tanto,

$$p(x) = (2x+1)(x-6)(x^3+5x^2+x+1) \; .$$

Ya que la tercera raíz real es irracional, sin el uso de la tecnología, nos tendríamos que detener en este punto. Sin embargo, ahora es posible extender este problema para obtener una aproximación no sólo de la tercera raíz real sino también del factor cuadrático.

Sea $y_2 = x^3 + 5x^2 + x + 1$.

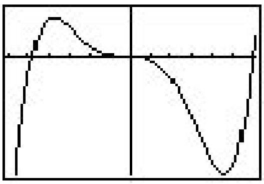


Figure 12a.

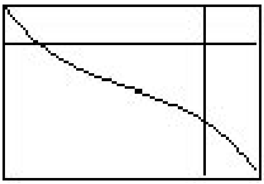


Figure 12b.

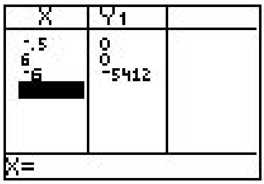


Figure 12c.

La capacidad de resolución automática rápidamente proporciona la raíz irracional A=-4.8359759190814. Sea

$$y_3 = \frac{y_2}{(x-A)}.$$

El gráfico de y_3 en $[-2, 2] \times [-2, 5]$ se muestra en la figura 12d. Luego de encontrar el vértice de esta parábola $(B,C) = (-0.82010872, 0.20000575)$, el factor cuadrático puede ser escrito como $(x-B)^2 + C$, por lo tanto $y_4 = (x-A)\,[\,(x-B)^2 + C]$ es una aproximación del polinomio cúbico.

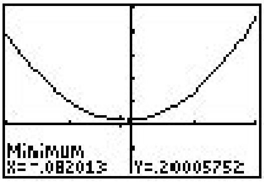


Figure 12d.

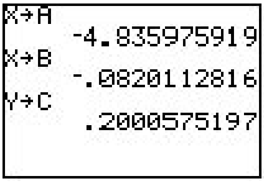


Figure 12e.

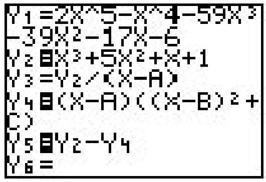


Figure 12f.

Para ver qué tan buena es esta aproximación podemos hacer dos cosas. Por un lado, podemos hacer la gráfica de y_1 y y_4, aplicar **Trace** y usando las flechas verticales movernos entre puntos de ambas curvas que tengan la misma abscisa (ver figuras 12g y 12h). Por el otro lado, podemos utilizar **table** para hallar los valores de $y_5 = y_2 - y_4$, como en la figura 12i.

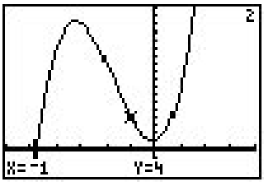


Figura 12g.

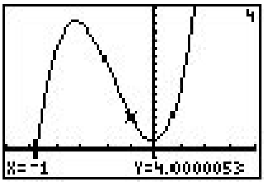


Figura 12h.

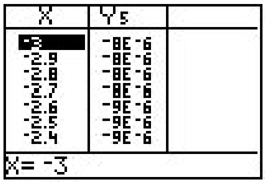


Figura12i.

Una excelente selección de aplicaciones numéricas y gráficas así como las limitaciones y trampas de la tecnología pueden encontrarse en el trabajo precursor de Demana y Waits (1993, 1994) y en Dick y Patton (1994).

UTILIZACIÓN DE LA ITERACIÓN Y LA RECURSIÓN

La capacidad de repetir una instrucción o un grupo de instrucciones al presionar una tecla, hace de la iteración y la repetición enfoques viables para la resolución de problemas con calculadoras gráficas. La solución del ejemplo que sigue muestra la simplicidad y elegancia del enfoque recursivo.

Ejemplo 13

Cuando Joe Smith nació, sus padres, preocupados por los costos crecientes de la universidad, depositaron 5,000 dólares en una cuenta de ahorros que pagaba un interés acumulado de 7.5%. a) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 18 años? b) ¿Cuál será el balance final, si los padres de Joe adicionalmente al deposito inicial hubieran depositado 1,200 dólares al final del primer año, y luego le hubieran añadido una inflación de 3% a la suma de cada depósito anual durante los siguientes años? c) Si suponemos que los depósitos anuales fueron constantes, ¿cuánto dinero se habría necesitado para que el balance final de la cuenta alcanzara la suma de 80,000 dólares.

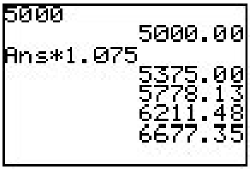


Figura 13a.

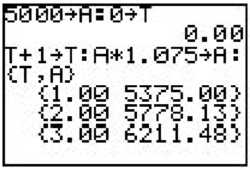


Figura 13b.

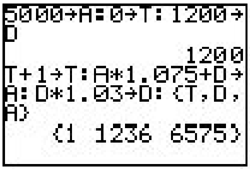


Figura 13c.

Solución

La solución recursiva inicial para la parte a) de la figura 13a ha sido redefinida en la figura 13b al usar dos constantes para almacenar los valores actuales de tiempo y cantidad acumulada. Además, una lista con las dos constantes ayuda a mantenerse informado de los valores después de cada iteración. Como se muestra en la figura 13c, una pequeña modificación de la solución previa proporciona la respuesta a la parte b). Las figuras 13d, 13e, y 13f presentan una solución alternativa a la parte b) mediante la utilización de secuencias recursivas y presentaciones de la cantidad acumulada y el siguiente depósito que debe hacerse. Debe resaltarse la simplicidad de las soluciones (a la parte b) en comparación con las fórmulas tradicionales para rentas anuales.

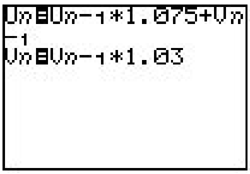


Figura 13d.

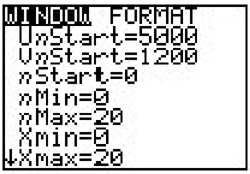


Figura13e.

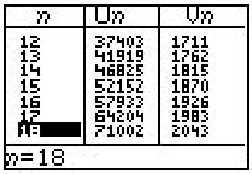


Figura 13f.

Finalmente, las figuras 13g, 13h y 13i muestran la solución a la parte c). Primero, se hace una regresión lineal para los puntos que resultan de adivinar los diferentes valores para c y evaluar la secuencia $u_n = u_{n-1} * 1.075 + c$ en $n = 18$. Luego, la solución se obtiene al intersectar la recta de regresión con $y_2 = 80000$.

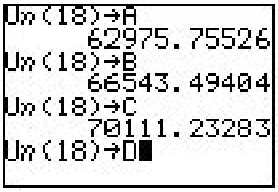


Figura 13g.

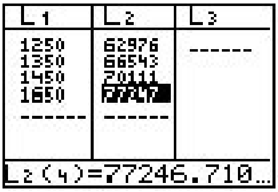


Figura 13h.

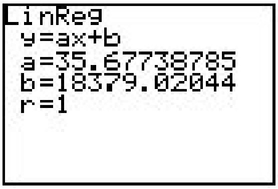


Figura13i.

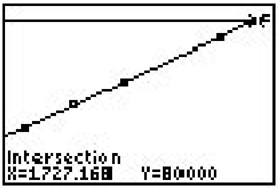


Figura 13j.

Ejemplo 14

Cada año 40% de las personas que viven en apartamentos rentados en Metrópolis compran una casa mientras que 10% de las personas que poseen una casa se mudan a un apartamento. Un estudio reciente descubrió que actualmente 65% de los residentes viven en apartamentos. ¿Qué cambios se esperan en el porcentaje de personas que viven en apartamentos en el futuro?

Solución

Ya que los porcentajes para el año próximo sólo dependen de los porcentajes de este año, podemos usar una cadena Markov con distribución inicial $A = [0.35 \quad 0.65]$ y una matriz de transición

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

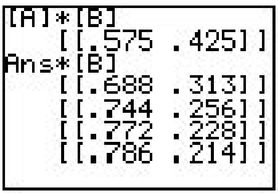


Figura 14.a

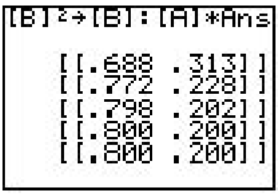


Figura 14.b

Como se ilustra en las figuras 14a y 14b, resulta sencillo calcular recursivamente los vectores de distribución para los siguientes años, uno a uno o usando potencias de dos. Al realizar con la ayuda de una calculadora gráfica los engorrosos cálculos de matrices que estos problemas requieren, quedamos libres para hacer énfasis en el modelaje. También se puede llevar a los estudiantes a descubrir el comportamiento general de estos modelos por medio de grupos apropiados de preguntas. Por lo tanto se puede preguntar a) ¿Cuál será la distribución final si el porcentaje inicial de las personas que viven en apartamentos es 75%? b) ¿Qué pasarla si fuera 25%? c) ¿Depende la distribución final de la inicial? d) ¿Qué pasa con B^n a medida que n crece?

Además de los algoritmos recursivos de Picard y Newton que ya hemos mencionado, seguimos con soluciones iterativas y recursivas para otros ejemplos. Las figuras l5a, l5b y l5c contienen soluciones iterativas en **Home Screen** para los ejemplos número 4, 6 y 7 anteriormente considerados.

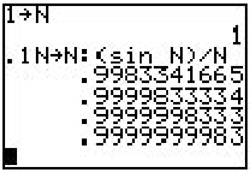


Figura15a.

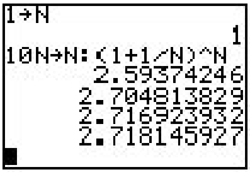


Figura 15b.

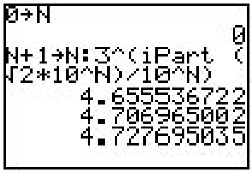


Figura 15c.

Se puede retar a un grupo de estudiantes honoríficos a hacer programas recursivos para el método de bisección, como el de la figura 16a, diseñado para **Home Screen**. Es de resaltar el uso de la constante booleana K para decidir cuál mitad del subintervalo actual contiene el cero.

Figura 16a.

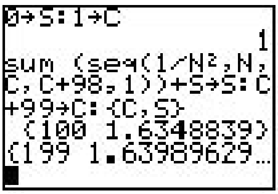


Figura 16b.

Finalmente, la figura 16b muestra una versión recursiva de la exploración en la convergencia de las series en el ejemplo 8.

CONSIDERACIONES GENERALES Y CONCLUSIONES

Las contribuciones de las calculadoras gráficas van más allá de ideas relacionadas con los contenidos. Las calculadoras gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, favorecen un enfoque participativo del aprendizaje y promueven la interacción entre estudiantes y profesor y entre los mismos estudiantes. En un estudio reciente, Kover (1995) reportó que cuando el instructor no traía la pantalla de la calculadora a la clase, los estudiantes adoptaban el papel pasivo de "tomar notas" y la interacción entre ellos, así como el número de preguntas se reducía considerablemente. Las calculadoras gráficas permiten a los estudiantes moverse más libremente de las representaciones numéricas a las gráficas y a las simbólicas. Por esto, cada alumno puede abordar los problemas mediante diferentes representaciones. Como resultado, la confianza personal de los estudiantes parece aumentar al igual que su desempeño. Ellos han aceptado estos hechos al escoger la habilidad para "verificar" sus respuestas como la principal razón para preferir las calculadoras gráficas (Quesada y Maxwell, 1994).

Los ejemplos vistos, así como las soluciones presentadas, nos dan una idea del potencial que existe para que se den cambios en el currículo de matemáticas. Concretamente, los estudiantes pueden explorar y resolver problemas numérica y gráficamente con una inversión de tiempo mínima; pueden usar representaciones múltiples; pueden pensar recursivamente y construir, sin programación formal, soluciones simples que en algunos casos eliminan la necesidad de fórmulas prefabricadas. Ellos hacen gráficos, resuelven problemas de optimización y ecuaciones trascendentes sin utilizar el cálculo.

Está claro, que a través de la utilización de calculadoras gráficas, los estudiantes no necesitan dominar los métodos algebraicos manuales para poder modelar y resolver problemas mediante matrices. Tampoco necesitan esperar a aprender cómo realizar gráficos en cálculo para poder visualizar conceptos y propiedades y resolver problemas gráficamente. En un momento en el que la preocupación por aumentar la apreciación numérica de los estudiantes va en aumento, ¿no deberían estar usando más métodos numéricos?

La tecnología permite evitar la sintaxis algebraica y los penosos y eternos cómputos. Esto hace posible la presentación de importantes métodos matemáticos más temprano y a audiencias más amplias. Un caso son las aplicaciones de las matrices. Cadenas de Markov, cadenas de matrices, el modelo Leontiev, el modelo Leslie, programación lineal, etc., son ejemplos de modelos importantes que, gracias al álgebra de matrices incluida en las calculadoras, están empezando a aparecer en nuevos textos para matemáticas de secundaria (Brown, 1992; La Escuela de Ciencias y Matemáticas de Carolina del Norte, 1992; Core-Plus, en prensa). Las operaciones elementales incluidas en las calculadoras gráficas facilitan el estudio del método de Gauss para resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Aun más, propiedades como la existencia de divisores cero, la falta de conmutabilidad de los productos de las matrices e inclusive la existencia de matrices de potencia nula pueden ser descubiertas fácilmente por los estudiantes (al tiempo que proporcionan una fuente para ejemplos opuestos para el modelo más familiar de los números reales). Otra área importante que ahora es de fácil acceso es el análisis de datos. El conocimiento y fácil acceso a los diferentes modelos de regresión para analizar datos y predecir, es particularmente importante en un momento en el cual la información se está convirtiendo en una nueva mercancía.

La tecnología nos está forzando a reevaluar no sólo qué temas enseñamos sino en qué orden los enseñamos, qué enfoque seguimos al introducir un tema y finalmente, cómo evaluamos la comprensión de los estudiantes. A la luz de la importancia de la variedad de representaciones y enfoques a la resolución de problemas, así como la importancia de los modelos matemáticos que las calculadoras gráficas han hecho accesibles, es difícil imaginarse cómo pueden ser excluidos del currículo de matemáticas en el nivel secundario. Sin embargo, ¿cómo puede añadírsele algo a un currículo que ya está sobrecargado? Las soluciones propuestas apuntan a una reducción de ejercicios de repetición de álgebra y algoritmos innecesarios para facilitar y aumentar la cantidad de problemas basados en la realidad y de comprensión conceptual (Usikin 1980; NCTM, 1989). En Estados Unidos, siguiendo el ejemplo de la publicación de los *Estándares de Evaluación y Currículos para Matemáticas Escolares* (NCTM, 1989), se han desarrollado varios currículos nuevos o se están evaluando los existentes (Proyecto de Matemáticas Core-Plus; Proyecto de Matemáticas Interactivas, no publicado; Proyecto de Matemáticas Escolares de la Universidad de Chicago, 1992; La Escuela de Ciencias y Matemáticas de Carolina del Norte, 1996). Al mismo tiempo está creciendo el número de libros de cálculo que comparten la misma filosofía, que incluye la integración total de la tecnología (Hughes-Hallet, Gleason, et al., 1992; Smith y Lawrence, 1996). Los resultados de estos y otros proyectos pioneros que están rompiendo verdaderamente con la tradición prepararán el camino para lo que parece ser el siguiente paso lógico: la integración total de las calculadoras con capacidades simbólicas y programas interactivos a lo largo del currículo.

REFERENCIAS

Brown, R. (1992). *Advanced Mathematics*. Boston, MA: Houghton Mifflin.

Core-Plus Mathematics Project (en prensa). *Course One*. Kalamazoo, Michigan: Western Michigan University.

Demana F., & Waits, B. (1993). *Precalculus*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Dick, T., & Patton, C. (1994). *Calculus of a Single Variable*. Boston, MA: PWS Publishing Company.

Finney, R., Thomas, G., Demana F., & Waits, B. (1994). *Calculus*. Reading, Massachusetts: Addison–Wesley Publishing Company.

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., et al. (1992). *Calculus*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Kover, J. S. (1995). *The Effects of Graphing Calculators in College Algebra*. Unpublished master's thesis. Akron, Ohio: The University of Akron.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Quesada, A., & Maxwell, M. (1994). The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students' Performance in Precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 207-215.

Smith, D., & Lawrence, M. (1996). *Calculus, Modeling and Application*. Lexington, MA: D. C. Heath and Company.

The North Carolina School of Science and Mathematics. (1996). *Contemporary Calculus Through Applications*. Dedham, MA: Janson Publications, Inc.

The North Carolina School of Science and Mathematics (1992). *Contemporary Precalculus Through Applications*. Deham, Massachusetts: Janson Publications, Inc.

The University of Chicago School Mathematics Project. (1992). *Precalculus and Discrete Mathematics*. Glenview, Illinois: Scott, Foresman.

Usiskin, Z., (1980). What Should not be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students? *Mathematics Teacher*. Reston, Virginia: NCTM.

Antonio R. Quesada
Department of Mathematical Sciences
The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4002, USA
aquesada@ .uakron.edu

TECNOLOGÍA EN LAS CLASES IMP

LYNNE ALPER, DAN FENDEL,
SHERRY FRASER, DIANE RESEK

El Programa Interactivo de Matemáticas (IMP) ha desarrollado un nuevo currículo de cuatro años para secundaria que está estructurado alrededor de unidades de 5 a 8 semanas de duración. Cada unidad se concentra en un problema interesante, y, a través de la resolución de éste, los estudiantes desarrollan conceptos y habilidades nuevas. Las calculadoras gráficas juegan un papel importante en el currículo IMP al involucrar simulaciones, adaptación a curvas, operaciones con matrices y programación. En este trabajo se dan ejemplos del uso de las calculadoras y algunos principios para su utilización.

EL CURRÍCULO IMP

El Programa Interactivo de Matemáticas (IMP) ha desarrollado un nuevo currículo de cuatro años para secundaria, basado en problemas que integran temas tradicionales de álgebra, geometría y trigonometría de secundaria con temas de otras áreas como estadística y matemáticas discretas. Cada unidad del currículo se estructura alrededor de un problema o tema central interesante y tiene una duración de cinco a ocho semanas de duración. Durante el transcurso de una unidad, los estudiantes desarrollan habilidades y conceptos nuevos y los combinan con conocimientos previos para lograr resolver el problema central.

El arribo de la tecnología electrónica ha cambiado la manera en que se trabajan muchos aspectos de las matemáticas en la actualidad; y este cambio ha permitido que los profesores y los diseñadores de currículos se enfoquen más en las ideas matemáticas y dediquen menos tiempo de la clase al manejo de habilidades mecánicas y de computación. Las calculadoras gráficas, a las cuales los estudiantes IMP tienen acceso en todo momento, juegan un papel importante en el currículo IMP. Las calculadoras se usan tanto para reducir el gasto de tiempo en cálculos rutinarios como para enriquecer la comprensión de ideas profundas por parte de los estudiantes.

A comienzos del proceso de desarrollo del currículo, IMP tomó la decisión de basarse sólo en tecnología que pudiera ponerse con facilidad al alcance de los estudiantes de la mayoría de las clases existentes. Encontramos que, incluso en las escuelas que contaban con laboratorios de computación, el uso regular de los computadores resultaba a menudo

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 173-176

inconveniente y engorroso para algunos estudiantes; por esto hemos hecho de la calculadora gráfica nuestra principal herramienta tecnológica.

EJEMPLOS DEL USO DE LA CALCULADORA

Quizás la mejor manera de explicar el papel de las calculadoras en el currículo IMP es a través de ejemplos. En las unidades descritas abajo, cada una de unas ocho semanas de duración, se dieron diferentes usos a las calculadoras.

El juego del marranito

El problema central de esta unidad de noveno grado es determinar la mejor estrategia para un juego de dados. Los estudiantes aprenden conceptos fundamentales de probabilidad a través de experimentos con monedas y dados. Las calculadoras gráficas les permiten trabajar con una variedad mayor de situaciones por medio del uso de un generador aleatorio de números, al tiempo que se encuentran en capacidad de explorar los resultados a largo plazo luego de crear programas simples que lleven a cabo simulaciones. Los estudiantes pueden comparar los resultados de las simulaciones con los cálculos teóricos de los valores esperados.

El pozo y el péndulo

Luego de leer un fragmento de la narración de Edgar Allan Poe, los estudiantes de noveno grado tratan de estimar el periodo de un péndulo de 10 metros. Primero tratan de encontrar qué factores determinan el periodo, y usan las herramientas estadísticas de la calculadora para encontrar la desviación media y estándar de los datos provenientes de varios experimentos. Basados en estos resultados, llegan a la conclusión de que el periodo es fundamentalmente una función de la longitud del péndulo. Luego usan la capacidad gráfica de la calculadora para encontrar una función que se ajuste con cierta precisión a sus datos de péndulos de longitudes construibles en clase y encuentran el valor de tal función para un péndulo de 10 metros. Finalmente, comparan este valor estimado con los resultados de la construcción de un verdadero péndulo de 10 metros.

¿Praderas o alamedas?

Esta unidad de undécimo grado pretende que los estudiantes resuelvan una disputa de utilización de tierras al minimizar los costos bajo una variedad de limitaciones. El problema involucra seis variables y un sistema de 12 desigualdades lineales. Los estudiantes ven que los métodos gráficos (desarrollados en un unidad anterior con programación lineal de dos variables) son inaplicables, pero están en capacidad de crear generalizaciones algebraicas de estos métodos que involucran la solución de muchos sistemas de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas. Los alumnos desarrollan los conceptos de álgebra de matrices que se necesitan para expresar el problema en forma de matriz, y luego utilizan la capacidad de la calculadora para resolver el problema de esta manera.

A medida que el cubo gira
La tarea central en esta unidad de duodécimo grado es escribir un programa que recree la visualización de un cubo girando en el espacio. El problema involucra ideas geométricas complejas como rotación en el espacio y la proyección de un objeto tridimensional en una pantalla bidimensional. Las representaciones de matriz, al igual que los conceptos de programación como los "loops" y uso de variables, juegan un papel importante en el análisis. Por lo tanto, la calculadora sirve como una herramienta en el análisis del problema y como un medio a través del cual se encuentra la solución.

PRINCIPIOS SUBYACENTES

¿Qué tienen estos ejemplos en común? ¿Cuáles son los principios subyacentes para el uso de las calculadoras gráficas?

Propósito significativo de resolución de problemas
Un aspecto importante del enfoque IMP a la tecnología es que el uso de la calculadora está siempre motivado por un problema mayor. Por ejemplo, la programación de la calculadora no se estudia como un fin en sí mismo, sino como una herramienta para ayudar a la compresión de una idea importante o a la culminación de un proceso complejo.

Basada en experiencia concreta
En IMP la calculadora se utiliza sólo para hacer cosas que los estudiantes entienden. Es decir, que antes de realizar cualquier actividad basada en el uso de la calculadora, los estudiantes tienen experiencias de aprendizaje que anclan el trabajo con la calculadora de manera más concreta. Por ejemplo, los estudiantes tienen experiencias prácticas con simulaciones antes de escribir (o utilizar) un programa que realice alguna; buscan líneas apropiadas con gráficos hechos a mano antes de usar la función gráfica para encontrar funciones que aproximen los datos; resuelven sistemas de ecuaciones lineales a mano y desarrollan los conceptos que se esconden tras las operaciones con matrices antes de utilizar la calculadora como una herramienta de ahorro de tiempo en la resolución de sistemas lineales; observan modelos físicos de cubos que giran y hacen cálculos a mano antes de escribir un programa para computar los vértices apropiados para la figura proyectada.

Introducción gradual de funciones de la calculadora
El tiempo es uno de los secretos para hacer de estos usos de las calculadoras experiencias de aprendizaje exitosas. Esto es válido tanto para los estu-

diantes como para los profesores. Ellos pueden sentirse agobiados si se ven confrontados con demasiadas características de las calculadoras de una sola vez. Debido a que siempre se tiene acceso a las calculadoras en una clase IMP, los usuarios pueden familiarizarse gradualmente y sentirse a gusto con su uso; esto a medida que experimentan con sus teclas, ensayan nuevas ideas y exploran las diversas funciones.

EL FUTURO

Ahora sabemos que una tecnología más sofisticada pronto se hará accesible en la clase. El currículo IMP refleja hoy los avances entre los modelos de calculadora TI-81 y TI-82, tales como la inclusión de tablas de funciones y el mejoramiento en el lenguaje de programación. Cuando los manipuladores simbólicos alcancen la mayoría de las clases, ellos afectarán sin duda la manera en que los estudiantes piensan y aprenden acerca de expresiones algebraicas. A medida que estos cambios ocurren, es importante mantener principios pedagógicos sólidos, para que el glamour de la tecnología no substituya a las oportunidades de buen aprendizaje. En este sentido seguiremos guiados por los principios fundamentales de que el uso por parte de los estudiantes de la tecnología en el currículo matemático deba estar bien fundamentado en experiencias concretas y en que este uso debe servir para un propósito de resolución de problemas que tenga sentido.

Diane Resek
8 Poppy Lane
Berkeley, CA 94708
resek@math.sfsu.edu

CAPÍTULO 13

PROYECTO LATINOAMERICANO DE CALCULADORAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PLACEM

PATRICK (RICK) SCOTT

El Proyecto Latinoamericano de Calculadoras en la Educación Matemática (PLACEM) está experimentando el uso de calculadoras en la enseñanza de las matemáticas en siete países latinoamericanos: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, República Dominicana, México y Venezuela. PLACEM ha recibido calculadoras y algo de apoyo financiero de la empresa Texas Instruments. Se ha encontrado solamente algo de resistencia al uso de calculadoras y los resultados iniciales indican cambios en las percepciones de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas. Se están desarrollando materiales, se han capacitado docentes y se han iniciado proyectos de investigación. En la mayoría de los países se han enfrentado dificultades con la importación de las calculadoras donadas y habría que desarrollar una capacidad de respuesta a la demanda emergente.

ANTECEDENTES

En Asia la UNESCO coordinó un proyecto piloto sobre la enseñanza de las matemáticas usando calculadoras. Australia, Japón, Nueva Zelandia y Pakistán cooperaron examinando su currículo matemático para averiguar como sería posible mejorar la enseñanza a través del uso de calculadoras. Prepararon materiales curriculares que requirieron específicamente el uso de calculadoras. Cuando se concluyó el proyecto, en Australia se decretó, con el respaldo de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas, el uso de calculadoras en todos los niveles. En Nueva Zelandia se había desarrollado materiales curriculares con los cuales se usaron calculadoras, y que subsecuentemente se incorporaron en nuevos textos nacionales. En Japón se ha incluido el uso de calculadoras en sus nuevos objetivos nacionales para la enseñanza de las matemáticas. Y el ministerio de educación de Pakistán decidió no recomendar el uso de calculadoras en el nivel primario.

En 1992, Ed Jacobsen, el especialista en educación matemática de la UNESCO, inició un proyecto similar para América Latina, pero la falta de fondos impidieron su implementación. Posteriormente, el Comité Interamericano de la Educación Matemática (CIAEM) acordó aprobar el proyecto y Texas Instruments proporcionó fondos. Junto con Jacobsen en la coordinación general del proyecto, están Patrick Scott de la Universidad de

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 177-184

Nuevo México y Eduardo Luna, quienes en el momento de aprobar el proyecto, eran vicepresidente y presidente del CIAEM respectivamente. El financiamiento proporcionado por Texas Instruments ha incluido calculadoras y fondos para impresión de materiales y viajes que han permitido reuniones de los coordinadores. Por su parte, los países han hecho una contraparte para cubrir principalmente los recursos de personal y trabajo en el terreno.

OBJETIVOS

Los principales objetivos del PLACEM son:

- Identificar categorías de la enseñanza y de la evaluación en educación matemática que sean aplicables al uso de calculadoras en grados escolares (Kindergarten al último año de nivel medio superior) y a la preparación de maestros.
- Desarrollar, seleccionar y/o adaptar materiales curriculares y metodologías de evaluación que incorporen la funcionalidad de las calculadoras para la enseñanza de las matemáticas y la evaluación del aprendizaje.
- Criticar la aplicabilidad de la funcionalidad de las calculadoras Texas Instruments para el currículo de los grados escolares que incluyen desde el Kindergarten hasta el último grado del nivel medio superior y para las instituciones que tienen programas de formación de maestros.
- Realizar experimentos preliminares en los que se usen materia les desarrollados para evaluar la aplicabilidad pedagógica, la comprensión y las actitudes de los alumnos, y las actitudes de los maestros.

PAÍSES PARTICIPANTES

A continuación hacemos una breve presentación de los proyectos que se han desarrollado en cada uno de los paises participantes.

Argentina

Coordinador nacional: *Carlos Mansilla*
Universidad del Chaco
Rafael Ferreyra
Universidad Blas Pascal
Av. Italia 350
3500 Resistencia, Chaco
Argentina
unichaco@chaco.lared.com.ar

Calculadoras: TI–108, Math Explorer, TI–82, TI–85

Huelgas de profesores, cambios políticos y dificultades de importación han conducido a una situación en la cual las calculadoras para el PLACEM todavía no han llegado a Argentina. Se han realizado sesiones con profesores en servicio para preparar grupos de profesores para usar las calculadoras cuando éstas lleguen.

Brasil

Coordinadores nacionales: *Maria Salett Biembengut* y *Nelson Hein*
Universidade Regional de Blumenau
Rua Antonio da Veiga, 140
CEP 89012900 Blumenau, SC, BRASIL
hein@furb.rct–sc.br

Calculadoras: Math Explorer, TI–30, TI–82

PLACEM-Brasil se divide en tres sub-proyectos: 1) capacitación de profesores, 2) el uso de calculadoras en la enseñanza media y media superior, y 3) el desarrollo de materiales. Los profesores que han asistido a los talleres de capacitación han expresado interés en que sus escuelas adquieran calculadoras. Basados en una aplicación inicial, se están revisando los materiales para su reaplicación durante el siguiente año escolar con un correspondiente estudio del rendimiento de los alumnos. Mientras tanto se publicó un artículo sobre el modelaje matemático con la TI-82 (Salett y Hein, 1995) y se preparó una traducción al portugués del manual de la Math Explorer.

Chile

Coordinador nacional: *Patricio Montero*
Universidad de Santiago
Av. B. O'Higgins 3363
Santiago
Chile
pmontero@fermat.usach.cl

Calculadoras: Math Explorer, TI–30, TI–82

PLACEM-Chile se enfrenta a la problemática con un acercamiento con tres ejes. En una etapa inicial se exploró la posible resistencia de los profesores frente a la introducción de calculadoras en sus aulas. A través de reuniones relacionadas con un programa de asistencia técnica a escuelas ofrecido por la Universidad de Santiago que se llama *Proyecto de Redes de Ayuda* se ha encontrado que algunos profesores tienden a pensar que la calculadora conduce a una perdida de destreza computacional y aún que *las calculadoras atrofian la mente*. Además algunos expresaron el temor de que con algunos modelos de calculadoras complejos no iban a poder usar todas las facilidades de la máquina y así perder autoridad frente a los estudiantes. Una conclusión importante fue que la introducción de calculadoras debería llevar una estrategia de cambio curricular para tratar cualquier resistencia detectada.

También han iniciado una exploración de maneras efectivas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con el uso de calculadoras en la enseñanza secundaria, media superior y superior. Estudiantes avanzados de la licenciatura y del posgrado están trabajando con tres catedráticos universitarios en la preparación de materiales instruccionales para usar con las calculadoras. Dichos materiales educacionales se someten a un proceso cuidadoso de desarrollo y revisión.

En un tercer nivel han empezado a estudiar patrones de respuestas y errores de los estudiantes en el uso de los materiales que se han desarrollado. Además, se están desarrollando maneras de estudiar la relación entre habilidades cognoscitivas y el uso de la calculadora.

Finalmente, el PLACEM-Chile se ha comprometido con una propuesta aceptada por el Ministerio de Educación para comprar calculadoras gráficas como parte de un proyecto nacional de renovación curricular y capacitación de profesores. También han participado en la identificación de características que deberían incluirse en un manual pedagógico sobre el uso de calculadoras gráficas, condición básica para su inserción en el sistema educativo.

Colombia

Coordinador nacional: *Pedro Gómez*
Universidad de los Andes
una empresa docente
Apartado Aéreo 4976
Bogotá
Colombia
pgomez@uniandes.edu.co

Calculadoras: TI–85

PLACEM-Colombia formó parte de un proyecto ya existente de investigación y desarrollo en precálculo en un centro de investigación que se llama *una empresa docente* en la Universidad de los Andes, en Bogotá. Entre los estudios que se han publicado sobre el uso de calculadoras hay un artículo de Mesa (1996). Ella identifica "lo bueno, lo malo, y lo feo" del uso de calculadoras en un curso de precálculo. Entre "lo bueno" menciona su propia confrontación con los elementos de precálculo, la visión que tienen sus estudiantes de la calculadora como otro poseedor de la "verdad" dentro del aula, una visión nueva de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, y un sentido en el cual las calculadoras sirvieron como un tema de conversación que conducía a más colaboración colegial. "Lo malo" tenía que ver sobre todo con el precio en Colombia de la TI-85 y las dificultades ocasionadas por el hecho de tener estudiantes que llegaron con cinco o seis distintos modelos más baratos. "Lo feo" tenía que ver principalmente con la confrontación con su propia visión de exactamente que son las matemáticas que fue limitada al principio y el rol de la evaluación en el aprendizaje de las matemáticas. Otro resultado del trabajo con calculadoras en precálculo en *una empresa docente* ha sido la publicación por el Grupo Editorial Iberoamérica de un libro sobre Situaciones Problemáticas en PreCálculo (Gómez, et. al, 1996).

República Dominicana

Coordinador nacional: *Sarah González*
Pontificia Universidad Católica
Madre y Maestra
Apartado 822
Santiago de los Caballeros
República Dominicana

Calculadoras: Math Explorer

En la República Dominicana el PLACEM ha podido conectarse con trabajo significativo ya en marcha para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los últimos años de las escuelas primarias. Se han realizado varios talleres para capacitar a profesores en el uso de calculadoras. La mayor parte del tiempo se ha dedicado a esta actividad ya que no había una tradición en el uso de la calculadora. Además, una extensión interesante del trabajo del nivel primario ha sido un interés renovado en el uso de calculadoras en la universidad. Dicho interés ha recibido otro incentivo con la donación de calculadoras TI-85 de la Universidad de Barry en Miami.

México

Coordinador nacional: *Eduardo Mancera*
Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE)
Calle del Puente No. 45
Col. Ejidos de Huipulco
C.P. 14380 México D.F. México
mancera@servidor.unam.mx

Calculadoras: Math Explorer

El mayor número de proyectos específicos se han iniciado por el PLACEM-México: pre-primaria, primaria, secundaria, medio superior y superior, tanto en el sector público como privado. Los sub-proyectos han involucrado a profesores y estudiantes de varias universidades, incluyendo la Universidad Nacional Autónoma de México, el Instituto Politécnico Nacional, y la Universidad Pedagógica Nacional, tanto como la Secretaría de Educación Pública. El proyecto del nivel pre-primario busca actividades con calculadoras que pueden usarse con niños para desarrollar el sentido de número. El proyecto de nivel primario trabaja con *niños de la calle*. Los proyectos del nivel secundario enfatizan el uso de la Math Explorer para ayudar a comprender conceptos y resolver problemas. Uno de los proyectos del nivel medio superior elabora videos de los estudiantes que están en grupos cooperativos mientras trabajan en proyectos basados en el uso de calculadoras TI-82. Se han realizado muchos talleres e impulsado programas de diplomado. El Coordinador Nacional y dos de los coordinadores de subproyectos participaron en la capacitación T^3 en la Universidad Estatal de Ohio.

Venezuela

Coordinador nacional: *Julio Mosquera*
Universidad Nacional Abierta
Caracas, Venezuela
jmosquer@conicit.ve

Calculadoras: TI–82

La mayoría del trabajo del PLACEM-Venezuela ha sido con talleres para profesores del nivel medio superior. Se han preparado unidades de actividades sobre funciones, funciones inversas, funciones trigonométricas, matrices y tangentes a una curva. Se realiza un estudio piloto con estudiantes de medio superior y el concepto de tangentes a una curva. La implementación de actividades en las aulas ha sido impedido por huelgas de maestros.

CONCLUSIONES

El PLACEM se está desarrollando, aunque existe variabilidad en los procesos y resultados entre los países. En algunos se han logrado resultados que se han publicado o presentado en eventos internacionales (e.g. Brasil, Chile, Colombia, México), otros están en etapas avanzadas de su desarrollo, y en otros se están recién iniciando (Argentina).

Casi todos los países han experimentado dificultades con la importación de las calculadoras. En algunos casos existía una serie complicada de documentos que debían ser completados para poder hacer la importación exenta de impuestos. En otros casos existía el papeleo engorroso y aún así fue necesario pagar impuestos. En la mayoría de los países los sistemas de distribución comercial de las calculadoras todavía están desarrollándose.

Algunos países han experimentado huelgas prolongadas de profesores que han afectado las escuelas públicas en general y los proyectos de calculadoras en particular. Como las huelgas disminuyen el número de días de instrucción, a veces fue necesario abandonar las actividades que se habían planificado con calculadoras.

Aunque el PLACEM ha encontrado algo de resistencia al uso de calculadoras, en general, la resistencia de estudiantes, profesores, administradores y padres de familia no ha sido un problema. De hecho, en casi todos los casos ha existido mucho apoyo para el uso de las calculadoras.

El hecho de que los símbolos en las teclas de las calculadoras se basan en el inglés no ha sido un serio factor negativo en su uso con estudiantes que hablan el español o el portugués. Algunos problemas han surgido en el uso de los modelos para retroproyectores debido a que dichos aparatos no son tan accesibles para los profesores de los niveles primario y secundario de América Latina como lo son en los Estados Unidos. Los posters grandes de las calculadoras se pueden aplicar más a menudo.

Actualmente los países están preparando algunos trabajos de investigación y de difusión sobre opciones y resultados del uso pedagógico de las calculadoras. También están en el proceso de elaboración, validación y optimización de materiales educativos que permitirán ilustrar la factibilidad y beneficios en los aprendizajes cognoscitivos, afectivos y sociales de los estudiantes. Además, se están preparando docentes que posibilitarán la inserción apropiada de la calculadora en los esfuerzos latinoamericanos de mejorar la calidad y equidad de la educación.

Finalmente, hay preocupación en varios países por no querer generar una demanda insatisfecha. Esto es, las actividades del PLACEM están impactando en una demanda emergente que en varios países requiere del desarrollo de mecanismos y procedimientos eficaces para su satisfacción a tiempo.

REFERENCIAS

Gómez, P, et. al. (1996). *Situaciones Problemáticas de Precálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica y "una empresa docente".

Mesa, V. (1996). Lo bueno, lo malo y lo feo en un curso de precálculo. *Revista EMA, 1* (2), 115–123.

Salett Biembengut, M. & Hein, N. (1995). Modelaçao matemática: uma alternativa para o ensino de cálculo. *Temas e Debates*.

Patrick (Rick) Scott
New Mexico State University
Las Cruces, NM 88005 USA
pscott@nmsu.edu

CAPÍTULO 14

¿DESAPARECERÁ EL ÁLGEBRA ELEMENTAL CON LA UTILIZACIÓN DE LAS NUEVAS CALCULADORAS GRÁFICAS?

JOSÉ R. VIZMANOS

Se comienza haciendo un breve recorrido histórico sobre el desarrollo del álgebra desde Diofanto, Al Jwarizmi, Luca Pacioli, Tartaglia, Descartes, etc. A continuación se hace una relación de los contenidos y procedimientos algebraicos necesarios para los alumnos de la Enseñanza Secundaria y de Bachillerato, y como pueden hoy en día ser resueltos, muy fácilmente, con una calculadora gráfica, para lo cual se realizarán distintas ejemplificaciones con la TI-92. Por último, se insiste en que si bien los procedimientos algebraicos, en un futuro próximo, podrán estar obsoletos, no lo estarán las estrategias de pensamiento algebraico, ni los procesos de razonamiento que permiten plantear mediante ecuaciones, situaciones dadas por descripciones verbales. Esto, no sólo no ha perdido vigencia con la aparición de las calculadoras gráficas, sino muy al contrario, según mi punto de vista, debería ser un objetivo prioritario en la enseñanza secundaria. Por todo ello parecería necesario realizar una profunda revisión de los currículos algebraicos para adecuarlos a la situación futura.

UNA MIRADA AL PASADO

¿Qué entendemos por álgebra elemental? El álgebra elemental es el lenguaje con el que se comunica la mayor parte de la matemática. Gracias al álgebra podemos trabajar con conceptos a nivel abstracto y posteriormente realizar aplicaciones.

El álgebra elemental enlaza con la generalización de la aritmética para ir posteriormente centrándose en su propia estructura y mayor coherencia lógica. De ahí, la importancia que tienen los distintos usos de los símbolos algebraicos, cuando escribimos A + B, podemos expresar desde la suma de dos números naturales a la suma de dos expresiones algebraicas, o como una suma de matrices. Así pues, hay una primera parte de representación y simbolismo para posteriormente pasar al desarrollo de los algoritmos y procedimientos que permiten trabajar formalmente con las expresiones algebraicas.

Pero lo que hoy entendemos por álgebra ha sido el fruto del esfuerzo de muchas generaciones que han ido aportando su grano de arena hasta conseguir este magnífico edificio que hoy en día llamamos álgebra.

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 185-194

Parece ser que los egipcios ya conocían métodos para resolver ecuaciones de primer grado. En el *Papiro de Ahmes* (1650 a.C.) se dice así: "Calcular el valor del montón si el montón y el séptimo del montón es igual a 19", pero para resolver problemas de este tipo se utilizaban métodos aritméticos como por ejemplo la regla de falsa posición. Los babilonios resolvieron algunos sistemas de ecuaciones lineales muy sencillos. También según descubrió Neugebauer en 1930, los babilonios manejaron ecuaciones cuadráticas con gran soltura.

Hacia el siglo Vl (a.C.) aparece en la matemática griega el método deductivo y hacia el siglo IV (a.C.) lo que se podría llamar el álgebra *geométrica* y ejercicios como: "Dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, hallar dichos lados", fueron tratados de forma muy distinta a como lo hacían los babilonios. Parte de este álgebra geométrica lo trata Euclides en sus *Elementos*.

Pero el más importante de los algebristas griegos fue Diofanto de Alejandría. Poco se sabe de su vida, aun cuando en su tumba figura una inscripción que traducida a una ecuación lineal nos informa algo de ella. A Diofanto se le puede considerar el padre del álgebra antigua. Su obra más importante fue *Arithmetica,* tratado de trece libros de los que sólo han sobrevivido los seis primeros. No es un texto de álgebra, sino una colección de problemas sobre aplicaciones del álgebra. La influencia de Diofanto ha sido mucho mayor de la que se cree. El propio Pierre de Fermat (1601-1665), llegó a su célebre último teorema, cuando intentaba generalizar un problema que había visto en la *Arithmetica* de Diofanto: "descomponer un cuadrado dado en suma de otros dos cuadrados".

Los matemáticos indios Brahmagupta (598-?) y Bhaskara (1114-1185) aportaron al desarrollo del álgebra soluciones generales para las ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa.

Uno de los miembros más distinguidos de la Casa de la Sabiduría de Bagdad es el matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (hacia 780-850). En su obra *Algebra* estudia con detalle los seis tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva. Su forma de resolver las ecuaciones es preferentemente geométrica conectando así con el álgebra griega de Euclides.

Pero el álgebra clásica, como nosotros la conocemos hoy en día se desarrolla propiamente en el Renacimiento, que es cuando se produce la primera ruptura entre el álgebra antigua y el álgebra clásica. En 1494, el italiano Luca Pacioli (1445-1514) publicó *Summa Arithmetica* en la que se incluía la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. En dicho tratado se comenzaba a utilizar una rudimentaria álgebra simbólica. Pero sobre la ecuación cúbica, Pacioli tenía una impresión muy pesimista sobre su resolución, llegando a pensar que las ecuaciones cúbicas y, no digamos la cuárticas, estaban fuera del alcance del álgebra.

Escipión del Ferro (1465-1526) aceptó el reto de Pacioli y llegó a encontrar una fórmula para la ecuación cúbica disminuida de la forma $ax^3 + cx + d = 0$, su descubrimiento se lo reveló a su discípulo Antonio de Fior (1506-?).

También Nicolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557) presumía de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + mx^2 = n$, pero no sabía como resolver las ecuaciones cúbicas disminuidas, hasta que retado por Fior, llegó a encontrar la solución para este tipo de ecuaciones.

Ludovico Ferrari (1522-1565) logró encontrar un procedimiento para resolver la ecuación algebraica de cuarto grado.

Jerónimo Cardano (1501-1576) publicó *Ars Magna* en donde incluía el método de resolución de algunos tipos de ecuaciones cúbicas que le había revelado Tartaglia, a pesar de su promesa de no hacerlo público, método conocido hoy día como “resolución por radicales”. Pero si los números negativos resultaban sospechosos en el siglo XVI, sus raíces cuadradas resultaban totalmente absurdas. Estos eran los inicios de la aparición de lo que hoy en día llamamos números complejos.

En 1572 Rafael Bombelli (1526-1573) publicó su tratado *Algebra*, en el que dio un paso más en la resolución de las ecuaciones cúbicas expresando las soluciones en la forma $2 + \sqrt{-1}$. A Bombelli hay que agradecer el haber descubierto que los números imaginarios juegan un papel importante en el desarrollo del álgebra.

El matemático francés Francisco Vieta (1540-1603) propuso un nuevo enfoque para la resolución de ecuaciones cúbicas. Además comenzó el estudio de las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación, que completó el matemático flamenco Albert Girard (1590-1633), con la publicación de su obra *Invention nouvelle en l'algebre*, en 1629. René Descartes (1596-1650) en su *Libro I: La geometría* incluye un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero por métodos geométricos, como lo hacían los griegos de la antigüedad.

Tanto Cardano como Ferrari no supieron encontrar procedimientos para la resolución de ecuaciones algebraicas de 5° grado. Hasta que en 1824 el joven matemático noruego Niels Abel (1802-1829), conmovió a toda la comunidad científica demostrando que no era posible resolver por radicales las ecuaciones de quinto o superior grado. Esto no quería decir que las ecuaciones algebraicas de quinto o más grado no tuvieran soluciones, sino que no existía un método algebraico que permitiera obtener las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes. El descubrimiento de Abel enlaza con el pesimismo de Luca Pacioli y se demuestra el fracaso del álgebra cuando se supera el grado cuarto.

Girard, ante la dificultad de extraer raíces cuadradas de números negativos, fue el primero que se atrevió a conjeturar en 1629 lo siguiente: “Una ecuación de grado n tiene exactamente n raíces, siempre que se cuenten las imposibles”. Posteriormente Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y

D'Alembert (1717-1783), estudiaron el mismo teorema pero sin pensar que las raíces podían ser números complejos. Es a Gauss (1777-1855) al que se le debe el nombre de teorema fundamental del álgebra. En su tesis doctoral leída en 1799, criticó los trabajos de Euler, Lagrange y D'Alembert y dio una demostración del teorema, que se apoyaba en consideraciones geométricas, por lo que no resultaba del todo convincente. En 1816 publicó dos nuevas demostraciones y 5 años antes de su muerte publicó la cuarta demostración tratando de encontrar procedimientos puramente algebraicos.

A principios del siglo XVIII, el matemático inglés Roger Cotes (1682-1716) y el francés emigrado a Inglaterra Abraham de Moivre (1667-1754) redujeron la resolución de la ecuación $z^n - 1 = 0$, a la división de la circunferencia en n partes iguales, mostrando así un buen dominio de los números complejos.

Pero el álgebra sigue desarrollándose y en el siglo XVIII y XIX surge una nueva ruptura pasando del álgebra clásica al álgebra moderna, con aportaciones de matemáticos como George Peacock (1791-1858), iniciador del pensamiento axiomático, que luego desarrollarán matemáticos como Augustus de Morgan (1806-1871), Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) y George Boole (1815-1864). No podemos olvidar en esta época a los dos algebristas más prolíficos del siglo XIX, los ingleses Arthur Cayley (1821-1895) con el estudio de las matrices y J.J. Sylvester (1814-1897) con la teoría de los invariantes. Finalmente Evariste Galois (1811-1832) con la creación de *grupo* hace de este concepto abstracto la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas dando por terminada el álgebra clásica.

CONTENIDOS ALGEBRAICOS NECESARIOS PARA LOS ALUMNOS DE ENSEÑANZA PRE-UNIVERSITARIA

Comencemos diciendo que se entiende por enseñanza pre-universitaria a la enseñanza que reciben los alumnos antes de entrar a la Universidad, más concretamente nos referimos a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) para alumnos de 12 a 16 años y el Bachillerato para alumnos de 16 a 18 años. Así pues, en España la enseñanza pre-universitaria está dirigida aproximadamente a alumnos menores de 19 años.

> *¿Cuáles son los contenidos algebraicos necesarios para estos alumnos?*

Teniendo en cuenta los currículos actuales y sin tratar de ser exhaustivos, los contenidos algebraicos que estudian los alumnos en este período son los siguientes:

- Polinomios: operaciones

- Expresiones algebraicas: operaciones
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Estudio de inecuaciones de primer grado
- Resolución de ecuaciones de segundo grado
- Estudio de inecuaciones de segundo grado
- Resolución de ecuaciones cúbicas con una solución entera
- Resolución de ecuaciones bicuadradas
- Resolución de ecuaciones algebraicas de grado n con n-2 raíces enteras
- Resolución de ecuaciones irracionales
- Resolución de ecuaciones trascendentes (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, etc.)
- Matrices: Operaciones
- Determinante de una matriz cuadrada. Matriz inversa
- Sistemas de ecuaciones lineales: Métodos de Gauss, Cramer y Rouche.

APLICACIONES DEL CÁLCULO ALGEBRAICO SIMBÓLICO CON LA TI-92

Con la aparición de las calculadoras gráficas, con posibilidad de construcción de tablas, es posible resolver cualquier tipo de ecuaciones ya sea algebraica o trascendente, por métodos numéricos o gráficos. Más recientemente con la aparición de la calculadora TI-92, que lleva incorporado el CAS (Cálculo algebraico simbólico) es posible realizar todo tipo de cálculos algebraicos. Así por ejemplo:

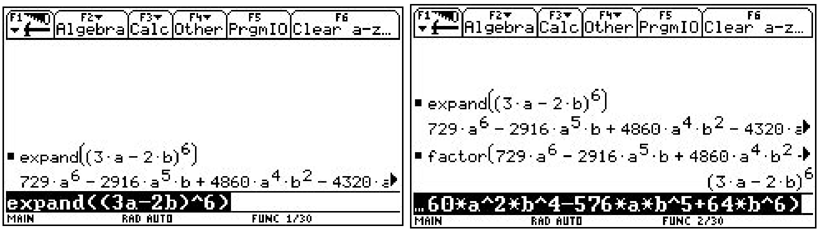


Figura 1.

Figura 1.

Así pues, podemos concluir que los procedimientos algebraicos con el CAS no presentan hoy en día ninguna dificultad.

UNA MIRADA AL FUTURO

De lo visto hasta ahora se deduce que los esfuerzos que ha realizado la humanidad para encontrar algoritmos y procedimientos que permitan desarrollar destrezas algebraicas así como para resolver ecuaciones, han sido muy loables, e importantes en su momento, pero hoy en día están totalmente obsoletos. ¿Qué sentido tiene actualmente resolver una ecuación cúbica por radicales, cuando, como acabamos de ver, podemos hacerlo de forma tan sencilla? ¿Quiere esto decir que los alumnos de estas edades no tendrán que estudiar álgebra, teniendo en cuenta que las calculadoras le resolverán con toda facilidad la ecuación?

Evidentemente nuestros alumnos deberán seguir estudiando álgebra pero el currículo del álgebra que se debería proponer en un futuro debería de dejar de centrarse exclusivamente en la soltura manipulativa para dar una mayor importancia a las propias estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como herramienta para la resolución de problemas. Pero esto, debería llevar a un cambio en cuanto al tiempo de docencia de cada una de las partes.

Hasta ahora cada vez que se enseñaba un contenido, pongamos por ejemplo las operaciones con matrices, se dedicaba mucho tiempo al cálculo de expresiones con operaciones con matrices, pero como este tipo de cálculos es pesado y laborioso, resulta que cuando podríamos empezar a estudiar las aplicaciones del cálculo matricial que es lo realmente importante, no queda tiempo y por otra parte resulta humanamente imposible calcular con papel y lápiz la potencia décima de una matriz para poder estudiar un problema de Markov.

Por el contrario, en un futuro proponemos dedicar mucho tiempo a los conceptos y a las estructuras de pensamiento algebraico, y menos tiempo a la manipulación algebraica tales como la resolución de ecuaciones, ya que esta puede hoy en día ser resuelta en tan solo un instante y siempre con el mismo procedimiento. En cambio, parece importante dedicar mucho más tiempo a la aplicación del álgebra a distintas situaciones, para lo cual utilizaremos la tecnología existente.

Simplifiquemos un poco las cosas y pongamos tan solo un ejemplo. Supongamos que a los alumnos de 14 años se les enseña por primera vez la resolución de ecuaciones lineales. Tradicionalmente se venía dedicando mucho tiempo, aproximadamente cuatro semanas, resolviendo ecuaciones que ya estaban planteadas, haciendo de este tiempo un período repetitivo y aburrido. A continuación se dedicaba, generalmente muy poco, a veces tan sólo una semana, para el planeamiento y posterior resolución de ecuaciones de primer grado a partir de enunciados interesantes que obviamente resultarán mucho más motivadores que simplemente la utilización de una serie de reglas y recetas que el alumno llega a dominar con todo detalle, pero que en muchas ocasiones no sabe realmente lo que hace, ni por qué lo hace.

Frente a esta situación proponemos realizar una cambio sustancial partiendo de situaciones concretas suficientemente motivadoras que justifiquen la necesidad del lenguaje algebraico para que, mediante su simbolismo y representación, podamos plantear la ecuación lineal correspondiente. Posteriormente, y tan sólo para ecuaciones suficientemente sencillas, tratar de resolverlas mediante papel y lápiz aplicando los procedimientos algebraicos tradicionales. Pero esta etapa manipulativa correspondiente a los procedimientos algebraicos puede recortarse mucho, teniendo en cuenta que los alumnos pueden utilizar una tecnología adecuada, que les permite resolver las ecuaciones muy fácilmente, tanto por métodos analíticos, como por métodos numéricos y/o gráficos. Y en cambio, parece muchísimo más interesante dedicar más tiempo al planteamiento de las ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a diferentes campos de la vida cotidiana y mucho más próximos al alumno, que a la resolución de esas ecuaciones que se pueden hacer fácilmente con una calculadora.

CONCLUSIONES

Evidentemente el objetivo principal de la enseñanza de la matemática en la secundaria en todos los países es capacitar al alumno para enfrentarse a los retos que la vida en el futuro les pueda presentar. Ahora bien, ¿cómo ayudamos más a nuestros alumnos, enseñándoles a aplicar como autómatas reglas y recetas que permiten hacer cosas que resuelve fácilmente la tecnología o enseñándoles a pensar, cosa que todavía no pueden hacer ni los ordenadores ni las calculadoras? Incluso pensando en los futuros universitarios, quienes obviamente deberán realizar un uso mucho más frecuente de destrezas algebraicas, un objetivo importante tendrá que ser el conseguir un nivel adecuado de suficiencia en este tipo de destrezas y procedimientos. Sin embargo, también estos alumnos se van a encontrar que la tecnología presente y no digamos nada la futura les va a exigir un replanteamiento de los niveles de destrezas que se deben conseguir.

En resumen, y a modo de ejemplo, se trata de poner más énfasis en el planteamiento de las ecuaciones que es una forma de desarrollar estructuras de pensamiento algebraico que en la propia resolución de la ecuación, que hoy en día ya no es tan importante. De hecho téngase en cuenta que todavía no existe ninguna calculadora u ordenador a la que se le edite un enunciado de un problema y automáticamente plantee la ecuación, en cambio hoy en día existen diversos programas de ordenador y calculadoras a las que se les edita la ecuación y con tan solo apretar la tecla Enter se puede obtener rápidamente su solución. Tan sólo a modo de ejemplo volvamos a releer algunos de los célebres problemas clásicos:

La vida de Diofanto

Este túmulo cubre aquí a Diofanto.
¡Contemplad este prodigio!
Mediante la habilidad del fallecido esta piedra muestra su edad.
Para ser niño Dios le concedió la sexta parte de su vida;
En una duodécima parte más le creció la barba sobre las mejillas;
En otra séptima parte más contrajo el vínculo del matrimonio.
Al cabo de cinco años nació de esta unión un hijo.
¡Pobre niño bien amado! A la mitad de los años
del padre había llegado cuando sucumbió ante el Destino.
Durante los cuatro años siguientes ahuyentando de si la aflicción,
sumido en profundas reflexiones,
también llegó al fin temporal.

Tomado del Lilavati de Brahmim Bahskara (1114-1185), matemático indio

De un enjambre de abejas, 1/5 de las abejas vinieron hacia una flor de loto, 1/34 hacían un banano. Un número igual a tres veces la diferencia entre las dos cifras precedentes. ¡Oh bella con ojos de gacela! voló hacia un árbol Codaga (con corteza amarga sucedáneo de la quina). Otra, por último, balanceándose, deambula por aquí y por allá en los aires, atraída al mismo tiempo por el delicioso perfume del jazmín y del pandano. Dime, querida mía, ¿cuántas son estas abejas?

Un problema de Euler (1707-1783)

Un padre deja una herencia de 8600 libras a sus cuatro hijos. Según el testamento, la parte del mayor debe ser inferior en 100 libras al doble de la parte del segundo. La parte del segundo, inferior en 200 libras al triple de la parte del tercero. Y la parte del tercero inferior en 300 libras al cuádruple de la parte del más joven. ¿Cuál es la parte de cada uno?

La serie de Rachinski (siglo XIX)

Encontrar una serie de cinco números enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿Donde reside la dificultad, en plantear la ecuación, o una vez planteada, resolverla?

REFERENCIAS

Boyer, C. B. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Diez Barrabes, M. (1994). Dificultades en el uso y significación de las letras en álgebra. Propuesta de una nueva ingeniería didáctica. *Comunicación presentada al II CIBEM*. Blumenau. Brasil.

Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios*. Madrid: Editorial Pirámide.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Paradis, J., et al. (1989). *El álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*. Barcelona: PPU.

Perelman, Y. (1965). *Algebra recreativa*. Moscú: Editorial Mir.

Radice, L. (1983). *La matemática de Pitágoras a Newton*. Barcelona: Laia.

Wussing, H. & Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

José R. Vizmanos
Catedrático de Matemáticas del I.E.S. "Santamarca"
c/ Puerto Rico, 34
28034-Madrid
Spain

CAPÍTULO 15

COMPUTADORES: EN EL SALÓN DE CLASE: UNA MIRADA HACIA EL FUTURO

BERT K. WAITS, FRANKLIN DEMANA

Es probable que los programas de computador de álgebra simbólica que traen los computadores portátiles como la Texas Instruments TI-92 lleguen a ser tan populares como lo son las calculadoras científicas hoy en día. Muchos métodos de computación manuales deberían volverse obsoletos y esto va a requerir muchos cambios en el currículo de matemáticas del futuro. Este currículo puede enfocarse más en la resolución de problemas, la aplicación de conceptos y la comprensión.

INTRODUCCIÓN

Las calculadoras electrónicas tienen más de 25 años de existencia. Al comienzo eran simples aparatos de "cuatro funciones" que sólo realizaban aritmética básica como la Texas "DataMath" que costaba $120 US en 1972. Estas calculadoras fueron rápidamente reemplazadas por las "tablas de cálculo electrónicas", calculadoras científicas que realizaban importantes cómputos sofisticados con una exactitud de 8 a 12 dígitos. La primera calculadora fue la HP-35 introducida en 1972 (costaba $395 US). En la actualidad, las calculadoras científicas son bastante baratas ($10 a 20 US) y han cambiado de manera significativa el currículo de matemáticas de la mayoría de los países. Por ejemplo, ya no gastamos tiempo enseñando métodos manuales para calcular valores de funciones trascendentes. Se podrá emplear más tiempo en aplicaciones y comprensión conceptual, a medida que el uso de la calculadora científica se generalice.

Hace diez años, las calculadoras dieron un inmenso paso revolucionario y añadieron una nueva función sólo disponible en los computadores PC más grandes. Estas fueron las llamadas calculadoras gráficas, inventadas por Casio en 1985. Las calculadoras gráficas empezaron una revolución en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las calculadoras gráficas baratas eran realmente computadores con programas de gráficos incluidos. Se las podía considerar como *computadores al alcance de todos los estudiantes* por su bajo costo, facilidad de manejo y carácter portátil (Demana y Waits, 1992).

Antes de la existencia de las calculadoras gráficas, los profesores contaban únicamente con costosos laboratorios de computadores (normalmente en un recinto separado) para enriquecer la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas con imágenes computarizadas. Sólo unas pocas escuelas élites

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 195-201

podían suministrar tal experiencia con regularidad a los estudiantes. No se debe subestimar la importancia de estos pequeños aparatos portátiles y poco costosos. Hoy en día, las calculadoras gráficas proporcionan a millones de estudiantes una experiencia significativa que enriquece su aprendizaje con imágenes por computador. Ahora, los profesores están en capacidad de presentar ideas matemáticas, conceptos y aplicaciones en representaciones simbólicas, numéricas y gráficas. Las calculadoras gráficas han permitido el desarrollo de nuevas aproximaciones importantes al aprendizaje de las matemáticas. En la actualidad, todos reconocemos que la posibilidad de un currículo de matemáticas más rico depende del acceso de todos los estudiantes a las calculadoras gráficas.

Las calculadoras gráficas poseen buenos programas numéricos y gráficos propios. Sin embargo, carecen de tres aplicaciones muy importantes para enriquecer las matemáticas, aplicaciones que sí poseen los computadores de escritorio más costosos: álgebra simbólica para computadores (CSA), geometría interactiva para computadores y hojas de cálculo. El uso de CSA por parte de los estudiantes tiene una importancia particular para la reforma al currículo de matemáticas. Se necesitaba un aparato práctico (y barato) que permitiera el acceso a CSA para el aprendizaje de matemáticas. La Texas Instruments dio el siguiente gran paso en la evolución de las calculadoras portátiles en 1995.

UNA MIRADA HACIA EL FUTURO

La Texas TI-92, introducida a finales de 1995, es un computador portátil relativamente barato (2x el costo de una calculadora gráfica pero 25x más poderosa) con un sistema de álgebra simbólica (que usa algoritmos de DERIVE) y un programa de geometría interactiva (una versión casi completa de CABRI II) incluidos. Sin duda, es la primera de una nueva generación de super calculadoras gráficas. Seguramente otros fabricantes de calculadoras seguirán sus pasos con productos similares. Estas herramientas computarizadas personales, baratas y fáciles de usar que se encuentran al alcance de los estudiantes contienen programas de computador potentes y versátiles y representan realmente “un computador para *todos* los estudiantes de matemáticas”. Estas nuevas herramientas y sus sucesoras cambiarán de manera significativa el currículo de matemáticas del futuro. Nos trasladaremos de un énfasis en habilidades de manipulación a un énfasis en la comprensión, los conceptos y la resolución de problemas.

UTILIZACIÓN DE LOS ESTÁNDARES NCTM

Una de las mayores preocupaciones que tenemos hoy en día es que los siguientes principios subyacentes acerca de la tecnología de computadores (extraídos de *Estándares de Currículo y Evaluación para las matemáticas Escolares*. NCTM, 1989, p. 124) son todavía casi imposibles de implantar en una escuela secundaria típica.

> *Habrá un computador para efectuar demostraciones disponible en todo momento en todas las aulas, y los estudiantes tendrán acceso a los computadores para trabajo individual y de grupo*.

Una razón es el alto costo de los laboratorios de computadores, el mantenimiento y problemas relacionados con entrenamiento. Otra razón es que de acuerdo con lo estipulado en los *Estándares*, los estudiantes tendrán que usar programas de computador mucho más sofisticados de lo que la calculadora gráfica más avanzada puede suministrar. Depender solamente de computadores de escritorio y programas costosos instalados en laboratorios de computadores es aún una inmensa barrera para la implantación de reformas serias al currículo de matemáticas.

Muchos profesores habían optado simplemente por no usar álgebra simbólica y geometría interactiva para computadores en sus clases de matemáticas porque sencillamente no era práctico o posible hacerlo. ¡Ahora es posible y práctico! Por ejemplo, un grupo de calculadoras TI-92 constituye un laboratorio de computadores portátil y poco costoso. Finalmente es posible poner en práctica las sugerencias de *Estándares* NCTM para los grados 9-12 con respecto a la tecnología informática.

LA DECADENCIA DE LOS MÉTODOS MANUALES TRADICIONALES

En el pasado era necesario enseñar los métodos tradicionales de álgebra simbólica (métodos manuales de lápiz y papel) porque eran los *únicos* métodos que existían para la manipulación algebraica necesaria para "resolver" problemas. Hoy en día, éste simplemente no es el caso. Los algoritmos CSA hacen ahora la manipulación algebraica más rápido y con mayor exactitud de lo que era posible con los métodos "tradicionales".

Una de las noticias de primera plana del periódico USA TODAY de marzo 26 de 1996 cubría la Cumbre de Educación Nacional a la cual asistieron 44 altos ejecutivos corporativos (CEO) invitados por los gobernadores de los diferentes estados de Estados Unidos. Un CEO, Richard Notebaert de Ameritech, dijo: "Estamos tratando de contratar. Tenemos dificultades para encontrar a las personas adecuadas. Estamos gastando cientos de millones de dólares en introducir alta tecnología en las escuelas. Pero todo esto es un desperdicio, si profesores y estudiantes no están en capacidad de sacar provecho".

Creemos que lo que se necesita es un currículo de matemáticas de secundaria que aproveche la tecnología informática para ayudar a los estudiantes a convertirse en “solucionadores de problemas” eficaces y cuidadosos.

UN NUEVO RETO

Los profesores de matemáticas tienen un nuevo reto. Nuestra comunidad *no puede ignorar por más tiempo* el impacto del uso que los estudiantes dan al álgebra simbólica y geometría interactiva por computador sobre el currículo de matemáticas. Esta nueva generación de herramientas computarizadas portátiles se hará tan popular como las calculadoras gráficas. Debemos afrontar el hecho de que para realizar muchas de las “manipulaciones” asociadas con matemáticas, el álgebra simbólica y la geometría interactiva por computador son herramientas mejores —mucho mejores— que el lápiz y el papel.

Estas nuevas herramientas también sirven para ilustrar *mejor* conceptos y aplicaciones importantes de las matemáticas. Debemos redefinir “habilidades básicas” para incluir aquellos métodos de manipulación manual que son fundamentales para entender el álgebra como un lenguaje de representación. Algunos métodos manuales tradicionales continuarán siendo necesarios para las actividades relacionadas con matemáticas así como los métodos mentales tradicionales. Sin embargo, también *debemos* dejar de emplear gran parte de nuestro tiempo en la enseñanza de métodos manuales obsoletos para la realización de manipulaciones en álgebra y cálculo. Estos métodos *deben* ser identificados. Ese es nuestro reto para el futuro.

Aquí tenemos dos ejemplos. Considere el tema favorito de todos: la factorización de expresiones algebraicas, que *todavía* es muy importante. Después de todo, el *teorema fundamental del álgebra* es un teorema de factorización. Este teorema es clave para una comprensión matemática adecuada como lo son las importantes conexiones entre factores, intersecciones en x del gráfico de la función, los ceros de las funciones y e comportamiento de éstas. La figura 1 muestra el resultado de aplicar **Factor**

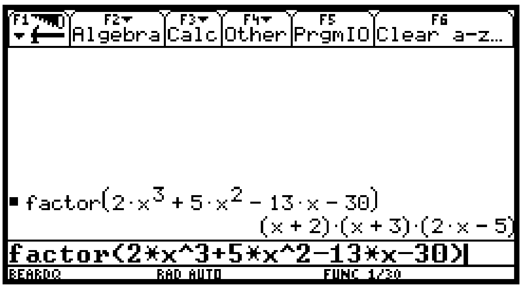


Figura 1.Un ejemplo de factorización con CAS

(comando CAS para la expresión polinomial). Los factores (por inspección) nos dan la solución para la ecuación "expresión" = 0 y nos dan mucha más información acerca del comportamiento de la función polinomial en forma no factorizada. Otro ejemplo del cálculo son las "funciones parciales" como una técnica de integración. La figura 2 muestra el resultado de aplicar **Expand** (comando CAS para funciones racionales simples g(x)).

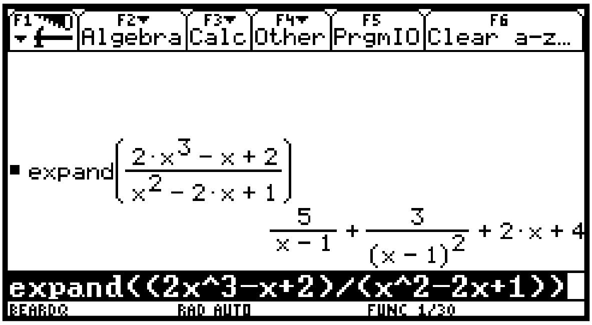


Figura 2.Descomposición parcial de fracciones con CAS

¡Ahora es muy fácil integrar g(x) (encontrar una antiderivada) mentalmente a partir de reglas básicas de integración! El resultado de aplicar el comando CAS **Integrate** *antes* de la descomposición parcial de fracciones CAS se muestra en la figura 3 (¡sólo para comprobar nuestras habilidades de "integración mental"!).

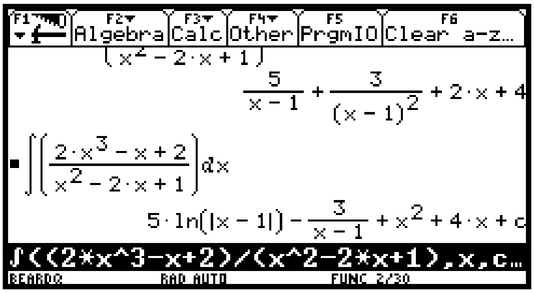


Figura 3.Cómputo de una integral indefinida con CAS

Creemos que los profesores definitivamente deben seguir enseñando los conceptos de factorización y descomposición parcial de fracciones y su significado (y por qué son útiles). Sin embargo, las *herramientas* que usaremos para "factorizar" y "encontrar descomposiciones parciales de fracciones" progresarán de los métodos manuales (historia) al uso por parte de los estudiantes del CAS. Los profesores *deben* enseñar los cómodos temas estándar tradicionales, pero deben emplear *mucho menos* tiempo con los métodos manuales (manipulación) y *mucho más* con las herramientas CAS. Nuestro empeño no debe ser por eliminar temas tradicionales sino por reducir la cantidad de tiempo empleado y cambiar las herramientas destinadas a estos temas.

También *requerimos* de libros de texto y exámenes que reflejen el uso de estas herramientas de la nueva tecnología y, por lo tanto, representen el nuevo currículo. Estamos *comprometidos* como nueva sociedad a encontrar la manera apropiada de apoyar y patrocinar a los profesores que necesiten capacitación. Los profesores se darán cuenta de la necesidad de estar cada vez más actualizados en la tecnología y de volverse también reformadores de currículo.

UN PROBLEMA DE IMAGEN DE LAS MATEMÁTICAS

La comunidad matemática debe hacer un mejor trabajo en el tratamiento del "problema de imagen de las matemáticas". A menudo el público asocia "hacer matemática" solamente con los cómputos mentales y manuales de álgebra y aritmética que aprendieron en la escuela. Necesitamos comunicar, de manera convincente, al público en general, que "hacer matemáticas" en el siglo 21 significa mucho más que "hacer" las matemáticas del pasado. Las matemáticas escolares del futuro serán mucho más actualizadas tecnológicamente, interesantes, variadas y aplicables que en el pasado. Los negocios y las industrias buscan empleados que puedan analizar, leer y comprender situaciones problema, trabajar en grupo de manera cooperativa, entender y usar la tecnología y comunicarse de manera efectiva con otros. El uso apropiado de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje ayuda a construir estas importantes habilidades en los estudiantes.

RESUMEN

Las calculadoras con programas de *gráficos* incluidos para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tienen ya más de diez años de existencia. Casio inventó e introdujo en el mercado la primera calculadora gráfica en 1985 y comenzó una revolución en la entrega de *gráficos computarizados* potentes y útiles a millones de estudiantes de matemáticas. Ciertamente, las calculadoras gráficas baratas han cumplido nuestro deseo de que todos los estudiantes de matemáticas tengan acceso frecuente a la visualización por computador en actividades dentro y fuera de la clase —un sueño que nunca hubiera podido ser realizado con computadores PC de escritorio en laboratorios de informática.

Nuestro mundo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no volverá a ser el mismo. Creemos que la Texas Instruments ha dado el primer paso en la siguiente revolución de la tecnología informática de apoyo diseñada para el uso en las matemáticas de la escuela. Han producido la primera herramienta barata de apoyo que incluye álgebra simbólica y geometría interactiva por computador diseñada para matemáticas y estudiantes de ciencias. Seguramente, otras compañias de calculadoras producirán productos similares en un futuro.

Los *estándares* NCTM (NCTM, 1989) dicen mucho en favor de los contenidos y métodos que son necesarios en el currículo moderno de matemáticas para todos los estudiantes. Hoy en día, existe una nueva herramienta que hace posible y práctica la visión del currículo matemático mejorado, basado en la tecnología informática, del que se habla en los *Estándares* NCTM. Al facilitar la reducción del tiempo empleado en métodos manuales, esta herramienta proporcionará el tiempo de clase adicional para las nuevas actividades matemáticas recomendadas en los *Estándares*.

Ahora necesitamos ser más específicos y explícitos sobre un problema controversial. No podemos seguir gastando el tiempo de clase haciendo todo lo que hicimos en la pasada era del lápiz y el papel y añadiéndole los muchos temas y métodos que nuestros estudiantes necesitan para el futuro tecnológico al que tendrán que enfrentarse. Pongamos manos a la obra y lleguemos a un acuerdo sobre qué cómputos, antaño realizados con lápiz y papel, pueden ser realizados con mayor eficiencia por computadores ¡los estudiantes están esperando nuestra respuesta!

REFERENCIAS

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics*. Reston, Va: The Council.

Demana, F. y Waits, B. K. (1992). A Computer for All Students. *Mathematics Teacher* 85, 94-95.

Bert K. Waits
Professor Emeritus of Mathematics
The Ohio State University
338 Goshen Lane
Columbus
Ohio 43230
USA
waitsb@math.ohio-state.edu

CAPÍTULO 16

EL CAMBIO DEL MÉTODO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA JAPONESA GRACIAS A LA TI-82

SHIN WATANABE

Hasta ahora, la educación matemática japonesa se ha caracterizado por un enfoque en la formalidad y en las nociones abstractas y por el empleo de una gran cantidad de tiempo en la realización de cálculos. Esto tiene que cambiar, y la introducción de la calculadora gráfica puede ayudar en el proceso de transformación. En este trabajo mostramos, a través de ejemplos en los cuales la calculadora se utiliza en precálculo, cálculo diferencial y resolución de problemas, cómo, con las calculadoras gráficas, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede hacerse más interesante. Ahora muchos estudiantes pueden ver y acercarse al conocimiento por medio del uso de la calculadora y disfrutar las clases de matemáticas.

SISTEMA ESCOLAR JAPONÉS

Los japoneses pensamos que la educación es importante en la construcción de una buena sociedad. Por eso, teníamos escuelas *Terakoya* en Edo (hace 200 años), y construimos muchas escuelas elementales en todas las regiones, hace 100 años. Los padres de familia siempre han pensado que los niños deben asistir diariamente a la escuela; lo cual se ve reflejado en el alto porcentaje de asistencia escolar: Jardín Infantil 84%, Escuela Elemental 100%, primeros años de Secundaria 100%, últimos años de Secundaria 98% y Universidad 47%. Los japoneses creemos que el crecimiento económico de nuestro país se debe a la educación escolar.

En Japón, la escuela elemental y los primeros años de Secundaria son obligatorios. Algunos alumnos presentan el examen para ingresar a una secundaria privada. Si no logran ingresar, pueden entrar a la secundaria pública sin presentar ningún examen, pero muchos padres prefieren que sus hijos asistan a una buena escuela privada. Como las calculadoras no se permiten en los exámenes de admisión, tampoco se utilizan en las clases de matemáticas de la escuela elemental o secundaria.

El gobierno japonés decide el currículo para todos los niveles a través de lo que se denomina el *curso de estudio*. Todos los profesores enseñan el mismo contenido a sus alumnos y utilizan los mismos textos que deben contar con la aprobación del Ministerio de Educación. Los profesores japoneses tienen una buena idea de cómo enseñar matemáticas sin calculadoras. Sin embargo, el uso de las calculadoras se ha hecho obligatorio, y ahora

P. GÓMEZ & B. WAITS (EDS.). *PAPEL DE LAS CALCULADORAS EN EL SALÓN DE CLASE*, 203-212

debemos emplearlas desde las lecciones de quinto año de la Escuela Elemental. Este cambio puede crear una nueva educación matemática en Japón.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA JAPONESA

La principal característica de la educación matemática japonesa es el entrenamiento en la realización de cálculos. Dentro de esta enseñanza, los estudiantes aprenden métodos para calcular sin la ayuda de la calculadora y sólo se permite el uso de ábacos ¿Por qué emplear tanto tiempo en la repetición de cálculos sin ayuda tecnológica dentro de las clases de matemáticas? Los profesores y alumnos creen que el poder de las matemáticas reside en la habilidad para calcular, piensan que “hacer matemáticas” es “realizar cálculos”. En cada clase, los alumnos, que alcanzan una gran rapidez, realizan cálculos mediante el uso del lápiz y papel y los profesores a su vez los evalúan según su habilidad para calcular. Esto tiene dos implicaciones. Una es que el desempeño japonés es muy alto en el IEA, Asociación para la Valoración de Evaluaciones de Logro Escolar. La otra es que los estudiantes japoneses no desarrollan un proceso para el razonamiento en matemáticas.

¿POR QUÉ NO USAR LA CALCULADORA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA JAPONESA?

Los cálculos manuales (con ábaco) y mentales son muy importantes en las matemáticas japonesas. Nosotros creemos que calcular con números es comprender el concepto matemático. La habilidad para calcular es la habilidad para realizar matemáticas. El estudio de las matemáticas es la compresión de los cálculos. Por esto, muchos padres y profesores japoneses están preocupados por la baja en los logros en la habilidad para calcular. Este punto es un gran impedimento para el uso de las calculadoras pues los padres no quieren que sus hijos usen calculadoras en las clases. Otro problema es que las calculadoras no están permitidas en los exámenes de admisión. No obstante, los japoneses dependen constantemente de la calculadora en su vida diaria y los estudiantes las usan todo el tiempo después de la escuela. Inclusive para hacer sus tareas con la ayuda de los mayores. Los siguientes son ejemplos de cálculos manuales realizados al final de la Escuela Elemental.

1) $35 + 7 \times 2 - 12 \div 3 - 8 =$

$80 \div (25 - 15) - 2 \times 3 =$

$(12 \div (18 \div (4 + 5) + 2)) =$

2) $0.25 \times 0.04 =$

$0.072 \times 0.016 =$

3) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} =$

$\frac{3}{4} \div \frac{9}{10} - \frac{1}{3} =$

Los siguientes son ejemplos del uso de calculadoras manuales (ábacos):

1) $(2.65 \times 102.03 - 2.65 \times 2.03) =$

$20 \times 3.14 \times 5 =$

2) $2.21 + 6.5 \div \frac{1}{2} =$

$4.5 \times \frac{2}{3} + 5.37 =$

3) $0.3 + \frac{1}{4} + 0.05 \times (4.03 - 1.15) \div \frac{2}{5} =$

4) $\frac{13}{25} + 0.05 \times (4.03 - 1.15) \div \frac{2}{5} =$

Queremos enseñar la habilidad del pensamiento creativo en la clase de matemáticas. Lo que se cree comúnmente es que si los estudiantes ejercitan en forma repetida y pueden realizar con éxito cálculos mentales, aplicarán esto para incrementar la eficiencia en el cálculo manual con ábaco. Los siguientes son considerados usos adecuados del cálculo mental para incrementar la eficiencia en el cálculo manual a nivel elemental.

1) $2.65 \times 102.03 - 2.65 \times 2.03$

$= 2.65 \times (102.03 - 2.03)$ factor común

$= 2.65 \times 100$

$= 256$

2) $20 \times 3.14 \times 5$

$= 3.14 \times 20 \times 5$ ley conmutativa

$= 3.14 \times 100$

$= 314$

3) 97×103

$= (100 - 3) \times (100 + 3)$ aplicando factorización

$= 10000 - 9$

$= 9991$

1) $97 + 96 + 103 + 98 + 101 + 103$

$= 100 \times 6 + (-3 - 4 + 3 - 2 + 1 + 3)$

$= 600 + (-2)$

$= 598$

La razón para no usar calculadoras es que los estudiantes normalmente no se enfrentan a problemas en los cuales una calculadora pueda ser una herramienta útil. Es más, algunos textos prohiben de manera explícita el uso de calculadoras para responder las preguntas, ya que con esta ayuda, los problemas serían demasiado fáciles y resultarían absurdos. Por esta razón, nos estamos perdiendo de las ventajas de las calculadoras como herramientas que permiten a los estudiantes abordar problemas matemáticos interesantes.

EL IEA Y LA NECESIDAD DE UTILIZAR CALCULADORAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA JAPONESA

El desempeño de los estudiantes japoneses en el IEA ha sido muy bueno. El segundo estudio internacional de matemáticas (1980) fue un extenso seguimiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas de veinte países. El primer estudio se realizó en 1964 en treinta países. El resultado de la participación japonesa en estos exámenes muestra que los estudiantes japoneses tienen un nivel alto en los aspectos del examen relacionados con cálculos, pero que su desempeño es bajo en los aspectos relacionados con razonamiento, comparado con el rendimiento de los estudiantes de otros países.

Fácil **Adición de fracciones con común denominador**		**Difícil** **La raíz cuadrada es igual a**	
	$\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ es igual a		¿Cuál es la raíz cuadrada de 12*75?
A	$\frac{5}{13}$	A	6.25
B	$\frac{5}{40}$	* B	30

Fácil **Adición de fracciones con común denominador**		**Difícil** **La raíz cuadrada es igual a**	
C	$\frac{6}{40}$	C	87
D	$\frac{16}{15}$	D	625
*E	$\frac{31}{40}$	E	900
Porcentaje de respuestas correctas de los japoneses		Porcentaje de respuestas correctas de los japoneses	
85%		7%	

El primer problema se realiza muchas veces en la escuela; pero el segundo no, y esto puede explicar las diferencias en el porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes japoneses. Ellos no han resuelto nunca este tipo de problemas y esperan que los profesores les enseñen la manera.

EL PAPEL DE LA CALCULADORA GRÁFICA EN EL FUTURO

Como en Japón pensamos que la educación consiste en ejercitar en la realización de cálculos, no vemos la necesidad de utilizar las calculadoras. Pero ahora, el curso de estudio del grado quinto permite a los estudiantes el uso de la calculadora y esto puede ayudar a cambiar el estilo de enseñanza en la clase de matemáticas. Los alumnos podrán volverse creativos, estarán en capacidad de "ver" las matemáticas y, tal vez, disfrutarán realizándolas. Con las calculadoras ya no podemos insistir en mirar solamente si las respuestas están bien o no. Tendremos que tener en cuenta la manera en que se producen.

USO DE LAS CALCULADORAS EN MIS CLASES

Las clases de matemáticas son muy importantes para el estudiante de ciencias. El alumno se esfuerza en aprender métodos para calcular sin el uso de calculadoras. Así, el estudiante que puede realizar cálculos muy bien es altamente valorado. Este tipo de evaluación no es el mejor ya que los estudiantes japoneses no tienen un buen sentido del pensamiento matemático. Con la nueva tecnología, la manera en que se han enseñado las matemáticas cambiará. Dejaremos atrás el cálculo de las expresiones y empezaremos a estudiar el concepto.

Ha sido muy grato para mí dictar las clases en las que he utilizado la calculadora gráfica. En estas clases los estudiantes dieron rienda suelta a su energía latente para el aprendizaje de conceptos. Ahora, pueden comprender el concepto de matemáticas ya que la nueva tecnología les permite ver los objetos matemáticos y abordar nuevos tipos de problemas.

CAMBIAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON LA TI-82

Considero importante el uso de la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los siguientes son algunos ejemplos de uso de la calculadora.

La función paramétrica y su movimiento a medida que ésta es trazada

Dibuje el gráfico de la función paramétrica

$$x_1 = \cos t$$
$$y_1 = \operatorname{sen} t$$

Los estudiantes japoneses pueden dibujar el gráfico muy rápido, eliminar el parámetro t y obtener la función $x^2 + y^2 = 1$. El gráfico que resulta es el círculo con centro en el origen y un radio igual a 1. Este problema es muy sencillo para los jóvenes japoneses.

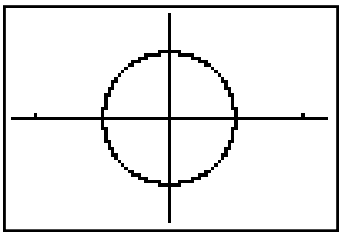
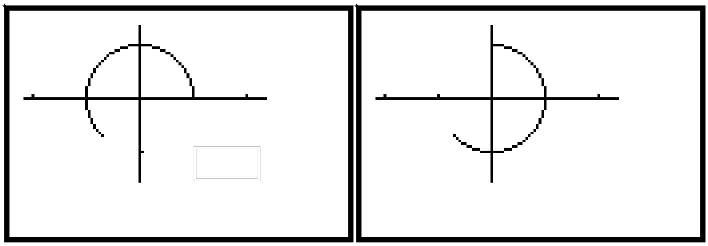


Figura 1. Círculo unitario

Sin embargo, si el problema se cambia a encontrar las diferencias entre las funciones paramétricas

$$\begin{array}{l} x_1 = \cos t \\ y_1 = \operatorname{sen} t \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} x_2 = \operatorname{sen} t \\ y_2 = \cos t \end{array},$$

entonces, los estudiantes japoneses no pueden entender la diferencia entre las dos funciones. Ellos obtienen el mismo círculo unitario. Con la ayuda de la calculadora gráfica, podemos ver la diferencia: uno gira hacia la derecha, el otro hacia la izquierda.



$x_1 = \cos t$ $\quad$ $x_2 = \operatorname{sen} t$

$y_1 = \operatorname{sen} t$ $\quad$ $y_2 = \cos t$

Figura 2. Dos círculos diferentes

Visualización de las funciones: series de Fourier

En mi clase utilizamos la calculadora gráfica para las series de Fourier. Las series de Fourier son una rama de las matemáticas muy importante para los estudiantes de ciencias. En los cursos japoneses de matemáticas, enseñamos la representación de las series de Fourier con la fórmula Euler-Fourier. Este cálculo es fácil para los estudiantes japoneses, pero ellos no comprenden su significado. Tenemos los elementos principales en la representación del cálculo con la fórmula Euler-Fourier. Y si podemos calcular la función dada de las series de Fourier, entonces allí acabamos la clase ya que este cálculo constituye el propósito principal de la lección. Después enseñamos la convergencia de las series de Fourier. La convergencia es mas difícil para los estudiantes ya que no la comprenden; por esto, su progreso en matemáticas se estanca. Pero ahora, con la nueva tecnología, ellos pueden ver la forma de las funciones dadas y mostrar interés en las representaciones de las series de Fourier.

Calculamos las series Fourier de la función

$$y = \begin{cases} -1 \text{ if } x \in [-\pi, 0] \\ 1 \text{ if } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Los estudiantes pueden calcular las series Fourier, pero no saben lo que significa. La expresión de las series de Fourier es

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}x + \frac{\operatorname{sen}3x}{3} + \frac{\operatorname{sen}5x}{5} + \ldots\right).$$

Usamos la calculadora gráfica para dibujar el gráfico de esta función de las series de Fourier.

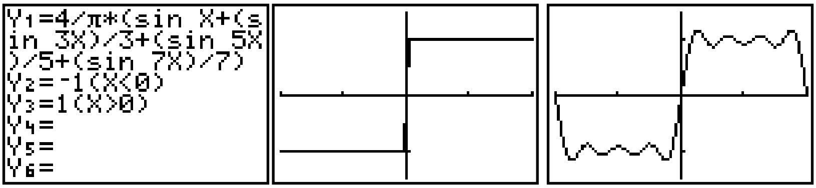


Figura 3. Gráfico de la función y las series de Fourier correspondientes

Aprender a resolver problemas es explorar: máximos y mínimos de funciones

La calculadora gráfica permite a los estudiantes explorar, ver los objetos matemáticos, y por lo tanto, disfrutar la clase de matemáticas. La tecnología faculta a los estudiantes para realizar matemáticas. Mostramos el ejemplo de encontrar el lugar geométrico del máximo o mínimo de las funciones. En este ejemplo, nos sorprende la amplitud de los ejes ya que no solemos encontrar este tipo de problema en los libros.

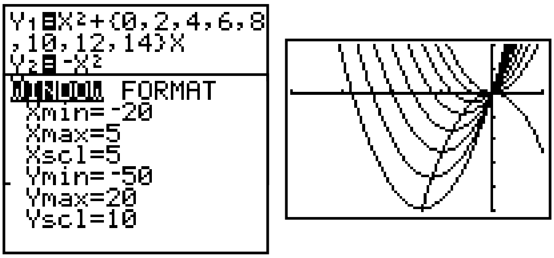


Figura 4. El lugar geométrico del vértice de la parábola $y = x^2 + ax$ *es* $y = -x^2$

Cálculo diferencial

Sin la calculadora, los estudiantes emplean la mayor parte de su tiempo dibujando los gráficos de las funciones. Con la calculadora, ellos pueden enfocarse en las características de la función. Por ejemplo, cuando vemos el gráfico de $y = x^3 - 3x$, podemos encontrar el punto especial, la inter-

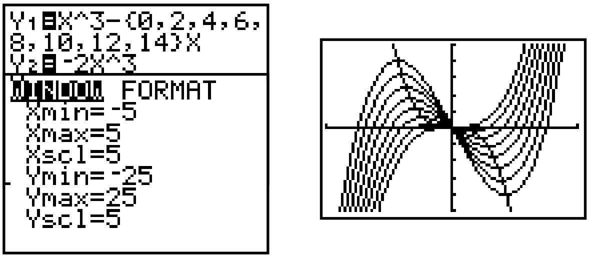


Figura 5. El lugar geométrico del máximo o mínimo de $y = x^3 - ax\ (a \geq 0)$ *es* $y = -2x^3$

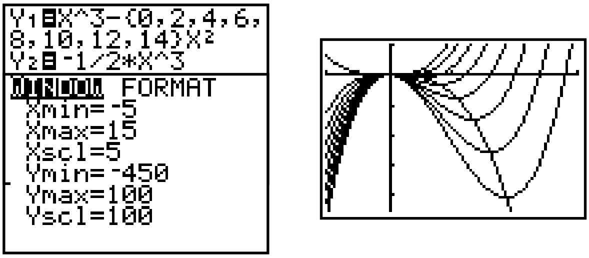


Figura 6. El lugar geométrico del mínimo de $y = x^3 - ax\ (a \geq 0)$ *es* $y = -0.5x^3$

sección con el eje x y el eje y y los puntos extremos. Y queremos calcular estos puntos. En este ejemplo, la línea horizontal está dibujada cerca del

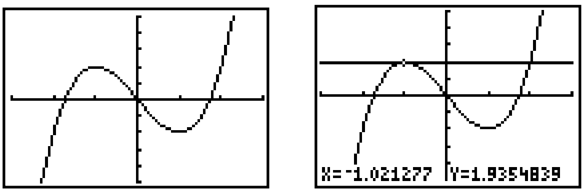


Figura 7. Gráfico de $y = x^3 - 3x$

punto máximo (-1,2). Este no es exacto pero su valor es muy cercano. Podemos encontrar con facilidad el punto por medio del cálculo diferencial. Es muy difícil encontrar el punto de inflexión (0,0). La visualización de este gráfico nos sugiere la existencia del punto.

VISUALIZACIÓN Y EXPLORACIÓN: COMPRENDER Y DISFRUTAR LAS MATEMÁTICAS

Realizamos estas clases de matemáticas con la ayuda de las calculadoras gráficas. La visualización refuerza la comprensión de los conceptos abstractos. Antes de la calculadora, no podíamos ver los teoremas matemáticos. Los estudiantes estaban convencidos de que no podían comprender estos teoremas y tomaban un papel pasivo y conservador ante el aprendizaje; además, eran incapaces de abordar problemas nuevos. Pero ahora tenemos alguna diversión en las clases con calculadoras. Las nuevas calculadoras gráficas, TI-82 y TI-92, son máquinas apropiadas para el aprendizaje de las matemáticas que estamos usando en clase diariamente.

Shin Watanabe
Tokai University
3-20-1 Orito Shimizu 424 JAPAN
watanabe@scc.u-tokai.ac.jp