

EL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO EN LOS PRIMEROS NIVELES: UNA INVESTIGACIÓN EN CURSO¹

María Asunción Bosch, Encarnación Castro e Isidoro Segovia

Este artículo muestra los resultados parciales de un estudio empírico sobre el desarrollo de pensamiento multiplicativo en los primeros niveles escolares. Concretamente, se han realizado entrevistas a niños de tercer curso de segundo ciclo de Educación Infantil (cinco años) en las que se han planteado, mediante situaciones manipulables, varios problemas de división que no podían ser resueltos mediante reparto, así como algunas preguntas sobre pensamiento relacional (de tipo proporcional).

Términos clave: Pensamiento multiplicativo; Pensamiento relacional; Educación Infantil.

This paper shows some partial results of an empirical study on the development of multiplicative thinking in the first school levels. In particular, we posed manipulative situations to children of third course of second cycle of Kindergarten (five years). These situations are constituted by several division problems that could not be solved by sharing, as well as some questions on (proportional) relational thinking.

Keywords: Multiplicative thinking; Relational thinking; Kindergarten.

El pensamiento matemático de los niños es más amplio de lo que tradicionalmente se ha pensado (Warfield, 2001). Concretamente, el pensamiento multiplicativo aparece de forma temprana, aunque se desarrolla lentamente (Clark y Kamii, 1996). Numerosas investigaciones han comprobado que los niños pueden llegar a resolver problemas matemáticos, entre ellos los verbales, sin una instrucción directa sobre cómo resolverlos (Castro, 1995). Numerosos estudios han mostrado que los estudiantes pueden resolver una variedad de problemas multiplicativos mucho antes de la instrucción sobre la multiplicación y la división (Mulligan y

¹ Investigación subvencionada por el proyecto “Representaciones y Resolución de Problemas en Educación Matemática”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, cuyo director es el Dr. Enrique Castro de la Universidad de Granada.

Mitchelmore, 1997). Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) hallaron que incluso los estudiantes de Educación Infantil podían aprender a resolver problemas multiplicativos.

Además, existen líneas de investigación y actuación en Didáctica de la Matemática que priman el aspecto ordinal del número natural sobre su aspecto cardinal: por ejemplo, cuando se analiza la fenomenología de Freudenthal y se aboga por el número para contar (Fernández, 2001). En este contexto, sumar es seguir contando, restar es descontar o contar hacia atrás, multiplicar es contar a saltos, y dividir es descontar a saltos (Freudenthal, 1983). Desde esta aproximación, se plantean las tareas motivo de esta investigación.

ANTECEDENTES

En la revisión teórica inicial, en Educación Infantil, tuvimos noticia de la realización de investigaciones sobre problemas de división de tipo reparto (*sharing*), en los que se da un número de objetos que es posible separar uno a uno, como en los trabajos de Davis y colaboradores, expuestos en Davis y Hunting (1990), Davis y Pepper (1992) o Davis y Pitketly (1990), entre otros. En ellos, se ofrecía un conjunto de unidades discretas, generalmente galletas, y se proponía un reparto de las mismas entre una serie de comensales o una modificación de un reparto anterior al cambiar alguna de las condiciones iniciales (número de galletas o de comensales). En todas las actividades propuestas se podían separar uno a uno los objetos motivo del reparto.

Sin embargo, nuestro interés radicaba en obligar a considerar los grupos de objetos indisolublemente, trabajando así con la idea de unidades múltiples y de partición (*partitioning*). Sobre este tipo de problemas sí se han realizado investigaciones en los niveles de Educación Primaria, como puede verse en Charles y Nason (2000) o Lamon (1996), enfocados hacia el desarrollo del pensamiento proporcional y hacia el desarrollo del concepto de fracción, respectivamente. Pero creímos que el tipo de experiencias que se proponen en estos estudios no podrían ser afrontadas de manera comprensible por niños de Educación Infantil.

Por esas razones, decidimos indagar en la capacidad de los niños de Educación Infantil para resolver problemas de división en los que no sea posible realizar un reparto, a través de una situación manipulable y motivadora original, siguiendo la afirmación de Olive (2001) de que los niños piensan matemáticamente como los adultos pero que las estructuras y operaciones tienen que ser construidas en actividades propias de niños.

OBJETIVOS

Hasta el momento, esta investigación ha tratado de abordar, entre otras, las siguientes cuestiones:

- ◆ Observar si los alumnos de Educación Infantil son capaces de resolver problemas de división en los que no se pueda realizar un reparto, así como el tipo de estrategias que utilizan en la resolución de dichos problemas.
- ◆ Analizar cómo se enfrentan estos alumnos a cuestiones sobre pensamiento relacional² (de tipo proporcional) y qué tipos de argumentos utilizan.
- ◆ Observar las preferencias sobre los distintos tipos de representaciones por parte de los niños de Educación Infantil.
- ◆ Analizar el nivel de manejo y comprensión que muestran estos niños sobre las unidades múltiples, a partir del conocimiento de la secuencia numérica.

Como esta investigación se enmarca en un proyecto de investigación más amplio, focalizado en la resolución de problemas y las representaciones, compartimos con dicho proyecto objetivos generales como los siguientes:

- ◆ Profundizar en el papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas aritméticos.
- ◆ Analizar qué preferencia tienen los estudiantes por uno u otro tipo de representación y por qué las prefieren.
- ◆ Caracterizar conceptualmente las diversas clases y niveles de competencia de los alumnos en resolución de problemas.
- ◆ Observar cómo evolucionan las representaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas.

COLECTIVO OBJETO DEL ESTUDIO

Los alumnos objeto de nuestra investigación pertenecen al tercer curso de segundo ciclo de Educación Infantil (cinco años). En total han participado 32 niños en la última fase de la investigación, de la que obtenemos los principales resultados. Inicialmente, incorporamos también niños de cuatro años pero decidimos no incluirlos en esta fase de la investigación después de observar que no comprendían lo que se esperaba de ellos y que, en muchos casos, ni siquiera conseguían considerar las unidades múltiples.

RECOGIDA DE DATOS: LA ENTREVISTA

El método de recogida de información ha estado basado en una entrevista individual, que fue filmada en vídeo. Cada uno de los niños que ha participado en nuestra investigación realizó las tareas que se le plantearon sobre situaciones manipulables de división de tipo partitivo y cuotitivo, siguiendo las directrices de la investigadora. Siempre que los responsables del centro lo consideraron conve-

² Consultar Molina, Castro y Ambrose (2006) para obtener una definición general del término pensamiento relacional.

niente, se les solicitó a los padres consentimiento expreso para que autorizaran la participación de sus hijos en la investigación y su filmación mientras eran entrevistados.

En cuanto al método utilizado, Fernández (2001) comprobó recientemente que los estudios empíricos con niños de tres, cuatro y cinco años, en España, eran viables. Además, numerosos estudios utilizan la entrevista individual como una metodología válida con niños de estas edades (Carpenter et al, 1993; Davis y Hunting, 1990; Davis y Pepper, 1992; Fernández, 2001; Kouba, 1989; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Russac, 1983). Aunque es claro que esto facilita y simplifica los procesos de recogida y análisis de datos, también hay estudios con niños de estas edades, como el de Davis y Pikethly (1990), que indican que se ofrecen muchas más respuestas verbales en las entrevistas grupales que en las entrevistas individuales, aunque puede aparecer una contaminación de las respuestas individuales en las entrevistas colectivas. En nuestro caso, exploramos ambos tipos de entrevista y consideramos que la contaminación superaba las mejoras que pudiera ofrecer el carácter grupal y optamos por la entrevista individual.

ESTUDIOS PILOTO

Antes de realizar el protocolo de las entrevistas que nos serviría para la recogida de datos, se realizaron estudios piloto durante el curso 2003/04. En estos estudios, la situación para la realización de las tareas se planteaba sobre una banda de psicomotricidad azul a modo de cauce de un río. Sobre la banda estaban dispuestas 12 porciones de goma espuma equidistantes, a modo de piedras, que permitían a un conejo de goma, ayudado por el niño, avanzar sobre ellas para llevar un mensaje de uno a otro lado del río. El niño, entre otras cosas, debía determinar el número de saltos necesarios para cruzar el río, según el número de piedras de cada salto.

Decidimos utilizar 12 objetos porque 12 es un número relativamente bajo, pero con muchos divisores y, por lo tanto, “da mucho juego”. Además, es suficientemente grande como para que los niños tengan que idear una metodología (Davis y Hunting, 1990).

En estos estudios fueron entrevistados 50 alumnos de cinco años pertenecientes a tres centros de la provincia de Almería. En el primer centro se estudió la viabilidad del proyecto y en el segundo se perfeccionó el protocolo de entrevista y se adecuó el material a las necesidades motrices y de comprensión observadas en los niños. El estudio aconsejó que se realizaran entrevistas individuales “a puerta cerrada” para evitar distorsiones, usando material con el que los niños pudiesen interactuar.

Los primeros contactos mostraron la viabilidad del proyecto así como la necesidad de variar algunos parámetros de tipo lingüístico y manipulativo. Observamos, por ejemplo, que al situarse el conejo sobre las piedras (tratando de imitar

la idea continua de la recta), surgían numerosos problemas de comprensión asociados con el hecho de contar o no la piedra sobre la que estaba situado el conejo a la hora de seguir avanzando.

Así pues, decidimos trabajar sobre la idea de cantidad discreta para evitar la confusión entre las unidades ya sorteadas y las restantes. La nueva situación estaba constituida por un camino en el que había 12 piedras y una rana que debía recorrerlo, saltando las piedras, hasta llegar de un lado a otro del río, porque su madre estaba esperándola para darle la merienda.

De este modo, durante el primer trimestre del curso 2004/05, se realizó un estudio de la viabilidad de las nuevas tareas diseñadas, donde se sustituyó el conejo de peluche por una rana de goma y se realizaron exploraciones con niños del CEIP José Díaz de Almería. En el segundo trimestre del mismo curso, se llevó a cabo la “puesta a punto” de la Tarea de la Rana Saltarina y se concretó el protocolo de la entrevista. En esta fase contamos con el CEIP El Indalo, también de Almería.

PROTOCOLO DE ENTREVISTA

Colocamos el camino con las 12 piedras equidistantes sobre una mesa y nos situamos alrededor de la mesa, entrevistador y entrevistado, uno frente al otro. El niño entrevistado ya tenía en su poder la rana “hija”, con la que se había familiarizado en el trayecto del aula al lugar de la filmación. La entrevista, que permite a los niños una mayor manipulación, constaba de tres partes.

La primera parte servía como toma de contacto y para observar las primeras habilidades de cómputo y estrategias de subitización³ y conteo del niño. Así, en primer lugar, le preguntamos al niño sobre cómo se mueven las ranas; a continuación, le pedimos que diera un determinado número de saltos (fuera del camino). Seguidamente le explicamos la situación a la que se refiere la actividad (una rana que ha de llegar al final del camino donde le espera su mamá para darle la merienda) y le interpelamos por el número total de piedras del camino. Por último, le mostramos cómo podría avanzar la rana de una en una, de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de seis en seis, y después le pedimos que lo hiciera por sí mismo. Recalamos el hecho de que los saltos tienen que ser todos iguales (una vez que iniciamos el camino).

La segunda parte de la entrevista nos sirvió para introducir las tareas e insistir en el número total de piedras. Le preguntamos al niño: “Si la rana va de una en una, ¿cuántos saltos necesitará dar para recorrer todo el camino?” También observamos aquí si el niño necesitaba contar de nuevo o razonaba respecto al número de piedras totales, ya contadas.

³ El término subitización refiere a la percepción del tamaño de una cantidad “de una ojeada”, lo que conduce a que el número aparezca en nuestra mente de forma instantánea. Su denominación proviene de la palabra latina “subitus” (súbito) (Castro y Castro, 2001).

En la tercera parte de la entrevista se planteaban los problemas motivo principal de la investigación. Planteamos tres tipos de tareas:

- ◆ Tareas de tipo 1: “Si la rana va de n en n piedras, ¿cuántos saltos tendrá que dar para recorrer todo el camino?”.
- ◆ Tareas de tipo 2: “Si en lugar de ir de n en n piedras, la rana va saltando de m en m piedras, ¿dará más saltos o menos saltos que antes para llegar al final?”.
- ◆ Tareas de tipo 3: “Para hacer el camino en n saltos (iguales), ¿cuántas piedras ha de saltar la rana a la vez?”.

Como puede observarse, las tareas de tipo 1 son aquéllas en las que preguntamos por el multiplicador, esto es, son de tipo cuotitivo. Son las que se plantean en primer lugar y van alternándose con las tareas de tipo 2. Si los alumnos no emprendían la tarea por iniciativa propia, les ofrecíamos una ayuda o pista. En este caso les pedíamos que fueran de n en n y que nos dijeran cuántos saltos habían dado. Una vez resuelto el problema les pedimos confirmación acerca de lo realizado, preguntándoles de nuevo por el número de saltos que había dado la ranita y por el número de piedras en cada salto.

Las tareas de tipo 2 aparecen, como hemos dicho anteriormente, alternadas con la de tipo 1, como una predicción del niño de lo que puede ocurrir en la siguiente tarea que se plantee de tipo 1 (con un número distinto de piedras en cada salto). En ellas tratamos de observar las posibilidades del pensamiento relacional a estas edades. Cuando los niños no podían argumentar su respuesta les cuestionamos de qué modo llegaría la rana antes, de n en n o de m en m .

A continuación, se plantearon las tareas de tipo 3, que son aquéllas en las que se pregunta por el multiplicando, esto es, tareas de tipo partitivo. Si el alumno no emprendía las mismas, les interpelamos sobre “dónde creen ellos que estará la n -ésima parte del camino”. También, en este caso, les pedimos confirmación de la respuesta ofrecida.

En los tres tipos de tareas, n va tomando, progresivamente, los valores 2, 3, 4 y 6, interrumpiendo el proceso cuando se observa que el niño no puede o no quiere afrontar la situación y que esto le causa malestar. El esquema sería el siguiente: tarea de tipo 1 con $n = 2$; tarea tipo 2 comparando $n = 2$ con $n = 3$; tarea de tipo 1 con $n = 3$; tarea de tipo 2... (mientras el niño participa y se implica). A continuación, planteamos las tareas de tipo 3, con $n = 2, 3, 4$ y 6 (hasta donde se puede).

Finalmente, si el alumno había superado correctamente la mayoría de las tareas planteadas se le pedía que imaginara un camino con seis piedras y se le planteaban tareas sencillas de los tipos anteriores, pero sin permitirle manipular la situación.

Fuimos muy meticulosos con el lenguaje empleado, tratando de adaptarnos a la experiencia cultural de los niños para maximizar su comprensión del problema, probando con numerosos términos y expresiones, matemáticas o coloquiales,

que permitieran al niño desenvolverse fácilmente en la situación al tiempo que mantuvieran el rigor matemático exigido.

ANÁLISIS DE DATOS

Como indicamos, las entrevistas fueron grabadas en vídeo y posteriormente transcritas para su análisis. Las interpretaciones de las acciones y expresiones verbales de los niños fueron discutidas y consensuadas por los tres miembros del equipo de trabajo de esta investigación.

El análisis de las producciones de los sujetos contempla dos momentos/fases que van complementándose, al usar las soluciones obtenidas en una para el perfeccionamiento de la otra. Por una parte, tenemos la construcción de un instrumento de análisis, que en nuestro caso consiste en una parrilla a partir de la cual podemos categorizar las respuestas de los alumnos a las distintas cuestiones planteadas en la entrevista. Por otra parte, la parrilla nos permitirá, en el futuro, establecer relaciones entre las distintas categorías de respuestas, apoyándonos en programas de análisis cualitativo de datos como el Nudist Vivo o el Atlas.

Actualmente, la parrilla de análisis (en fase de mejora), tiene el diseño que se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1
Parrilla de análisis de respuestas con categorización

Pregunta	Estrategia / Razonamiento
Saltos libres	Salta hacia arriba (solamente) o salta hacia delante Cuenta en voz alta o no cuenta en voz alta
Conteo todas	Señala o no señala Cuenta en voz alta o no cuenta en voz alta Error: no conoce la secuencia numérica hasta el 12
Unidades múltiples: de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, o de 6 en 6	Subitiza o cuenta Si cuenta: Señala o no señala; cuenta en voz alta o no cuenta en voz alta Vuelve la cabeza para confirmar o no confirma
Tarea 1: de 1 en 1	Recuerda (el conteo inicial) o vuelve a contar Razona (tantos saltos como piedras) en voz alta o no razona
Tarea 1: de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, o de 6 en 6	Agrupar las piedras señalándolas Lleva el doble conteo: con o sin hacer salto de la rana Pone señales en el camino o no pone señales Estima

Tabla 1
Parrilla de análisis de respuestas con categorización

Tarea 2: ¿2 o 3?, ¿3 o 4?, ¿4 o 6? ¿o?	Sabe confirmar la respuesta Errores: Confunde número de saltos por piedras por salto, va de n en n pero no responde a la pregunta El alumno dice: Llega más pronto / antes / va más deprisa Salta más trozo / más piedras Es más fácil Más es más / menos es menos Aquí va para adelante (en el mayor) y aquí para atrás No sé por qué
Tarea 3: en 1, 2, 3, 4 o 6 saltos	Estima: en cálculo (parte el número total de piedras) o en medida (parte el camino) Hace uso del método de ensayo-error: sí o no Errores: da n saltos no iguales, va de n en n piedras
Tareas 1, 2 y 3: tarea con seis piedras, imaginada	Estima: en cálculo (parte el número total de piedras) o en medida (parte el camino) Hace uso del método de ensayo-error: sí o no Errores: da n saltos no iguales, va de n en n piedras

RESULTADOS

Describimos a continuación algunos de los resultados obtenidos en este trabajo, entre ellos los procedentes del análisis de las producciones de los sujetos.

El primer resultado que debemos indicar es la construcción de una situación, la de la rana, que permite explorar el pensamiento multiplicativo de los niños de tercer curso de Educación Infantil (cinco años).

Otro resultado es el protocolo de interacción investigador-alumno que se ha perfilado después de una experimentación previa, así como la parrilla de análisis, que permite categorizar las respuesta de los sujetos e incluso establecer relaciones entre categorías.

Respecto al uso de unidades múltiples, observamos que prácticamente todos los niños subitizaban a la hora de saltar de dos en dos y de tres en tres piedras; los grupos de cuatro piedras generalmente son contados aunque algunas veces son subitizados; y finalmente todos los niños cuentan en el caso de agrupar seis piedras.

En relación a las tareas de tipo 1, en las que se pregunta por el multiplicando (el número de saltos necesarios), más de dos tercios de los alumnos que partici-

paron en la entrevista fueron capaces de resolver, con o sin ayuda, alguna de dichas tareas. Hay que destacar que con frecuencia la acción era correcta pero no sabían responder a la pregunta planteada. En estos casos, tuvimos dificultades para validar las respuestas.

En cuanto a las tareas de tipo 2, sobre pensamiento relacional, hemos observado gran disparidad de respuestas. Muchos alumnos no podían razonar directamente si eran necesarios más o menos saltos, sino que hablaban en términos de que la rana “llegaría antes” cuanto mayores fueran los saltos. Los que eran capaces de razonar así, mantenían este argumento aunque se lo preguntáramos en momentos distintos o cambiando los números implicados. Luego parecían estar muy seguros de sus respuestas.

En lo que se refiere a las tareas del tipo 3, esto es, aquéllas en las que se pregunta por el multiplicador (el número de piedras que ha de saltar la rana “a la vez” para llegar al otro lado en n saltos iguales), éstas siguen mostrándose significativamente más complicadas que las del tipo 1, tal y como se observaba en los estudios piloto, ya que menos de la cuarta parte de los niños entrevistados resolvieron alguna tarea de este tipo. Además, siguen primando las estrategias de estimación, tanto en cálculo (se paraban a pensar el número) como en medida (trataban de dividir físicamente el camino), y el proceso de ensayo-error para confirmar las estimaciones.

En relación con las representaciones, hemos podido observar que los alumnos de estas edades no han deseado o no han visto necesario ayudarse de representaciones gráficas, ya que rehusaban utilizar el lápiz y papel que les ofrecíamos, tal vez debido a que la propia situación era manipulable. Y en cuanto a las porciones de plastilina de que disponían para señalar intervalos, muchos de los sujetos al principio no las tenían en cuenta pero, cuando se les indicaban las posibilidades de éstas para señalar en el camino, sí lo hacían con gusto y algunos con gran destreza.

VÍAS DE CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO

En el momento actual del estudio nos planteamos numerosas cuestiones tanto acerca de la profundización sobre los datos obtenidos como sobre las variaciones a realizar para los estudios definitivos. Por ejemplo, nos preguntamos sobre el instrumento de análisis de datos, cuándo cerrar la categorización o cómo validar las respuestas para inferir conclusiones a partir de las relaciones entre las mismas; o si sería conveniente ampliar el colectivo objeto del estudio o tratar de establecer un modelo evolutivo.

En este sentido, entendemos que se abren ante nosotros diversas opciones entre las que debemos elegir. Así podríamos continuar de distintos modos, entre ellos:

- ◆ Ahondando en la capacidad para resolver las tareas planteadas así como las estrategias usadas en las mismas por los niños de cinco años.
- ◆ Modificando hacia un enfoque de tipo evolutivo, trabajando también sistemáticamente con niños de cuatro y de seis años, al menos.
- ◆ Profundizando acerca de los tipos de representaciones preferidas por los alumnos a la hora de resolver tareas de este tipo.
- ◆ Añadiendo tareas de reparto y tratando de indagar acerca de las diferencias entre los modos de resolución de éstas y de las tareas aquí planteadas.
- ◆ Intentando relacionar los hallazgos del estudio con la introducción del concepto de fracción a edades tempranas.
- ◆ Focalizando nuestra atención en los errores y dificultades observados, tratando de inferir métodos de enseñanza apropiados para el aprendizaje.
- ◆ Incluyendo tareas paralelas para medir otras variables, como la capacidad de estimación de los niños, que puedan estar relacionadas con las respuestas ofrecidas a la tarea de la rana.

Agradecimientos

Tenemos que destacar que, en todos los casos, los centros nos han abierto sus puertas, así como los profesores de los niños entrevistados. A continuación, se hace una mención expresa y merecida a los mismos.

Curso 2003/04 (tarea del conejo)

- ◆ CEIP Gabriela Mistral (El Ejido, Almería). Tutora: D^a Dolores Suárez.
- ◆ CEIP Santiago Ramón y Cajal (El Ejido, Almería). Tutor: D. Jorge Amate.
- ◆ CEIP San Indalecio (La Cañada, Almería). Jefa de Estudios D^a Isabel Muñoz. Tutoras: D^a Carmen Molina, D^a Carolina Miralles y D^a María Dolores Herrera.

Curso 2004/05 (tarea de la rana)

- ◆ CEIP José Díaz Díaz (Pechina, Almería). Director: D. José Ramón Ramos. Profesor de música: D. Joaquín Márquez. Tutoras: D^a Dolores Sierra y D^a M^a José Miralles.
- ◆ CEIP El Indalo (Almería). Director: D. Antonio Blanco. Tutoras: D^a Carmen Moreno y D^a Inmaculada Martínez.

Y, ante todo, gracias a los más de 120 niños y niñas que han colaborado con nosotros hasta el momento. Ellos son los verdaderos protagonistas de esta investigación.

REFERENCIAS

- Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 428-441.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
- Castro, E. y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 123-149). Madrid: Editorial Síntesis.
- Charles, K. y Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 191-221.
- Clark, F. y Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51.
- Davis, G. y Hunting, R. P. (1990). Spontaneous partitioning: Pre-schoolers and discrete items. *Educational Studies in Mathematics*, 21(4), 367-374.
- Davis, G. y Pepper, K. (1992). Mathematical problem solving by preschool children. *Educational Studies in Mathematics*, 23(4), 397-415.
- Davis, G. y Pitkethly, A. (1990). Cognitive aspects of sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 145-153.
- Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años. Tesis doctoral*. Málaga: Universidad de Málaga.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 147-158.
- Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: its role in children partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170-193.
- Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 33-46.
- Mulligan, J. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330.

- Olive, J. (2001). Children's numbers sequences: an explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4-9.
- Russac, R. J. (1983). Early discrimination among small object collections. *Journal of Experimental Child Psychology*, 36(1), 124-138.
- Warfield, J. (2001). Teaching kindergarten to solve word problems. *Early Childhood Education Journal*, 28(3), 127-138.

Este documento se publicó originalmente como Bosch, M. A., Castro, E. y Segovia, I. (2005). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores y M. Camacho (Eds.), *Investigación en educación matemática. IX Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones Universidad de Cantabria.

María Asunción Bosch
Universidad de Almería
mabosch@ual.es

Encarnación Castro
Universidad de Granada
encastro@ugr.es

Isidoro Segovia
Universidad de Granada
isegovia@ugr.es