COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR DE LA MULTIPLICACIÓN: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN ESCOLARES DE 10 A 14 AÑOS

Jesús Gallardo Romero[1]
Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga

RESUMEN. *Presentamos una síntesis de los avances producidos hasta el momento en el trabajo de investigación que estamos realizando sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación. La comprensión es abordada desde un punto de vista indirecto, fenomenológico y operativo, evitando el análisis de la naturaleza, la estructura o el funcionamiento interno de la misma. Nuestra preocupación se centra en diagnosticar y valorar la comprensión que manifiestan los sujetos del algoritmo tradicional del producto, a través del análisis de las acciones que realizan cuando se ven involucrados en las distintas situaciones que le dan sentido. Hemos identificado un tipo de tareas matemáticas, a las que denominamos "multiplicaciones con cifras desconocidas", con una gran potencialidad como instrumento para observar la comprensión que muestran los alumnos del funcionamiento del algoritmo, según se pone de manifiesto en un estudio exploratorio llevado a cabo con una muestra de alumnos de 10 a 14 años al resolver tareas de este tipo.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han venido elaborando diversas propuestas de actuación en el aula para desarrollar una instrucción más efectiva y mejorar la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos numéricos (Stanic y Mckillip, 1989; Schliemann, Dos Santos y Da Costa, 1993; Philipp, 1996; Kamii y Dominick, 1997; Curcio y Schwartz, 1998). Dichas propuestas se ven reflejadas en las posibilidades que plantea Gómez (1999) al abordar cuál puede ser la evolución del cálculo aritmético en la enseñanza obligatoria en un futuro próximo si se adopta como objetivo prioritario garantizar una mejor comprensión de los estudiantes. Sin embargo, hemos de destacar que hasta ahora, a pesar de los esfuerzos realizados, son escasas las mejoras que se han obtenido para ayudar a los alumnos a que desarrollen una buena comprensión en aritmética y en matemáticas en general (Burns, 1994; Lindquist, 1997). Esto puede ser debido, como pone de manifiesto Resnick (1992), a la complejidad de la tarea instruccional, sobre la que según el autor sólo se pueden ofrecer prescripciones e ideas de carácter general y no absoluto. Pero también pueden intervenir, entre otros factores, las limitaciones del conocimiento disponible sobre la comprensión en matemáticas y, consecuentemente, la disparidad de posicionamientos prácticos ante el diseño de una enseñanza orientada a favorecer la comprensión.

Por otra parte, desde hace relativamente poco tiempo, se vienen realizando intentos en educación matemática para clarificar el fenómeno de la comprensión mediante la formulación de teorías sobre su naturaleza y funcionamiento (Hiebert y Carpenter, 1992;

[1] El presente trabajo se ha realizado bajo la dirección de **D. José Luis González Marí** y **D. Alfonso Ortiz Comas**, profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.

Sierpinska, 1994; Duffin y Simpson, 1997; Romero, 2000) y la construcción de modelos que tratan de caracterizar su evolución ante cualquier tópico matemático (Pirie y Kieren, 1994). Suelen ser aproximaciones restringidas a lo meramente cognitivo sin tener en cuenta otros factores influyentes como la realidad sociocultural en la que está inmersa el sujeto o la naturaleza particular del contenido matemático a comprender. A pesar de su carácter normativo estas aproximaciones teóricas transcurren como tales en el ámbito de la suposición, con planteamientos dispares y explicaciones "a priori" de difícil confirmación empírica con las que se pretende dar respuestas a cuestiones como *¿qué es comprender?* o *¿cómo se produce la comprensión?*

Dada la complejidad que encierra el fenómeno de la comprensión y el estado actual en el que se encuentran los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado afrontar la cuestión alternativa e indirecta de determinar **cuándo** podemos decir que un sujeto manifiesta una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto, extendiendo y matizando las ideas apuntadas por Duffin y Simpson (1997) sobre las manifestaciones externas de la comprensión. El estudio de este problema aportaría datos objetivos sobre comportamientos observables que se pueden analizar, categorizar y comparar en un proceso de acercamiento empírico paulatino a algunos aspectos de la naturaleza y el funcionamiento interno de la comprensión. Esta aproximación es la que hemos adoptado en el trabajo de investigación, en el que centramos la atención sobre la siguiente pregunta: ¿cuándo se puede decir que un sujeto comprende el algoritmo estándar de la multiplicación, en qué medida lo comprende y cómo evoluciona esta comprensión durante el ciclo escolar?

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La línea-marco general en la que se sitúa el problema de investigación se articula en torno a la comprensión del conocimiento matemático y a los medios para diagnosticar y evaluar el razonamiento y la comprensión así como su evolución por niveles y edades (González y Ortiz, 2000). Al igual que otros autores (Pirie y Kieren, 1994; Godino, 2000), reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento matemático. Así pues, sólo se puede constatar la comprensión de un conocimiento cuando se produzca su utilización efectiva por parte del sujeto. A partir de este supuesto, caracterizamos la comprensión de un conocimiento matemático por sus efectos, en términos de manifestaciones externas observables. En este sentido, aceptamos que *un sujeto comprende un conocimiento matemático, o un aspecto de un conocimiento matemático, cuando lo hace operativo, es decir, cuando llega a formar parte del bagaje de conocimientos potencialmente utilizables o listos para ser empleados; de otra manera, se puede decir que un sujeto comprende un conocimiento cuando lo incorpora a su repertorio de útiles y herramientas aplicables* (González, 2000). En el caso del algoritmo estándar de la multiplicación diremos que *un sujeto comprende dicho algoritmo si es capaz de "emplearlo" espontáneamente y con éxito en todas aquellas situaciones que lo requieran.*

La aproximación indirecta que hemos adoptado remite a los fenómenos y tareas que dan sentido al conocimiento que estamos tratando, es decir, para averiguar el alcance de la comprensión hemos de observar el comportamiento del sujeto ante situaciones que requieran de, o que den sentido a, la aplicación concreta del conocimiento. Pero, para ello será necesario analizar previamente cuáles son estas situaciones.

Situaciones que dan sentido al algoritmo: un esquema clasificatorio

De un primer análisis de las situaciones en las que aparece o tiene sentido el algoritmo estándar del producto elaboramos una clasificación con cuatro categorías básicas de utilización que proporcionan distintos indicadores de la comprensión del algoritmo:

Categoría 1 (Identificativa): En esta categoría de referencia el algoritmo de la multiplicación no se utiliza de ningún modo pero es reconocido por el sujeto como un método de cálculo particular distinto al de la suma o la resta.

Categoría 2 (Sintáctica): El algoritmo se utiliza de forma mecánica como un instrumento para resolver:

(a) Ejercicios donde se presentan números de diferente tamaño que hay que multiplicar. Son tareas con una amplia tradición escolar planteadas a los alumnos para que practiquen y mejoren su destreza en el manejo del algoritmo. Éste aparece descontextualizado, sin relación alguna con el concepto de multiplicación.

(b) Problemas aritméticos de enunciado verbal de estructura multiplicativa que tradicionalmente se plantean en la escuela y situaciones que tienen lugar en un contexto no escolar donde es necesario multiplicar para resolver un determinado problema (situaciones de mercado,...). En estos casos, el algoritmo estándar de la multiplicación compite con otros métodos alternativos de cálculo escrito o mental y con la calculadora.

Categoría 3 (Funcional): De usar el algoritmo clásico del producto como herramienta se pasa a razonar sobre su propio mecanismo en problemas donde se ponen en juego procedimientos heurísticos. En esta categoría incluimos la resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas, unas tareas singulares en las que hay que relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura del algoritmo.

Categoría 4 (Justificativa): Problemas de justificar regularidades y propiedades acerca del algoritmo tradicional de la multiplicación. El conocimiento de los principios en los que se fundamenta el algoritmo es requisito indispensable para poder abordar los problemas de esta categoría.

Para determinar la comprensión que tiene un individuo del algoritmo estándar del producto será necesario analizar cómo es utilizado en cada una de las situaciones señaladas. De este modo, obtendríamos una serie de indicadores con los que establecer el perfil y la evolución de la comprensión en los sujetos. El trabajo desarrollado hasta ahora se ha centrado en la categoría funcional del algoritmo. En concreto, hemos convenido realizar un análisis teórico sobre las multiplicaciones con cifras desconocidas y un estudio exploratorio con una muestra de alumnos para poner de manifiesto la potencialidad de estas tareas como indicador de la comprensión del algoritmo tradicional del producto. En los siguientes apartados exponemos de forma resumida estas dos fases de la investigación.

MULTIPLICACIONES CON CIFRAS DESCONOCIDAS

La expresión *multiplicación con cifras desconocidas* (MCCD) hace referencia a aquellas multiplicaciones resueltas con el algoritmo tradicional pero con algunas cifras ocultas que hay que localizar. En el proceso a seguir para su construcción, las cifras que interesa esconder se sustituyen por un símbolo (casi siempre suele ser un cuadrado, un punto o un asterisco) que será el mismo para todas ellas, independientemente de que sean iguales o no. Es decir, cifras diferentes no llevan asociadas símbolos distintos. Un ejemplo de actividad en la que hay que resolver una MCCD es el siguiente:

<< *Encontrar las cifras que completan la multiplicación*

$$\begin{array}{r} 2\,\square \\ \underline{x\,\square\,3} \\ 6\,\square \\ \underline{\square\,3} \\ \square\,\square\,3 \end{array}$$

>>

Resolver una MCCD es un problema de matemáticas

Las multiplicaciones con cifras desconocidas pueden catalogarse de verdaderos problemas matemáticos por contener características comunes a ellos. Para mostrar esto tomamos como referencia lo que Carrillo (1998) considera que debe entenderse por problema en el ámbito de las matemáticas, una vez que ha revisado otras definiciones de algunos autores y ha detectado en ellas coincidencias:

"El concepto de problema [matemático] *debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento"* (Carrillo, J., 1998, pág. 87)

Respecto a las multiplicaciones con cifras desconocidas, entendemos que no existe ningún procedimiento mecánico o algorítmico que permita resolverlas con certeza de manera inmediata. Por tanto, son tareas que entrañan dificultad. La resolución de una de ellas no garantiza la de las demás. El alumno interesado en obtener la solución de una MCCD tendrá que aplicar conocimientos matemáticos previamente adquiridos a lo largo de un proceso de resolución que debe ir creando paulatinamente y con pleno sentido para él. Todas estas argumentaciones posibilitan afirmar que las MCCD se ajustan a la definición anterior y en consecuencia podemos identificarlas como auténticos problemas de matemáticas.

Las multiplicaciones con cifras desconocidas son problemas *no verbales* con formato común pero muy diferentes unos de otros en cuanto al proceso requerido para su resolución. Se pueden clasificar de *aritméticos* por el contexto en el que se desarrollan ya que no es necesario recurrir al álgebra para resolverlos. Son problemas *de hallar* y no de demostrar, *de búsqueda* y no de aplicación (Puig, 1996). Además, *puros* por estar inmersos en un contexto matemático, *estructurados* por estar bien formulados y por tener que diseñar el resolutor el procedimiento de solución y *cerrados* por ser precisos en su planteamiento y en su solución, aunque admitan varias respuestas correctas (Carrillo, 1998).

Cognición y multiplicaciones con cifras desconocidas

Para garantizar la resolución con éxito de una MCCD es necesario que el resolutor manifieste competencia en tres dominios diferentes:

(a) Las MCCD son problemas que han sido diseñados tomando como base el algoritmo estándar de la multiplicación. Por tanto, es un requisito indispensable para poder abordar un problema de estas características tener cierta destreza en la utilización del algoritmo. Esto supone conocer los hechos numéricos básicos, controlar el mecanismo de "llevadas" y ser capaz de recorrer la secuencia algorítmica establecida en el sentido apropiado.

Interesa precisar que para resolver una MCCD el estudiante no necesita conocer la justificación del mecanismo del algoritmo, esto es, saber explicar hechos como la presentación de los cálculos en columnas o los desplazamientos hacia la izquierda de los productos parciales. En cambio, debe ser capaz de relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura del algoritmo, conocer las relaciones que existen entre las distintas partes que lo componen.

(b) Al ser las MCCD verdaderos problemas matemáticos, el alumno que pretenda resolver una de ellas tendrá que hacer uso de su capacidad heurística. Nos referimos a un trabajo basado en el planteamiento, comprobación y posterior aceptación o refutación de conjeturas (Gavilán y Barroso, 1996). En realidad, son unas tareas que transcurren en un contexto algorítmico y necesitan de procedimientos heurísticos para obtener la solución.

(c) Aunque las MCCD se pueden catalogar de problemas aritméticos, en algunas ocasiones el alumno se ve obligado a resolver mentalmente ecuaciones en el transcurso del proceso de resolución. Parece ser, por tanto, que manifestar competencia en este tipo de cálculos mentales, propios de una etapa pre-algebraica, es beneficioso a la hora de resolver MCCD.

Dos criterios para clasificar las MCCD de tamaño 2x1 y 2x2

Al ser las MCCD muy diferentes unas de otras nos hemos limitado a las de tamaño 2x1 y 2x2, que serán con las que trabajen los alumnos en la fase empírica del estudio. Para ellas proponemos una clasificación de acuerdo a dos criterios que surgen de las propias características de las multiplicaciones y que pueden influir a la hora de resolverlas. Son estos:

(a) Conocimiento de las cifras del multiplicando (M) y multiplicador (N). Existen cuatro posibilidades: M y N se conocen (multiplicación tradicional), N se conoce y M no, M se conoce y N no, M y N no se conocen.

(b) Influencia en la determinación de los huecos de M y N. Distinguimos dos tipos de influencia: simple, en la que solamente las unidades del resultado (R) o solamente las decenas (o centenas) de R influyen en la determinación de M y N, es decir, no afectan ambas a la vez; y doble, en la que tanto las unidades de R como las decenas (o centenas) de R influyen a la vez en la determinación de M y N. Veamos un ejemplo:

4 ❑ x 3 ❑❑❑	*Es una MCCD 2x1 con M desconocido, N conocido e Influencia Nula de R*
8 ❑ x 2 ❑7❑	*Es una MCCD 2x1 con M desconocido, N conocido e Influencia Simple de R*
4 ❑ x 5 ❑1 5	*Es una MCCD 2x1 con M desconocido, N conocido e Influencia Doble de R*

Para las multiplicaciones 2x2 ocurre algo similar, existiendo algunas en las que la determinación de M y N se complica en exceso si no se consideran las cifras que aparecen en la zona inferior del algoritmo. Conociendo las decenas del multiplicador diferenciamos cuatro casos:

1.- Influencia Nula.
2.- Influencia del resultado total de la multiplicación en la determinación del primer producto parcial (I_R).
3.- Influencia del resultado del segundo producto parcial sobre el primer producto parcial ($I_{R_{II}}$).
4.- Influencia del resultado total de la multiplicación sobre el primer producto parcial a través del resultado del segundo producto parcial ($I_{RR_{II}}$).

En el siguiente cuadro presentamos un ejemplo de cada caso:

❑ 5 x 1 3 ❑3 ❑ ❑5 5 8 ❑	❑ 2 x 1 8 ❑❑❑ ❑2 9 3 ❑	❑❑ x 1 9 ❑6 ❑ ❑2 9 8 ❑	❑❑ x 1 4 ❑1 ❑ ❑❑ 7 4 ❑
Influencia Nula	I_R	$I_{R_{II}}$	$I_{RR_{II}}$

UN ESTUDIO DESCRIPTIVO

El trabajo se completa con una parte empírica en la que hemos desarrollado un estudio descriptivo transversal (Bisquerra, 1989) de carácter exploratorio, propio de las primeras etapas en el desarrollo de una investigación. Con este estudio se pretende obtener evidencia empírica acerca de las diferencias en la comprensión que manifiestan los alumnos del funcionamiento y la estructura del algoritmo tradicional de la multiplicación, utilizando para ello las MCCD.

Instrumento de recogida de datos

Se ha diseñado un cuestionario formado por diecisiete multiplicaciones con cifras desconocidas para pasar a una muestra de alumnos en su ambiente natural de aula. Estas multiplicaciones las hemos obtenido al ir variando las modalidades que adoptan las variables *conocimiento de las cifras de M y N*, *tamaño de la multiplicación* e *influencia*, quedando fijadas el resto de posibles variables intervinientes: cifras y hechos numéricos que se utilizan, número de veces en que aparece la acción de llevar, cantidad que hay que llevarse y número de soluciones.

Las MCCD se agrupan en seis bloques que no aparecen destacados en la prueba:

- **Bloque 1**: lo componen dos multiplicaciones con cifras desconocidas (M1 y M2), una 2x1 y otra 2x2, donde el multiplicando y el multiplicador son conocidos. Se trata en realidad de dos multiplicaciones que se resuelven de forma tradicional y con ellas estamos evaluando si el alumno conoce el algoritmo clásico del producto, requisito indispensable para poder hacer el resto de la prueba.

- **Bloque 2**: está formado por tres multiplicaciones 2x1 (M3, M4 y M5) de influencia simple del resultado, mismo número de huecos y con la siguiente estructura:

$$\begin{array}{r} \square M_1 \\ \text{x } N \\ \hline \square R_2 \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} M_2 M_1 \\ \text{x } \square \\ \hline \square R_2 \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square M_1 \\ \text{x } \square \\ \hline R_3 R_2 \square \end{array}$$

En el primer producto N se conoce y M no (M3), en el segundo M se conoce y N no (M4), en el tercero M y N no se conocen (M5). Cualquier otro trío de multiplicaciones con las mismas características que el elegido lo consideramos para nuestros propósitos igual de válido, de manera que no tenemos en cuenta la posible influencia que pueda causar sobre la prueba el haber hecho esta elección y no otra.

- **Bloque 3**: compuesto por tres multiplicaciones 2x2 (M6, M7 y M8) creadas a partir de los productos 2x1 anteriores. Exactamente, cada multiplicación 2x2 tiene como primer producto parcial una de las multiplicaciones 2x1 que aparecen en el bloque 2 pero con distintas cifras y sólo se añade la dificultad propia de ser 2x2 en lugar de 2x1. Incluso hemos tomado la cifra 1 como decena del multiplicador para no crear más dificultades que las propias del procedimiento algorítmico. Así, M6 proviene de M3, M7 de M4 y M8 de M5.

- **Bloque 4**: a partir de la primera multiplicación 2x2 del bloque 3 (M6) se proponen tres nuevas multiplicaciones (M9, M10 y M11) con las mismas características que su predecesora, además de añadir una dificultad más. En concreto, la variable *influencia* adopta en este caso las modalidades I_R, $I_{R_{II}}$ e $I_{RR_{II}}$, provocando la aparición de las tres multiplicaciones que forman este bloque.

- **Bloques 5 y 6**: siguiendo el mismo proceso utilizado en la construcción del bloque 4 obtenemos seis nuevas multiplicaciones: tres de ellas (M12, M13 y M14) a partir de la segunda multiplicación 2x2 del bloque 3 (M7) y que da lugar al bloque 5, y otras tres (M15, M16 y M17, las últimas de la prueba) que forman el bloque 6 a partir de la tercera multiplicación 2x2 del bloque 3 (M8).

Las características de las MCCD del cuestionario se resumen en la figura 1:

Tamaño	**Influencia**	$\mathbf{M \cap N}$	$\mathbf{M^{-} \cap N}$	$\mathbf{M \cap N^{-}}$	$\mathbf{M^{-} \cap N^{-}}$
2x1	**Nula**	**M1**			
	Simple		**M3**	**M4**	**M5**
2x2	**Nula**	**M2**	**M6**	**M7**	**M8**
	$\mathbf{I_R}$		**M9**	**M12**	**M15**
	$\mathbf{I_{R_{II}}}$		**M10**	**M13**	**M16**
	$\mathbf{I_{RR_{II}}}$		**M11**	**M14**	**M17**

<u>NOTACIÓN</u>: $\mathbf{M \cap N}$: M y N se conocen. $\mathbf{M^{-} \cap N}$: N se conoce y M no.

$\mathbf{M \cap N^{-}}$: M se conoce y N no. $\mathbf{M^{-} \cap N^{-}}$: M y N no se conocen.

Figura 1.- Cuadro resumen de las características de las multiplicaciones que componen la prueba.

Muestra

La muestra elegida para la aplicación de la prueba está formada por un total de 84 alumnos con edades comprendidas entre 10 y 14 años y repartidos de la siguiente forma: 15 alumnos de 5º de Primaria, 16 alumnos de 6º de Primaria, 27 alumnos de 1º de ESO y 26 alumnos de 2º de ESO. Los alumnos de Primaria pertenecen al Colegio Público Veracruz de Antequera (Málaga) y los de Secundaria al Colegio Ntra. Sra. del Carmen (privado-concertado) de la misma localidad.

Por ser éste un primer estudio de carácter exploratorio no hemos prestado especial atención al método de muestreo. De hecho, la facilidad de acceso a los centros educativos ha sido el criterio que hemos utilizado para seleccionar la muestra. Somos conscientes de que este procedimiento no garantiza la representatividad de la muestra y de que todas las conclusiones que se obtengan deberán considerarse con las debidas precauciones.

Análisis de datos y discusión de resultados

En la figura 2 se puede observar el porcentaje de respuestas correctas que ha recibido cada multiplicación por curso. En un análisis detallado de estas líneas poligonales localizamos las siguientes regularidades y hechos destacables:

(a) Los cuatro cursos han obtenido en M1 y M2 un porcentaje de respuestas correctas muy elevado. Esto muestra que los alumnos saben multiplicar con el algoritmo clásico y, por tanto, están en el nivel mínimo necesario para poder realizar la prueba. Además, evidencia que han entendido la tarea que debían realizar por lo que consideramos que el formato y la presentación de la prueba han sido adecuados.

(b) Existen multiplicaciones con un porcentaje de acierto mayor que otras a pesar de estar ubicadas en la prueba en un lugar más avanzado. De este hecho podemos concluir entre otras cosas que la secuencia establecida de M1 a M17 no coincide con la que resulta de ordenar las multiplicaciones por dificultad según el porcentaje de respuestas correctas obtenido. Además, el orden de dificultad en las multiplicaciones no es el mismo para los cuatro cursos.

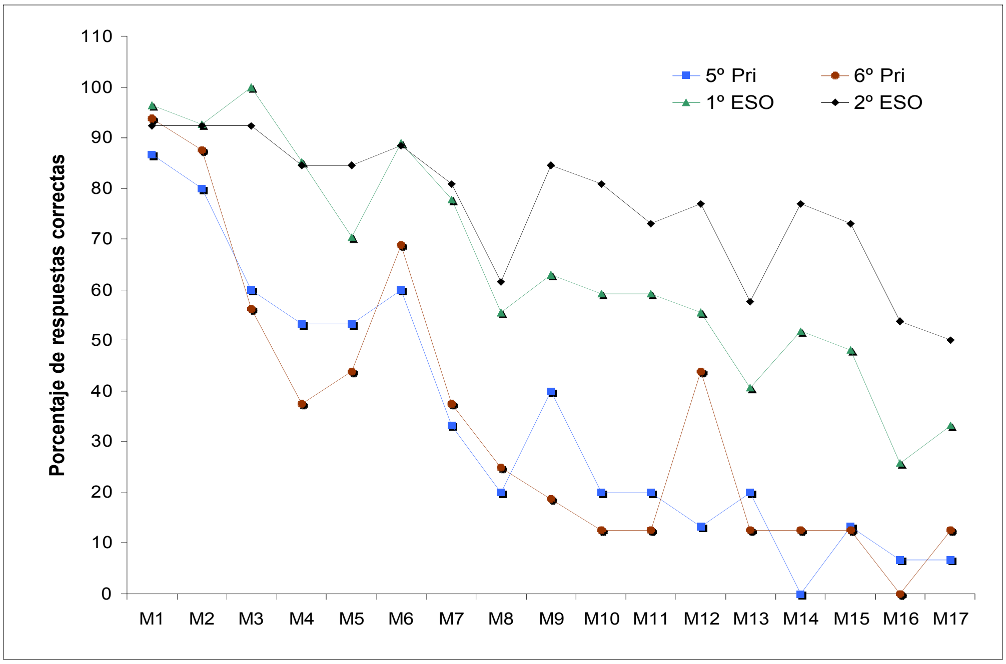

Figura 2.- Evolución en cada curso del porcentaje de respuestas correctas a lo largo de las diecisiete multiplicaciones

(c) El tránsito de M1 y M2 a M3, esto es, del bloque 1 al bloque 2, apenas ha tenido repercusión en 1º y 2º de ESO donde el porcentaje de respuestas correctas se ha mantenido en torno al 90-95%, aumentando ligeramente en 1º. En cambio, los alumnos de 5º y 6º de Primaria sí que se han visto afectados al pasar de un 80% (12 respuestas) y 87,5% (14 respuestas) en M2 a un 60% (9 respuestas) y 56,3% (9 respuestas) en M3, respectivamente.

(d) Algunas multiplicaciones han recibido unos porcentajes de respuestas correctas muy similares dentro de cada curso, lo que nos permite agruparlas y considerarlas equivalentes a efectos de dificultad. En concreto, la similitud de porcentajes de M10 con M11 y M16 con M17 indica que imponer a las multiplicaciones una influencia del tipo $I_{R_{II}}$ o $I_{RR_{II}}$ no afecta tanto en la resolución como en un principio se pensaba.

(e) El porcentaje de M6 supera al de M4 y M5 en cada curso. Podemos afirmar, por tanto, que no conocer el multiplicador en un producto 2x1 ofrece más dificultad al alumno que pasar de 2x1 a 2x2 en una multiplicación con multiplicando desconocido y multiplicador conocido.

(f) La puntuación media para los alumnos de 5º y 6º de Primaria ha sido casi idéntica: 5.87 en 5º y 5.88 en 6º (ver tabla 1). De este hecho extraemos dos consecuencias claras:

- La dificultad de la prueba ha sido excesiva para Primaria. Así lo demuestra un promedio de cinco o seis respuestas correctas sobre un total de diecisiete posibles.

- El rendimiento en 5º y 6º de Primaria es similar ante la tarea de resolver multiplicaciones con cifras desconocidas.

(g) Los alumnos de 1º y 2º de ESO han obtenido una puntuación media parecida de 11 y 13 respuestas correctas respectivamente, siendo unos valores muy superiores a los conseguidos en Primaria. En menor medida también existen diferencias entre 1º y 2º de ESO.

		Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típica
Respuestas correctas	**5º Pri**	0	14	5.87	4.39
	6º Pri	0	13	5.88	3.61
	1º ESO	3	17	11.04	4.09
	2º ESO	2	17	13.04	4.23
	TOTAL	0	17	9.75	5.08

Tabla 1.- Algunos estadísticos descriptivos para los cuatro cursos

Principales conclusiones y limitaciones del estudio empírico

Exponemos en este apartado las conclusiones más importantes a las que hemos llegado en la fase empírica del trabajo de investigación. Estas conclusiones hacen referencia a la muestra y al instrumento de recogida de datos por un lado y al estudio en sí, logros y hallazgos conseguidos, por otro. Pasamos a enumerarlas:

- *Conclusiones relativas a la muestra y al instrumento de recogida de datos:*

1. La muestra es demasiado pequeña, sobre todo en Primaria. Además, los alumnos de Primaria y Secundaria pertenecen a dos centros educativos situados en diferentes zonas de la ciudad, circunstancia que influye en los resultados obtenidos al comparar estudiantes de ambos colegios.

2. El formato y la presentación de la prueba son adecuados ya que los estudiantes han entendido sin problemas la tarea que debían realizar.

3. No se ha controlado la dificultad de la prueba que al final resultó ser demasiado fácil para 2º de ESO y difícil para Primaria. Además, se han propuesto multiplicaciones que son equivalentes entre sí a efectos de dificultad, de forma que no sirven para establecer diferencias en el rendimiento de los alumnos. Tampoco es apropiado el orden de dificultad en el que están dispuestas las diecisiete multiplicaciones en el cuestionario.

4. Las carencias recogidas en el punto anterior provocan la necesidad de examinar nuevamente las características de las multiplicaciones contenidas en el instrumento de recogida de datos y modificar los criterios utilizados para su construcción.

5. A pesar de todo, las multiplicaciones con cifras desconocidas aparecen como una herramienta valiosa para detectar diferencias entre los alumnos relacionadas con el conocimiento que tienen del funcionamiento y la estructura del algoritmo estándar de la multiplicación.

- *Conclusiones relativas al estudio en sí:*

6. En la prueba los alumnos se han visto involucrados en situaciones inusuales en las que el simple dominio mecánico del algoritmo del producto se ha mostrado insuficiente.

7. El conocimiento de las cifras del multiplicando y el multiplicador ha sido la variable más determinante para los alumnos a la hora de resolver las tareas propuestas, más incluso que el tamaño o el tipo de influencia contenida en la multiplicación.

8. El comportamiento de los alumnos de Primaria ante las tareas propuestas ha sido similar. Sin embargo, entre 6º de Primaria y 1º de ESO se produce un salto cualitativo en la resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas. Este cambio brusco no se vuelve a presentar en Secundaria, apareciendo en su lugar una ligera mejora en los resultados.

9. Aunque la puntuación en 2º de ESO es elevada no llega a ser máxima, es decir, a estas edades todavía hay estudiantes que no resuelven con éxito ciertas multiplicaciones con cifras desconocidas mostrando así una comprensión limitada del algoritmo tradicional de la multiplicación.

CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos resumido los avances en la investigación llevada a cabo hasta ahora sobre la comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación. Nuestra preocupación está centrada en determinar cuándo comprenden los sujetos dicho algoritmo, en qué medida lo comprenden y cómo evoluciona esta comprensión por niveles y edades. Partiendo de una caracterización operativa para la comprensión de un conocimiento matemático, este problema es abordado a través del análisis de las acciones que realizan los individuos cuando se involucran en las distintas situaciones que dan sentido al algoritmo tradicional del producto.

Hemos comenzado por el estudio de las multiplicaciones con cifras desconocidas, un tipo de tareas matemáticas en las que el algoritmo se presenta de una forma singular que nada tiene que ver con los ejercicios de cálculo que tradicionalmente se plantean en la escuela. Al margen de la potencialidad didáctica que puedan manifestar, las MCCD aparecen como una herramienta valiosa para observar fielmente la situación de la comprensión del funcionamiento y la estructura del algoritmo estándar de la multiplicación por parte de los escolares de distintas edades y cursos. Esto es así porque contienen características propias de las tareas que consideramos adecuadas para la observación de la comprensión en matemáticas, esto es, son novedosas, atractivas, no rutinarias y sencillas de entender. Además, en la resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas los estudiantes muestran la comprensión funcional que poseen del algoritmo clásico del producto al tener que identificar las influencias contenidas en ellas, recorrer la secuencia algorítmica en sentido contrario al habitual y detectar vínculos entre las distintas partes que componen el algoritmo. La prueba exploratoria pasada a la muestra de alumnos ha sido un primer intento de validación empírica de la utilidad de estas tareas como instrumento de diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo.

Finalmente, será necesario tomar algunas decisiones acerca de cómo continuar con la investigación, reconsiderando para ello el trabajo realizado hasta ahora. En principio, conviene proseguir con el análisis de las características de las MCCD para detectar y definir unos criterios de clasificación más adecuados con los que establecer de manera precisa las diferencias en la comprensión funcional de los alumnos. Asimismo, consideramos oportuno extender el estudio a las categorías sintáctica y justificativa para completar el rango de situaciones en las que aparece el algoritmo estándar de la multiplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica*. Barcelona: CEAC.

Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last Holdout. *Phi, Delta, Kappan*, febrero, 471-476.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Curcio, F. R. y Schwartz S. L. (1998). There are no algorithms for teaching algorithms. *Teaching Children Mathematics*, septiembre, 26-30.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (*pp.166-173). Lhati, Finland, 14-19 julio.

Gavilán, J. Mª y Barroso, R. (1996). Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones. *Epsilon*, 35, 193-202.

Godino, J.D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

González, J.L. (2000). *Aproximación a un modelo teórico operativo para la comprensión del conocimiento matemático*. Málaga: Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga (paper).

González, J.L. y Ortiz, A. (2000). *La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: estructura y fundamentos*. Ponencia presentada en el IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva, 12-15 septiembre (paper).

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D.A.Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Kamii, C. y Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 1, 51-61.

Lindquist, M. M. (1997). Foreword. En J. Hiebert, T.P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier y P. Human, *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding* (pp. vii-xvii). Portsmouth, NH: Heinemann.

Philipp, R. A. (1996). Multicultural mathematics and alternative algorithms. *Teaching Children Mathematics*, noviembre, 128-133.

Pirie, S.E.B. y Kieren, T.E. (1994). Growth in Mathematical Understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putham y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Romero, I. (2000). *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico*. Ponencia presentada en el IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva, 12-15 septiembre (paper).

Schliemann, A.D., Dos Santos, C. M., Da Costa, S. C. (1993). Constructing Written Algorithms: A Case Study. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 155-172.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Stanic, G.M.A y McKillip, W. D. (1989). Developmental Algorithms Have a Place in Elementary School Mathematics Instruction. *Arithmetic Teacher*, 37, 14-16.