

# UNA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN CON CALCULADORA

Jose Luis Lupiáñez, Antonio Marín, Pedro Gómez, Luis Rico  
Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

## Resumen

En este trabajo ejemplificamos un problema de modelización para cuya resolución se usa una calculadora gráfica y un sensor de movimiento, como ejemplo de tarea que contribuye a la competencia de modelización de los escolares. En primer lugar introducimos la noción de competencia según el proyecto PISA y describimos con más detalle la competencia de modelización. A continuación enunciamos diferentes criterios que deben tenerse en cuenta a la hora de diseñar o seleccionar tareas, y mostramos un ejemplo de tarea de modelización que involucra el estudio de un fenómeno de caída libre de cuerpos y que se estudia con una calculadora. Finalmente analizamos esa tarea con los criterios presentados previamente, y extraemos algunas conclusiones en torno a la reflexión que el profesor ha de realizar sobre la relación entre capacidades, tareas y recursos tecnológicos.

El término competencia se ha venido usando recientemente en el terreno educativo para expresar expectativas de aprendizaje de los escolares. En ocasiones su significado parece confuso, pero existen trabajos e investigaciones que han concretado mucho esa noción, así como otras que parecen sinónimas. En Gómez y Lupiáñez (2007) y Lupiáñez y Rico (2006) se describen las nociones de capacidad y competencia en el contexto del aprendizaje de las matemáticas por parte de escolares de Educación Secundaria.

Esa noción de competencia está basada a su vez en el proyecto PISA, en el que se seleccionaron en 2003 siete competencias matemáticas para caracterizar el grado de alfabetización matemática de los escolares al término de su educación obligatoria (Rico, 2007). Estas competencias son: Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelizar, Plantear y resolver problemas, Representar, y Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

En este trabajo nos centramos en una de esas competencias, la de modelización, y proponemos una tarea usando una calculadora gráfica y otros recursos que pueden promover el desarrollo de esta competencia en escolares de secundaria.

### **La Competencia de Modelización: Tareas de Modelización**

La evaluación realizada en el proyecto PISA 2003 (OCDE, 2005) enfrentaba a los escolares a problemas matemáticos basados en un contexto real, en cuya solución debían activarse las competencias matemáticas antes señaladas. La competencia de modelización se centra en la relación entre nociones matemáticas y problemas en diferentes situaciones y contextos. La modelización es una actividad compleja por el gran número de conexiones y relaciones que requiere establecer, y en el proyecto PISA esta competencia tiene que ver con que los escolares:

- estructuren y analicen la situación o problema inicial,
- expresen esa situación en términos matemáticos,
- construyan o usen modelos matemáticos para resolver ese problema matemático,
- interpreten los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial, y
- analicen y critiquen ese modelo y sus resultados.

Aunque desarrollar tareas que promuevan todas esas actuaciones puede resultar muy complejo, sí es posible diseñarlas de manera que se centren sólo en algunas de ellas. Las tareas son parte fundamental del trabajo matemático en el aula, y como señala Marín (2005), las tareas en general, y las de modelización en particular, deben atender a varios criterios:

1. Que las tareas sean compatibles con el contenido que se está trabajando. Las tareas, como propuestas de acción están vinculadas al análisis y selección que hace el profesor sobre los contenidos.
2. Que contribuyan a obtener las expectativas y/o a superar dificultades o errores previstos de acuerdo con grados de complejidad.
3. Que permitan incorporar recursos y materiales, que optimicen la adquisición de los objetivos de aprendizaje seleccionados.
4. Que constituyan un conjunto coherente en la planificación de las secuencias de aprendizaje.
5. Que sean compatibles con técnicas de gestión de la clase que optimicen la adquisición de los objetivos de aprendizaje seleccionados.

A continuación describiremos una tarea de modelización atendiendo a estos criterios, en la que cobra especial importancia el empleo de una calculadora gráfica junto a otros dispositivos.

### **El Bote de un Balón**

El objetivo de esta tarea es que los escolares pongan en juego su conocimiento sobre funciones cuadráticas. Más concretamente, se trata de que usen mediciones reales del bote una pelota para encontrar la función cuadrática que modeliza su movimiento. Para ello, se emplea una calculadora gráfica como la TI-84Plus y un sensor de movimiento CBR conectado a ella. El Calculator-Based Ranger (CBR) es un detector sónico de movimiento que suministra la posibilidad de capturar y

analizar datos reales fáciles de usar. Trabajando conjuntamente con este sensor y una calculadora, los escolares pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento extraídos de una práctica real, es decir, pueden modelizar experiencias físicas (Texas Instruments, 1997).

#### *Descripción de la tarea*

La tarea comienza con dos escolares que llevan a cabo el experimento de dejar caer un balón y usar el sensor CBR para registrar la altura de cada bote del balón y pasar esos datos a la calculadora. El resto de la clase sigue el experimento, teniendo además una imagen de la calculadora proyectada para ver los datos recibidos del sensor. La Figura 1 muestra un esquema de la situación inicial del experimento, y la Figura 2 un ejemplo de la información que recibe la calculadora sobre el bote del balón, y el *zoom* sobre uno de esos botes.

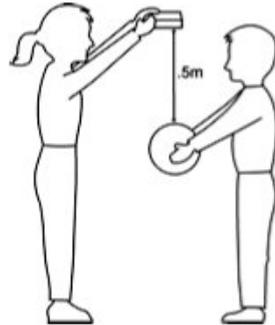


Figura 1. Situación inicial de la tarea (Texas Instruments, 1997, p. 26)

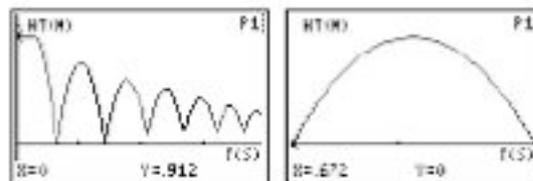
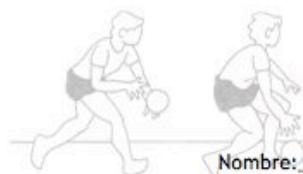


Figura 2. Información recogida en la calculadora (Texas Instruments, 1997, p. 25)

A partir de las gráficas de la Figura 2, comienza el trabajo de toda la clase, que trabajarían en grupos de 4 alumnos. Cada grupo dispondría de una calculadora con los datos del experimento transferidos de la que se usó para la recogida de datos, y de un cuaderno de investigación como el que recoge la Figura 3.



## El Bote de la Pelota

### Cuaderno de Investigación

Nombre: \_\_\_\_\_

Captura de Datos	
	<ol style="list-style-type: none"><li>1. ¿Qué propiedad física se representa en cada uno de los ejes?</li><li>2. ¿Qué unidades se emplean en cada caso?</li><li>3. ¿Qué representa el punto más alto de la gráfica? ¿Y el más bajo?</li><li>4. ¿Por qué dio la vuelta a la gráfica el programa?</li><li>5. ¿Por qué parece representar la gráfica el movimiento de botes de la pelota por el suelo?</li></ol>
Exploraciones	
	<ol style="list-style-type: none"><li>6. Describe la forma que tiene uno de esos botes. ¿Se parece a alguna gráfica que conozcas?</li><li>7. ¿Podría ser la de una función de segundo grado? ¿Por qué?</li><li>8. Si fuera así, podría expresarse de la forma <math>y=a(x-h)^2+k</math>. ¿Cómo podríamos establecer los valores <math>h</math> y <math>k</math> a partir de los datos que hemos recogido?</li><li>9. Vamos a considerar que <math>a=1</math>. ¿Nos aproximamos así a la gráfica del bote de la pelota? ¿Qué valor crees que sería acertado?</li><li>10. Prueba con algunos valores y describe cómo se parece la gráfica obtenida al bote de la pelota.</li><li>11. ¿Qué implica un valor positivo de <math>a</math>? ¿Y si es negativo? ¿Y si vale 0? ¿Qué representa su valor?</li><li>12. Decide cuál es el valor que más se aproxima, y escribe cuál sería tu propuesta de función de segundo grado.</li><li>13. Calcula el mejor ajuste posible con la calculadora y compara el resultado obtenido con tu predicción anterior.</li><li>14. ¿A qué crees que se debe la diferencia?</li><li>15. ¿Por qué el bote de una pelota que se deja caer libremente puede representarse mediante una función de segundo grado?</li></ol>



Figura 3. Cuaderno de investigación para la tarea del bote del balón

Las diferentes cuestiones del cuaderno de investigación recogen distintos aspectos del experimento. Inicialmente se analiza la recogida de datos y el modo en que los registra la calculadora. A partir de la pregunta 6 se introduce el análisis matemático de ese experimento, y los escolares deben hallar la expresión algebraica de la función cuadrática que modeliza el fenómeno de un movimiento de caída libre. Todas esas cuestiones se abordan desde estudios que se pueden llevar a cabo con la propia calculadora.

Al final de la sesión se ponen en común los resultados obtenidos y se puede profundizar o ampliar alguna de las respuestas propuestas.

#### *Análisis de la tarea*

La tarea presentada se centra fundamentalmente en dos aspectos dentro del ciclo de modelización. Por una parte, los escolares deben analizar un problema planteado en un contexto real (dentro de los fenómenos de caída libre), y deben extraer datos que les permitan explorar esa situación. Por otra

parte, deben llegar a construir un modelo (encontrar una función cuadrática) que represente y modelice ese fenómeno. La tarea podría introducir otras cuestiones como relacionar la altura de botes consecutivos, o estudiar la velocidad de la bola en cada bote, pues esos datos también los suministra el sensor. En ese caso la tarea es más rica y se profundizan en otros aspectos del proceso de modelización matemática.

Por otro lado, en el apartado anterior pusimos de manifiesto cinco criterios que pueden considerarse para diseñar o seleccionar tareas matemáticas. La Tabla 1 muestra el análisis de la tarea presentada según esos diferentes criterios.

Criterios	Tarea del bote del balón
1. Contenido matemático de la tarea	La función que se trabaja es la cuadrática, y la mayor parte del trabajo se realiza conjugando su representación gráfica con la expresión simbólica canónica. Los conceptos de vértice, eje de simetría, amplitud y su relación con los coeficientes de la expresión simbólica, juegan también un papel central. También aparecen nociones propias de la física, como caída libre, altura, o tiempo.
2. Expectativas de aprendizaje perseguidas	<p>Algunas de las capacidades que deben poner en juego los escolares son las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar situaciones reales que se relacionan con funciones cuadráticas.</li> <li>• Reconocer elementos y propiedades de la representación gráfica de una función cuadrática, como vértice, amplitud, crecimiento,...</li> <li>• Relacionar las coordenadas de ese vértice de la gráfica con los posibles valores del coeficiente principal de su expresión simbólica.</li> </ul> <p>Las principales competencias que desarrollan los escolares son las de <i>modelizar</i> y la de <i>plantear y resolver de problemas</i>. El propio diseño de la tarea hace que los escolares deban encontrar nociones y relaciones matemáticas que den respuesta al problema, y además se ven inmersos en una actividad de recogida y análisis de datos para resolver un problema planteado en una situación científica pero en un contexto muy cercano a sus prácticas cotidianas en juegos deportivos.</p>
3. Materiales y recursos empleados	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculadoras (TI-84 Plus ó alguna otra compatible con el sensor CBR).</li> <li>• Sensor CBR.</li> <li>• Un balón (de baloncesto o similar).</li> <li>• Un proyector de la calculadora (opcional).</li> <li>• Cuaderno de investigación.</li> </ul>
4. Lugar que ocupa en una secuenciación	La tarea se propondría después de que los escolares hayan trabajado las nociones matemáticas que intervienen, y antes de emplear la función cuadrática para resolver problemas. Constituye una buena introducción a aquellos fenómenos y problemas que pueden modelizarse mediante funciones cuadráticas.
5. Aspectos de gestión del aula	Aunque inicialmente la tarea está diseñada para que los escolares trabajen en grupos y en cada grupo haya una calculadora, también puede plantearse con una sola calculadora proyectada (para que todos pudieran ver los datos recogidos). Así pueden en grupos pueden también responder a las cuestiones del cuaderno de investigación que serían planteadas por el profesor (mientras éste usa la calculadora para mostrar los datos necesarios en cada caso).

Tabla 1. Análisis de la tarea del bote del balón

## Conclusiones

Es sin duda innegable la gran versatilidad de los más recientes recursos tecnológicos, como los que hemos presentado aquí. Pero sigue siendo importante incidir en la necesidad de una planificación adecuada de estas actuaciones dentro de un plan instruccional coherente y bien diseñado. A la hora de diseñar o seleccionar tareas sobre un tema matemático, el profesor debe realizar varios análisis, tanto sobre la matemática que será objeto de enseñanza, como desde el punto de vista del aprendizaje que persigue.

Los diferentes materiales y recursos que puede usar el profesor en su labor docente han de jugar un papel muy concreto en ese proceso, pues tendrán verdadero éxito cuando el profesor diseñe y lleve a la práctica tareas en las que la tecnología contribuya a que los se hagan cada vez más competentes en matemáticas (Lupiáñez y Codina, 2001). Para ello, es necesario detallar los conceptos, procedimientos y sus relaciones que trabajaremos en el aula; definir qué capacidades y competencias queremos desarrollar en los escolares acerca de ese conocimiento, y analizar qué recursos podemos poner en juego para lograr ese desarrollo de manera eficaz y eficiente.

Todos estos aspectos han sido recogidos en Gómez (EnPrensa) en forma de cuestiones que debería hacerse el profesor a la hora de analizar un tema y su relación con el uso de tecnología. Algunas de esas preguntas son:

1. ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática?
2. ¿De qué maneras se puede representar el tema?
3. ¿Cómo se pueden organizar los fenómenos para los que la estructura matemática puede servir de modelo?
4. ¿Cómo se relaciona la información que surge del análisis de contenido con la información que surge del análisis cognitivo?
5. ¿Qué competencias han desarrollado ya nuestros alumnos?
6. ¿Qué competencias esperamos que desarrollen con motivo de las actividades que van a realizar?
7. ¿Qué obstáculos y dificultades hemos percibido que los escolares muestran cuando abordan el tema?
8. ¿Cómo podemos caracterizar los materiales y recursos disponibles en términos del análisis de contenido del tema en cuestión?
9. De las características y potencialidades de los recursos disponibles, ¿cuáles de ellos son específicos a las competencias, obstáculos y dificultades que se identificaron en el análisis cognitivo?
10. ¿Qué actividades son relevantes para las competencias que queremos desarrollar en nuestros alumnos y para los obstáculos y dificultades que esperamos que superen?
11. ¿Cómo podemos usar eficaz y eficientemente la tecnología dentro de esas actividades?

## Referencias

- Gómez, P. (EnPrensa). Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA*.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-88.
- Lupiáñez, J. L. y Codina, A. (2001). Calculadores y sensores. La matemática en movimiento. En M. Peñas, A. Moreno y J. L. Lupiáñez (Eds.) *Investigación en el Aula de Matemáticas. Tecnologías de la Información y la Comunicación* (pp. 143-149). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses y Universidad de Zaragoza.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en el Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender par el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Texas Instruments (1997). *Getting started with CBR*. Austin, TX: Autor.