View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

Sobre el Análisis de los Problemas Multiplicativos Relacionados con la División de Fracciones

Bernardo Gómez y Mauricio Contreras

Este artículo presenta parte de un estudio que persigue analizar el efecto de las variables de problema y las variables de resolución de problemas en las respuestas de estudiantes de segundo ciclo de educación secundaria obligatoria cuando resuelven problemas multiplicativos de división de fracciones. Se recoge aquí un análisis histórico-epistemológico que ha dado cuenta de los valores de dichas variables y, a partir de resultados preliminares, se sugiere la existencia de interrelaciones entre las variables de problema y las variables de resolución.

Términos clave: División de fracciones; Problemas multiplicativos; Variables de problema; Variables de resolución de problemas

Analysis of Multiplicative Problems Related to Division of Fractions

This article presents part of a study aiming to analyze the effect of problem and problem solving variables in secondary students' performance when solving multiplicative problems related to division of fractions. Here we present a historic-epistemological analysis that gives account of these variables and some preliminary results that suggest the existence of relations between problem variables and solving variables.

Keywords: Division of Fractions; Multiplicative problems; Problem solving variables; Problem variables

Este trabajo parte de la constatación de que el modelo actual de enseñanza de la división de fracciones no da cuenta de la riqueza de las variables de los problemas (estructura, modelos de las operaciones, modelos físicos, constructos, contextos y tipología de los datos) y de las variables de la resolución (esquemas, métodos y algoritmos involucrados).

Gómez, B. y Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3*(4), 169-183.

Así, por ejemplo, a pesar de que hay una variedad de algoritmos disponibles para la división de fracciones, parece que la enseñanza enfatiza excesivamente el algoritmo de productos cruzados o el de invertir y multiplicar, además de hacerlo en situaciones descontextualizadas.

También ocurre que el tipo de números implicados en el problema media a la hora de reconocer la operación necesaria para resolverlo (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985). Esto puede ser atribuido a que el modelo primitivo de división-partición deja de funcionar cuando los números involucrados son fraccionarios en vez de naturales. Parece ser que este fenómeno no está siendo tenido en cuenta suficientemente por la enseñanza.

Por último, "la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria" (Vergnaud, 1991, p. 197). En este sentido está por ver si los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números enteros, y a qué esquema (ternario o cuaternario) les lleva esta percepción.

Objetivos de la Investigación

Las constataciones presentadas, que dan sustento a este trabajo, se concretan en los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar los valores de las variables de problema y de resolución de los problemas escolares de división de fracciones.
- Indagar su incidencia en las respuestas de los estudiantes a un cuestionario de lápiz y papel: qué variables del problema tienen en cuenta, qué variables de resolución utilizan, y qué interrelación se puede observar entre ellas.

Un punto central en el segundo objetivo es indagar acerca de cuál de los esquemas, cuaternario o de regla de tres y ternario o de ley de composición, utilizan preferentemente cuando se enfrentan a un cuestionario de problemas multiplicativos contextualizados relativos a la división de fracciones.

Hipótesis de la Investigación

Las hipótesis de investigación son las siguientes:

- Los estudiantes interpretan la situación preferentemente bajo el esquema cuaternario.
- El enfoque de resolución para los problemas de división de fracciones depende de las variables del problema.

SIGNIFICADO DE LOS TÉRMINOS

En este apartado precisamos el significado de algunos de los términos empleados en este trabajo.

Utilizamos el término *constructo* en el sentido de Kieren (1976, pp. 101-144; 1985, pp. 24-36) para referirnos a lo que se conoce como parte-todo, operador, razón, medida y división.

El término *estructura* lo identificamos con el análisis de las estructuras multiplicativas de Vergnaud (1983, 1988) y el análisis de cantidades de Schwartz (1981, 1988).

Consideramos los *modelos de división* descritos por Fishbein et al. (1985, pp. 3-21) y tenemos en cuenta los modelos de división-partición y división-medida, además de otros dos modelos que aparecen con frecuencia en los libros de texto: el de proporción y el de inversión de la multiplicación o factor perdido.

Con el término *contextos* nos referimos a las áreas con las que están relacionados los problemas y distinguimos entre los contextos aritmético, algebraico, geométrico y situacional.

Empleamos el término *algoritmo* para referirnos a un conjunto ordenado de pasos que permiten obtener el resultado de una división de fracciones, sin hacer mención a las razones de los mismos. En los libros de texto hemos identificado los siguientes algoritmos para la división de fracciones: (a) reducción de fracciones a común denominador y división de numeradores, (b) multiplicación por el inverso del denominador, (c) productos cruzados, (d) conversión de las fracciones a decimales, (e) uso del protocolo de la calculadora, (f) reducción a la unidad y (g) reducción de términos al estilo de las fracciones algebraicas (multiplicando extremos y medios de una fracción con fracciones).

Utilizamos la expresión *representación gráfica* para referirnos a dibujos que sirven de apoyo para ilustrar el fenómeno descrito en el enunciado del problema de división de fracciones.

Con el término *esquema* hacemos referencia a la relación entre las cantidades que se obtienen de la interpretación del enunciado del problema y la consecuente disposición de los datos para su operación. Tenemos en cuenta el esquema cuaternario y el ternario. El primero de ellos toma en cuenta cuatro elementos y los dispone en cuadro de acuerdo con la organización de una tabla de proporcionalidad. El esquema ternario toma en cuenta tres elementos y los dispone en línea de acuerdo con una ley de composición.

Los *métodos de resolución* se siguen de los esquemas considerados. En la relación cuaternaria son el escalar y el vectorial, y en la relación ternaria, la ecuación ($ax = b$) y la división directa ($a : b = c$).

Por *enfoque de resolución* denominamos a la terna que resulta al optar por unos valores determinados de las variables de resolución, es decir, la terna que resulta al optar por uno de los esquemas, uno de los métodos y uno de los algoritmos.

ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para conocer cuáles son los problemas multiplicativos de división de fracciones que son o han sido usados en la enseñanza hemos recurrido al análisis histórico-epistemológico propio de la Didáctica de la Matemática. Este análisis ha permitido localizar en distintas épocas históricas los valores de las variables de problema y de las variables de resolución presentes en los libros de texto. Con la misma finalidad, hemos revisado algunas de las investigaciones recientes sobre el problema de investigación como las de Yamaguchi y Jwsaki (1999) y Gairín y Sancho (2002). De este estudio hemos obtenido un conjunto de 29 problemas de diferentes épocas históricas. Estos problemas se han caracterizado de acuerdo con las variables señaladas.

El tipo de análisis realizado para caracterizar los problemas seleccionados queda ilustrado en los siguientes ejemplos.

Tarea de la Torta

Este problema tiene dos apartados, ambos con el mismo contexto pero diferente estructura.

Apartado 1: Peso de la Torta

"3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?" (Rey y Puig, 1932, pp. 211-212)

En este caso se desconoce el valor unitario y, por tanto, de acuerdo con el análisis de Vergnaud, la estructura es de isomorfismo de medida. El modelo de la operación es división-partición y se favorece el escalar como método de resolución.

Desde el punto de vista del análisis de Schwartz, hay que dividir $\frac{2}{9}$ kilos entre $\frac{3}{7}$ tortas. Hay que hacer un cociente de cantidades extensivas de distintos espacios de medida para obtener una cantidad intensiva (los kilos que pesa cada torta). Es por tanto del tipo[1] $E/E'=I$.

La representación gráfica es circular, el contexto es situacional y el constructo es de medida.

La estructura de este apartado queda representada en la Figura 1.

[1] Aquí y en lo que sigue, para indicar el tipo de problema desde el punto de vista del análisis de Schwartz se utiliza E, E´ y E´´ para denotar a cantidades extensivas de diferentes espacios de medida y se utiliza I para referir a una cantidad intensiva.

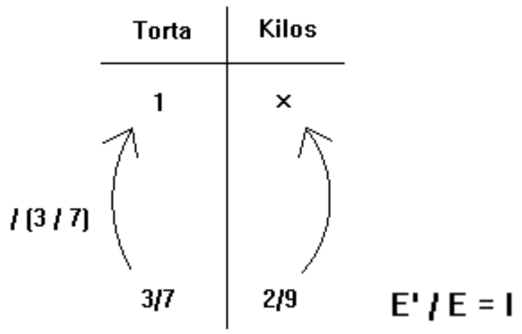


Figura 1. Estructura de la tarea del peso de la torta

Apartado 2: Porción de Torta
"Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?" (Rey y Puig, 1932, pp. 211-212)

A diferencia del apartado 1, ahora se conoce el valor unitario. Por tanto el modelo de la operación es división-medida, la estructura también es la de isomorfismo de medidas, y el método de resolución que se favorece es el funcional.

Desde el punto de vista de Schwartz, hay que dividir $\frac{2}{9}$ kilos entre $\frac{3}{7}$ kilos que pesa cada torta. Por tanto, es necesario dividir una cantidad extensiva del segundo espacio de medida entre una cantidad intensiva (el valor unitario) para obtener una cantidad extensiva del primer espacio de medida (porción de torta). Por tanto, es del tipo $E'/I = E$.

La representación gráfica asociada es circular, el contexto es situacional y la medida es el constructo.

Representamos la estructura de este apartado en la Figura 2.

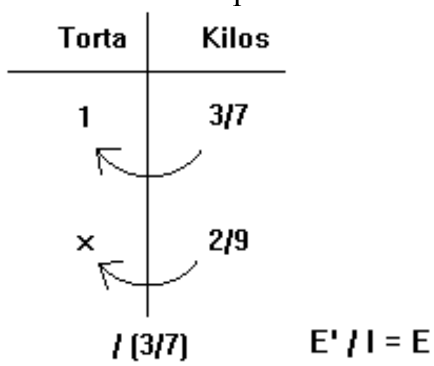


Figura 2. Estructura de la tarea de la porción de torta

Tarea de Multiplicación y División: el Divisor

"El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?" (Valdivia y García, 1969, p. 43)

Este problema es un ejemplo de ábaco. De acuerdo con el análisis de Vergnaud, la estructura es la de un único espacio de medida y el modelo de la operación es el de inversión de una multiplicación o factor perdido. El método que se favorece es el de la ecuación: $\frac{20}{21} \cdot x = \frac{4}{7}$.

El análisis de Schwartz muestra que el problema equivale a la división de dos cantidades extensivas del mismo espacio de medida para determinar el escalar que las liga. Es, por tanto, del tipo $E / E = k$.

En este caso, no admite representación gráfica, el contexto es numérico y el constructo es el de división.

La estructura de este apartado queda recogida en la Figura 3.

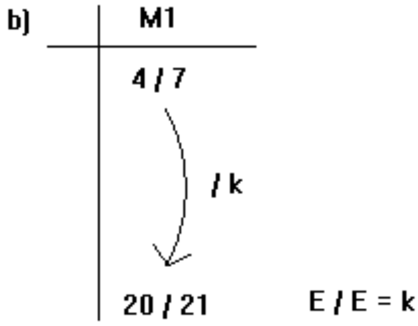


Figura 3. Estructura de la tarea del divisor

Tarea de la Mesa de Ana

"La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de *u*, averigua cuánto mide el otro lado." (Gairín y Sancho, 2002, pp. 244-247)

En este problema se conoce la longitud de uno de los lados de la mesa de Ana y su área, y se trata de hallar el otro lado. Por tanto, de acuerdo con el análisis de Vergnaud, la estructura es un producto de medidas y el modelo de la operación es el de inversión de una multiplicación o factor perdido. El método que se favorece es la división directa para hallar el lado que se busca ($x = \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$).

El análisis de Schwartz muestra que el problema corresponde a la división de dos cantidades extensivas para obtener otra cantidad extensiva, ya que hay que dividir el área entre el lado para obtener el otro lado. Es, por tanto, del tipo $E'' / E = E'$.

La representación gráfica es rectangular, el contexto es geométrico y el constructo es de medida puesto que se trata de hallar la anchura de la mesa de Ana.

Presentamos la estructura de este problema en la Figura 4.

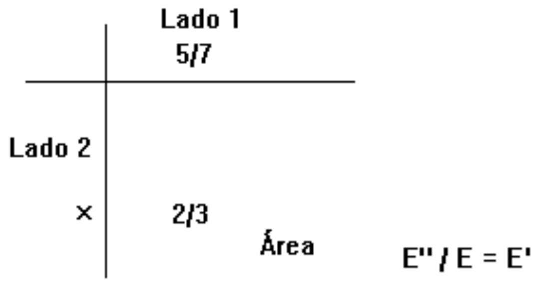


Figura 4. Estructura de la tarea de la mesa de Ana

FASE EXPERIMENTAL

Descrita la caracterización de los problemas, pasamos a explicar la metodología seguida para el diseño y aplicación del cuestionario así como el análisis de las respuestas obtenidas.

Metodología

Para el diseño del cuestionario, entre febrero y abril de 2004 realizamos dos estudios pilotos sucesivos, con dos grupos diferentes de segundo ciclo de ESO (15-16 años) del Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) Baleares de Valencia. Entre ambos pilotajes transcurrió un período de tiempo de 30 días. Como consecuencia de estos pilotajes, descartamos algunas tareas que no resultaron discriminantes o que eran redundantes.

En el cuestionario definitivo recogimos problemas de tres clases de estructura: (a) un solo espacio de medida, (b) isomorfismo de medida y (c) producto de medidas. En estos problemas intervienen cinco tipos de contextos: (a) escalas, (b) medidas, (c) ábacos, (d) tasas y (e) grifos. Tratamos de que no hubiera reiteraciones, por lo que de los 29 problemas inicialmente seleccionados, el cuestionario definitivo se redujo a 8, alguno con dos tareas o apartados.

El cuestionario definitivo fue respondido por una muestra compuesta por un grupo de 28 estudiantes de 3º de educación secundaria obligatoria, del instituto de educación secundaria Benicalap de Valencia, diferente a los grupos del pilotaje. La prueba tuvo lugar en la primera semana de junio de 2005, de forma que los estudiantes tenían ya experiencia en el trabajo con fracciones, con la regla de tres y con la iniciación al álgebra. Para contestar los ítems, disponían de una calculadora científica con teclas de fracción.

Una vez realizada la prueba, pasamos al análisis de las respuestas de los estudiantes, recogidas en el cuestionario. Realizamos este análisis buscando caracterizar sus enfoques de resolución (mediante la terna: esquema, método, algoritmo) en cada uno de los problemas del cuestionario, y la relación entre las variables de problema y las variables de resolución.

Análisis de Respuestas

Como ejemplo, se muestran a continuación algunos resultados obtenidos en los tres problemas caracterizados en el apartado anterior.

Tarea de la Torta

Hay 15 estudiantes que utilizan un esquema cuaternario de proporcionalidad simple y ninguno recurre al esquema ternario de ley de composición.

De los 15 estudiantes que usan el esquema cuaternario, 11 utilizan el método vectorial bajo la forma de la regla de tres y solamente 4 recurren al escalar, ambos en coherencia con el esquema cuaternario. En relación con el método vectorial, los estudiantes tienden a seguir el orden de presentación de los datos para efectuar el planteamiento y forma de resolución en "cuadro": comienzan con el primer dato del enunciado, siguen con el segundo, debajo del primero el tercero, y debajo del segundo la incógnita.

Los algoritmos observados en las respuestas de los estudiantes son los que mostramos a continuación, recogiendo entre paréntesis el número de estudiantes que los utilizan:

- conversión de las fracciones en decimales (5),
- multiplicación de extremos y medios (3),
- protocolo de la calculadora (4) y
- productos cruzados (3).

Uno de los estudiantes maneja con soltura las fracciones; llama la atención que no las simplifica. Otro, usa un método de construcción progresiva basado en la adición. Un estudiante resuelve el problema mediante una multiplicación y otro da una respuesta aditiva.

Hay 11 estudiantes que no contestan a este apartado.

En cuanto a la representación, únicamente un estudiante utiliza una representación gráfica, circular, para representar el problema.

En el segundo apartado, 9 estudiantes utilizan un esquema cuaternario de proporcionalidad simple y solamente uno de ellos recurre al esquema ternario de ley de composición.

De los 9 estudiantes que usan el esquema cuaternario, 7 emplean el método vectorial bajo la forma de la regla de tres y solamente 2 recurren al escalar, lo cual es coherente con el esquema cuaternario. Al igual que en el apartado 1, los estudiantes siguen el orden de presentación de los datos para efectuar el planteamiento de regla de tres. El único estudiante que usa un esquema ternario, utiliza como método de resolución la división directa.

Los algoritmos observados en las respuestas de los estudiantes que usan un esquema cuaternario son los que mostramos a continuación, junto con el número de estudiantes que emplea cada uno de ellos:

- conversión de las fracciones en decimales (6),
- multiplicación de extremos y medios (1),

- productos cruzados (2).

Como en el apartado 1, hay un estudiante que no simplifica las fracciones. El único estudiante que usa un esquema ternario, utiliza como algoritmo el protocolo de la calculadora.

Hay 18 estudiantes que no contestan a este apartado.

El modelo de la operación que, según el análisis del apartado anterior, debería ser en el apartado 1 el de partición, y en el apartado 2 el de medida, no se hace visible en los estudiantes salvo, tal vez, en el que usa el esquema ternario.

Esta falta de percepción se puede observar en los dos ejemplos que se recogen a continuación. En la Figura 5 recogemos el trabajo de Fernando, quien aplica el mismo método vectorial de resolución en ambos apartados.

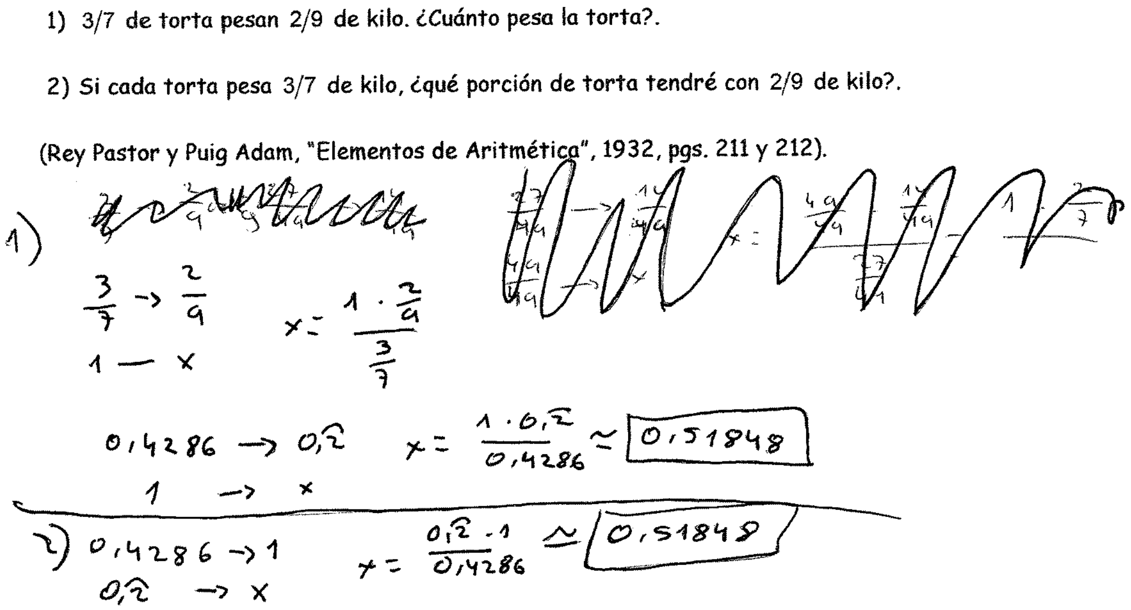


Figura 5. Trabajo de Fernando en la tarea de la torta

Fernando utiliza un esquema cuaternario y el mismo enfoque de resolución en los dos apartados, aplicando en ambos el método vectorial bajo la forma de la regla de tres estándar, tal y como se deduce del registro que hace en el que aparece el 1 como multiplicador de $\frac{2}{9}$. Para su respuesta prefiere convertir las fracciones a decimales. Como se ve, el estudiante no se ve influido por el hecho de que los apartados del problema sean diferentes desde el punto de vista del modelo de operación, tal vez porque está "anclado" en el método reglado, que aplica mecánicamente.

En la Figura 6 presentamos el trabajo de Mercé, quien adapta el método vectorial en razón del enunciado del problema.

1) 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

2) Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9}$ $\quad \frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{3}{1} = \frac{2}{27}$

$\frac{7}{7} \rightarrow x$ $\quad \frac{7}{7} = \frac{2}{27} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{27}$

La torta pesa $\frac{14}{27}$ kg

2) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{7}$ $\quad \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189}$

$\frac{2}{9} \rightarrow x$

Tendré $\frac{98}{189}$ de torta.

Figura 6. Trabajo de Mercé en la tarea de la torta

Mercé usa en los dos apartados el esquema cuaternario y el método vectorial, pero a diferencia de Fernando, adapta el método al enunciado del problema. En el apartado primero, de acuerdo con el enfoque estructural, la tarea debería sugerir una división-partición ($\frac{2}{9}:\frac{3}{7}$). Sin embargo, la estudiante, tras plantear el cuadro de la regla de tres, usa un algoritmo de reducción a la unidad, ya que la pregunta está referida explícitamente al valor unitario. Mercé realiza este trabajo en dos pasos: primero busca el valor de la unidad fraccionaria $\frac{1}{7}$ y, después, el de la unidad entera, $\frac{7}{7}$, que es una torta.

El apartado segundo, de acuerdo con el análisis estructural, debería sugerir una división-medida ($\frac{2}{9}:\frac{3}{7}$). Mercé no puede usar el método de reducción a la unidad en este caso debido a que el valor unitario ya está dado en el enunciado. Entonces usa la forma de regla de tres del método vectorial, aunque escribiendo $\frac{7}{7}$ en vez de 1.

Se puede observar que la estudiante abusa del lenguaje algebraico mediante una concatenación de signos en el segundo apartado, de modo que después del signo igual pone el resultado y, a continuación, encadena el signo de la división.

En las respuestas a ambos apartados, Mercé no hace uso de la simplificación de fracciones y considera adecuados los valores $\frac{14}{27}$ y $\frac{98}{189}$ de torta, sin percatarse de que los términos de la división son los mismos en los dos apartados y, por tanto, el resultado también, aunque cambie el modelo de la operación asociado al esquema cuaternario. En el primer apartado se busca el valor unitario como en la división-partición y en el segundo, el valor unitario es conocido como en la división-medida.

Multiplicación y División: el Divisor

Un total de 6 estudiantes utilizan un esquema ternario de ley de composición. Ningún estudiante usa el esquema cuaternario. Entre los primeros, 5 utilizan el método de división directa, mientras que únicamente uno plantea una ecuación.

Recogemos a continuación los algoritmos y las frecuencias asociadas:

- conversión de las fracciones en decimales (2),
- protocolo de la calculadora (2),
- producto de extremos y medios (1) y
- productos cruzados (1), aunque se observan errores en la manipulación del algoritmo.

Además, hay 4 estudiantes que dan una respuesta multiplicativa y 1 que da una respuesta aditiva. Hay 17 estudiantes que no responden a esta tarea.

En la Figura 7 mostramos el trabajo de Jorge como ejemplo de respuesta a esta tarea.

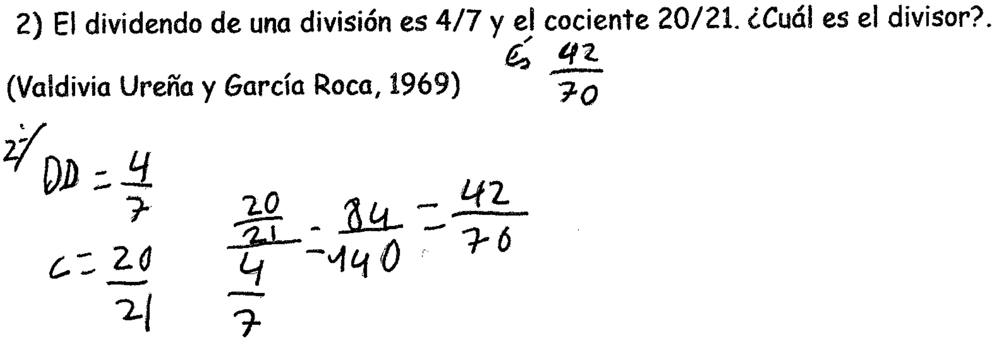


Figura 7. Trabajo de Jorge en la tarea del divisor

Como se desprende de la Figura 7, Jorge tiene dificultades con la formulación de la división. En vez de $\frac{D}{d} = q$, escribe $\frac{q}{D} = d$. Además, aplica mal el algoritmo de multiplicar extremos y medios.

Se puede observar que Jorge usa su propia abreviatura para el dividendo y el cociente, *DD* en vez de *D*, y *c* en vez de *q*. Esto sugiere que no está familiarizado con la propiedad $D = d \cdot q$ y, por esa razón, formula mal la división del problema.

La Mesa de Ana

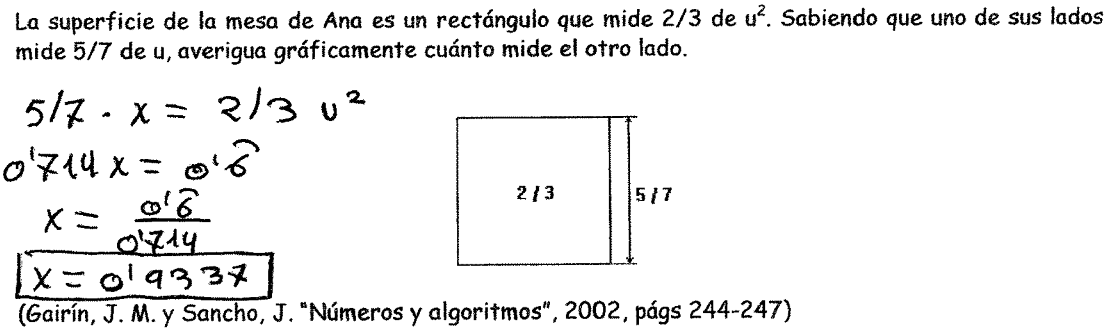
Hay 10 estudiantes que utilizan un esquema ternario de ley de composición. Sin embargo, ningún estudiante utiliza el esquema cuaternario.

El método más usado es el de división directa, empleado por 8 estudiantes. El método de ecuación lo usan otros 2 estudiantes. Ambos métodos son coherentes con el esquema ternario.

Hay 8 alumnos que usan el algoritmo de productos cruzados, 1 utiliza la conversión de las fracciones en decimales y 1 recurre a la multiplicación de extremos y medios.

Hay un estudiante que da una respuesta multiplicativa y otro que da una respuesta aditiva. Los 16 estudiantes restantes no contestan a esta tarea. Ningún estudiante utiliza un modelo físico para la resolución de la tarea.

Recogemos ejemplos de la resolución a esta tarea en las Figuras 8 y 9.


La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.

$5/7 \cdot x = 2/3\ u^2$

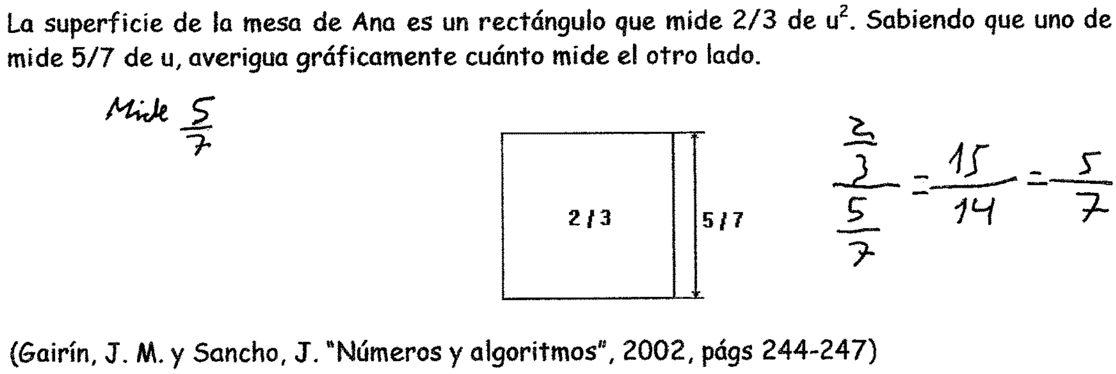
$0'714\, x = 0'6$

$x = \frac{0'6}{0'714}$

$\boxed{x = 0'9337}$

(Gairín, J. M. y Sancho, J. "Números y algoritmos", 2002, págs 244-247)

Figura 8. Trabajo de Tamer en la tarea de la mesa de Ana


La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de mide 5/7 de u, averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.

Mide $\frac{5}{7}$

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{15}{14} = \frac{5}{7}$

(Gairín, J. M. y Sancho, J. "Números y algoritmos", 2002, págs 244-247)

Figura 9. Trabajo de Jorge en la tarea de la mesa de Ana

Tamer utiliza el esquema ternario de ley de composición y usa el método de la ecuación. La incógnita es el factor perdido de la multiplicación $\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$. El algoritmo que usa es de conversión en decimales. Jorge utiliza también el esquema ternario de ley de composición, pero usa el método de la división directa. Se observa que aplica erróneamente el algoritmo de multiplicar extremos y medios. Identifica correctamente las relaciones entre los elementos del problema, lo que sugiere que sus dificultades radican en el algoritmo y no en la tarea.

CONCLUSIONES FINALES

Dado que la investigación está en curso, únicamente presentamos datos preliminares de los enfoques de resolución de tres problemas y cuatro tareas. Lo que parece desprenderse, a la vista de los datos obtenidos, es que el esquema cuaternario bajo el método vectorial y el algoritmo de conversión de las fracciones cuando se trata de decimales son los enfoques más frecuentes de resolución de los problemas de división de fracciones cuya estructura es el isomorfismo de medidas. La mayor frecuencia del primero de estos enfoques es coherente con las ideas señaladas por Vergnaud.

En los problemas cuya estructura es el producto de medidas o un único espacio de medida, el enfoque de resolución empleado principalmente es el esquema ternario, el método de división directa y el algoritmo de productos cruzados.

La incidencia de cada uno de estos enfoques en las tareas del cuestionario comentadas en este artículo es la que presentamos en la Tabla 1.

Tabla 1
Frecuencias de los enfoques en las tareas

	Tarea			
Enfoque	Torta (apartado 1)	Torta (apartado 2)	Divisor	Mesa de Ana
Esquema				
Cuaternario	15	9	0	0
Ternario	0	1	6	10
Método				
Vectorial	11	7	0	0
Escalar	4	2	0	0
División directa	0	1	5	8
Ecuación	0	0	1	2
Algoritmo				
Decimal	5	6	2	1
Medios-extremos	3	1	1	1
Calculadora	4	1	2	0
Producto cruzado	3	2	1	8

En el contexto aritmético, el problema de ábaco ha mostrado que los estudiantes tienen dificultades debido a que no dominan las relaciones formales entre el dividendo, el divisor y el cociente.

Sobre la primera hipótesis de investigación, hemos observado en las respuestas de los estudiantes que la hipótesis se confirma en los dos apartados de la tarea 2, donde la estructura correspondiente es el isomorfismo de medidas. Sin embargo, la hipótesis no es cierta en las tareas 3 y 4, donde la estructura corresponde a un solo espacio de medidas y al producto de medidas.

En cuanto a la segunda hipótesis de investigación, hemos identificado tanto el método vectorial como el escalar. El método vectorial se presenta con mayor frecuencia, a pesar de que ambos apartados corresponden a distintas variables de problema, en particular, a modelos diferentes de la división. Sin embargo, los métodos de división directa y de ecuación son los únicos que están presentes en las tareas 3 y 4, en las que las variables de problema no coinciden con las de la tarea 2. Además, se observa que la elección del algoritmo parece no tener correlación con el esquema, ni con el método elegido y, por ende, con ninguna de las variables de problema. Se concluye que, en efecto, existen interrelaciones entre los enfoques de resolución y las variables de problema, pero en la muestra no se aprecian con nitidez. Por tanto, la indagación futura se encaminará a esta parte del estudio.

Finalmente, para concluir este aparado de conclusiones, cabe señalar que el modelo de análisis utilizado en este trabajo es lo suficientemente explicativo como para ser considerado una herramienta de análisis de los problemas multiplicativos que involucran división de fracciones.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado como parte de un Proyecto del Ministerio de Educación y Ciencia de España, con referencia SEJ2005-06697/EDUC.

Referencias

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-21.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Rey, J. y Puig, P. (1932). *Elementos de aritmética. Colección elemental intuitiva.* (6ª ed., Vol. 1). Madrid: Imprenta de Antonio Marzo.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to National Institute of Education. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: NCTM.

Valdivia, M. y García, J. (1969). *Matemáticas curso 3º*. Valencia: Bello.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Yamaguchi, T. y Jwasaki, H. (1999). Division with fractions is not division but multiplication: On the development from fractions to rational numbers in terms of the Generalization Model designed by Dörfler. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 337-344). Haifa: Technion-Israel Institute of Technology.

Una versión previa de este documento se publicó como Contreras, M. y Gómez, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 171-184). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses y Universidad de Zaragoza.

Bernardo Gómez
Universidad de Valencia
bernardo.gomez@uv.es

Mauricio Contreras
IES Benicalap
mauriciocontre@gmail.com