# METODOLOGÍA DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE MÉTODOS DE ENSEÑANZA DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Alicia Bruno

*Se presenta la metodología de una investigación de aula donde se contrastan dos métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. En el "método redactar" los alumnos enuncian los problemas, aprenden sus estructuras y resuelven problemas propuestos por sus compañeros. En el "método resolver" se practican los problemas en una secuencia marcada por un orden de dificultad. El conocimiento adquirido se contrastó con el de otros alumnos que resolvieron problemas del libro de texto como aplicación de reglas operatorias. La metodología conjuga un tratamiento estadístico para contrastar la efectividad de los métodos con base en el éxito en la resolución y un estudio cualitativo de ciertos aspectos del "método redactar".*

*Términos clave*: Metodología; Números negativos; Problemas aditivos

Methodology for a Research about Teaching Methods of Additive Problems with Negative Numbers

*We present a research methodology used in a classroom study in which two different learning methods of additive problems with negative numbers are compared. With the "writing method" students write the problems, learn their structures and solve problems that have been written by their partners. With the "solving method" students practice additive problems in a given sequence, according to the problems level of difficulty. The knowledge acquired was compared with the one obtained by other students who solved additive problems from the textbook, as application of operational rules. We have used a mixed methodology: A statistical treatment to contrast the effectiveness of the methods for solving problems and a qualitative study of certain aspects of the "writing method".*

*Keywords*: Additive problems; Methodology; Negative numbers

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. *PNA, 3*(2), 87-103.

En este artículo nuestro interés se centra en la metodología de investigación seguida en un estudio sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos. El estudio toma los datos directamente del aula y es precisamente en esta fase donde nos detendremos; en concreto, en el diseño de la investigación, en la recogida de la información y en el análisis de los datos.[1] Sin embargo, consideramos necesario situar el fundamento teórico de nuestros trabajos, que se presenta brevemente y puede verse con mayor detalle en Bruno y Martinón (1999).

Gran parte de los trabajos publicados en educación sobre los números negativos presentan modelos para tratar las operaciones que son válidos sólo para los números enteros (Z). Pensamos que la enseñanza de los números negativos y sus operaciones no puede realizarse desconectada del conocimiento previo de los estudiantes sobre los números, ni tampoco del que adquirirán más adelante. Por ello, entre las formas de abordar la enseñanza de los números negativos entendemos que las más adecuadas serían las que propicien la conexión entre los distintos sistemas numéricos.

Lo que los alumnos conocen sobre los números cubre aspectos diferentes, como ideas abstractas, representaciones gráficas o situaciones reales. La noción de *campo conceptual* (Vergnaud, 1990) nos resultó útil como marco en el que situar estas ideas. Se entiende como campo conceptual al conjunto formado por las situaciones que se corresponden con una idea, así como por los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Así, Vergnaud habla de *campo conceptual aditivo* o *campo conceptual multiplicativo*. Sin embargo, el conocimiento numérico es más amplio y en cierta forma se sitúa en el *campo conceptual numérico* (González, 1995) en el que se incluyen también los aspectos curriculares.

Para reflexionar sobre los elementos del campo conceptual que rodean al concepto de número, distinguimos tres dimensiones del conocimiento numérico adaptadas de los trabajos de Peled (1991) y Sasaki (1993):

- La *dimensión abstracta*: conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas, a las formas de escritura de los números y a reglas operatorias.
- La *dimensión de recta*: representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma.
- La *dimensión contextual*: situaciones concretas en las que se usan los números, aplicaciones o problemas.

La dimensión de recta podría ampliarse para incluir otras representaciones, pero nos restringimos a la recta por ser una representación común a todos los sistemas numéricos, lo que propicia la conexión entre ellos. El tratamiento de las tres dimensiones adquiere mayor importancia en la enseñanza cuando se favorece la

[1] Se puede encontrar mayor información de la investigación en Bruno (2000) y en Bruno y Espinel (2002).

traducción del conocimiento entre ellas. Normalmente, en la enseñanza numérica se enfatizan determinadas traducciones y otras se tratan parcialmente.

Las investigaciones sobre los números negativos dan resultados sobre cada una de las dimensiones e incluso algunas se refieren a traducciones de conocimiento entre dimensiones. Sin embargo, muchos de los resultados se han obtenido sin analizar el tipo de instrucción que recibieron los alumnos sobre este tema (Küchemann, 1981; Peled, 1991; Vergnaud y Durand, 1976). En otros trabajos se ha controlado el tipo de enseñanza recibida por los alumnos (Liebeck, 1990; Lytle, 1994) pero no han contemplado el estudio de las tres dimensiones de conocimiento al mismo tiempo.

Nos situamos en una enseñanza-aprendizaje de los números que abarque al menos el estudio de las tres dimensiones del conocimiento numérico y que promueva las traducciones entre ellas. Si en la introducción de los números negativos abandonamos la dimensión contextual —como suele ocurrir en algunas propuestas curriculares— significa otorgarles un carácter diferente, quizás más abstracto. No obstante, esto no suele ocurrir en el estudio de los números positivos, donde los alumnos conocen múltiples situaciones en las que emplearlos. No parece razonable olvidar la dimensión contextual al introducir los negativos, sobre todo cuando se pueden emplear situaciones similares a las de los números positivos. Similar razonamiento puede seguirse con la recta.

## La Resolución de Problemas Aditivos con Números Negativos

El foco de interés de este trabajo es la resolución de problemas aditivos con números negativos. Nos situamos entonces en la dimensión contextual, aunque la resolución de este tipo de problemas lleva a la relación con las otras dimensiones: con la abstracta, al plantear las operaciones que resuelven el problema y, con la recta, al representar las situaciones.

A continuación, presentamos la terminología que sobre estos problemas usaremos en este trabajo, tomada de Bruno y Martinón (1997a) y adaptada de Vergnaud (1982). Otras posibles clasificaciones pueden encontrarse en González (1997) y Socas, Hernández y Noda (1997).

En primer lugar, diferenciamos entre *historias aditivas simples* y *problemas aditivos simples,* como lo hacen Rudnitsky, Etheredge, Freeman y Gilbert (1995). Una historia aditiva simple es una situación numérica que se describe con una adición $a + b = c$. Por ejemplo, la temperatura por la mañana en la ciudad era de 7 grados sobre cero, a lo largo del día bajó 10 grados y por la noche ya era de 3 grados bajo cero. Cada historia aditiva cuyo esquema es $a + b = c$ da lugar a tres problemas aditivos simples, en función de cuál de las tres cantidades anteriores se convierte en incógnita. Diremos que los problemas son de incógnita 1, 2 o 3 según que la incógnita sea *a*, *b* o *c*, respectivamente y los denotaremos por *i1*, *i2* e *i3*.

En segundo lugar, distinguimos los diversos usos de los números:

- *estados* (e), que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud asociada a un sujeto en un instante —"debo 2"—;
- *variaciones* (v), que expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo —"perdí 2"—; y
- *comparaciones* (c), que expresan la diferencia entre dos estados —"tengo 2 más que tú"—.

La consideración de esos tres usos de los números da lugar a diferentes *estructuras* de historias y de problemas. En este trabajo se han utilizado las estructuras más usuales en la enseñanza:

- *Combinación de estados* ($e + e = e$). Ejemplo: Pedro tiene 3 euros y debe 15 euros. ¿Cuál es su situación económica total?
- *Variación de un estado* ($e + v = e$). Ejemplo: Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?
- *Comparación de estados* ($e + c = e$). Ejemplo: Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?
- *Combinación de variaciones sucesiva* ($v + v = v$). Ejemplo: La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados. ¿Cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?

Diferentes investigaciones han estudiado la resolución de estos problemas por parte de alumnos de primaria o secundaria (Bell, 1986; Bruno y Martinón, 1997b; Marthe, 1979; Vergnaud, 1982; Vergnaud y Durand 1976). Estas investigaciones, de corte muy diferente unas de otras, han estudiado entre otros aspectos: (a) la dificultad de los problemas, (b) los tipos de representaciones (esquemas, recta numérica) y (c) los procedimientos y estrategias de resolución.

De los resultados de estas investigaciones, destacamos las conclusiones de Bell (1986) en las que indicaba que la estructura es determinante en la dificultad de los problemas, con más influencia que el contexto. Esta circunstancia le llevó a recomendar una enseñanza que ayudara a los alumnos a diferenciar las estructuras de los problemas. En Bruno y Martinón (1997b) comprobamos que, aunque el tipo de estructura influye en el éxito de la resolución, es la posición de la incógnita el factor que presenta más dificultades para los alumnos. A partir de esto, nos planteamos desarrollar una metodología de enseñanza que se centrara en que los alumnos distinguieran los problemas según la estructura y la posición de la incógnita.

Rudnitsky et al. (1995) contrastaron dos métodos de enseñanza de los problemas aditivos de combinación de estados, variación de un estado y comparación de estados, con números positivos y con alumnos de primaria. Un método de enseñanza consistió en que los alumnos realizaron prácticas continuas y sistemáticas de resolución de problemas aditivos con números positivos. En el segundo método los alumnos redactaron las historias y los problemas que posteriormente intercambiaron con sus compañeros para resolverlos. El conocimiento sobre los problemas aditivos adquiridos por estos alumnos se contrastó con el de otros grupos de alumnos —*grupos control*—, sobre el que no ejercieron ninguna influencia. Los alumnos contestaron a unas pruebas escritas sobre problemas aditivos inmediatamente después de finalizada la instrucción en el aula y a otras pruebas varios meses después. Los resultados indicaron que los alumnos que siguieron la metodología de redactar los problemas obtuvieron mejores resultados que los otros grupos de alumnos en la prueba realizada varios meses después de terminada la experiencia en el aula.

Nos planteamos si una conclusión similar podría establecerse también para los números negativos, es decir, si una metodología de enseñanza en la que los alumnos escriben los problemas aditivos y aprenden a clasificarlos según sus estructuras ayuda en la comprensión de la situación y lleva a mayor éxito en la resolución. A priori, no podemos decir que sea cierto porque la edad de los alumnos es distinta y porque la problemática con los números negativos es diferente, debido a que un mismo problema se puede resolver con diferentes operaciones de suma y resta, a lo que se añaden también los aspectos formales que rigen el cálculo con estos números. Por ello, realizamos una investigación que en su base coincide con la de Rudnitsky et al. (1995), aunque con algunas matizaciones que explicamos con más detalle en el apartado siguiente.

## Objetivos de la Investigación

Hablaremos de dos métodos de enseñanza de los problemas aditivos:

- *Método redactar.* Los alumnos redactan enunciados de historias y luego de problemas, aprenden a distinguir sus estructuras, los intercambian con sus compañeros y los resuelven.
- *Método resolver.* Los alumnos practican de forma sistemática una amplia variedad de problemas que se les proponen secuenciados en orden de dificultad según la posición de la incógnita.

Además, contamos con unos grupos control sobre los que no ejercimos ninguna influencia metodológica, que siguieron el tema por su libro de texto, estudiaron las reglas operatorias de los números negativos y, posteriormente, practicaron la resolución de problemas aditivos sin poner énfasis en una secuencia según su dificultad y sin distinguir las estructuras.

Apoyándonos en los resultados de Rudnitsky et al. (1995), nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- Analizar si el método redactar consigue mejores resultados en la resolución de problemas aditivos con números negativos que los métodos resolver y los grupos control, con alumnos de 13 y 14 años.
- Estudiar las diferencias o semejanzas entre los métodos en la resolución de problemas, en cuanto a la dificultad de los problemas y a las estrategias de resolución.
- Analizar el método redactar: problemas que escribieron los alumnos, implicaciones para el profesor y dificultades que puede presentar para los alumnos.

Existen tres diferencias fundamentales con respecto a la investigación de Rudnitsky et al. (1995): (a) los problemas se resuelven con números negativos, (b) se estudian los problemas con estructura $v + v = v$, y (c) añadimos los dos últimos objetivos de investigación.

## Los Institutos, el Profesorado y el Alumnado

Las preguntas de investigación llevan a una intervención en el aula, por lo que son fundamentales los centros, el profesorado y el alumnado que participa. En ocasiones, la búsqueda, coordinación e implicación del profesorado o de los centros resulta compleja. Es muy difícil controlar a la perfección estas variables, básicamente porque la realidad la impone el profesorado que está dispuesto a participar, el cual está integrado en un centro determinado y con unos alumnos concretos que condicionan la experiencia. Hay aspectos que pueden controlarse, pero no todos. Por ejemplo, en nuestro caso, la profesora P5 (véase Tabla 1) fue elegida como profesora de los grupos control por haber mostrado en las entrevistas previas cierto recelo a cambiar su forma de tratar los números negativos, aludiendo a problemas de tiempo y a sentirse satisfecha con su manera de enfocarlos con sus alumnos.

La investigación se realizó con alumnos de 13 y 14 años de edad, de 2º curso de educación secundaria obligatoria, en Tenerife (España). La razón que nos llevó a elegir este nivel fue que los alumnos habían tenido en el curso anterior una introducción a los números negativos que continuaba durante ese 2º curso, por lo que el contenido a trabajar formaba parte de la programación. En cada centro se esperó el momento en que estaba programado el estudio de los números negativos. Antes de comenzar la investigación y según la explicación de los profesores, todos los alumnos que participaron en la experiencia estaban iniciados en la suma y la resta de números negativos.

Participaron 9 grupos de alumnos, 4 institutos y 5 profesores. En la Tabla 1 se resume la información referente al método de enseñanza, institutos, profesores, grupos y alumnos participantes.

Con los profesores que participaron se tuvieron reuniones previas al desarrollo del trabajo en el aula con el fin de discutir las características del método y las actividades que iban a seguir, y de analizar los posibles problemas metodológicos que podrían surgir. Todo ello bajo su perspectiva y con el conocimiento de sus alumnos, su centro y su programación. El principal trabajo con los profesores fue la reflexión sobre las estructuras de los problemas. En este sentido, al igual que nos había ocurrido en otras investigaciones, los profesores solían trabajar con problemas aditivos pero no conocían en ocasiones la sistemática de su clasificación.

Tabla 1
*Distribución de los grupos en los métodos*

| Grupos | Número de alumnos | Profesores | Institutos |
|---|---|---|---|
| Método redactar | | | |
| G1 | 17 | P1 | I1 |
| G2 | 17 | P1 | I1 |
| G3 | 23 | P2 | I1 |
| Total | 57 | | |
| Método resolver | | | |
| G4 | 30 | P2 | I1 |
| G5 | 22 | P3 | I2 |
| G6 | 22 | P4 | I3 |
| Total | 74 | | |
| Grupos de control | | | |
| G7 | 19 | P5 | I4 |
| G8 | 20 | P5 | I4 |
| G9 | 16 | P5 | I4 |
| Total | 55 | | |

## Fases de la Investigación, Recogida de la Información y Análisis de los Datos

En una primera fase, los investigadores diseñaron la investigación y redactaron, secuenciaron y temporalizaron las actividades que iban a seguir los alumnos en los métodos redactar y resolver.

En ambos métodos, la experiencia se desarrolló en 10 horas de su horario habitual de matemáticas (2 horas semanales durante 5 semanas). El día 1 se realizó una prueba *inicial* que contenía nueve problemas aditivos con números negativos y el día 10 una prueba *final* con el mismo número de problemas y con iguales estructuras y posición de la incógnita, aunque con diferentes contextos. Finalizada la experiencia, 4 meses después se pasó una prueba de retención del mismo tipo que las dos pruebas anteriores. Los alumnos trabajaron en parejas estables siempre que fue posible; esto es, cuando no se producía una ausencia a clase de su compañero.

En los grupos control no se preparó material curricular específico ni se temporalizaron las actividades por parte de los investigadores. Los alumnos siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto, en el cual había problemas aditivos al final del tema. Sin embargo, se proporcionó a la profesora de dichos grupos los problemas aditivos que iban a seguir los alumnos del método resolver, con vistas a que ampliara el conjunto de problemas tratados en su libro de texto. En resumen, estos grupos de alumnos aprendieron las reglas operatorias de los números negativos, practicaron problemas aditivos sin seguir una secuencia concreta de los mismos, y también resolvieron las pruebas inicial, final y de retención.

Los datos que se utilizan para presentar los resultados se refieren a las pruebas escritas, a los problemas que redactaron los alumnos del método redactar y a las observaciones de aula que hicieron todos los profesores que participaron en la experiencia.

**Pruebas Escritas**

A continuación presentamos las características de los problemas en las tres pruebas, destacándose la estructura de cada problema, el contexto y la operación que lo resuelve. Puede observarse que lo que permaneció similar en todas las pruebas fue la estructura y la posición de la incógnita.

En las pruebas se puntuó cada problema con 1 o 0, según que el resultado estuviese bien o mal. Con lo cual, la calificación de las pruebas osciló entre 0 y 9. Se puntuó con un 1 las soluciones correctas obtenidas a partir de cálculos con números negativos o con números positivos y también las obtenidas a partir de una representación gráfica —básicamente, la recta—.

Tabla 2
*Esquema de los problemas de las pruebas escritas*

| Incógnita–estructura | | Contexto | Problema |
|---|---|---|---|
| | | **Prueba inicial** | |
| *i1* | $e+v=e$ | Ascensor | $(-3)-(-8)=+5$ |
| *i2* | $e+e=e$ | Dinero | $(-43000)-(-13000)=-30000$ |
| *i2* | $e+v=e$ | Temperatura | $(+47)-(-5)=+52$ |
| *i2* | $e+c=e$ | Ascensor | $(-3)-(+5)=-8$ |
| *i2* | $v+v=v$ | Nivel del mar | $(-400)-(+300)=-700$ |
| *i3* | $e+e=e$ | Dinero | $(-650)+(+1700)=+1050$ |
| *i3* | $e+v=e$ | Cronología | $(-580)+(+79)=-501$ |
| *i3* | $e+c=e$ | Nivel del mar | $(-11)+(-4)=-15$ |
| *i3* | $v+v=v$ | Carretera | $(-6)+(+9)=+3$ |
| | | **Prueba final** | |
| *i1* | $e+v=e$ | Carretera | $(-6)-(-10)=+4$ |
| *i2* | $e+e=e$ | Dinero | $(-23000)-(-6000)=-17000$ |
| *i2* | $e+v=e$ | Cronología | $(-56)-(-123)=67$ |
| *i2* | $e+c=e$ | Nivel del mar | $(-4)-(+11)=-15$ |
| *i2* | $v+v=v$ | Ascensor | $(-4)-(+7)=-11$ |
| *i3* | $e+e=e$ | Dinero | $(-1650)+(+3700)=+2050$ |
| *i3* | $e+v=e$ | Temperatura | $(-16)+(+5)=-11$ |
| *i3* | $e+c=e$ | Carretera | $(-7)+(-6)=-13$ |
| *i3* | $v+v=v$ | Autobús | $(+6)+(-15)=-9$ |
| | | **Prueba de retención** | |
| *i1* | $e+v=e$ | Temperatura | $(-3)-(-10)=+7$ |
| *i2* | $e+e=e$ | Dinero | $(-43000)-(-13000)=-30000$ |
| *i2* | $e+v=e$ | Nivel del mar | $(-5)-(-13)=+8$ |
| *i2* | $e+c=e$ | Carretera | $(-6)-(+7)=-13$ |
| *i2* | $v+v=v$ | Autobús | $(+5)-(-12)=+17$ |

Tabla 2
*Esquema de los problemas de las pruebas escritas*

| Incógnita–estructura | | Contexto | Problema |
|---|---|---|---|
| *i3* | $e+e=e$ | Dinero | $(+22000)+(-31000)=-9000$ |
| *i3* | $e+v=e$ | Ascensor | $(+6)+(-8)=-2$ |
| *i3* | $e+c=e$ | Cronología | $(-235)+(+27)=-208$ |
| *i3* | $v+v=v$ | Temperatura | $(+9)+(-12)=-3$ |

Con las tres pruebas se realizó:

- Un estudio estadístico descriptivo de las variables de interés para nuestra investigación: dificultad de los problemas y estrategias de resolución.
- Una ANCOVA para verificar si había diferencias significativas entre los métodos y los grupos de control.
- Para el análisis de los datos se han utilizado los paquetes estadísticos Systat y SPSS.

**Problemas Escritos por los Alumnos del Método Redactar**
En el método redactar los profesores recogieron las historias y los problemas escritos por los alumnos. Se analizaron estos textos teniendo en cuenta cómo los alumnos los clasificaron, redactaron y resolvieron, junto con otros aspectos del lenguaje como los contextos utilizados y la expresión de las situaciones (estados, variaciones y comparaciones).

**Observaciones de Aula**
Los diferentes profesores anotaron las observaciones de clase destacando en ellas las incidencias del aula. Se les indicó que observaran las dificultades del método, en cuanto a la viabilidad del mismo; los comentarios de los estudiantes que consideraran relevantes, especialmente las dificultades y las preguntas que manifestaran en la escritura o en la resolución de los problemas; y, por último, las incidencias del aula en cuanto al comportamiento y la participación de los alumnos. Estas anotaciones sirvieron para elaborar las conclusiones sobre las características del método redactar.

## Enseñanza del Método Redactar

En el método redactar los alumnos aprendieron a distinguir las estructuras de los problemas aditivos y reflexionaron sobre cómo cambia la operación que resuelve el problema en función del dato que se pide. Para trabajar la clasificación de los problemas, con los alumnos cambiamos su denominación original por otra más cercana a ellos. En concreto, los problemas de combinación de estados los denominamos problemas de *todo junto*; los de variación de un estado, problemas de *algo ocurre*; los de comparación de estados, problemas de *compara* y los de combinación de variaciones sucesivas, problemas de *dos cambios*.

La secuencia seguida en los 10 días de trabajo en el aula del método redactar se distribuyeron de la forma que se indica en la Tabla 3. Salvo en determinados momentos, el material con el que trabajamos en clase fue la producción de problemas de los alumnos, que se recogía al finalizar cada sesión de clase.

Tabla 3
*Secuencia de enseñanza del método redactar*

| Días | Actividades | Observaciones |
|---|---|---|
| 1 | Prueba inicial | |
| 2 | Presentación de historias de números positivos | La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números positivos, se debate sobre las diferencias entre ellas y se acuerdan sus nombres: algo ocurre, todo junto, compara y dos cambios. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y debaten sobre las clasificaciones. |
| 3 | Presentación de historias de números negativos | La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números negativos y se debate su clasificación. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones. |
| 4 | Redacción de historias | Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones. |
| 5 y 6 | Redacción de historias y sus problemas correspondientes | La profesora presenta una historia y sus correspondientes problemas. Los alumnos escriben los problemas que surgen a partir de una historia creada por ellos, los resuelven y los intercambian con los compañeros. Algunos de los problemas se escogen para ser discutidos con toda la clase. |
| 7, 8 y 9 | Redacción de historias y sus problemas según una estructura indicada | Los alumnos redactan historias con una estructura indicada previamente por la profesora, resolviendo los correspondientes problemas e intercambiándolos con los compañeros. |
| 10 | Prueba final | |

Como se puede observar, escribir problemas e historias y discutir sus estructuras implica dedicar más tiempo y atención a comprender la situación problemática. También el pasar de la historia a los problemas centra la atención en cómo cambian los problemas y su resolución en función de la incógnita.

Se plantearon momentos de debate, eligiendo alguno de los problemas redactados por los estudiantes con el fin de analizarlo, clasificarlo y resolverlo con toda la clase. Se procuró elegir problemas que tuvieran errores de redacción con el fin de que los compañeros aportaran sus modificaciones. También en los momentos de debate se les pedía explicaciones de cómo resolvían los problemas, lo que nos sirvió para ratificar determinadas dificultades de los problemas. A modo de ejemplo, entre las historias del método redactar presentadas a los alumnos encontramos las cuatro siguientes:

*Todo junto* $(e + e = e)$
Julián está haciendo cuentas para comprarse un ordenador. Para ello, repasa cómo está su situación económica en los bancos donde tiene ingresado el dinero. Pide los extractos de sus cuentas bancarias y observa que en el banco Nova tiene 125.367 pesetas y en el banco Universal debe 237.550 pesetas. Julián concluye que debe 112.183 pesetas, por lo que decide dejar la compra del ordenador para más adelante.

*Algo ocurre* $(e + v = e)$
Un soldado vigila una muralla. La muralla tiene una puerta en su centro 0. El soldado estaba 16 metros a la izquierda de la puerta cuando oyó un ruido que provenía del lado derecho de la muralla. Caminó hacia la derecha 35 metros y se paró al comprobar que había sido una falsa alarma. En ese momento decidió sentarse a descansar, miró hacia la puerta y comprobó que estaba a 19 metros por el lado derecho de la misma.

*Compara* $(e + c = e)$
Roberto es un hombre de negocios que viaja a distintos países. Hoy se encuentra en Roma, donde ha trabajado muy duro en un día agradable. De hecho, observó en un termómetro que la temperatura era de 21 grados sobre cero. Ahora está haciendo su maleta porque mañana se marcha a París. No sabe qué ropa coger, por lo que va a mirar en un periódico la temperatura de París en ese día. Decide coger su ropa de abrigo al calcular que en París tuvieron ese día 24 grados menos que en Roma, ya que la temperatura en París había sido de 3 grados bajo cero.

*Dos cambios* $(v + v = v)$
Ana normalmente regresa a casa desde el instituto en guagua y siempre suele estar bastante llena. Un día que viajaba en la guagua, agobiada por la cantidad de gente que iba en ella, pensó: “¡Si no cabe nadie más! ¿Cómo puede pararse en esta parada?” Contó el número de personas que subían y bajaban en esa parada y

comprobó que bajaron 13 personas y luego subieron 7. "¡Uf!, el número de personas ha descendido en 6 con respecto a las que viajábamos antes de esta parada", pensó Ana más tranquila.

## ENSEÑANZA DEL MÉTODO RESOLVER

El trabajo en el aula con los alumnos del método resolver se desarrolló de acuerdo con la secuencia de enseñanza que se presenta en la Tabla 4:

Tabla 4
*Secuencia de enseñanza para el método resolver*

| Días | Actividad |
|---|---|
| 1 | Presentación y resolución de la prueba inicial. |
| 2 a 9 | Los alumnos resolvieron 30 problemas aditivos con distintos contextos y con las estructuras y posiciones de la incógnita que se indican en la Tabla 2. El trabajo, organizado en 6 secuencias de 5 problemas cada una, comenzó con problemas de incógnita *i3* y continuó con la introducción progresiva de otras incógnitas. |
| 10 | Presentación y resolución de la prueba final. |

Tal como se aprecia en la Tabla 5, en el método resolver también se incide en las diferentes estructuras y posiciones de la incógnita de los problemas, aunque no de forma explícita como si se hace en el método redactar.

El material que se preparó fue la secuencia de problemas que se entregó fotocopiada a cada alumno y que se recogió una vez finalizada la instrucción en el aula.

Tabla 5
*Distribución de los problemas empleados en el método resolver*

| | Secuencia | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Incógnita | Primera | Segunda | Tercera | Cuarta | Quinta | Sexta |
| Estructura $e + e = e$ | | | | | | |
| *i1* | | | | | | |
| *i2* | | 1 | 1 | | 1 | |
| *i3* | 1 | 1 | | | | 1 |
| Estructura $e + v = e$ | | | | | | |
| *i1* | | 1 | | 1 | 1 | 1 |

Tabla 5
*Distribución de los problemas empleados en el método resolver*

| | Secuencia | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Incógnita | Primera | Segunda | Tercera | Cuarta | Quinta | Sexta |
| *i2* | | | 1 | | 1 | 1 |
| *i3* | 2 | | 1 | | | |
| Estructura $e + c = e$ | | | | | | |
| *i1* | | | | | | |
| *i2* | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *i3* | 1 | 1 | | 1 | | |
| Estructura $v + v = v$ | | | | | | |
| *i1* | | | | | | |
| *i2* | | | 1 | 2 | | 1 |
| *i3* | 1 | 1 | | | 1 | |

# RESULTADOS

El estudio estadístico mostró que los métodos redactar y resolver dieron lugar a mejores resultados que los grupos control. Es decir, que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos, como fue el de los métodos redactar y resolver, produjo mejores resultados en la resolución de los mismos por parte de estudiantes de educación secundaria. Por su parte, la estrategia seguida por los grupos control de resolver problemas al final del tema, como aplicación de las reglas estudiadas previamente, no resultó eficaz.

Los resultados del método redactar no fueron tan buenos como los obtenidos por Rudnitsky et al. (1995) con números positivos. El método resolver obtuvo resultados más altos que el método redactar, aunque las diferencias entre ellos no presentó significatividad estadística, siendo los resultados muy próximos.

El estudio descriptivo de las pruebas sirvió para analizar regularidades en todos los grupos de alumnos, con independencia de la enseñanza recibida. Esto ratifica conclusiones de otras investigaciones previas. Así, se ha comprobado que los problemas de incógnita *i2* son más difíciles que los de incógnita *i3*, el contexto *cronología* se muestra especialmente complejo para los estudiantes y el uso de la recta depende del contexto y está determinado por la instrucción.

El análisis de los problemas escritos por los alumnos del método redactar y las observaciones de aula mostraron que los estudiantes pueden tener dificultades iniciales en la escritura de las historias, las cuales pueden ser solventadas con cierta facilidad. La clasificación de los problemas se hace de forma correcta por parte de muchos estudiantes y se observó que los alumnos utilizan contextos diferentes que los que aparecen en los textos, normalmente asociados a aspectos negativos (destrucción, muerte, etc.).

El método redactar puede ser una alternativa de enseñanza, pero no solucionó las dificultades que estos problemas presentan a los alumnos. El método precisa de más tiempo que otros métodos y quizás, con una enseñanza prolongada a lo largo de un curso escolar y no concentrada en un período corto de tiempo, se consigan mejores resultados.

## Reflexiones Finales

Una vez finalizado el estudio nos preguntamos, como investigadores que deseamos seguir progresando, si realmente ha sido eficaz plantear la investigación con los objetivos y el diseño con los que se ha hecho. La investigación aspiraba a conocer un poco más sobre la enseñanza de los problemas aditivos con números negativos. Sabemos que obtener resultados definitivos sobre métodos de enseñanza es muy complejo. Las diferentes investigaciones parecen demostrar que no hay métodos ideales, sino métodos más adecuados para desarrollar o favorecer cierto tipo de conocimiento o de actitudes.

El estudio realizado se ha basado en un método mixto de investigación: cuantitativo al contrastar los métodos y cualitativo al analizar el método redactar. Cada tipo de datos aporta información distinta. Así, el estudio estadístico nos ha permitido ver que los métodos resolver y redactar son viables en cuanto a su efectividad, en contraste con los grupos control. Sin embargo, un método de enseñanza no siempre puede medirse en término de respuestas correctas o incorrectas y hay muchos factores que el estudio estadístico que hemos planteado ha dejado fuera. El análisis de los problemas escritos por los estudiantes y las observaciones de aula han aportado cierta información sobre la posibilidad real de seguir el método redactar. Sin embargo, nos ha faltado analizar de forma rigurosa la realidad del aula en el resto de los grupos, la cual hubiese aportado información importante.

Desde nuestro punto de vista, la investigación se hubiese mejorado realizando entrevistas a los alumnos de los diferentes grupos para contrastar si el tipo de conocimiento adquirido varía de una metodología a otra. Es decir, si con el método redactar se consiguen mejoras en otros aspectos del conocimiento matemático: ¿se comprende mejor la operación que se plantea para resolver el problema o se escribe una operación porque se sabe de antemano cuál es el resultado del problema? Otra cuestión que nos planteamos es si el método redactar consigue fomentar otras actitudes, como detenerse a reflexionar sobre el enunciado o no responder de forma mecánica. Las condiciones están, pero no se ha sistematizado la toma de datos para ver si esto se ha producido.

Otro hecho que hubiese mejorado la investigación es haberla realizado en el primer curso, donde los alumnos trabajan los números negativos, con el fin de controlar mejor el conocimiento previo de los estudiantes.

Las propias características del método redactar facilitan la toma de información en el aula ya que implica una actividad constante por parte de los estudiantes y una mayor verbalización de sus ideas. En contra tiene que no se puede predecir de antemano lo que va a ocurrir en el aula ya que el material con el que se trabaja cada día es la producción de los alumnos.

## Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *Revista EMA*, *5*(3), 236-251.

Bruno, A. y Espinel, C. (2002). Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico. *Educación Matemática*, *14*(1), 82-104.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997a). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática*, *9*(1), 33-46.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997b). Procedimientos de resolución de problemas aditivos de números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(2), 249-258.

Bruno, A. y Martinón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal in Mathematics Education Science and Technology*, *30*(6), 789-809.

González, J. L. (1995). *Los números enteros relativos*. Tesis Doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada.

González, J. L. (1997). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 77-105). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Küchemann, D. E. (1981). Positive and negative number. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 82-87). Londres: John Murray Publishers.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits—An intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 221-239.

Lytle, P. (1994). Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 192-199). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. En D. Tall (Ed.), *Proceedings 3rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-157). Coventry: Warwick University.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Assisi: PME.

Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J. M. y Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 467-486.

Sasaki, T. (1993). The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 262-268). Tsukuba: PME.

Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 46-62). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, *36*, 28-43.

Este documento se publicó originalmente como Bruno, A. (2003). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 137-156). Logroño: Universidad de La Rioja.

Alicia Bruno
Universidad de La Laguna
abruno@ull.es