Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Desarrollando una agenda de investigación: Pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía IX,* 161-176.

Desarrollando una agenda de investigación: Pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas[1]

Marta Molina, Encarnación Castro y Enrique Castro
Universidad de Granada

Resumen

En este artículo resumimos trabajos que abordan cuestiones relacionadas con el uso y desarrollo de pensamiento relacional en el contexto de la resolución de igualdades y sentencias numéricas. Nuestra intención es describir el estado de la cuestión e identificar líneas de investigación abiertas. Previamente detallamos el significado del término pensamiento relacional y señalamos otros términos más frecuentes en la literatura relacionados con este constructo.

Palabras clave

Agenda de investigación, Pensamiento relacional, Igualdades numéricas, Sentencias numéricas, Relaciones aritméticas, Estructura de la aritmética, Meta-estrategias conceptuales.

Abstract

This paper summarizes studies which tackle questions related to the use and development of relational thinking in the context of solving number sentences. Our aim is to describe the state of the art and to identify open research lines. Previously, we detail the meaning of the term relational thinking and we list other terms which are more frequent in the literature and are related to this construct.

Key words

Research agenda, Relational thinking, Numeric equalities, Number sentences, Arithmetic relationships, Arithmetic structure, Conceptual meta-strategies.

[1] Este trabajo ha sido desarrollado dentro del proyecto "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en Educación Matemática" (SEJ2006-09056) financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Económica Europea.

Pensamiento Relacional

Utilizamos el término pensamiento relacional para referirnos a la actividad intelectual de examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus elementos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo (Molina, 2007).

Este constructo es equivalente a lo que Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) denominan meta-estrategias conceptuales, en contraposición con las meta-estrategias procedimentales. Estas últimas se basan en la aplicación de ciertos procedimientos estándares aprendidos, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el pensamiento relacional y las meta-estrategias conceptuales hacen referencia a modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que lo definen (en su estructura), para construir la estrategia de resolución, dejando a un lado la aplicación de métodos estándares.

Nuestro interés se centra en el uso de este tipo de pensamiento, por los alumnos, al resolver igualdades y sentencias numéricas[2], limitándonos al contexto de la estructura aditiva. En este caso, el uso de pensamiento relacional implica centrar la atención en relaciones referentes a las operaciones y los números que componen las igualdades y sentencias, manteniendo el cálculo de las operaciones en un segundo plano. Esto permite la obtención de respuestas a partir del examen de los números o expresiones involucradas y el establecimiento de relaciones entre ellos, sin necesidad de realizar explícitamente todas las operaciones expresadas. Por ejemplo, la respuesta a la igualdad $122+35-35=\square$ puede obtenerse apreciando que, en el miembro izquierdo de la igualdad, se está sumando y restando un mismo número y que, por lo tanto, la cantidad inicial no se ve afectada. El pensamiento relacional también puede ser utilizado abordando de forma flexible el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros de una igualdad o sentencia, por medio del uso de sentido numérico y sentido operacional.

Conexión con otros constructos

Una cuidadosa búsqueda bibliográfica, centrada en el contexto del aprendizaje de la aritmética y el álgebra escolar, nos ha permitido identificar la conexión del *pensamiento relacional* con otros constructos habituales en la literatura de Educación Matemática: cálculo mental, estrategias de cálculo flexible, pensamiento cuantitativo flexible, sentido numérico, sentido operacional, sentido estructural, sentido simbólico y pensamiento cuasivariable (Molina, 2007).

El pensamiento relacional en el contexto del cálculo puede entenderse como pensamiento cuantitativo flexible, en el sentido de Weaver (1957), ya que implica el uso de estrategias o patrones de pensamiento no convencionales. Por su parte, algunas de las estrategias propias del cálculo mental o algunas de las estrategias de cálculo flexible, son modos de cálculo que

[2] Utilizamos el término sentencia numérica para referirnos a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo (expresión completa sin ningún término por determinar). Estos enunciados pueden ser verdaderos o falsos. Por ejemplo, son sentencias las siguientes expresiones $5 + 7 = 9$ y $e^{\Pi} = 1$. Ocurre que toda sentencia verdadera es una igualdad (Por definición las igualdades son siempre verdaderas).

corresponden al uso de pensamiento relacional, en aquellos casos en los que el alumno no está utilizando estrategias aprendidas como procedimientos estándares, sino que está actuando de forma flexible, analizando la expresión a calcular como una totalidad, apreciando su estructura concreta, y haciendo uso de relaciones apreciadas para realizar el cálculo o transformarlo en otro más sencillo de resolver.

En el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, identificamos conexiones del pensamiento relacional con el sentido numérico, el sentido operacional, el sentido simbólico y el sentido estructural. En particular, se observa que el pensamiento relacional, en este contexto, implica el uso de sentido numérico y de sentido operacional, al establecerse relaciones entre los números, operaciones y expresiones consideradas, y utilizarse conocimiento sobre la estructura del sistema numérico, las propiedades de las operaciones y las relaciones entre operaciones, entre otros elementos.

Este tipo de pensamiento también se encuentra vinculado con el uso de sentido estructural, ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas, las igualdades y las sentencias como entidades (totalidades), componente clave en la definición del pensamiento relacional. Adicionalmente, al examinarse objetos o situaciones matemáticas y apreciarse o establecerse relaciones, es necesario identificar subestructuras dentro de la totalidad de la expresión (en especial cuando las expresiones son complejas), compararlas entre sí y apreciar conexiones entre ellas. Todos éstos, componentes propios del sentido estructural según la definición dada por Hoch y Dreyfus (2004, 2005).

En aritmética, cuando se consideran sentencias numéricas que expresan relaciones numéricas ciertas para cualesquiera números, el uso de pensamiento relacional está vinculado con lo que Fujii y Stephens (2001) denominan pensamiento cuasivariable[3]. Este tipo de pensamiento es más específico que el pensamiento relacional ya que es aplicable sólo en sentencias numéricas en las que los números son utilizados para expresar particularizaciones de propiedades matemáticas. Además, es un término más restrictivo en el modo en que las relaciones observadas han de estar siendo concebidas por el sujeto, al exigirse su apreciación como casos particulares de propiedades. Ha de percibirse lo general en el caso particular que se observa.

Estado de la cuestión

Al centrarnos en el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional contextualizado en la resolución de igualdades y sentencias numéricas de suma y resta, identificamos como trabajos de interés aquellos que se centran en el estudio del desarrollo de conocimiento sobre propiedades aritméticas de dichas operaciones, los que analizan el uso de pensamiento relacional en el cálculo o en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, así como los que indagan en el conocimiento de estructura de la aritmética que los alumnos evidencian tanto en contextos aritméticos como en algebraicos. En estos estudios se hace referencia a los términos mencionados en el apartado previo.

[3] Fujii y Stephens (2001) utilizan el término "cuasivariables" para referir al uso de los números en sentencias numéricas que indican una relación matemática la cual es cierta para todos los números (de un determinado conjunto numérico) que se consideren (ej., $23 + 5 - 5 = 23$, $42 + 0 = 42$).

Desarrollo de conocimiento sobre las propiedades aritméticas de suma y resta

Al analizarse el conocimiento de las propiedades aritméticas de la estructura aditiva, se distinguen cuatro contextos en los que los alumnos van desarrollando y manifestando este tipo de conocimiento (ver Figura 1) (Resnick, 1992)[4].

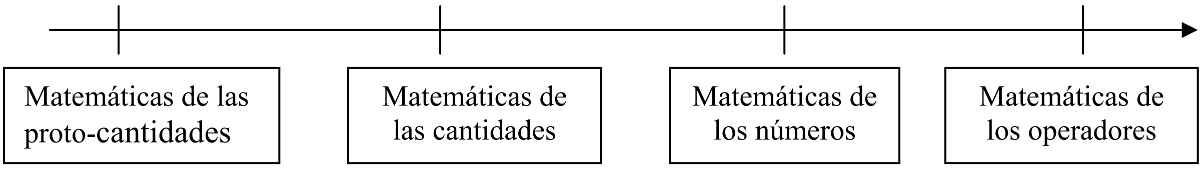

Figura 1: Distintos tipos de contextos matemáticos que distingue Resnick (1992) y su ordenación en el proceso de aprendizaje de las matemáticas del niño**.**

Partiendo de estas consideraciones, los estudios empíricos que analizan el conocimiento de propiedades aritméticas de los alumnos, aportan evidencias de su manifestación en cada uno de estos contextos, exploran el modo en que se desarrolla, e intentan describir el papel que juega el conocimiento de una propiedad en un contexto, en el desarrollo de conocimiento de dicha propiedad en otro contexto matemático “superior” (según la jerarquía establecida en la figura 1).

Entre estos estudios destacamos los realizados por Brush (1978) e Irwin (1996), en los que se explora el conocimiento de algunas propiedades de la estructura aditiva en los contextos de las proto-cantidades, las cantidades y los números, junto a otras investigaciones que centran su atención en una propiedad concreta (propiedad conmutativa, propiedad asociativa, propiedad complementaria de la suma y la resta, y propiedad de compensación).

Brush (1978) observa que niños de cuatro a seis años pueden identificar correctamente qué conjunto tiene más elementos, después de añadirle o quitarle distinto número de elementos a dos conjuntos con igual cardinal. Por otra parte, Irwin (1996) señala que desde los cuatro años los alumnos muestran comprensión de las relaciones dinámicas entre las partes y el todo cuando se realizan cambios sobre una o varias de las partes, considerando cantidades no cuantificadas, de manera previa a ser capaces de predecir dichas relaciones para cantidades cuantificadas. Los alumnos de cinco y seis años, a pesar de tener un conocimiento incompleto de relaciones numéricas y cuantitativas, conocen que la suma de dos números es más grande que el primero de ellos y que la resta de dos números es menor que el primero de ellos.

También se han detectado evidencias de cierta transferencia de conocimiento parte-todo proto-cuantitativo a problemas numéricos y de la dependencia de la comprensión de los hechos numéricos derivados, con respecto al conocimiento de las relaciones entre las partes y el todo y sobre el efecto, en el todo, de los cambios compensatorios en las partes (Irwin, 1996).

Al considerar estudios que centran su atención en el conocimiento de una propiedad de la estructura aditiva, se observa que la *propiedad conmutativa* es la que más atención ha recibido en la investigación. No obstante, los estudios empíricos realizados aportan evidencias contradictorias, en especial con respecto a la relación existente entre el desarrollo de conocimiento sobre esta propiedad a nivel cuantitativo y la experiencia computacional del

---

[4] Las matemáticas de los operadores refieren al uso de los números como cuasivariables, utilizando la denominación de Fujii y Stephens (2001).

alumno, así como sobre si dicha propiedad es inicialmente dependiente del contexto y del tamaño de los números, no siendo comprendida como un principio general hasta que se alcanza el nivel operacional (Baroody y Ginsburg, 1986; Baroody, Wilkins y Tiilikainen, 2003).

En general, sí parece existir consenso en considerar esta propiedad como una de las más accesibles a los alumnos en el contexto de los números (de entre los contextos señalados en la figura 1). La noción primitiva de conmutatividad, denominada proto-conmutatividad, se pone de manifiesto desde muy temprano cuando los alumnos no dan importancia al orden de los términos al realizar cálculos. No obstante, los niños muestran poseer nociones contradictorias sobre el efecto del orden de las operaciones, ya que también asumen que el orden de los números supone una diferencia en la definición de una suma y, por lo tanto, en su resultado. A diferencia de la conmutatividad, la proto-conmutatividad permite, al orden de los sumandos, afectar al resultado de la suma. Parece ser que la proto-conmutatividad es una estrategia para disminuir el esfuerzo cognitivo de la tarea, sin preocuparse por el modo en que pueda afectar al resultado de la operación. Esto evidencia que los alumnos encuentran dificultades al considerar la relación lógica existente entre el método y el resultado (Baroody y Ginsburg, 1986).

Baroody y colaboradores (2003), Cowan (2003) y Schifter, Monk, Russell y Bastable (en prensa) destacan la complejidad del conocimiento de la propiedad conmutativa, observando la tendencia de los alumnos a sobre-generalizar, a todas las operaciones, la no importancia del orden de los términos, y las dificultades iniciales para apreciar que esta propiedad de la suma es cierta para sumandos cualesquiera.

En relación con la *propiedad asociativa,* existen visiones diferentes sobre si se encuentra o no separada de la propiedad conmutativa en las representaciones internas de los niños. Resnick (1992) considera que ambos principios no son diferenciados en su comprensión. Esta conclusión la obtiene a partir de un estudio longitudinal con un alumno que manifestó considerar ambas propiedades como permisos evidentes de la composición aditiva. Por su parte, Schifter y colaboradores (en prensa) observan que la agrupación y reagrupación de sumandos son entendidas por los alumnos como una extensión de la propiedad conmutativa de la suma. Esto sugiere que, desde el punto de vista de los alumnos, la conmutatividad y la asociatividad no son separables. Ambas propiedades responden a la cuestión de si el orden de los sumandos importa. No obstante, estos autores observan que la propiedad asociativa, a diferencia de la propiedad conmutativa, no emerge de forma natural, en los alumnos, a partir de la exploración de los números y sus operaciones.

Otros autores (Canobi, Reeve y Pattison, 2002) afirman que los alumnos desarrollan una versión primitiva de la propiedad conmutativa de forma previa a comprender la propiedad asociativa, afirmando que lo que hace esta propiedad más difícil de comprender son las relaciones conceptuales que la definen en contextos concretos, más que la mera presencia de tres conjuntos de objetos. En un estudio previo, estos mismos autores observaron que un aspecto clave de las diferencias individuales de los alumnos en su conocimiento conceptual de la suma era su tendencia a comprender las propiedades conmutativa y asociativa, comprender sólo la propiedad conmutativa o no comprender ninguna de estas propiedades.

Estos autores resumen algunos estudios previos sobre la comprensión de esta propiedad, en contextos simbólicos o cuantitativos, que coinciden en observar que la comprensión de la propiedad conmutativa precede a la asociativa. No obstante, estos resultados son cuestionables debido a que los problemas propuestos para evaluar la comprensión de la propiedad asociativa requerían más carga cognitiva, al ser necesario recordar los pasos dados por el investigador e involucrar más conjuntos, cantidades o números.

En relación con la *propiedad complementaria de la suma y la resta*, Baroody (1999) observa que no es obvia para los alumnos, al menos en el contexto del simbolismo aritmético, siendo necesario que descubran esta propiedad en su experiencia de cálculo y la conecten con su conocimiento previo. No obstante, los estudios sugieren que la mayoría de los niños de cuatro a seis años reconocen la relación inversa de la suma y la resta en contextos protocuantitativos y cuantitativos (Brush, 1978) y, a partir de los siete años, muestran comprensión de esta propiedad en contextos numéricos y la utilizan de manera implícita al calcular hechos numéricos de resta a partir de una suma (Resnick, 1992).

La propiedad *compensación* ha recibido una menor atención, al no ser considerada una propiedad fundamental de la estructura aditiva. No obstante, cabe destacar un trabajo de Warren (2004) en el que realiza un estudio sobre la comprensión de esta propiedad en el caso de la suma. Dicho estudio muestra que es una propiedad accesible a los alumnos de Educación Primaria, aunque en menor medida que la propiedad conmutativa, debido a que la tendencia computacional de los alumnos aumenta la carga cognitiva de actividades que puedan favorecer la observación de esta propiedad. Además los alumnos manifiestan importantes dificultades para expresar verbalmente sus generalizaciones.

Los estudios consultados aportan evidencias de que los alumnos, en diferentes momentos de su aprendizaje aritmético, ponen de manifiesto conocimiento sobre cada propiedad aritmética en cada uno de los contextos referidos en la figura 1; inicialmente en los contextos proto-cuantitativos y, posteriormente, en los demás, siguiendo el orden indicado en dicha figura. Estos estudios también muestran que, en el contexto de los números, las propiedades son inicialmente concebidas por los alumnos como permisos o restricciones en la combinación, separación y reagrupación de números, siendo necesario un trabajo sin referencia inmediata a cantidades físicas para el desarrollo de su conocimiento formal (Baroody y Ginsburg, 1986; Resnick, 1992). Es necesario realizar un trabajo específico para que la competencia de utilización de estas propiedades de lugar a competencia conceptual.

Uso de pensamiento relacional en contextos de cálculo

El conocimiento sobre las propiedades aritméticas también es puesto de manifiesto por los alumnos al utilizar estrategias inventadas para la realización de cálculos o para la resolución de problemas, las cuales manifiestan desde edades muy tempranas (Carpenter y Moser, 1984; Foxman y Beishuizen, 1999; Resnick, Bill y Lesgold, 1992). Los alumnos hacen uso de pensamiento relacional en el cálculo de operaciones, de forma espontánea, aunque no todos son capaces de descubrir por sí mismos estrategias de cálculo de igual grado de sofisticación.

Estas estrategias, ya sean aprendidas mediante la enseñanza directa o mediante el descubrimiento personal, favorecen el desarrollo de conocimiento sobre el cálculo de hechos numéricos y su transferencia a otros contextos, no siendo un requisito previo para su aprendizaje el tener dominio del cálculo. Además, se observa que los niños que resuelven correctamente un mayor número de hechos numéricos tienden a descubrir y usar relaciones entre hechos numéricos, y los alumnos con peores resultados o con dificultades de aprendizaje, no lo hacen (Myers y Thornton, 1977; Rathmell, 1978).

Estos estudios también han identificado relaciones básicas utilizadas por los alumnos al calcular unos hechos numéricos a partir de otros; entre ellas, las relaciones de dobles y de uno más o uno menos. Otras dos relaciones destacadas, basadas en las anteriores, son "doble más uno" y "números que comparten" (pares de números que se diferencian en dos unidades de modo que pasando una unidad de uno al otro se convierten en una suma de dobles (ej., $6+8=(6+1)+(8-1)$).

También se ha observado que los calculadores mentales hábiles reconocen que existen muchas formas de realizar un cálculo y eligen flexiblemente o, incluso, inventan la estrategia que mejor se adecua a la tarea en cuestión. Constantemente buscan formas de disminuir el esfuerzo del cálculo y son capaces de inventar procedimientos eficaces de cálculo mental, incluso para realizar cálculos que requieren llevada (Baroody y Coslick, 1998; Kamii, 1992). Esta flexibilidad exige comprensión y un sentido numérico bien desarrollado.

En relación con la enseñanza de las estrategias de cálculo flexible, Fujii y Stephens (Fujii, 2003; Fujii y Stephens, 2001) observan que los alumnos de primeros cursos de Educación Primaria no las adoptan de forma inmediata y muestran una gran variabilidad en su capacidad para reconocer la racionalidad de estas estrategias y generalizarlas o aplicarlas a otras situaciones. Estos estudios sugieren que la enseñanza tradicional de las estrategias de cálculo flexibles, que suelen ser propuestas directamente a los alumnos a modo de "trucos" a aplicar en situaciones específicas, puede no estar haciendo accesibles a los alumnos estas estrategias más que como reglas a memorizar. La interpretación de izquierda a derecha propia del simbolismo aritmético, junto con la necesidad de clausura de las expresiones (y, por tanto, la dificultad para considerarlas como totalidades o entidades en sí mismas), dificulta a los alumnos la comprensión de estas estrategias, que pueden parecer obvias o transparentes a los adultos.

Uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas

En la resolución de igualdades y sentencias numéricas de suma y resta, los alumnos de Educación Primaria, al menos a partir de tercer curso, muestran tener estrategias para abordar dicha resolución, aunque en algunas ocasiones no respeten la estructura de las igualdades o sentencias o no hagan uso del significado del signo igual *equivalencia numérica* (Molina y Ambrose, en prensa; Molina y Castro, 2006). Los alumnos muestran una fuerte tendencia computacional y, excepcionalmente, dan evidencias del uso espontáneo de pensamiento relacional en la resolución de igualdades o sentencias verdaderas y falsas basadas en propiedades aritméticas (Ej. $12 + 7 = 7 + \square$, $125 + 0 = 126$). La consideración en el aula de este tipo de sentencias e igualdades parece favorecer la inhibición de la tendencia computacional de los alumnos y la consideración de las sentencias y expresiones aritméticas como totalidades.

En este contexto, los alumnos muestran capacidad para desarrollar y utilizar pensamiento relacional, en especial cuando éste se favorece de manera continuada en el trabajo en el aula (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Koehler, 2002, 2004; Molina, 2005, 2007; Molina y Ambrose, en prensa). Para ello es de utilidad incitar a los alumnos a que resuelvan las sentencias sin realizar todos los cálculos, no enseñándoles estrategias particulares sino propiciando la observación y uso de relaciones aritméticas. Adicionalmente, Koehler (2002, 2004) observa que la modelización de las sentencias puede ayudar a los alumnos a abstraer las relaciones expresadas en las sentencias, en especial a aquellos con más dificultades. Esta autora también obtiene evidencias de que el desarrollo y uso de pensamiento relacional, en el contexto de sentencias e igualdades numéricas, puede facilitar el uso de estrategias de cálculo flexibles en otros contextos.

En nuestro estudio Molina (2007), trabajando con una clase de tercero de Educación Primaria, hemos observado que desde el primer momento en que el uso de pensamiento relacional es promovido en el aula, éste es puesto de manifiesto. Este hecho evidencia que es un tipo de pensamiento que es desarrollado por los alumnos a partir de su aprendizaje/experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza. No obstante, se aprecia que no necesariamente todos los alumnos desarrollan pensamiento relacional o bien que no todos son capaces de aplicarlo o ponerlo de manifiesto en este contexto. Algunos alumnos muestran no prestar atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de ésta, evidenciando cierta rigidez al abordar la resolución de las sentencias y considerando las expresiones que componen ambos miembros como cadenas de operaciones a realizar y no como entidades en sí.

El uso de pensamiento relacional presenta una importante componente individual, manifestándose como un tipo de pensamiento que los alumnos no desarrollan o manifiestan de forma semejante, como resultado de la enseñanza aritmética recibida. Tanto la frecuencia como la sofistificación de dicho uso son variables. El uso y desarrollo de pensamiento relacional parece ser un producto indirecto, más que directo, de su experiencia aritmética previa. Entre los factores que influyen en su uso en la resolución de igualdades y sentencias se identifican: el lugar y modo en que está centrada la atención del alumno al iniciar la resolución de la sentencia y a lo largo de su resolución, la fluctuación de dicha atención, la carga cognitiva de la tarea para el alumno (lo que condiciona que tenga o no atención libre), su menor o mayor tendencia computacional, su modo de concebir los números, las expresiones y la sentencia, su conciencia o conocimiento sobre las dimensiones de variación de una sentencia, sus conocimientos aritméticos y, en general, su experiencia aritmética previa.

La destacada influencia de la experiencia aritmética previa del alumno es también puesta de manifiesto en un estudio de Knuth, Alibali, Mcneil, Weinberg y Stephens (2005) en el que detectan un progreso lineal en el desarrollo de pensamiento relacional a lo largo del último curso de Educación Primaria y dos primeros cursos de Educación Secundaria, sin haberse realizado ninguna intervención específica.

Uso de pensamiento relacional en otros contextos

También se han detectado posibles evidencias del uso de pensamiento relacional en contextos algebraicos al ser justificada la equivalencia de expresiones algebraicas a partir de alguna propiedad o regla (Steinberg, Sleeman y Ktorza, 1990). En particular, la presencia de paréntesis parece facilitar a los alumnos la observación de términos repetidos o estructuras similares (Hoch y Dreyfus, 2004).

En general, el uso de este tipo de pensamiento en la resolución y comparación de ecuaciones y expresiones algebraicas es escaso. Al trabajar con ecuaciones, los alumnos tienden a considerar cada miembro de la ecuación de forma independiente y muestran dificultades tales como creer que al restar un número en ambos miembros de una ecuación van a obtener una ecuación no equivalente, por “tener menos” o estar restándole doblemente un número. Los alumnos también presentan numerosas dificultades en la comprensión del concepto de equivalencia de ecuaciones (Steinberg et al., 1990).

Conocimiento de estructura de la aritmética

En relación con el conocimiento de la estructura de la aritmética, diversos estudios[5] argumentan que los alumnos muestran, en general, un pobre conocimiento procedimental, falta de comprensión de la estructura de las expresiones, al trabajar tanto en contextos aritméticos como en algebraicos, y desconexión entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Booth, 1982, 1999; Cauzinille–Marmeche, Mathieu y Resnick, 1984; Chaiklin y Lesgold, 1984; Herscovics y Linchevski, 1994; Kieran, 1992; Linchevski y Herscovics, 1994; Linchevski y Livneh, 1999; Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Estos estudios señalan diversidad de errores y dificultades, en relación con el conocimiento de la estructura de la aritmética, que a continuación comentamos. Los alumnos suelen utilizar reglas incorrectas de las operaciones y son inconsistentes en su forma de evaluar expresiones. No saben diferenciar entre métodos para juzgar la equivalencia de expresiones, matemáticamente correctos y otros que no lo son, utilizando, en ocasiones, métodos poco rigurosos para obtener su respuesta (Chaiklin y Lesgold, 1984). En unos casos sobre-generalizan propiedades, especialmente la conmutatividad de la suma al caso de la resta, en otros, en cambio, restringen la aplicación de alguna propiedad a las situaciones típicas en las que suelen presentarse en los libros de texto (Cauzinille–Marmeche, Mathieu y Resnick, 1987).

Cometen también errores como violar el orden de las operaciones o no dar importancia a la disposición de los términos o a los signos operacionales que los relacionan, llegando a considerar que una expresión permanece inalterable si se modifica el orden de las operaciones. En general, creen que el orden de la secuencia de las operaciones determina el orden en el que deben realizarse y su tendencia a proceder de izquierda a derecha hace que no consideren necesario el uso de los paréntesis o el orden convencional de las operaciones. En otros casos consideran que el contexto del que procede la expresión determina el orden en el que operar (Herscovics y Kieran, 1980; Booth, 1982, 1999).

Los alumnos, tanto en contextos aritméticos como algebraicos, manifiestan dificultades en la percepción de la cancelación de expresiones, muestran una visión estática del uso de los paréntesis, rechazan el uso del signo igual como expresión de una equivalencia, evidencian falta de habilidad para seleccionar la operación apropiada en la realización de sumas parciales y, en ocasiones, separan los números de los signos operacionales que le preceden o “saltan sobre un término” asignándole su signo al término que le sucede, a su derecha, en la expresión. También destacan las dificultades ocasionadas por el signo menos, el cual utilizan como símbolo separador, lo separan del número o símbolo al que precede o lo asignan a todos los miembros dispuestos a su derecha (como si hubiera un paréntesis) (Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1994; Linchevski y Livneh, 1999).

Es interesante observar el comportamiento, un tanto azaroso, que evidencian los alumnos en relación a la estructura matemática. El modo en que perciben expresiones diferentes y las estructuras con las que las asocian de forma espontánea, dependen de la combinación de números que componen la expresión. Ciertos números parecen invitar a particiones incorrectas de las expresiones. Según Linchevski y Livneh (1999), ante una expresión como

---

[5] Una gran parte de estos estudios consideran la comprensión de la equivalencia de expresiones aritméticas, como elemento de análisis del conocimiento estructural de los alumnos.

$217-17+69$ tienden a proceder de izquierda a derecha, mientras que en $267-30+30$ tienden a separar el término 30 de su operación y a operar $30+30$.

Los estudios consultados también señalan dificultad en la aceptación de la falta de clausura la cual se manifiesta en contextos aritméticos y algebraicos, no obstante estudios recientes (Carpenter et al., 2003; Koehler, 2002, 2004; Molina, 2005, 2007) dan evidencias de que los alumnos de Educación Primaria son capaces de trabajar con expresiones aritméticas sin calcular su valor numérico, al menos en los casos en que estas expresiones han sido diseñadas para favorecer el uso de pensamiento relacional.

Si bien algunas de estas dificultades muestran falta de conocimiento sobre convenciones del lenguaje aritmético, otras evidencian restricciones en la aplicación del conocimiento que poseen los alumnos. En general, su base de conocimiento aritmético no constituye una estructura coherente; este conocimiento no se muestra coordinado. No obstante, estudios como los de Subramaniam y Banerjee (2004) y Hoch y Dreyfus (2004), confirman la capacidad de los alumnos de Educación Primaria para desarrollar conocimiento de la estructura de la aritmética, aunque éste sea un proceso lento y difícil, y señalan la necesidad de encontrar mejores métodos para favorecer su retención.

Cuestiones a investigar

A partir de la consulta de los estudios referidos, relativos al uso y desarrollo de pensamiento relacional, se identifican las cuestiones o líneas de investigación abiertas que comentamos a continuación.

Aunque se tienen evidencias importantes en relación al aprendizaje de las propiedades aritméticas, se requieren más estudios que profundicen en el modo en que se relaciona el conocimiento de propiedades aritméticas en cada uno de los contextos matemáticos señalados por Resnick (1992) y en el modo en que puede promoverse la transferencia de dicho conocimiento de un contexto a otro. Otra cuestión a abordar es la relación existente entre el aprendizaje de unas propiedades y otras. Los estudios consultados hacen referencia a ciertas relaciones de orden en el aprendizaje de algunas propiedades de la estructura aditiva pero las evidencias al respecto son, en ocasiones, contradictorias. Estos estudios se ven limitados por la dificultad de indagar en el pensamiento de los alumnos muy jóvenes debido a su menor capacidad de expresión verbal y escrita, y a la dificultad inherente que supone que "piensen sobre su propio pensamiento o razonamiento" y lo expresen, para que se pueda indagar sobre él.

En esta línea, es importante analizar el diseño de tareas aritméticas que ayuden a los alumnos a desarrollar su conocimiento de las propiedades aritméticas más allá de la competencia de utilización.

Otros estudios consultados se realizan con alumnos de mayor edad y profundizan en el uso de pensamiento relacional en diversos contextos, siendo el cálculo, con diferencia, el más estudiado. Los demás contextos considerados son la resolución de igualdades y sentencias numéricas, la resolución o comparación de ecuaciones, y el estudio de la equivalencia de expresiones aritméticas y algebraicas. Los resultados en este ámbito sugieren la necesidad de explorar el modo en que emerge y se desarrolla el uso de pensamiento relacional en estos contextos, prestando atención a las capacidades y conocimientos necesarios para dicho desarrollo así como a las dificultades que surgen en el proceso. Nuestro trabajo (Molina, 2005, 2007) aborda estas cuestiones en el contexto de las sentencias numéricas.

Otras cuestiones a investigar son el papel que juega el pensamiento relacional dentro de la actividad matemática propia de cada sub-área de las matemáticas, qué contextos de éstas son más adecuados para promover el desarrollo de este tipo de la pensamiento, de qué modo puede promoverse y facilitarse la transferencia del uso de pensamiento relacional entre diferentes contextos, qué relación existe entre el uso de pensamiento relacional en contextos aritméticos y en algebraicos, cómo puede favorecerse el desarrollo de métodos informales de resolución de ecuaciones a partir del uso de pensamiento relacional en tareas aritméticas, así como el modo en que puede promoverse la generalización de las propiedades aritméticas a partir del uso de pensamiento relacional en contextos aritméticos y las dificultades que manifiestan los alumnos en este proceso.

Los trabajos consultados que analizan el conocimiento de estructura de la aritmética que evidencian los alumnos en contextos aritméticos y algebraicos, nos conducen a plantear el interés de analizar la capacidad de uso de pensamiento relacional que es puesta de manifiesto por los alumnos en contextos algebraicos y el modo en que este tipo de pensamiento es evidenciado, cómo puede favorecerse la transferencia de conocimiento de estructura de contextos aritméticos a algebraicos y cómo promover la retención del conocimiento de estructura de la aritmética. También es de interés explorar modos de promover el desarrollo de conocimiento de estructura de la aritmética así como su integración en una enseñanza de la aritmética que promueva el desarrollo de pensamiento relacional.

Para finalizar queremos señalar que las cuestiones abiertas aquí planteadas surgen de los estudios resumidos previamente, pudiendo existir en la literatura algunos trabajos que den respuesta parcial, si no total, a algunas de estas cuestiones y que hayan escapado a nuestra búsqueda bibliográfica. Las cuestiones aquí planteadas pueden conducir al lector a realizar fructíferas búsquedas bibliográficas no centradas en el uso y desarrollo de pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas, como ha sido aquí el caso.

Dirección de contacto:

Marta Molina González, Encarnación Castro Martínez y Enrique Castro Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
Campus de Cartuja
18071 GRANADA
E-mail: martamg@ugr.es, encastro@ugr.es y ecastro@ugr.es

Referencias

BAROODY, A. J. (1999). Children relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137-176.

BAROODY, A. J. Y COSLICK, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power. An Investigative Approach to K–8 Mathematics Instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

BAROODY, A. J. Y GINSBURG, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, N.J.: Laurence Erlbaum Associates.

BAROODY, A. J., WILKINS, J. L. M. Y TIILIKAINEN, S. (2003). The development of children's understanding of additive commutativity: from protoquantities concept to general concept? En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

BOOTH, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

BOOTH, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM.

BRUSH, L. R. (1978). Preschool children's knowledge of addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9,* 44-54.

CANOBI, K. H., REEVE, R. A. Y PATTISON, P. E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology, 22*(5), 513-532.

CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L. Y LEVI, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

CARPENTER, T. P. Y MOSER, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

CAUZINILLE–MARMECHE, E., MATHIEU, J. Y RESNICK, L. B. (1984, abril). Children's understanding of algebraic and arithmetic expressions. Presentado en el encuentro anual de la American Educational Research Association, New Orleans, LA.

CAUZINILLE–MARMECHE, E., MATHIEU, J. Y RESNICK, L. B. (1987). L'Intégration de nouvelles connaissances: entre arithmétique et Algèbre. *European Journal of Psychology of Education*, *11*(1), 41-37.

CHAIKLIN, S. Y LESGOLD S. (1984). *Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.* Technical report, Learning research and development center, University of Pittsburgh, Pennsylvania.

COWAN, R. (2003). Does it all up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies, and principles. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

FOXMAN, D. Y BEISHUIZEN, M. (1999). Untaught mental calculation methods used by 11-years-olds: some evidence from the assessment of performance unit survey in 1987. *Mathematics in School, 27,* 5-7.

FUJII, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1 (pp. 49-66). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

FUJII, T. Y STEPHENS, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.258-264). Melbourne: University of Melbourne.

HEJNY, M., JIROTKOVA, D. Y KRATOCHVILOVA J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME 30.

HERSCOVICS, N. Y LINCHEVSKI, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

HOCH, M. Y DREYFUS, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

HOCH, M. Y DREYFUS, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 145-152). Melbourne: PME.

IRWIN, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part–whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 25-40.

KAMII, C. (1992). *Reinventando la Aritmética II* (B. Jiménez, Trad.). Madrid: Visor.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the NCTM)* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

KOEHLER, J. (2002). *Algebraic Reasoning in the Elementary Grades: Developing an*

Understanding of the Equal Sign as a Relational Symbol. Tesis de master no publicada, Universidad de Wisconsin–Madison, Wisconsin.

KOEHLER, J. L. (2004). *Learning to think relationally: Thinking relationally to learn. Unpublished Dissertation Research Proposal*. University of Wisconsin-Madison.

KNUTH, E. J., ALIBALI, M. W., MCNEIL, N. M., WEINBERG, A. Y STEPHENS, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education], 37*(1), 68-76

LINCHEVSKI, L. Y HERSCOVICS, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 176-183). Lisbon: University of Lisbon.

LINCHEVSKI, L. Y LIVNEH, D. (1999). Structural Sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

MOLINA, M. (2005). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional*. Trabajo de investigación tutelada. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

MOLINA, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis* doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

MOLINA, M. Y AMBROSE, R. (en prensa). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics.*

MOLINA, M. Y CASTRO, E. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional trabajando con igualdades numéricas. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IV*, 91-103.

MYERS, A. C. Y THORNTON, C. A. (1977). The Learning Disabled Child−Learning the Basic Facts. *Arithmetic Teacher, 25*(3), 46-50.

RATHMELL, E. C. (1978). Using thinking strategies to teach the basic facts. En M. N. Suydam y R. E. Reys (Eds.), *Developing Computational Skills. 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.13-38). Reston, VA: NCTM.

RESNICK, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis de arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

RESNICK, L. B., BILL, V. Y LESGOLD, S. (1992). Development of thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou, M. Shayer y A. Efklides (Eds.), *Neo-piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education*. (pp. 210-230). London:

Routledge.

RUANO, R., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds), *Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: Editorial Universidad de Granada.

SCHIFTER, D., MONK, S., RUSSELL, S. J. Y BASTABLE, V. (en prensa). Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Arithmetic Mean in the Elementary Grades? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

STEINBERG, R. M., SLEEMAN, D. H. Y KTORZA, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121.

SUBRAMANIAM, K. Y BANERJEE, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 3 (pp. 121-128). Bergen, Noruega: Bergen University College.

WARREN, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

WEAVER, J. F. (1957). Developing Flexibility of Thinking and Performance. *Arithmetic Teacher, 4*(4), 184-188.