ANÁLISIS DIDÁCTICO Y USO DE TECNOLOGÍA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Pedro Gómez
Universidad de Granada

La tecnología electrónica (calculadoras gráficas y ordenadores) puede llegar a ser un catalizador de los procesos de cambio en el aula de matemáticas. Sin embargo, los efectos de la utilización de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dependen de cómo el profesor diseñe y desarrolle el currículo, de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. El diseño y puesta en práctica de actividades que utilicen la tecnología debe ser un procedimiento sistemático que tenga en cuenta la complejidad de los aspectos conceptuales, procedimentales y cognitivos del tema que se pretenda tratar; que se base en las potencialidades de la tecnología dentro del contexto de los problemas que se quieran abordar; y que utilice coherentemente la información que surge de estos análisis.

TECNOLOGÍA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Existe la creencia de que las nuevas tecnologías electrónicas pueden llegar a ser *la solución* a muchos de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje en la escuela. En el caso de las matemáticas, este mito parece estar aún más difundido en los medios, entre algunos padres de familia y algunas otras instituciones (ver, por ejemplo, Penglase, 1996). El deseo de abordar estos problemas y la creencia en este mito ha llevado a algunas instituciones a invertir ciegamente en tecnología. Todos hemos oído hablar de al menos una institución en la que los ordenadores se cuidan con recelo en una sala a la que cada escolar asiste una o dos veces por semana. Muchos profesores de matemáticas se han encontrado con la obligación de utilizar la tecnología en sus clases de matemáticas, sin saber qué hacer con ella. Aunque la tecnología no puede ser, por sí sola, la solución a ninguno de los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no es posible ignorar sus potencialidades en el aula. Esta importancia se expresa en el *principio de tecnología* de los nuevos estándares de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (Nctm, 2000):

> *Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas… Los escolares pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología… En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología se debe utilizar frecuente y responsablemente, con el objeto de enriquecer el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los escolares, así como también la mejor forma de aprenderlas. En las aulas de matemáticas contempladas en los Principios y Estándares, cada estudiante tiene acceso a la tecnología con el fin de facilitar su aprendizaje matemático, guiado por un docente experimentado. (pp. 24-25, mi traducción)*

La tecnología no es más que un recurso en el aula de matemáticas. Su impacto en el aprendizaje de los escolares depende de muchos factores. Al final de la cita anterior, se mencionan dos de ellos: el acceso a la tecnología y el conocimiento y experiencia del profesor. El principio de tecnología enfatiza dos cuestiones: “qué matemáticas deben aprender los escolares” y “la mejor forma de aprenderlas”. En otras palabras, la pregunta central de este principio se refiere al papel que la tecnología puede jugar en el diseño y el desarrollo de actividades con las que los escolares puedan vivir experiencias matemáticas significativas para su aprendizaje (Gómez, 1997).

Hay muchos tipos de tecnologías que se pueden utilizar en al aula de matemáticas. De hecho, el lápiz y el papel, o la tiza y la pizarra son tecnologías. En este capítulo, me referiré exclusivamente a las tecnologías electrónicas y centraré mi atención particularmente en las calculadoras gráficas. No obstante, los argumentos que presentaré pueden ser válidos parra otros tipos de materiales y recursos. Las calculadoras gráficas son una tecnología electrónica, específica a las matemáticas, que ha venido siendo desarrollada con propósitos didácticos. No entraré en los detalles de los tipos de calculadoras que existen actualmente en el mercado, ni presentaré ejemplos de sus funcionalidades específicas o del tipo de problemas que pueden resolver. Existe una gran cantidad de literatura en este campo (ver, por ejemplo, Casio, 2004; Gómez & Waits, 2000; Sproule, 2004; Ti, 2004a). Cualquier profesor de matemáticas de secundaria que haya tenido una calculadora gráfica a la mano y que se haya aventurado durante un par de horas a seguir las instrucciones de las guías que vienen con ella reconocerá las potencialidades *matemáticas* de este recurso. Desde el punto de vista didáctico, basta con enfatizar que la principal cualidad de las nuevas tecnologías consiste en que le permiten al escolar *vivir experiencias matemáticas que no sería posible vivir de otra manera* (Balacheff & Kaput, 1996). Gracias al hecho de que, con estas tecnologías, es posible explorar y trabajar dinámicamente en las diferentes representaciones de una estructura matemática, este recurso ofrece la posibilidad de nuevas experiencias matemáticas. Con ellas, se puede:

- Simular situaciones y explorar los efectos de cambios en las características de una situación. Por ejemplo, es posible observar los efectos gráficos del cambio en el parámetro b en la representación simbólica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Realizar cómputos complejos. Por ejemplo, las nuevas calculadoras traen módulos algebraicos integrados (del estilo *Maple*) que permiten resolver simbólicamente ecuaciones de muchos tipos.
- Explorar la relación entre las estructuras matemáticas y los fenómenos para los que ellas pueden ser un modelo. Éste el caso del laboratorio basado en la calculadora de Texas Instruments (Ti, 2004c). Por ejemplo, en la Figura 1 se insinúa el uso de este dispositivo para explorar los aspectos matemáticos de la caída y el bote de una pelota (Ti, 2004b, pp 27-30).

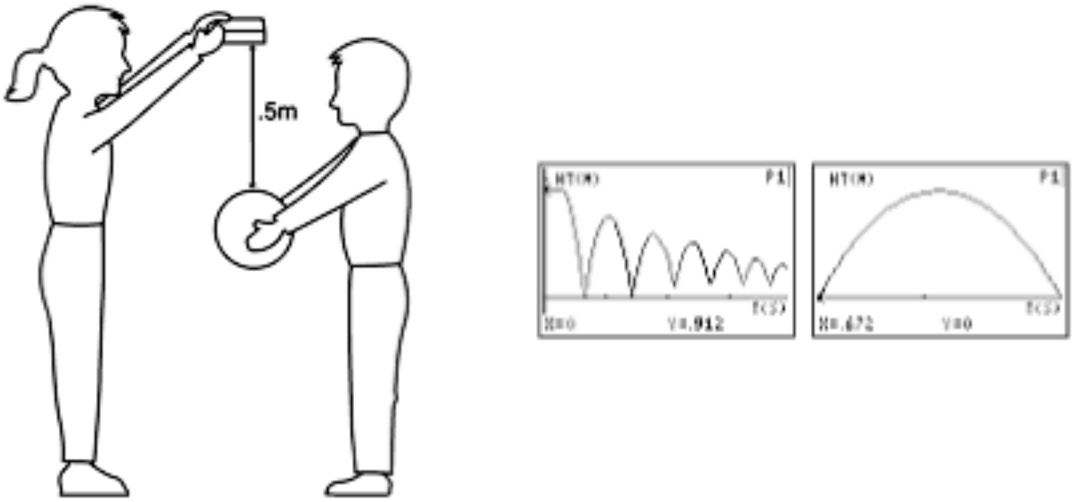


Figura 1. Uso del laboratorio basado en la calculadora. Bote de una pelota

Los estudios sobre los efectos del uso de la tecnología electrónica (ordenadores y calculadoras) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no son conclusivos (ver, por ejemplo, Kissane, 2002; Penglase, 1996; Ruthven, 1995). La mayoría de estos estudios exploran los efectos de la tecnología dentro de condiciones controladas que no son necesariamente posibles de reproducir en el aula de matemáticas de todos los días. Algunas de estas condiciones tienen que ver, por ejemplo, con:

- el acceso a la tecnología,
- la formación del profesor,
- las visiones que se tienen sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje, y
- el papel del currículo.

El acceso a la tecnología parece ser una de las variables centrales a la hora de valorar los posibles efectos del uso de la tecnología. Al analizar 54 trabajos de investigación, Ellington {2003 #2437} que las capacidades operacionales y de resolución de problemas de los escolares mejoraron cuando las calculadoras se utilizaron como una parte integral de la evaluación y la instrucción. Los resultados no son conclusivos cuando la tecnología no se utiliza en la evaluación, pero, en todo caso, la presencia de la tecnología nno fue perjudicial para el desarrollo de las capacidades matemáticas de los escolares. encontró queEl acceso a la tecnología se puede describir en dos dimensiones: quién tiene la tecnología disponible y en qué momento la tiene disponible. La primera columna de la Tabla 1 muestra quién y cómo se tiene acceso a la tecnología. En algunos casos, solamente el profesor tiene un ordenador o una calculadora disponible; en otros casos, los escolares tienen que compartir el ordenador o la calculadora, o tienen acceso individual a la máquina. Por otro lado, los escolares pueden no tener ningún contacto con las máquinas, usarlas esporádicamente, solamente en clase o tenerlas disponibles en todo momento, incluso en casa.

	Nunca	Esporádicamente	En clase	En todo momento
Sólo el profesor				
Parejas o grupos				
Individualmente				

Tabla 1. Acceso a la tecnología

Las casillas de la Tabla 1 se pueden recorrer de izquierda a derecha y de arriba abajo. Por ejemplo, la casilla en la primera fila y la segunda columna representa aquella situación en la que el profesor lleva un ordenador o una calculadora a clase y hace algunas demostraciones con ellos. Los escolares son *espectadores* en esa demostración. La casilla correspondiente a la segunda fila y segunda columna corresponde, por ejemplo, a una situación en la que, de vez en cuando el grupo de alumnos visita la sala de informática y cada escolar tienen que compartir un ordenador con uno o más compañeros. La situación en la que el profesor lleva al aula una maleta de calculadoras para que se usen durante la clase corresponde a la casilla de la segunda fila y la tercera columna. Finalmente, la casilla correspondiente a la tercera fila y la cuarta columna corresponde a aquella situación en la que cada escolar tiene a su disposición una calculadora que puede llevar a casa. Seguramente la situación ideal es ésta última. Pero, en la realidad, cada institución y cada clase tiene su situación particular. Qué tecnología y cómo y para qué se use depende por lo tanto de qué tipo de acceso tengan profesor y escolares a ella. En este sentido, éste es uno de los factores que pueden afectar los resultados que se obtienen en los estudios que exploran los efectos del uso de la tecnología.

La formación del profesor es otro factor importante. El tipo de experiencias que los escolares pueden vivir con el uso de la tecnología depende del tipo de actividades que les proponga el profesor. Y el abanico de posibles actividades que el profesor puede proponer depende, entre otras cosas, de su conocimiento del funcionamiento y las potencialidades de la tecnología. Cada vez aparecen nuevos modelos de calculadoras y nuevos programas de ordenador con nuevas funcionalidades. No es fácil mantenerse al tanto de estos "progresos". Las visiones del profesor sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza también pueden determinar el tipo de actividades que él les proponga a los escolares cuando la tecnología está presente. Estas actividades serán diferentes si el profesor considera que las matemáticas son un conjunto de procedimientos que sirven para resolver ejercicios de carácter simbólico que se aprenden realizando muchos ejercicios similares e identificando aquellos en los que se ha incurrido en un error, o si el profesor considera que las matemáticas son un cuerpo de conocimientos que se construyen socialmente, forman parte de la cultura, para los que no existe una verdad absoluta y que juega un papel en la vida de los escolares más allá de sus experiencias dentro del aula.

El acceso a la tecnología y el conocimiento y las visiones del profesor son tres ejemplos de los múltiples factores que pueden afectar el tipo de efectos que el uso de la tecnología puede tener en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es en este sentido que los estudios sobre el impacto del uso de la tecnología en el aula de matemáticas no pueden ser conclusivos. Qué matemáticas aprenden los escolares y cómo las aprenden depende de muchas variables que no es posible controlar por fuera de los entornos de investigación de los estudios específicos. No obstante, el aprendizaje de los escolares sí depende directamente del tipo de experiencias matemáticas que ellos puedan vivir dentro y fuera del aula. Éste es un factor general que incluye a las demás variables. Dentro de todas las experiencias matemáticas que los escolares pueden vivir, nos interesan específicamente aquellas en las que, como profesores, podemos influir. Esas son las actividades que surgen de las actividades que nosotros les proponemos. Es decir, son aquellas experiencias que son producto del diseño y el desarrollo curricular.

Las reflexiones anteriores pretenden centrar la problemática del uso de la tecnología electrónica en el aula en los procesos de diseño y desarrollo curricular. Aunque hay muchos aspectos de la relación entre tecnología y enseñanza de matemáticas, mi interés en este capítulo se focaliza en la relación entre el diseño y desarrollo curricular y el papel que la tecnología puede jugar en esos procesos. Pretendo abordar una pregunta que supongo que muchos profesores se hacen cuando se enfrentan al uso de la tecnología: “Si ahora tengo este recurso disponible en clase, ¿qué actividades les propongo a mis alumnos para hacer el uso más eficaz y eficiente posible del mismo?”

CURRÍCULO Y TECNOLOGÍA

Supongamos que estamos trabajando la función cuadrática con nuestros alumnos de bachillerato. De las clases anteriores, sabemos que la mayoría de ellos son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento y la caracterización de esta función (por ejemplo, pueden identificar los diferentes elementos de las representaciones simbólicas y gráficas, evaluar una función, producir representaciones gráficas de funciones cuadráticas específicas y dar ejemplos de funciones cuadráticas con diferentes tipos de raíces, entre otras cosas (Lupiánez, 2004). Sin embargo, nuestra experiencia de años anteriores (que podría ser corroborada en la literatura) nos ha mostrado que los escolares tienen dificultades para establecer la relación entre las diferentes representaciones simbólicas y la representación gráfica de la función. Esto quiere decir, por ejemplo, ser capaz de reconocer y de utilizar hechos como que el parámetro a representa la dilatación de la gráfica, que los parámetros h y k en la expresión $f(x) = (x-h)^2 + k$ identifican las coordenadas del vértice, o que los parámetros r_1 y r_2 en la expresión $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ identifican los cortes de la gráfica con el eje x (ver Figura 2). En otras palabras, nuestro interés se centra en lograr que nuestros alumnos sean capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros.

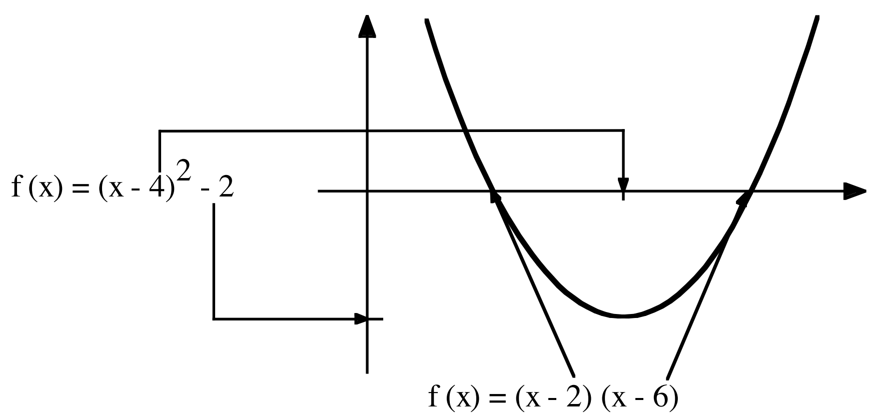


Figura 2. Relación entre elementos simbólicos y gráficos

Nuestro problema consiste entonces en encontrar formas de contribuir a que nuestros alumnos puedan superar estas dificultades y quisiéramos utilizar la tecnología como un recurso para abordarlo y solucionarlo. ¿Qué podemos hacer? No basta con decir que vamos a utilizar calculadoras gráficas u ordenadores en clase. Cuando estemos en el aula, tendremos que proponer algún tipo de actividad. Es en estas circunstancias en las que la frase “voy a utilizar las calculadoras gráficas para trabajar en el significado gráfico de los parámetros de las representaciones simbólicas de la función cuadrática” es una frase general que asume sentido únicamente cuando propongamos un diseño curricular que podamos desarrollar en el aula. ¿Qué tipos de actividades podemos proponer?

Una primera aproximación podría ser *mostrar* esas relaciones. Podríamos llevar un ordenador o una calculadora gráfica al aula y mostrar que cambios en el parámetro a de la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ implican cambios en la dilatación de la gráfica resultante.

Inclusive podríamos utilizar las potencialidades de la calculadora para realizar una simulación en la que se produzca la familia de funciones que resulta de variar los valores del parámetro b en $f(x)=2x^2+bx-2$ y podríamos sacar conclusiones sobre el significado gráfico de este parámetro.

Otra posibilidad sería que diseñáramos unas actividades en las que nuestros alumnos pudieran *ver* en sus calculadoras los efectos gráficos de cambiar los parámetros. O podríamos proponerles una actividad con dos listas de objetos: una lista de representaciones simbólicas y una lista de representaciones gráficas. Les podríamos pedir que, *sin ayuda de la calculadora*, establecieran los emparejamientos correspondientes. Una vez hechos los emparejamientos, les podríamos sugerir que utilizaran la calculadora para verificar sus respuestas. También podríamos hacer una búsqueda en la red y escoger alguna de las actividades que allí se encuentran y que puedan tener alguna relación con el tema del significado gráfico de los parámetros. Las anteriores serían algunas estrategias posibles para utilizar la tecnología en nuestra clase. Pero, ¿es ésta una aproximación *eficaz* y *eficiente* al problema? En otras palabras,

1. ¿estamos abordando el problema que nos interesa?
2. ¿tenemos algún grado de certidumbre de que nuestra aproximación va a resolver el problema?
3. ¿estamos logrando los mejores resultados posibles con los recursos que tenemos disponibles (i.e., las calculadoras gráficas)?

EL PROBLEMA Y LA COMPLEJIDAD DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Las tres preguntas son importantes. Y aunque *intuitivamente* tendemos a pensar que las respondemos afirmativamente cada vez que proponemos actividades a nuestros alumnos, un análisis más detallado de cada una de ellas puede desvelar la gran complejidad que existe en los procesos de diseño y desarrollo curricular. Exploremos cada una de las preguntas por separado. ¿Cuál es el problema? Todas las actividades que hemos mencionado tienen que ver con la problemática del significado gráfico de los parámetros de las representaciones simbólicas de la función cuadrática. Pero esto no quiere decir que estemos necesariamente abordando el problema que nos propusimos al comienzo. Que nuestras actividades tengan como *contenido* el significado gráfico de los parámetros no implica necesariamente que, al realizar esas actividades, nuestros alumnos desarrollen la capacidad para resolver problemas que involucren esas características de la función cuadrática y puedan superar las dificultades que tienen al respecto. La función cuadrática es una estructura matemática compleja y el tema que nos interesa es tan sólo una faceta de esa complejidad. Aunque nuestro problema es *cognitivo* (queremos que nuestros alumnos desarrollen unas ciertas competencias y superen unas ciertas dificultades), comprender y abordar ese problema cognitivo requiere que nosotros, como profesores, conozcamos con algún detalle la complejidad conceptual y procedimental que se encuentra involucrada en la estructura matemática de la función cuadrática. El problema cognitivo que nos interesa tendrá significado cuando tengamos una descripción suficientemente detallada de la estructura matemática a la que se refiere. Para ello, es necesario realizar un *análisis de contenido* de la estructura matemática en cuestión[1].

---

[1] El análisis de contenido es uno de los cuatro análisis del *análisis didáctico*. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar

No pretendo en este documento presentar un análisis de contenido detallado de la función cuadrática. En la Figura 3 presento una estructura conceptual general del tema. En ella se aprecia la identificación de cuatro sistemas de representación y del aspecto fenomenológico. Es posible desarrollar en detalle cada una de las representaciones, estableciendo sus elementos (conceptos) y las relaciones entre ellos (procedimientos). Por ejemplo, se podrían desarrollar en detalle cada una de las formas simbólicas y establecer los procedimientos que las relacionan (i.e., completación de cuadrados para pasar de la forma simbólica estándar $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, ver Figura 5).

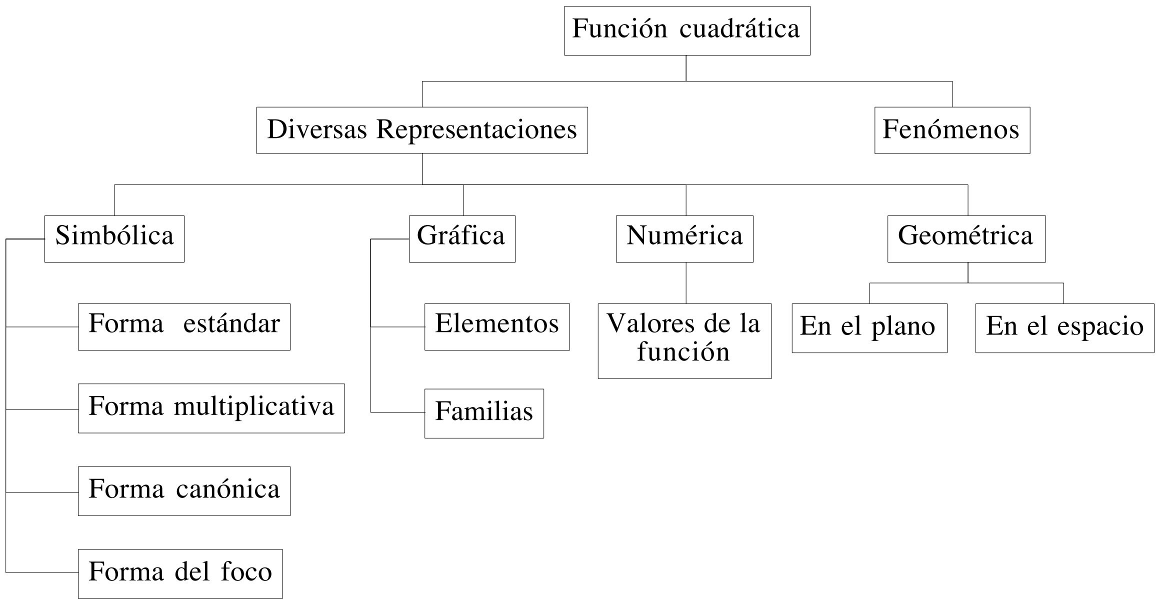


Figura 3. Estructura conceptual de la función cuadrática

En la Figura 4 se aprecian algunas de estas relaciones. Observamos ejemplos de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra y de las posibles relaciones entre fenómenos y subestructuras de la función cuadrática que les pueden servir de modelo. Y también observamos una primera aproximación a la relación entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico (que se llama, en la Figura 4, *traducción entre sistemas de representación*). Esta relación se establece entre *elementos* de las diferentes formas simbólicas (los parámetros) y elementos de la representación simbólica (i.e., vértice, cortes con los ejes, foco, directriz). Aunque no se representa en la figura, hay una gran variedad de conexiones entre estos elementos. Por lo tanto, desde el punto de vista del *análisis de contenido*, podemos apreciar la gran complejidad de la competencia que se encuentra en la base del problema que queremos abordar en clase.

actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002). Está compuesto por el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

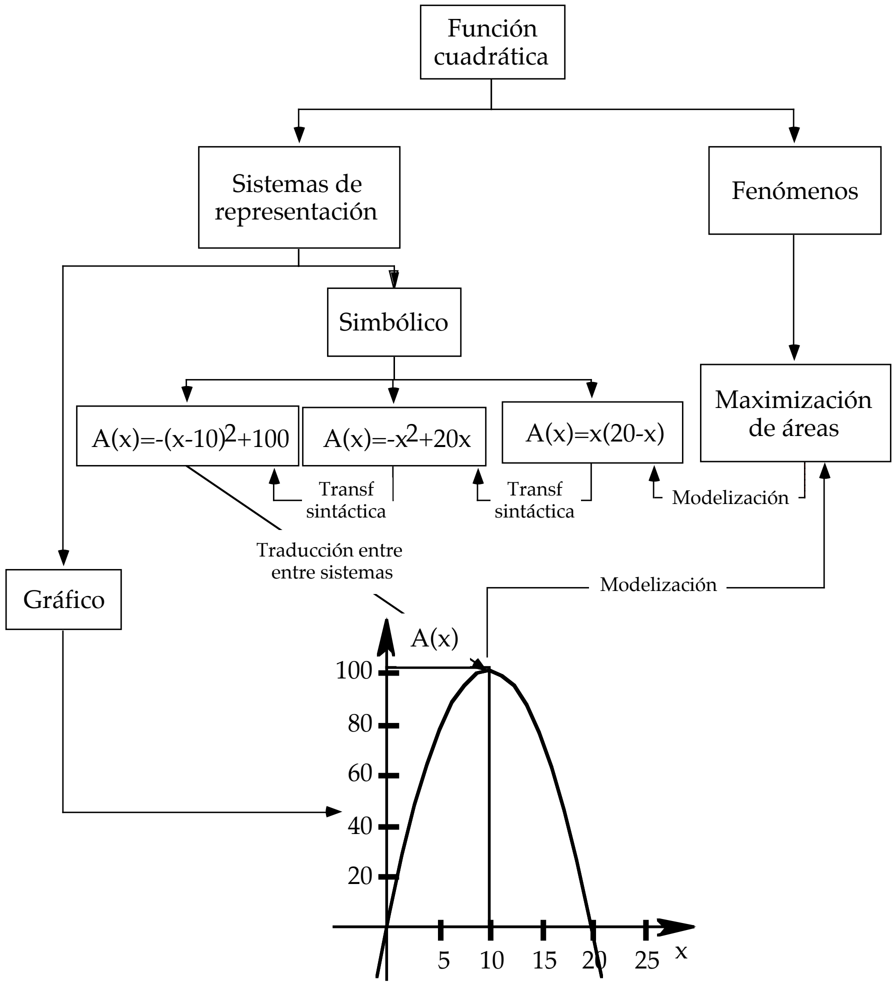


Figura 4. Conexiones en la estructura conceptual de la función cuadrática

De hecho, podemos abordar con claridad la definición de los aspectos cognitivos gracias a la descripción que hacemos de la estructura matemática con el análisis de contenido. En la Figura 5, he retomado la función $f(x)=(x-4)^2-2$ de la Figura 2 y he incluido algunos de los procedimientos simbólicos y gráficos que pueden estar involucrados en su análisis. He omitido el análisis del foco y la directriz y su correspondiente forma simbólica para evitar una mayor complejidad en el esquema. Este análisis más detallado muestra que el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar el manejo de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra, los procedimientos simbólicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica y las transformaciones gráficas a partir de la forma simbólica estándar $f(x)=x^2$.

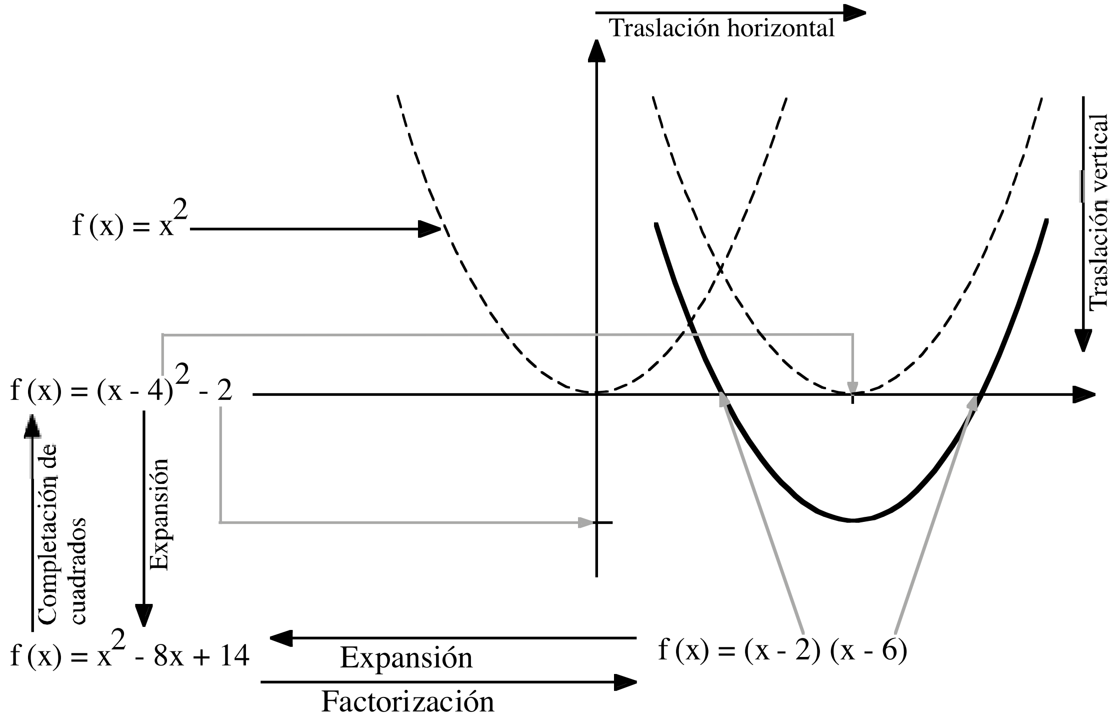


Figura 5. Conexiones y procedimientos

En la Figura 5 podemos observar la conexión entre la complejidad del análisis de contenido y la complejidad del análisis cognitivo. La competencia "manejo del significado gráfico de los parámetros" implica otras competencias y tiene su propia estructura y complejidad. Esto significa que no podemos considerarla de manera aislada. La competencia en la que nos hemos interesado forma parte de un grupo de competencias que tiene que ver con el manejo de procedimientos complejos relacionados con la función cuadrática. Otros procedimientos de este tipo pueden ser, por ejemplo, el identificar características comunes de familias de parábolas o relacionar diferentes parábolas con la parábola estándar $y = x^2$. Pero hay otros *grupos* de competencias que menciono aquí con el propósito de ubicar la competencia que nos interesa dentro del contexto del análisis cognitivo (Lupiánez, 2004):

- reconocer y caracterizar funciones cuadráticas (i.e., dar argumentos para justificar porqué una función es cuadrática o no),
- manejar procedimientos simples relacionados con la función cuadrática (i.e., identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la representación gráfica de una función cuadrática),
- estudiar la existencia de soluciones reales de una función cuadrática (i.e., dar ejemplos de funciones cuadráticas con dos raíces reales, con una raíz real doble y sin ninguna raíz real),
- encontrar las soluciones reales (si existen) de una función cuadrática (i.e., dar argumentos para acotar las raíces reales de una función cuadrática),
- describir situaciones y contextos relacionados con la función cuadrática (i.e., describir dónde pueden encontrarse formas u objetos parabólicos en nuestro entorno), y
- resolver problemas en diferentes situaciones y contextos del mundo real, a través de una función cuadrática o de alguna de sus propiedades (i.e., expresar matemáticamente, en términos de una función cuadrática, situaciones del mundo real).

Cada uno de estos grupos de competencias se puede caracterizar en términos de una serie de competencias específicas (de las que he dado un ejemplo). Además de estas *competencias cognitivas específicas* a la función cuadrática, deberíamos tener también en cuenta aquellas *competencias cognitivas genéricas*, relacionadas con el pensamiento matemático (i.e., ejemplificar, relacionar, generalizar), con la justificación (desarrollo y valoración de argumentos para justificar afirmaciones), y con la comunicación (capacidades para expresar, comprender y valorar afirmaciones de carácter matemático). Finalmente, también podríamos tener en cuenta competencias de tipo *meta cognitivo* (de regulación y control de los propios procesos cognitivos) y de tipo *actitudinal* (relacionadas con las actitudes hacia y las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas) (Lupiánez & Rico, 2004).

Desde el punto de vista cognitivo, debemos también tener en cuenta los obstáculos y dificultades a los que se enfrentan los escolares cuando abordan problemas relacionados con el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática. Nuestra propia experiencia como profesores nos debe permitir identificar algunos de ellos. También los podemos encontrar en la literatura. Por ejemplo Zaslavsky (1997) identifica los siguientes obstáculos relacionados con nuestro problema (ella los describe en términos de características del conocimiento de los alumnos):

- La gráfica de la función cuadrática parece estar limitada a la parte visible del dibujo. La gráfica de la función cuadrática parece tener un par de asíntotas.
- Se tiende a pensar que una parábola puede pasar por tres puntos colineales. Se hace una similitud entre los coeficientes de la función lineal y la función cuadrática, desde el punto de vista de su función en la representación gráfica.
- No se acepta como miembros de la familia de cuadráticas aquellas funciones que tienen alguno de sus coeficientes igual a cero.
- El vértice de la parábola se determina únicamente a partir de su abcisa.

Por su parte, Gómez y Carulla (1998) identificaron las siguientes dificultades originadas en la instrucción:

- Reconocimiento de dos únicas formas simbólicas (estándar y factorizada).
- Desconexión entre las formas simbólicas.
- Desconexión entre los diferentes sistemas de representación.
- Visión de los procedimientos de transformación simbólica y de construcción de gráficas como cuestiones que hay que aprender porque se pueden evaluar.

La enumeración y descripción de obstáculos y dificultades tiene sentido cuando ya hemos identificado y caracterizado las competencias correspondientes al tema en cuestión. El análisis de las competencias nos permite identificar el punto inicial (lo que nuestros alumnos son capaces de hacer ahora) y el punto final (lo que quisiéramos que nuestros alumnos fuesen capaces de hacer después de la instrucción) de un proceso. El análisis de los errores, los obstáculos y las dificultades nos indica las cuestiones claves que tenemos que tener en cuenta dentro de ese proceso.

En resumen, el *análisis cognitivo* de nuestro problema es una cuestión compleja. Esta complejidad está vinculada con la complejidad de la función cuadrática como estructura matemática dentro de las matemáticas escolares. Por lo tanto, el problema que identificamos al comienzo, relacionado con el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática, que parecía, “relativamente” sencillo, adquiere otra dimensión. Esta dimensión expresa la complejidad de los temas de las matemáticas escolares cuando los analizamos desde la perspectiva del *análisis didáctico*. Tenemos, ahora sí, bases para responder a la primera pregunta. La información que surge de los análisis de contenido y cognitivo nos permite dar significado a la frase "significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática" y, de esta manera, reconocer la complejidad y la estructura de los aspectos conceptuales, procedimentales y cognitivos involucrados.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN Y TECNOLOGÍA

La complejidad de las matemáticas escolares que he puesto en evidencia en el apartado anterior implica que hay también una cierta complejidad en los procesos de diseño y selección de actividades para la enseñanza (el *análisis de instrucción*). No podemos suponer que *cualquier actividad* que tenga que ver con el problema que queremos abordar y que ponga en juego la tecnología de alguna manera vaya a tener éxito desde el punto de vista del aprendizaje de nuestros alumnos. ¿Cómo diseñar o seleccionar actividades? ¿Qué actividades podemos llevar al aula que aborden el problema y utilicen eficaz y eficientemente la tecnología disponible? Para responder esta pregunta tenemos que analizar las potencialidades que nos ofrece la tecnología, *dentro del contexto del problema que queremos abordar*.

Podríamos llevar algunas transparencias con gráficas parecidas a las del apartado anterior y *mostrárselas* a nuestros alumnos. Podríamos también *explicarles* esas relaciones. Inclusive, podríamos hacer este tipo de demostración con la ayuda de una calculadora gráfica y el retro proyector. Pero, ¿tendremos alguna certidumbre de que este tipo de actividad, en la que los escolares son *espectadores* en una demostración, les ayudará a desarrollar las competencias y a superar los obstáculos y las dificultades que mencionamos arriba? Yo creo que no. Para desarrollar esas competencias y superar estos obstáculos y dificultades se requiere que nuestros alumnos puedan vivir experiencias matemáticas en las que ellos *pongan en juego* su conocimiento y puedan *reconocer* que los errores en los que incurren son producto de un conocimiento parcial que deben reelaborar. Por lo tanto, al menos para el tipo de problema que queremos abordar, las actividades que propongamos deben inducir a nuestros alumnos a *actuar*. No pueden ser actividades en las que ellos jueguen el papel de espectadores. ¿Cómo nos puede ayudar la tecnología para lograr estos propósitos?

Ya hemos visto que tecnologías como la pizarra y la tiza, el retro proyector de transparencias o la calculadora gráfica manejada exclusivamente por el profesor no son necesariamente muy eficaces para nuestro problema. Debemos utilizar tecnologías con las que nuestros alumnos pongan en juego su conocimiento matemático. El lápiz y el papel son esenciales. Para el tema que estamos tratando, la calculadora gráfica puede llegar a ser una tecnología eficaz. Recordemos que la calculadora gráfica permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación. Esta es la característica de esta tecnología que corresponde directamente con el problema que queremos abordar. Observemos que, para este problema, no necesitamos utilizar otras potencialidades de la calculadora gráfica (como la posibilidad de realizar cómputos complejos, o la de explorar la relación entre la estructura matemática y los fenómenos de los que puede ser un modelo matemático). En este caso, nos interesa la capacidad de la calculadora gráfica para producir y relacionar rápida y dinámicamente las representaciones simbólica, gráfica y numérica de la función cuadrática. Esto implica que, dependiendo de las actividades que propongamos, nuestros alumnos podrán, entre otras cosas:

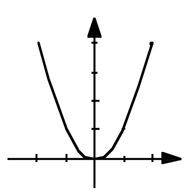
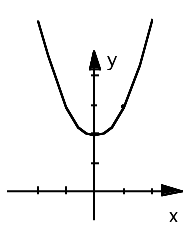
- producir la gráfica de cualquier expresión simbólica de una función cuadrática,
- observar valores específicos de una función cuadrática y relacionarlos con las representaciones simbólica y gráfica,

- manipular y observar los efectos gráficos de cambios en los valores de los parámetros de una forma simbólica,
- producir conjeturas al respecto y verificarlas.

No obstante, esto no significa que *cualquier* actividad en la que nuestros alumnos deban "hacer algo" con la calculadora gráfica sea eficaz desde el punto de vista del problema que nos interesa. Por ejemplo, darles una lista de expresiones simbólicas de funciones cuadráticas y pedirles que produzcan sus gráficas contribuiría muy poco a superar sus obstáculos y dificultades. En este tipo de actividad, ellos no ponen en juego el conocimiento del que surgen esos obstáculos y dificultades. Algo similar puede suceder si les pedimos que *observen* simulaciones en las que se representan gráficamente cambios en los parámetros de la expresión simbólica. Entonces, ¿qué tipos de actividades podemos proponer? No hay un procedimiento sistemático para ello, más allá de establecer la relación entre la descripción detallada de nuestro problema y las potencialidades de los recursos que tenemos disponibles. En lo que sigue, analizamos una de estas actividades.

EJEMPLO DE UNA ACTIVIDAD

La actividad que presento a continuación forma parte de una serie de actividades desarrolladas en "una empresa docente" (Gómez, Mesa, Carulla, Gómez, & Valero, 1996). En esta actividad presentamos algunas características de un objeto matemático y le pedimos a los escolares que identifiquen el objeto en cuestión y describan otras de sus características. La actividad requiere que se rellenen los espacios en blanco de la Tabla 2 (en las gráficas, cada marca representa una unidad). En clase, se espera que el profesor organice a los escolares en grupos de tres o cuatro alumnos, cada uno con una calculadora gráfica. Los grupos trabajan en la actividad y el profesor guía y promueve la discusión interna en los grupos. Cuando los escolares han trabajado en la actividad, el profesor genera una discusión en clase a partir de la presentación de las propuestas de los diferentes grupos.

Gráfica	Expresión simbólica	Vértice	Eje de simetría	Foco	Directriz	Acción con relación a $y = x^2$	Raíces	Corte con el eje y
	$y = x^2$	(0,0)	$x = 0$	$(0,\frac{1}{4})$	$y = -\frac{1}{4}$	Ninguna	*0*, doble	$y = 0$
		(0,2)		$(0,\frac{9}{4})$	$y = \frac{7}{4}$	Traslación en y de dos unidades hacia arriba	$\Re$	

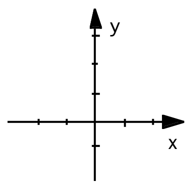
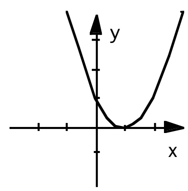
Gráfica	Expresión simbólica	Vértice	Eje de simetría	Foco	Directriz	Acción con relación a $y = x^2$	Raíces	Corte con el eje y
	$y = (x-2)^2$							
						Traslación en x de una unidad hacia la derecha		

Tabla 2. Actividad tipo "tabla" para la función cuadrática

¿Qué implica esta actividad? ¿Es relevante para nuestro problema? ¿Utiliza eficaz y eficientemente la tecnología? Observemos que, en esta actividad,

- no hay un algoritmo preestablecido para resolverla y el camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad;
- hay soluciones múltiples (por ejemplo en la forma simbólica utilizada) y hay diversos caminos posibles para la solución;
- hay múltiples criterios que se pueden utilizar para tomar decisiones;
- hay cierto grado de incertidumbre;
- requiere asignar significado a cada uno de los elementos de la estructura matemática en su relación con los demás elementos y estableciendo la estructura subyacente;
- requiere la formulación de conjeturas y su verificación; y
- no se puede resolver por prueba y error[2].

La actividad es relevante para nuestro problema porque induce a los escolares a proponer conjeturas de solución y verificarlas. Al hacerlo, ellos deben poner en juego su conocimiento sobre el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática y relacionar los diversos elementos de las representaciones simbólica, gráfica y geométrica. Los escolares deben al menos:

- utilizar la información de que disponen para encontrar *una* expresión simbólica de la función;
- verificar que esa expresión simbólica es coherente con la información; y
- producir otras formas simbólicas de la función para determinar los otros datos que se requieren.

[2] La formulación de las características de esta actividad se basan en las propiedades del pensamiento de alto nivel (Resnick, 1987).

Por ejemplo, en el caso de la segunda fila, los escolares pueden basarse en la información sobre el vértice para producir una conjetura sobre la expresión simbólica en forma canónica $y = a(x-h)^2 + k$; producir la gráfica en la calculadora y verificarla con la gráfica propuesta. O pueden utilizar la información sobre el foco y la directriz para producir una conjetura sobre la expresión simbólica en la forma $y = \frac{1}{4p}(x-x_0)^2 + y_0$ y verificar esta hipótesis con la calculadora. Una vez hecho esto, pueden observar la gráfica para obtener una conjetura sobre las raíces, conjetura que pueden verificar con la calculadora o simbólicamente produciendo la expresión en forma multiplicativa $f(x) = a(x-r_1)(x-{}_2)$ de la función.

¿Qué papel juega la calculadora gráfica en estos procesos? En las situaciones hipotéticas que he descrito en el párrafo anterior se aprecia el papel de esta tecnología. La calculadora gráfica le permite a los escolares verificar sus conjeturas. Los escolares pueden explorar las representaciones gráficas de diferentes propuestas de formas simbólicas. El uso de la calculadora gráfica libera a los escolares del proceso tedioso de producción de gráficas a partir de tablas. Además, si observamos la séptima columna de la tabla, vemos que, gracias al uso de la calculadora gráfica, los escolares pueden desarrollar competencias para producir la gráfica de una función cuadrática sin necesidad de pasar por la representación numérica (tablas) o de utilizar la tecnología. Los escolares pueden utilizar la calculadora de muchas maneras imprevistas y esto es inevitable dentro del proceso de exploración de la herramienta. Sin embargo, si ellos buscan resolver los problemas planteados en la actividad tendrán que usarla *eficaz* y *eficientemente*.

El diseño y desarrollo de una actividad no se restringe a la producción de una tarea, (tal y como la he presentado) y a su puesta en juego dentro del aula. Al pensar en una actividad, debemos también pensar en nuestra propia actuación en clase como profesores. Cuando proponemos la actividad a nuestros alumnos y ellos la abordan, nosotros debemos saber qué hacer cuando, dentro del trabajo de los grupos, surgen dudas, identificamos obstáculos y dificultades, se incurre en errores, o se proponen caminos innovadores. También debemos tener criterios para tomar decisiones a la hora de invitar a los grupos a presentar su trabajo, de inducir una discusión entre ellos, o de resumir y sacar conclusiones sobre la discusión. ¿Qué criterios utilizar para tomar estas decisiones? Estos criterios deben surgir de la información que hemos producido al realizar los análisis de contenido y cognitivo, al analizar las potencialidades de las tecnologías disponibles y al establecer las relaciones entre ellos.

Análisis Didáctico y Uso de Tecnología

En la Figura 6 se representan las cuatro cuestiones que he considerado en los apartados anteriores. A través de un ejemplo, he descrito estas cuatro cuestiones y las relaciones entre ellas. He sugerido que el uso apropiado de la tecnología (o cualquier otro material o recurso) es un problema de diseño y desarrollo curricular. Esto significa que la tecnología se debe usar con un propósito específico relacionado con las competencias cuyo desarrollo esperamos promover en nuestros alumnos. Por lo tanto, el uso de la tecnología requiere del análisis cognitivo del tema que se piense tratar en clase. He mostrado, que, para realizar el análisis cognitivo, es necesario realizar paralelamente un análisis de contenido de la estructura matemática en cuestión. La información que surge de estos dos análisis nos debe servir de base para, por un lado, identificar y caracterizar el problema que queremos abordar en el aula y, por el otro, para decidir cómo utilizar la tecnología. Para ello es necesario que conozcamos sus características y potencialidades. El diseño (o selección) de las actividades deberá surgir de relacionar la información que surge de los análisis de contenido y cognitivo con nuestro conocimiento de la tecnología dentro del contexto del problema que queremos abordar. Cuando establezcamos esa relación, podremos proponer y gestionar actividades que, además de ser relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de nuestros alumnos, utilicen eficaz y eficientemente la tecnología disponible.

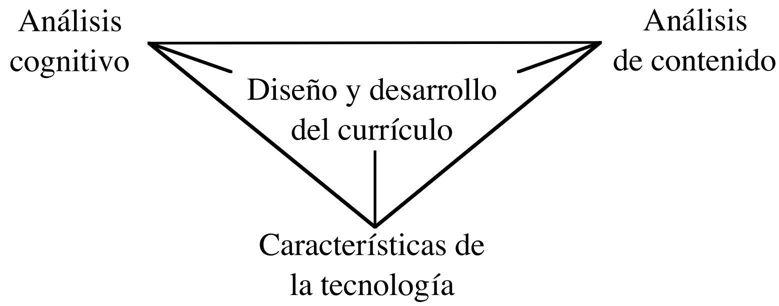


Figura 6. Los cuatro elementos del análisis

Se podría afirmar que esta propuesta tiene sentido solamente cuando todos los escolares tienen disponible en todo momento la tecnología más avanzada (ver Tabla 1). Pero el tipo de tecnología y el acceso a ella son dos de las características que hay que tener en cuenta en el análisis. De la misma forma, el análisis de contenido y el análisis cognitivo pueden sugerir que una *demostración* por parte del profesor sea la manera más eficaz y eficiente de usar la tecnología. Lo que sugiero en la Figura 6 es que el uso que se haga de la tecnología depende del problema que se quiera abordar y de la tecnología que se tenga disponible. En algunos casos, decidiremos que no tiene sentido utilizar la tecnología. Pero lo haremos, con argumentos (basados en el análisis didáctico y el análisis de tecnología) que nos permiten justificar nuestras decisiones. También se puede argumentar que el procedimiento que he propuesto requiere de mucho tiempo y esfuerzo y que, por consiguiente, no es posible llevarlo a cabo dentro de las presiones de la rutina diaria del profesor. Este argumento es parcialmente válido. El análisis didáctico de una estructura matemática es un procedimiento complejo y dispendioso. Por lo tanto, no podemos realizarlo en detalle cada vez que abordamos una nueva estructura matemática. En el transcurso de un curso académico podremos trabajar en dos o tres estructuras matemáticas. No obstante, mientras que trabajamos en esos temas, cuando nos enfrentamos a uno diferente, podemos siempre formularnos una serie de preguntas que podemos responder con el conocimiento y la experiencia que ya tenemos. Estas preguntas abordan cada uno de los elementos de la Figura 6.

Análisis de contenido

1. ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática?
4. ¿De qué maneras se puede representar el tema?
5. ¿Cómo se pueden organizar los fenómenos para los que la estructura matemática puede servir de modelo?
6. ¿Cómo se relaciona la información que surge del análisis de contenido con la información que surge del análisis cognitivo?

Análisis cognitivo

2. ¿Qué competencias han desarrollado ya nuestros alumnos?

3. ¿Qué compentencias esperamos que desarrollen con motivo de las actividades que van a realizar?
4. ¿Qué obstáculos y dificultades hemos percibido que los escolares muestran cuando abordan el tema?

Tecnología

5. ¿Cómo podemos caracterizar los materiales y recursos disponibles en términos del análisis de contenido del tema en cuestión?
6. De las características y potencialidades de los recursos disponibles, ¿cuáles de ellos son específicos a las competencias, obstáculos y dificultades que se identificaron en el análisis cognitivo?

Diseño y desarrollo del currículo

7. ¿Qué actividades son relevantes para las competencias que queremos desarrollar en nuestros alumnos y para los obstáculos y dificultades que esperamos que superen?
7. ¿Cómo podemos usar eficaz y eficientemente la tecnología dentro de esas actividades?

TECNOLOGÍA Y DESARROLLO PROFESIONAL

La tecnología es un catalizador de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero el éxito de su utilización depende de la forma como el profesor diseñe y desarrolle el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares vivan experiencias matemáticas que sean relevantes para su aprendizaje. Es en este sentido que no se puede mirar a la tecnología como *la* solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El comportamiento del profesor en el salón de clase (en su interacción con los escolares para la construcción del conocimiento matemático) depende de su conocimiento y de sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza (Dossey, 1992). Este comportamiento puede cambiar en la medida en que estos conocimientos y estas visiones cambien. Para ello se requiere que el profesor pueda vivir experiencias didácticas que pongan en juego y lo induzcan a cuestionar sus conocimientos y sus visiones. La necesidad de utilizar la tecnología como nuevo agente didáctico y la necesidad de diseñar actividades que aprovechen las potencialidades de la tecnología pueden convertirse en la oportunidad para que el profesor viva el tipo de experiencias que se requieren dentro del proceso de cambio (Ruthven & Hennessy, 2002, p. 85). El profesor, al enfrentarse a estas nuevas situaciones, puede construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza y aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS

Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). Computer–based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer.

Casio. (2004). *Suport Classroom with Technology*. Descargado el 16/10/2004, de http://www.casio.co.jp/edu_e/

Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: its Role and its Influence. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa, 10*(1), 93-111.
Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.
Gómez, P., & Carulla, C. (1998). *Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico?* Trabajo presentado en III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas.
Gómez, P., Mesa, V. M., Carulla, C., Gómez, C., & Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
Gómez, P., & Waits, B. (Eds.). (2000). *Papel de la calculadora en el salón de clase*. Bogotá: una empresa docente.
Kissane, B. (2002). Technology and the curriculum: The case of the graphics calculator. *The New Zealand Mathematics Magazine, 39*(1), 64-84.
Lupiánez, J. L. (2004). *Análisis cognitivo. Notas de clase*. Documento no publicado, Granada.
Lupiánez, J. L., & Rico, L. (2004). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Descargado el 16/10/2004, de http://cumbia.ath.cx/pna/Archivos/LupiannezJ04-2738.PDF
NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
Penglase, M., & Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. *Mathematics Education Research Journal, 8*(1), 58-90.
Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. Washington: National Academy.
Ruthven, K. (1995). Pressing on. Towards considered calculator use. En L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in mathematics teaching – a bridge between teaching and learning* (pp. 231-256). Bromley: Chartwell-Bratt.
Ruthven, K., & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 47-88.
Sproule, S. (2004). *Mathematics Education Websites*. Descargado el 19/10/2004, de http://www.wits.ac.za/ssproule/mathpage.htm
TI. (2004a). *Bienvenido al Universo de Texas Instruments*. Descargado el 16/10/2004, de http://education.ti.com/espana/index.html
TI. (2004b). *Getting started with CBR*. Descargado el 16/10/2004, de http://education.ti.com/downloads/guidebooks/eng/cbr-eng.pdf
TI. (2004c). *Productos Educacionales. CBL2*. Descargado el 16/10/2004, de http://education.ti.com/espana/productosedu/accesaula/cbl2.html
Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-44.