

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS PRODUCCIONES UTILIZADAS PARA LAS PRESENTACIONES

Pedro Gómez, Luis Rico
Universidad de Granada

En este documento presentamos el análisis de los resultados obtenidos al codificar y analizar la información contenida en las transparencias utilizadas por los futuros profesores para hacer sus presentaciones en clase. El análisis considera varias dimensiones: la caracterización de los estados de desarrollo del conocimiento didáctico, la descripción de ese desarrollo para los grupos de futuros profesores y el análisis de las discrepancias, de las fases y de las variables.

INTRODUCCIÓN

Este documento es la continuación de los documentos *Esquema de análisis de información para la descripción del desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas* y *De un conocimiento técnico a su puesta en práctica: desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas de secundaria*. En el primero se describe en detalle el esquema metodológico utilizado para recoger, codificar y analizar la información contenida en las producciones de los grupos de futuros profesores. En el segundo se presentan los resultados obtenidos a partir de ese esquema metodológico. En este documento analizamos esos resultados e interpretamos algunos de ellos.

La Tabla 1 presenta la definición final de los estados que obtuvimos al final de tres ciclos del procedimiento. La primera fila identifica los cuatro estados. Las variables aparecen en las filas restantes (ver definición anterior). Aquellos rangos del tipo $[2, \infty)$ representan rangos que expresan la existencia de 2 o más unidades de la variable correspondiente. Las variables dicotómicas se representan con 0 (no) y 1 (sí). La variable “SRS como organizador” tiene los siguientes valores: 0 – no aparece, 1 – no se utiliza, 2 – organiza con otros criterios, 3 – organiza. En la variable “papel” se cuenta el número de ocasiones en las que el organizador correspondiente se utiliza para desarrollar una tarea (por ejemplo, en el diseño de una actividad de evaluación). La variable coherencia de la estructura conceptual establece la relación entre la información producida para la estructura conceptual y el uso que de ella se hace en las otras fases de la asignatura. En las casillas aparecen los rangos que definen cada estado. Por ejemplo, el primer estado está definido por valores 0 de las variables 1, 2, 4, 5, 10, 11 y 12, valores 0 o 1 de las variables 6, 7, 8 y 9, y valores mayores de 2 de la variable 3.

Estados	1	2	3	4
Variables				
<i>1. Complejidad EC</i>	[0,0]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
<i>2. Nociones centrales</i>	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
<i>3. Criterios de organización</i>	[3,∞)	[2,3]	[1,2]	[0,1]
<i>4. Uso coherente criterios</i>	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
<i>5. Conexiones</i>	[0,0]	[1,3]	[3,∞)	[3,∞)
<i>6. Variedad SRS</i>	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
<i>7. SRS como organizador</i>	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,3]

Estados	1	2	3	4
Variables				
8. <i>Variedad fenómenos</i>	[0,1]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
9. <i>Variedad contextos</i>	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
10. <i>Variedad subestructuras</i>	[0,0]	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)
11. <i>Papel</i>	[0,0]	[0,5]	[0,5]	[6,∞)
12. <i>Coherencia EC</i>	[0,0]	[0,0]	[0,0]	[1, ∞)

Tabla 1. Definición final de estados

En la Tabla 2 presentamos la asignación final de estados a las observaciones. Cada fila representa un grupo de profesores y sus correspondientes observaciones, organizadas cronológicamente. Las columnas representan las nueve tareas que los grupos de futuros profesores realizaron durante la parte de la asignatura en la que se recogió la información. El número en una casilla dada de la tabla representa el estado al que quedó asignada la producción de ese grupo de futuros profesores (fila) para esta tarea (columna). Llamamos a esa producción una observación. Entonces, por ejemplo, las observaciones correspondientes al grupo 7 terminaron asignadas sucesivamente a los siguientes estados: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4 y 4.

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grupo									
1	2	2	2	3	3	4	3	4	4
2	1	2	3	3	3	3	3	3	4
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	3	3	3	3	3	4	4
6	2	2	2	3	3	3	2	3	4
7	2	2	3	3	3	3	4	4	4
8	1	2	2	2	3	3	3	2	2

Tabla 2. Asignación final de estados a observaciones

Adicionalmente a la información de las Tablas 1 y 2, haremos referencia la información básica producto de la codificación inicial en la que se registra el valor de cada variable para cada producción de cada grupo de futuros profesores. También utilizaremos que resulta de caracterizar las discrepancias de cada una de las observaciones. Las tablas en las que se registra esta información adicional se presentan en otro lugar.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Caracterización de los estados

El esquema de codificación y análisis de la información se basa en un proceso cíclico que busca minimizar las discrepancias. Por consiguiente, los estados de desarrollo que surgen de ese proceso identifican las combinaciones de valores (o rangos de valores) de las variables a las que, en conjunto, mejor se adaptan las observaciones para una tarea dada. Entonces, estas combinaciones de valores de variables se pueden considerar como representativos de los estados más significativos de la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de

futuros profesores. A partir de la información de la Tabla 1, podemos caracterizar estos cuatro estados de la siguiente manera:

El *estado 1* es un estado básico en el que la estructura conceptual no tiene complejidad, se utilizan varios criterios de organización sin coherencia, se utiliza máximo un sistema de representación, sin conexiones, y no hay variedad en el análisis fenomenológico. En la Tabla 2 se aprecia que sólo tres grupos tienen observaciones clasificadas en este estado. Esto da a entender que es un estado que se puede superar con el conocimiento previo y las intuiciones didácticas con las que los futuros profesores afrontan inicialmente la tarea.

El *estado 2* es un estado de transición. Hay algo de complejidad en la estructura conceptual y comienza aparecer variedad en los sistemas de representación, aunque aún no hay variedad en el análisis fenomenológico.

En el *estado 3* hay un avance en todas las variables, excepto las variables papel y coherencia. La estructura conceptual es compleja, con un nivel intermedio de organización. Hay variedad en los sistemas de representación y en el número de conexiones. Aparece algo de variedad en el análisis fenomenológico.

En el *estado 4* se logra plena complejidad en el análisis fenomenológico y se aprecia la utilización coherente de la información para la realización de tareas didácticas.

Los cuatro estados que acabamos de presentar describen una evolución en el valor de las variables que los determinan. Esta evolución en el valor de las variables es coherente con el orden en el que se tratan los diversos temas en la instrucción y con el tipo de tareas que se asignan a los grupos de futuros profesores en el tiempo. No obstante, los cambios tienen lugar con un desfase con respecto a los momentos de la instrucción. En el momento de la instrucción se aprecia el paso de valores nulos o casi nulos de las variables a valores intermedios. La complejidad (en la estructura conceptual) y la variedad (en los sistemas de representación y en el análisis fenomenológico) se desarrollan en momentos posteriores a la instrucción cuando ésta ya no considera los temas correspondientes. Por ejemplo, la variedad en el análisis fenomenológico, que aparece en el estado 4, con motivo de la instrucción, se desarrolla al final de la asignatura, al menos dos meses después de haberse tratado el tema en clase.

En la Tabla 3 presentamos los momentos de la instrucción en los que se presentan los cuatro temas en relación con el momento en el que se producen las observaciones. Por ejemplo, los sistemas de representación se presentan en la instrucción en la sesión anterior a la presentación de la tercera tarea.

Observación	1	3	4	6
Temas	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Análisis fenomenológico	Papel y coherencia

Tabla 3. Orden de aparición de temas

De acuerdo con este orden, se esperaría idealmente que las producciones de los grupos de futuros profesores quedaran clasificadas en los estados que se resaltan en la Tabla 4.

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Estado									
<i>1</i>									
<i>2</i>									

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Estado									
3									
4									

Tabla 4. Asignación final de estados a observaciones

En la Tabla 5 presentamos las observaciones que no se adaptan a este patrón. En *bastardilla* indicamos las observaciones clasificadas en un estado posterior al que corresponde en la Tabla 4. En **negrita** indicamos aquellas un estado anterior y en **negrita subrayado** aquellas dos estados anterior.

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grupo									
1	2						3		
2			3				3	3	
3							3	3	3
4	2				2		3	3	3
5	2		3				3		
6	2						<u>2</u>	3	
7	2		3						
8							3	<u>2</u>	<u>2</u>

Tabla 5. Observaciones que no se adaptan a patrón esperado

Observamos, como ya se mencionó antes, que cinco grupos logran presentar producciones iniciales que se clasifican en el estado 2, dando a entender que el estado 1 puede ser superado con los conocimientos previos y las intuiciones didácticas. Observamos que tres grupos logran un nivel importante de variedad en los sistemas de representación (y en las conexiones) con anterioridad al momento esperado (estado 3 en la observación 3). La mayoría de los grupos tienen dificultades para alcanzar el estado 4 antes de la octava tarea.

Análisis de desarrollo

En el apartado anterior hemos analizado el desarrollo desde la perspectiva de la caracterización de los estados. En este apartado, analizamos el desarrollo desde el punto de vista de la evolución de las producciones de cada uno de los grupos de futuros profesores a lo largo del tiempo. Como se constata en la caracterización de los estados, hay un progreso evidente a medida en que se avanza en la asignatura. Sin embargo, este progreso no es uniforme. El ritmo con el que se progresa difiere entre los grupos. Algunos de los aspectos de esta evolución que vale la pena resaltar son los siguientes (ver Tabla 2):

Hay únicamente tres observaciones que quedan clasificadas en el estado 1. Este resultado se puede interpretar en el sentido de que los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los futuros profesores les permiten realizar producciones con un nivel de complejidad y variedad superior al caracterizado por el estado 1.

En el estado 2 se observa una transición. Mientras que hay un grupo (el 2) que presenta una sola observación clasificada en este estado, hay otro grupo (el 5) que produce cinco observaciones de este nivel. En este estado comienza a manifestarse la variedad en la evolución de las producciones de los grupos de futuros profesores.

Mientras que el paso del estado 1 al estado 2 sucede a más tardar en la segunda de las nueve observaciones de cada grupo, el paso del estado 2 al estado 3 sucede en diferentes momentos: desde la tercera observación para los grupos 2, 5 y 7, hasta la sexta para el grupo 4.

Dos grupos (el 3 y el 4) presentan producciones que se estabilizan en el estado 3. Por lo tanto, son grupos que presentan dificultades para lograr variedad en el análisis fenomenológico y para utilizar coherentemente la información que han recogido y organizado.

De los cinco grupos que presentan producciones clasificadas en el estado 4, dos de ellos (2 –progresiones- y 6 –esfera–) lo logran únicamente en la última tarea (el trabajo final). En los otros tres grupos, la observación con la que llegan al estado 4 varía: en la séptima para el grupo 6 (esfera), en la sexta para el grupo 7 (función de segundo grado), y en la quinta para el grupo 1 (funciones y gráficas).

Solamente las últimas producciones, correspondientes al trabajo final, de los grupos 1 (funciones y gráficas) y 7 (función de segundo grado) cumplen todas las condiciones del estado 4 (no presentan discrepancias).

Análisis por grupos

Los grupos 1 (funciones y gráficas) y 7 (función de segundo grado) presentan las producciones que mejor se adaptan a lo esperado. Comienzan en el estado 2 y alcanzan el estado 4 antes del trabajo final, tarea ésta, en la que no generan discrepancias. Además, como lo veremos más adelante, son los dos grupos que generan menor número de discrepancias en total.

Los grupos 2 (progresiones) y 5 (cónicas) presentan una evolución similar. Logran alcanzar el estado 4 al final, manteniendo un número importante de observaciones en el estado 3. La última observación (el trabajo final) de estos dos grupos queda clasificada en el estado 4, presentando discrepancias en las variables complejidad y sistemas de representación como organizador (los dos grupos) y criterios de organización (grupo 5). El grupo 6 también alcanza el estado 4 (en el trabajo final), pero tiene un retroceso al estado 2 en la tarea 7 (causado por una reducción en 2 conexiones) y presenta un número mayor de discrepancias. Su última observación presenta discrepancias en las variables complejidad, sistemas de representación como organizador y número de subestructuras.

Los grupos 3 (números decimales) y 4 (probabilidad) son similares en el sentido de que se estabilizan en el estado 3 aunque el primero tiene menos discrepancias que el segundo. El trabajo final del grupo 4 presenta cuatro discrepancias. Dos de ellas (complejidad y conexiones) corresponden al estado 2, mientras que otras dos (papel y coherencia) corresponden al estado 4. Ésta es una observación que, teniendo las características distintivas del estado 4 (papel y coherencia), queda clasificada en el estado 3 como consecuencia de una estructura conceptual pobre.

Finalmente, el grupo 8 (sistemas de ecuaciones lineales) presenta una serie de producciones que siguen un comportamiento particular. Además de ser el grupo con mayor número de discrepancias, presenta un retroceso al estado 2 en las dos últimas producciones.

Análisis de discrepancias

El número de discrepancias en una observación es un indicativo de su “coherencia interna”: el grado en el que la observación presenta valores de variables que corresponden a un estado dado. Si una observación no presenta discrepancias, todas las variables asumen valores que corresponden al estado al que ha sido asignada la observación. Aunque cada observación se clasifica en el estado que genera menor número de discrepancias, si una

observación presenta discrepancias, esto significa que hay una o más variables que asumen valores que no corresponden al estado al cual ha sido asignada. En el caso del conjunto de observaciones de un grupo, el número de discrepancias es una medida del grado en el que las producciones del grupo avanzan (o retroceden) simultáneamente en todas las variables. La Tabla 6 presenta una clasificación de los grupos de acuerdo con el número total de discrepancias de sus producciones.

	Grupo	Discrepancias	Velocidad y avance
1	Funciones y gráficas	6	1
7	Función de segundo grado	8	2
3	Números decimales	11	6
5	Cónicas	13	3
2	Progresiones	13	4
4	Probabilidad	15	7
6	Esfera	16	5
8	Sistemas de ecuaciones lineales	18	8

Tabla 6. Discrepancias y velocidad y avance

Las primeras dos columnas de la tabla identifican los grupos. En la tercera se indica el número total de discrepancias de las producciones de cada grupo. La tabla se ha ordenado de acuerdo con esta columna. La cuarta columna, *velocidad y avance*, presenta el orden en el que se puede clasificar la globalidad de las producciones de cada grupo de acuerdo con el estado final que lograron y el momento en el tiempo en el que alcanzan cada estado. Se clasifican primero los grupos que presentaron producciones clasificadas en el estado 4. Entre ellas se clasifican primero los grupos que llegaron antes a ese estado. Un procedimiento similar se aplica a los demás grupos y estados. Las dos clasificaciones son similares, excepto en el caso del grupo 3 (números decimales) que presenta pocas discrepancias, alcanza rápidamente el estado 3, pero no logra alcanzar el estado 4; y el grupo 6 (esfera) que presenta muchas discrepancias pero logran alcanzar el estado 4 en el trabajo final.

La Tabla 7 presenta el número total de discrepancias para cada una de las tareas.

Tarea	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Discrepancias	17	1	10	4	10	6	14	13	16

Tabla 7. Discrepancias por observación

Observamos un número alto de discrepancias en la primera tarea y en las tres últimas. Las discrepancias de la primera tarea sugieren la diversidad presentada en esas producciones a partir de los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los futuros profesores. El número de discrepancias en las últimas tres tareas puede ser un indicador de cómo, aunque los grupos lograron avanzar en sus producciones, no lo hicieron necesariamente de forma consolidada.

Análisis de variables

El análisis de discrepancias en cada variable nos da una indicación de la medida en que la globalidad de los ocho grupos avanzaron coherentemente en el manejo y utilización del concepto o herramienta correspondiente a esa variable, con respecto al avance logrado en las otras variables. La interpretación de los resultados, mirados desde esta perspectiva,

puede dar luces sobre aquellos organizadores que presentaron más dificultades a los futuros profesores. La Tabla 8 presenta la clasificación de las variables con respecto a las discrepancias.

Discrepancias	Por encima	Por debajo	Diferencia	Total
Variables				
<i>Conexiones</i>	16	2	14	18
<i>Variedad sistemas de representación</i>	10	1	9	11
<i>Variedad fenómenos</i>	7	1	6	8
<i>Complejidad</i>	10	7	3	17
<i>Sistemas de representación como organizador</i>	6	3	3	9
<i>Criterios de organización</i>	7	7	0	14
<i>Número de subestructuras</i>	2	2	0	4
<i>Nociones centrales</i>	1	1	0	2
<i>Número de áreas</i>	1	1	0	2
<i>Uso coherente de criterios</i>	0	0	0	0
<i>Papel</i>	2	4	-2	6
<i>Coherencia</i>	0	9	-9	9

Tabla 8. Clasificación de variables por discrepancias

En la primera columna aparecen las variables cuyos valores determinan cada uno de los estados. En la segunda columna indicamos el número de discrepancias que aparecen por encima del estado al cual ha sido asignada la observación correspondiente. Por ejemplo, si una observación ha sido asignada al estado 3, pero tiene un valor de la variable conexiones que corresponde al estado 2, entonces ésta es una discrepancia por encima del estado correspondiente. En la tercera columna indicamos las discrepancias por debajo. En la cuarta columna calculamos la diferencia entre discrepancias por encima y por debajo. Un número positivo en esta diferencia indica que hay una predominancia de observaciones para las que dicha variable asume valores que corresponden a un estado anterior al estado en el que se ha clasificado la observación correspondiente. En otras palabras, las observaciones se “retrasan” en esa variable en comparación con el avance en las otras variables. Las diferencias positivas identifican, por lo tanto, las variables que presentan mayores dificultades a los grupos de futuros profesores. Ordenamos la tabla de acuerdo con esta columna en orden descendente. En la última columna presentamos el número total de discrepancias. Una discrepancia por encima en una variable y una observación dadas, indica que esa variable asume un valor en esa observación que corresponde a un estado anterior al que ha sido asignada. El análisis de la Tabla 8 insinúa que:

Hay dificultades con la noción de *conexión*. . En 16 observaciones, el valor de esta variable es inferior al valor que corresponde al estado en el que se encuentra clasificada la observación. En otras palabras, en esas 16 observaciones, los grupos no logran presentar producciones con un número adecuado (al estado al que han sido asignadas) de conexiones.

Algo similar, pero menos importante se aprecia con las nociones de *variedad en sistemas de representación*, *variedad de fenómenos*, *complejidad* y *sistemas de representación como organizador*.

Por el contrario, en el caso de *coherencia y papel*, hay varias observaciones que llegan a un estado avanzado en estas variables del que les corresponde a las otras variables.

Análisis de observaciones

En este apartado identificamos aquellas observaciones que se salen del patrón general presentado por las demás observaciones. Estas son las siguientes observaciones:

En la observación 7, el grupo 6 (esfera), presenta un retroceso del estado 3 al estado 2. Ya observamos que este retroceso es causado por una disminución en el número de conexiones.

En las observaciones 8 y 9, el grupo 8 (sistemas de ecuaciones lineales) presenta un retroceso del estado 3 al estado 2. Además en estas dos observaciones el grupo presenta un número alto de discrepancias (un total de 6).

En la observación 6, el grupo 1 (funciones y gráficas) llega al estado 4. Es la observación más temprana clasificada en este estado.

La primera y la última son las dos observaciones que presentan mayor número total de discrepancias.

INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado resumimos los análisis presentados hasta ahora y sugerimos algunas conjeturas de explicación de los mismos.

Evolución del conocimiento didáctico

La caracterización de los estados muestra que se da una evolución en el conocimiento didáctico de los futuros profesores a lo largo del tiempo. Ésta es una evolución paulatina que parte de un estado básico fundamentado posiblemente en los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los futuros profesores. Este avance es coherente con el orden en el que se presentan las diferentes nociones en la instrucción. No obstante, hay un desfase entre el momento en el que se presentan los temas y el momento en el que esas nociones se estructuran en el conocimiento didáctico de los futuros profesores y se expresan en sus producciones. Este desfase es posiblemente el resultado natural de un proceso paulatino de asimilación y acomodación de este conocimiento como consecuencia de la instrucción y de los esfuerzos necesarios para resolver las tareas que se proponen a los grupos de futuros profesores. En este sentido, la noción de sistemas de representación, por ejemplo, no se consolida en el momento en el que esta noción se presenta en clase y se pide a los grupos de futuros profesores que analicen su tópico matemático desde esta perspectiva. Éste es solamente el primer paso. El conocimiento de esta noción se transforma y consolida en la medida en que tareas posteriores inducen a los grupos de futuros profesores a poner en juego su conocimiento de esta noción para efectos de resolver otros problemas (por ejemplo, realizar el análisis fenomenológico, o diseñar una actividad de evaluación). Ésta es seguramente la razón de algunas de las diferencias constatadas en la Tabla 5 entre las observaciones y el patrón esperado de clasificación a los cuatro estados.

Ritmo de progreso y avance variados

Los grupos progresan en el desarrollo de su conocimiento didáctico con diferentes ritmos. Hemos visto que el paso del estado 2 al estado 3 sucede en diferentes momentos (desde la tercera observación para tres grupos, hasta la sexta para el grupo 4). También hemos visto que dos grupos estabilizan sus producciones en el estado 3 y que de los cinco grupos que presentan producciones clasificadas en el estado 4, dos lo logran solamente en

la última observación (el trabajo final). Hay un grupo que presenta un retroceso al estado 2 en las últimas dos producciones.

Estos ritmos de progreso y avance variados pueden tener diferentes causas. La variedad de los momentos en los que se da el paso del estado 2 al estado 3 puede ser indicativo de una cierta dificultad para poner en juego y desarrollar las nociones de sistemas de representación y análisis fenomenológico. No obstante, la totalidad de los grupos logran superar esta dificultad. El paso del estado 3 al estado 4 es más complejo. Por un lado, hay grupos que no lo logran y otros que sólo lo alcanzan en el trabajo final.

El trabajo final se diferencia del resto de las tareas. Es la tarea con mayor número de discrepancias. Dos grupos alcanzan el estado 4 solamente en esta observación. Estas características particulares de las producciones de los grupos de futuros profesores para el trabajo final son posiblemente consecuencia de la instrucción (en particular del ejemplo de diseño de unidad didáctica que se presentó en clase) y de los requisitos de la tarea misma que la diferencia de las demás. Por ejemplo, las discrepancias en las variables complejidad y sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual de las producciones de los grupos 2, 5 y 6, que presentan un trabajo final clasificado en el estado 4, parecen ser causadas por la desaparición del mapa conceptual como medio para representar la estructura conceptual en el trabajo final. El ejemplo que se presentó en clase tampoco utilizó mapas conceptuales para este propósito.

Discrepancias y progreso de los grupos

Hemos visto que hay una coherencia parcial entre la velocidad de progreso y el avance de los diferentes grupos, por un lado, y el número total de discrepancias que presentan, por el otro (Tabla 6). Los grupos con mayor velocidad de progreso y avance (1 y 7) son también los grupos con menor número de discrepancias. Dos de los tres grupos con mayor número de discrepancias son los grupos con menor velocidad de progreso y avance. Esta situación puede corroborar la idea de que las discrepancias son una medida de la “coherencia” con la que cada grupo avanza en cada una de las dimensiones de su conocimiento didáctico (las variables).

Las diferencias entre los grupos (en velocidad de progreso, avance y coherencia) pueden ser producto de diversos factores. Partimos del supuesto de que todos los grupos recibieron la misma instrucción (en el sentido de que, además de participar en la misma clase, los comentarios que se hicieron a sus producciones tuvieron un nivel similar de profundidad) y de que no hay necesariamente diferencias significativas entre los grupos al comienzo de la asignatura desde el punto de vista de sus conocimientos previos y sus intuiciones didácticas. Si lo anterior es cierto, entonces las diferencias en las producciones de los grupos deben surgir principalmente de dos fuentes: diferencias en los tópicos y diferencias en el funcionamiento interno del grupo a la hora de realizar las tareas.

La diferencia en los tópicos parece ser una conjetura viable para explicar, al menos parcialmente, las diferencias entre los grupos con mayor y menor velocidad de progreso y avance. Los grupos de mayor velocidad de progreso y avance tienen tópicos que corresponden a objetos matemáticos (funciones y gráficas, función de segundo grado, cónicas) cuyo análisis de contenido tiende a ser más fácil de desarrollar. En los tres casos, el tópico es rico en sistemas de representación y permite variedad en el análisis fenomenológico. Por otro lado, los tópicos de los tres grupos con menor velocidad de progreso y avance corresponden a un sistema de representación específico (números decimales), un tópico general (introducción a la probabilidad) y un procedimiento de resolución (sistemas de ecuaciones lineales).

Por otro lado, tenemos evidencia de que el comportamiento particular de las producciones del grupo 8 (sistemas de ecuaciones lineales) también puede ser causado por problemas de coordinación entre los miembros del grupo.

Diferencias en la dificultad de las nociones

Hemos sugerido que el análisis de las discrepancias en cada variable puede dar luces sobre aquellas nociones que presentaron más dificultades a los grupos de futuros profesores. En este sentido, la noción de conexión presenta un número muy alto de discrepancias con diferencia positiva. A pesar de reiterados esfuerzos de la instrucción, las producciones de los grupos de futuros profesores tienen un nivel de conexiones inferior al que debería esperarse. Algo similar, pero en menor medida, sucede con las nociones de variedad en sistemas de representación, variedad de fenómenos, complejidad y sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual. Desde la perspectiva de las discrepancias, los resultados sugieren que estas son las nociones que presentan mayores dificultades para los futuros profesores. Vimos que la puesta en práctica del conocimiento adquirido y de la información recogida también implica dificultades para varios de los grupos de futuros profesores.