TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PEDRO GÓMEZ

INTRODUCCIÓN

Aunque la tecnología[1] no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas serán fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico.

En este artículo[2] se analiza la relación entre la tecnología y la educación matemática. Para ello se ubican las herramientas computacionales dentro de un modelo simplificado del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se resalta el papel de los sistemas de representación en la comprensión de los conceptos matemáticos. Con base en este modelo y estos conceptos se analiza el aporte que la tecnología ha hecho y puede hacer a la educación matemática. El impacto de la tecnología en la educación matemática se estudia desde varias perspectivas. Primero se discuten los factores que han determinado el tipo de resultados didácticos que se han obtenido hasta el momento gracias a la aparición de la computación personal. Después se describen brevemente los tipos de programas de computador y de máquinas que se han producido para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En seguida, se enumeran las realizaciones que se han logrado en las diferentes áreas de la matemática escolar y universitaria. Dadas sus características particulares y su especificidad a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el tema de las calculadoras (en particular, las calculadoras gráficas) se analiza en una sección aparte. El artículo termina con una discusión acerca del papel del profesor como agente didáctico en circunstancias en las que la tecnología está presente.

PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Sistema didáctico

Para poder identificar el papel que la tecnología juega en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para poder explorar los efectos que su utilización tiene en el aprendizaje, es

1. Utilizamos el término *tecnología* para designar todas aquellas herramientas (computadores, programas de computador, calculadoras) que utilizan los últimos adelantos computacionales para aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
2. La mayor parte de la revisión que se hace en este artículo está basada en [1] y [2].

necesario hacerlo dentro de algún tipo de modelo que permita simplificar la complejidad de esta situación. Utilizamos las ideas de la didáctica de las matemáticas francesa como las ha presentado Balacheff [3]. Este modelo ubica el aprendizaje como un proceso que tiene lugar en la interacción entre el *sujeto* (estudiante), el *medio* y los agentes didácticos (ver figura 1). La dimensión cognitiva es el aspecto relevante del sujeto desde el punto de vista del sistema. Esta dimensión cognitiva actúa y reacciona a los estímulos que le proporciona el medio. El medio va más allá de los aspectos materiales (por ejemplo, tareas que hay que resolver) e incluye tanto las interacciones con los sistemas simbólicos, como las interacciones sociales que pueden producir conocimiento. El medio es un sistema antagonista del sujeto. El medio está en capacidad de actuar y de reaccionar a las actuaciones del sujeto.

De acuerdo con este modelo, el conocimiento es una propiedad del sujeto en situación y en interacción con el sistema antagonista. El conocimiento es la característica del sistema que le permite a éste permanecer en equilibrio. Esta interacción es significativa porque permite satisfacer las restricciones que condicionan la viabilidad de la relación sujeto–medio. De esta forma, el conocimiento está representado por la capacidad del sistema para mantener un equilibrio dinámico cuando se enfrenta a perturbaciones. Cuando la actuación del medio no es reconocida por el sujeto como una actuación esperada (perturbación), el sujeto debe adaptar su dimensión cognitiva a esta nueva situación de tal forma que se obtenga el equilibrio. En los sistemas escolares formales, la condición temporal (hay que desarrollar unas actividades en un tiempo determinado) y la condición epistemológica (hay un saber de referencia con respecto al cual se trabaja) son las dos principales condiciones que se tienen sobre el sistema.

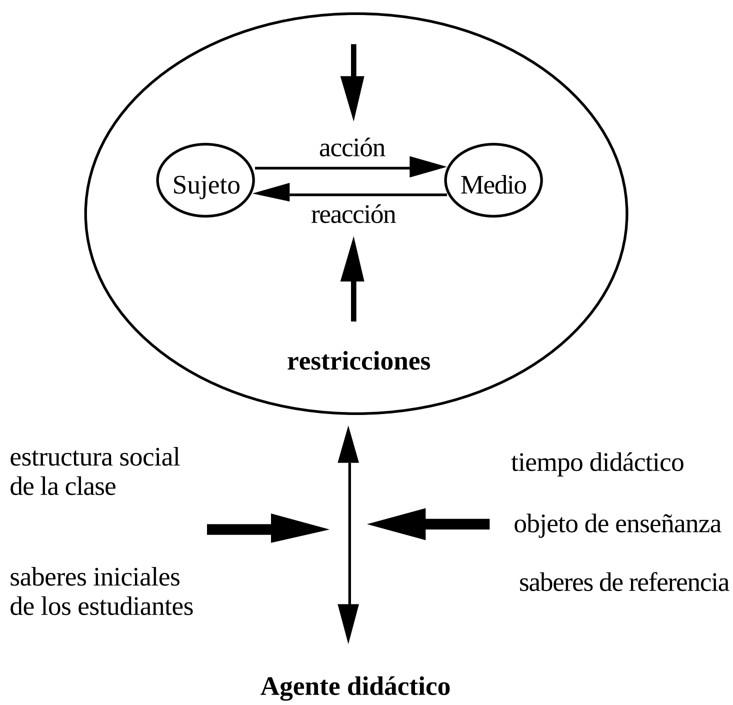


Figura 1. Sistema didáctico. Tomado de [3]

La función del profesor (o de otros agentes didácticos, como la tecnología) es la de organizar —a través del diseño e implantación de una situación— un encuentro entre el sujeto y el medio para que surja el conocimiento. Este encuentro debe buscar, en general, que tenga lugar una perturbación del sistema, de tal forma que la búsqueda de un nuevo estado de equilibrio del sistema produzca un nuevo conocimiento que esté acorde con las condiciones impuestas por el sistema (e.g., el conocimiento a aprender). El aprendizaje tiene lugar como proceso de reconstrucción de un equilibrio del sistema. La acción del agente didáctico (profesor, tecnología, en representación de la institución encargada de la enseñanza) se encuentra mediada por la estructura social de la clase, los saberes iniciales de los estudiantes, el tiempo didáctico, el objeto de enseñanza y los saberes de referencia. Para que el conocimiento surja dentro de este sistema didáctico es necesario que el agente didáctico organice el encuentro entre el sujeto y el medio de tal forma que hayan perturbaciones del sistema: brechas identificables por el sujeto entre el resultado esperado por él y lo que el medio le devuelve. La búsqueda del equilibrio por parte del sistema produce procesos de asimilación y acomodación de los esquemas cognitivos del sujeto que generan la construcción de su conocimiento matemático [4].

Los diferentes papeles que la tecnología puede jugar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se pueden identificar dentro del modelo que se acaba de describir. Por una parte, la tecnología hace parte del medio puesto que es una parte del entorno que interviene en las interacciones con los sistemas simbólicos. Por esta razón, la tecnología puede apoyar la acción del agente didáctico en el diseño de la situación que define el encuentro entre el sujeto y el medio. En este sentido, la tecnología puede jugar un papel tanto en el diseño de las situaciones que generan perturbaciones del sistema didáctico, como en la manera como estas perturbaciones afectan el sistema y son reconocidas por el mismo. Finalmente, la tecnología puede jugar un papel en el tipo de problemas que el sujeto puede afrontar, en la capacidad del sujeto para transformar unos problemas en otros, en los sistemas de representación utilizados por el sujeto y en los esquemas de validación que éste utiliza. De esta forma, se hace evidente que la evolución de las concepciones del sujeto puede depender de la presencia de la tecnología, como agente didáctico que influye en el funcionamiento del sistema.

Sistemas de representación

La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos. Esta es una de sus características relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. Los sistemas de representación son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos [5], [1]. Las representaciones externas (actividades físicas del sujeto) permiten organizar la experiencia matemática que tiene lugar cuando se realiza una tarea. Las representaciones internas permiten tener un modelo de la forma como el sujeto organiza internamente la información. Desde el punto de vista de las actividades físicas del sujeto, un sistema de representación está compuesto por un conjunto de símbolos que se manipulan de acuerdo con reglas que permiten identificar o crear caracteres, operar en ellos y determinar relaciones entre ellos. Un mismo objeto matemático puede representarse en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, en el caso de las funciones, éstas pueden representarse en el sistema de representación simbólico ($y = x^2 - 4x + 3$), en el sistema de representación gráfico (ver figura 2) y en el sistema de representación tabular (ver figura 3), entre otros.

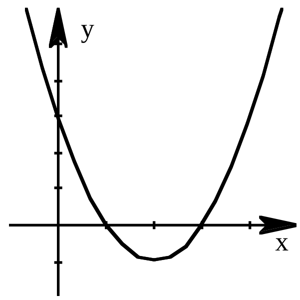


Figura 2. Representación gráfica

x	y
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15

Figura 3. Representación tabular

La idea de sistema de representación permite caracterizar las actividades que realiza un sujeto cuando resuelve una tarea. Por un lado, se pueden hacer transformaciones sintácticas dentro de un mismo sistema de representación. En el caso del ejemplo anterior, la representación simbólica de la función puede transformarse en $y = (x - 1)(x - 3)$ y también en $y = (x - 2)^2 - 1$. De la misma forma, dentro del sistema de representación gráfico es posible hacer transformaciones sintácticas cuando, por ejemplo, se traslada la gráfica horizontal o verticalmente o cuando se varía la dilatación. El segundo tipo de actividad matemática es la traducción entre sistemas de representación. En este caso se pueden relacionar los efectos en la gráfica de la función de pasar de la expresión simbólica de base $y = x^2$ a la expresión $y = (x - 2)^2 - 1$ (en la que es posible identificar la localización del vértice) o a la expresión $y = (x - 1)(x - 3)$ (en la que se pueden ubicar las raíces). En tercer lugar, las situaciones reales (por ejemplo, el problema de la caída libre de un cuerpo) se modelan matemáticamente al expresar sus características fundamentales en un sistema de representación matemático (por ejemplo, expresando la situación como una relación entre dos variables —distancia y tiempo— de acuerdo con una expresión simbólica o gráfica). El cuarto tipo de actividad es la materialización de entidades específicas o relaciones en objetos conceptuales sobre los cuales es posible efectuar otras operaciones. En el caso de las funciones, por ejemplo, esta actividad le permite al sujeto pasar de ver la función como una “caja negra” que transforma unos números en otros a ver la función como un objeto que puede ser diferenciado o integrado. En el caso de la aritmética, esta actividad le permite al sujeto pasar de ver la adición como una operación que permite producir un número a partir de otros dos, a ver la adición como una operación con características propias como la conmutatividad y la asociatividad. Esta última actividad es de carácter diferente a las tres anteriores. Mientras que las tres primeras tienen que ver con la utilización de los sistemas de representación, la última se refiere a la manera como un manejo procedimental puede evolucionar y servir de base para la construcción de una visión conceptual de los objetos y las relaciones matemáticas. La comprensión del sujeto puede evolucionar a lo largo de dos ejes: un eje horizontal en el que se avanza en el manejo de los sistemas de representación de un concepto matemático y un eje vertical en el que se avanza en el proceso de materialización (de procedimental a conceptual) de este mismo concepto [6].

Hemos visto cómo los objetos matemáticos se pueden representar en diversos sistemas de representación externa y cómo la comprensión en matemáticas depende de la evolución de las representaciones internas [7] y de la manera como la percepción de estos conceptos evoluciona desde una perspectiva operacional (procedimientos) a una perspectiva estructural (conceptos) [8]. La tecnología, como agente didáctico que organiza el encuentro entre el sujeto y el medio de tal forma que se generen perturbaciones del sistema, puede aportar de manera significativa en estos dos aspectos de la comprensión en matemáticas.

APORTE DE LA TECNOLOGÍA A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las nuevas tecnologías computacionales ofrecen características especiales que permiten pensar en aplicaciones potentes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, la posibilidad de que el sistema pueda reaccionar a las acciones del sujeto permite diseñar programas (por ejemplo del tipo micromundos) en los que esta reacción no solamente sea el producto del modelo del conocimiento matemático en el que se basa el programa, sino también que el diseño del programa (y por consiguiente la forma en que el conocimiento matemático se encuentra modelado) tenga en cuenta, al menos parcialmente, las características del conocimiento a enseñar y las características (dificultades y necesidades) del sujeto que aprende.

Ya hemos visto la importancia del manejo de los sistemas de representación en el proceso de comprensión de las matemáticas. Esta es uno de los aspectos en los que las nuevas tecnologías pueden aportar de manera más significativa. A esta posibilidad de manejar los sistemas de representación se agrega el aspecto dinámico de los sistemas que le permite al sujeto manipular los objetos matemáticos y sus relaciones, construyendo una experiencia matemática difícil de vivir de otra manera.

El diseño de sistemas computacionales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo. Este diseño involucra una serie de condiciones de diversos tipos. Por un lado, se encuentran las restricciones técnicas (tipo de sistema operacional, capacidades de las máquinas y de las herramientas de desarrollo) que determinan qué se puede hacer y qué no se puede hacer en el sistema. En segundo lugar, el diseño de todo sistema requiere de una conceptualización del conocimiento matemático a enseñar desde el punto de vista de la manera como este conocimiento se define, se representa y se implanta dentro del sistema. Finalmente, están las restricciones didácticas que determinan qué es lo que se busca desde el punto de vista de la comprensión del sujeto y la manera como estos propósitos se deben lograr. El sistema se encuentra determinado por el tipo de fenómenos que le presenta al sujeto (objetos, relaciones, problemas) y la manera como estos fenómenos son presentados (interface). Esto determina el campo de experimentación que se ofrece y el tipo de reacciones del sistema a las acciones del sujeto. El resultado es la experiencia matemática que el sujeto vive cuando interactúa con el sistema. Esta experiencia matemática tiene lugar en un ambiente en el que se crea un cierto "contrato didáctico" [9] entre el sujeto, la máquina y el profesor y en el que aparecen riesgos y oportunidades.

Para evitar los riesgos y aprovechar las oportunidades es importante que el diseño de los sistemas tenga en cuenta tanto la complejidad del conocimiento a enseñar (y la manera como ese conocimiento va a ser representado en el sistema), como la complejidad del proceso de comprensión del sujeto (modelaje de las estructuras cognitivas del sujeto) y el papel que el profesor y los diseñadores de currículo pueden jugar en la interacción entre el sujeto y la tecnología en la construcción del conocimiento matemático. Es necesario tener un modelo del sistema didáctico en el que se identifiquen las condiciones que se encuentran determinadas por las circunstancias particulares del grupo de estudiantes y de la institución en la que tiene lugar la instrucción. Desde este punto de vista, es importante resaltar que el resultado final de esta interacción no depende exclusivamente de la calidad del diseño del sistema computacional. El tipo de problemas que se le den al sujeto para ser resueltos con la ayuda de la tecnología y la forma como el profesor interactúe con el sujeto, con base en la experiencia matemática que éste vive con la máquina, pueden llegar a ser más importantes que el sistema mismo. La calidad de esta interacción está determinada por las características de las perturbaciones generadas por las situaciones que se le proponen al sujeto con el apoyo de la tecnología y por el papel que la tecnología puede jugar en la búsqueda del equilibrio del sistema de la cual surge el conocimiento y que tiene como producto el aprendizaje. La tecnología puede y debe ser un catalizador de un proceso en el que diversos agentes didácticos (profesor, diseñadores de currículo, programa de computador) crean espacios en los que el sujeto se enfrenta a un medio que le crea conflictos (perturbaciones del sistema) con base en los cuales el sujeto puede avanzar en la construcción de su conocimiento matemático (búsqueda de equilibrio del sistema).

Las nuevas tecnologías (que aprovechan el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos) proveen grandes oportunidades para que el encuentro entre el sujeto y el medio (del que surge el conocimiento) sea un encuentro fructífero en el que el sujeto viva una nueva experiencia matemática que le permita materializar los objetos matemáticos y sus relaciones (pasar de utilizarlos como herramientas procedimentales en procesos esencialmente algorítmicos a verlos como objetos matemáticos con características propias y que pueden ser utilizados en la construcción de otros objetos y otras relaciones). En otras palabras, la tecnología ofrece la oportunidad para que se consolide no solamente una nueva visión del contenido matemático, sino también nuevas visiones acerca de las relaciones didácticas y del papel de los diversos agentes didácticos en el proceso de la construcción del conocimiento matemático por parte del sujeto. En este sentido, la tecnología puede convertirse en un elemento central del sistema didáctico como agente didáctico con funciones explícitas e importantes en el funcionamiento del sistema.

IMPACTO DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Las expectativas

Fueron muchas las expectativas que se formaron acerca del papel que las nuevas tecnologías podían jugar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, muchos de esos sueños no se han realizado aún. Por un lado, aunque ya no es el caso, durante un tiempo la potencia de las máquinas y las características de los sistemas operacionales y de las herramientas de desarrollo restringieron las posibilidades para el diseño y evolución de los programas de computador. Esto tuvo como consecuencia que estos programas tuvieran grandes deficiencias desde el punto de vista técnico, pero, sobre todo, desde el punto de vista didáctico. Una proporción importante de los primeros programas de computador estaban basados en una visión (en general implícita) de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que promovía el aprendizaje mecánico de algunos hechos matemáticos. Por consiguiente, desde el punto de vista del sistema didáctico, su aporte a la generación de perturbaciones del sistema era muy pobre y el tipo de conocimiento que podía surgir cuando se restablece el equilibrio del sistema no era muy profundo. Nos referimos a los programas de enseñanza asistida por computador del tipo “ejercitar y practicar”.

Por otra parte, los estudiantes tenían un acceso restringido a las máquinas. Este sigue siendo un problema importante en muchas instituciones educativas. En una institución con 2.000 estudiantes organizada en grupos de 30 estudiantes, los 60 grupos tienen que “competir” por una sala de computación (de 15 o 30 máquinas). Un cálculo rápido permite ver que, en estas circunstancias, un estudiante tendría acceso a una máquina máximo durante dos horas al mes. Inclusive si los estudiantes pueden trabajar en las máquinas una o dos horas a la semana, éste es un tiempo reducido si lo que se pretende es que la tecnología aporte verdaderamente a la vivencia, por parte de los estudiantes, de experiencias matemáticas (situaciones que generen perturbaciones) de las cuales surja el conocimiento. Este problema se irá solucionando a medida que los estudiantes puedan acceder individual y privadamente a los programas que se utilizan en la escuela (disponibilidad de una máquina personal y posibilidad de utilizar esos programas en esa máquina). Como se verá más adelante, en el caso de las matemáticas, ya ha aparecido otra solución a este problema en la forma de las calculadoras.

El conocimiento, las visiones y la actitud del profesor es el tercer factor que ha influido en la lentitud con la que la tecnología se ha incorporado al currículo de matemáticas. Los profesores han tenido que enfrentarse a una nueva situación pedagógica en la que se pueden ver “obligados” a utilizar nuevas metodologías que no están de acuerdo con la manera como ellos perciben las matemáticas, la forma como los estudiantes deben aprenderlas y la manera como deben enseñarse. Por otra parte, muchos profesores expresan temores hacia la tecnología y el resultado tiende a ser una situación en la que el profesor adapta este recurso a su manera tradicional de manejar el proceso de enseñanza y aprendizaje, en cambio de aprovecharlo para cambiar el funcionamiento del sistema didáctico y el papel que él puede jugar dentro de este sistema.

Tecnología y temas matemáticos

El tipo de programas de computador que se han desarrollado hasta el momento depende del contenido matemático involucrado. Mientras que para la aritmética y la estadística, los programas no han necesariamente avanzado en su aporte al proceso didáctico, en geometría, álgebra, precálculo y cálculo se puede considerar que ha habido progresos importantes.

En el área de la aritmética el computador se ha utilizado para el desarrollo de habilidades computacionales en temas como la notación decimal y la transición de la aritmética al álgebra. Existe un gran número de programas comerciales que utilizan interfaces "interesantes" para desarrollar este tipo de habilidades. Sin embargo, son muy pocos los programas que logran proponer entornos que vayan más allá de la ejercitación de habilidades y técnicas básicas y que busquen crear situaciones en las que se generen perturbaciones significativas del sistema didáctico. Parece evidente que, para diseñar y desarrollar nuevos programas que vayan más allá de la ejercitación de habilidades básicas, se hace necesario reconceptualizar el conocimiento matemático a este nivel.

Para el álgebra y el cálculo se ha producido un número mayor de programas que buscan aprovechar el manejo de múltiples sistemas de representación, el aspecto dinámico de los sistemas y la interactividad para permitir que el sujeto viva una experiencia matemática diferente a la tradicional. En este sentido, el sujeto puede realizar aproximaciones exploratorias a los problemas, trabajar con problemas y situaciones más complejas y reales (gracias a la facilidad de los sistemas para manejar simbolismos más complejos y para realizar cálculos numéricos más rápidamente), y desarrollar una aproximación más inductiva y empírica en contraposición con la aproximación tradicional que tiende ser de tipo deductivo y algebraico. Dentro de esta nueva forma de trabajar estos temas, surgen inquietudes acerca de la pérdida de habilidades del manejo simbólico que los programas realizan para el sujeto y de una posible pérdida en el aprendizaje conceptual. Sin embargo, resulta evidente que los resultados, desde el punto de vista del aprendizaje del sujeto, dependen no solamente del funcionamiento del programa, sino también del cuidado con que el profesor seleccione y diseñe las situaciones y los problemas que el sujeto debe resolver con la ayuda de los programas [10].

La geometría es un campo en el que se han realizado desarrollos importantes. Los programas del estilo de Cabri–Geómetra le permiten al sujeto ver y manipular los objetos matemáticos y sus relaciones dentro de esquemas inimaginables con el lápiz y el papel [11]. Buena parte de estos programas parten de un modelo del conocimiento matemático en el que los objetos se definen con base en un número de propiedades invariantes de tal forma que cuando el sujeto hace un dibujo, éste se refiere realmente a la familia de objetos que comparten estas invariantes, y cuando el sujeto manipula el dibujo (por ejemplo, arrastrándolo en la pantalla), él puede estudiar las consecuencias de su acción en relación con las invariantes que han sido definidas. De esta forma, el sujeto tiene a su disposición un nuevo campo de experimentación en el que los objetos matemáticos y, por consiguiente, el conocimiento matemático asumen características diferentes a las tradicionales.

Aunque las tecnologías computacionales revolucionaron la práctica de la estadística, los programas de computador existentes no han llegado aún a ir más allá de simplificar el manejo de los datos. Hacen falta programas que le permitan al sujeto manejar, dentro de nuevos esquemas, la complejidad cuantitativa, la exploración del papel que pueden jugar el análisis de datos, los métodos estadísticos y los modelos probabilísticos, y el análisis de modelos de situaciones reales. En otras palabras, se requieren programas que le permitan al sujeto desarrollar sus competencias para seleccionar, combinar y analizar los métodos, además de manipular eficientemente los datos.

Tipos de tecnologías

Es posible clasificar en diversas categorías los programas de computador y las herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se han producido hasta el momento: micromundos, sistemas de simulación, sistemas tutoriales, programas de inteligencia artificial, aplicaciones de telemática y calculadoras.

Los micromundos son sistemas en los que se desarrolla una semántica para un sistema formal compuesto por objetos primitivos, relaciones elementales y reglas para operar estos objetos. El dominio de fenomenología (el tipo de fenómenos que es posible representar en la pantalla) permite establecer una relación entre los objetos primitivos y los fenómenos en la pantalla y esto determina el tipo de acciones que el sujeto puede realizar y la manera como el sistema reacciona a estas acciones. Con estos sistemas el sujeto puede explorar la estructura de un conjunto de objetos matemáticos, las relaciones que existen entre ellos y algunas de las maneras como estos objetos se pueden representar. Mientras que el sujeto tiene gran autonomía con estos sistemas, no es posible garantizar que un aprendizaje específico pueda tener lugar y, por consiguiente, las situaciones (problemas) que le sean propuestas al sujeto, para ser resueltas con la ayuda del sistema, son de gran importancia. Programas como el Cabri–Geómetra y Derive entran en esta categoría. El Cabri–Geómetra, por ejemplo, es un entorno dinámico definido por un conjunto de objetos primitivos (punto, recta, segmento, etcétera) y de acciones elementales (dibujar una recta perpendicular dados un punto y una recta, una recta paralela, etcétera). Estas acciones primitivas pueden ser utilizadas para crear acciones más complejas. El sujeto puede manipular los objetos que crea en la pantalla "tomándolos" de puntos específicos y "arrastrándolos" de tal forma que se mantienen las invariantes que fueron determinadas en la creación de los objetos [11]. La principal consecuencia de este tipo de diseño es que el micromundo se convierte en una oportunidad para que el profesor, teniendo en cuenta las necesidades de los estudiantes, pueda diseñar una situación, que aprovechando las características del entorno, pueda generar perturbaciones en el sistema didáctico de las cuales pueda surgir el conocimiento deseado.

Los sistemas de simulación presentan al sujeto situaciones en las que es posible observar, de manera dinámica, lo que sucede para un fenómeno específico cuando se cambian algunos de los parámetros involucrados en él. Este es el caso del sistema *MathCars* desarrollado por Kaput [1]. En este sistema es posible estudiar el movimiento de un automóvil con base en diversas formas (gráficas, simbólicas, numéricas) de representar las características de este movimiento. El sujeto puede controlar algunas de estas características (por ejemplo, la velocidad) y, dependiendo, de las decisiones que tome, él puede ver en la pantalla representaciones coordinadas del tiempo, la distancia recorrida y la velocidad.

La mayoría de los sistemas tutoriales son sistemas en los que el sujeto recibe instrucciones y reacciones de guía por parte del sistema que pueden ser bastante restringidas, puesto que están basadas en una referencia pre–establecida acerca del sujeto y no en la evolución de su conocimiento. En muchas ocasiones, es posible que el sujeto busque adaptarse a las características del tutor y optimizar su uso para efectos de resolver el problema sin que sea posible garantizar que se obtiene el significado deseado. Por consiguiente, la calidad del encuentro del sujeto y el medio en entornos que involucren sistemas tutoriales depende de las posibilidades que estos sistemas ofrezcan para construir situaciones en las que se puedan generar perturbaciones adecuadas según el estado de comprensión del sujeto.

La inteligencia artificial, como estrategia para el diseño de programas de computador (sistemas expertos) que pueden aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye la cuarta categoría de tipos de tecnología en la educación matemática. Desafortunadamente muchas de las expectativas que se tuvieron con los intentos de utilizar la inteligencia artificial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no han tenido el éxito esperado. Estos intentos buscaban, de alguna manera, automatizar el proceso de enseñanza. Sin embargo, al no tener en cuenta el papel del profesor y al simplificar la complejidad que se encuentra involucrada tanto en el contenido matemático, como en el proceso aprendizaje y comprensión de ese contenido por parte del sujeto, estos intentos se han quedado cortos con respecto a sus propósitos iniciales. El funcionamiento del sistema didáctico depende no solamente de factores aparentemente estables como el contenido matemático. También depende de factores muy variables como la estructura social de la clase y los saberes iniciales de los estudiantes. Por lo tanto, éste es un sistema extremadamente difícil de modelar para efectos producir programas de computador capaces de reconocer y adaptarse a la variedad de situaciones posibles y a la multitud de necesidades y circunstancias que determinan el éxito del encuentro entre el sujeto y el medio.

La conexión entre computadores, ya sea por redes locales o través de Internet, ha abierto nuevas posibilidades para la utilización de la tecnología computacional en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas nuevas tecnologías permiten la telepresencia (el profesor puede estar en un lugar y los estudiantes en otros), las clases virtuales, y la creación de ambientes para el aprendizaje colaborativo y las intervenciones de enseñanza a distancia. De esta forma, diversos grupos de estudiantes y profesores distribuidos en lugares geográficamente diferentes pueden interactuar alrededor de un tema o un problema. En este caso, el concepto de sistema didáctico asume características muy diferentes a las tradicionales. Ya no se trata de un grupo de estudiantes dentro de un salón de clase en el que hay un profesor que toma decisiones y unas máquinas que pueden aportar al proceso. En este caso, tanto el sujeto, como el medio y las restricciones que condicionan el funcionamiento del sistema y la manera como éste evoluciona en la búsqueda de estados de equilibrio consecuencia de perturbaciones, son diferentes. Se requiere, por lo tanto, una nueva conceptualización del proceso didáctico y otra manera de modelar el sistema que tenga en cuenta estas nuevas circunstancias.

Las calculadoras constituyen el sexto tipo de utilización de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dada su especificidad a las matemáticas y sus características particulares desde el punto de vista de su papel en el funcionamiento del sistema didáctico, las consideramos en una sección aparte.

Calculadoras gráficas: tecnología en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el precálculo y el cálculo

Las calculadoras comenzaron a utilizarse en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los años 70 cuando aparecieron las primeras máquinas de bajo costo que permitían hacer las operaciones aritméticas básicas. En la actualidad existen diversos tipos de calculadoras: desde la calculadora aritmética, pasando por las calculadoras científicas y gráficas, hasta máquinas que tienen la capacidad para hacer cálculos simbólicos y permiten la utilización de programas como el Cabri–Geómetra y el Derive. Todas estas máquinas tienen características comunes: tienen un teclado y una pantalla (cuyo tamaño varía según el modelo), pero principalmente son máquinas de bajo costo y totalmente portátiles. Su portabilidad las diferencia de los computadores. Mientras que estos son un recurso compartido y disponible ocasionalmente, usualmente por iniciativa del profesor, las calculadoras son un recurso individual, disponible libremente y utilizado por iniciativa del estudiante. El hecho de que su utilización se dé dentro de un contexto y una forma que es fundamentalmente diferente de la de los computadores da lugar a que las consideremos de manera especial en esta sección.

Las calculadoras avanzadas (como las calculadoras gráficas) tienen la capacidad para manejar de manera parcialmente dinámica por lo menos dos sistemas de representación de los objetos matemáticos (gráfico, simbólico y en algunos casos tabular). Se diferencian de los computadores, desde el punto de vista de sus potencialidades didácticas, en que la mayoría de los modelos tienen poca capacidad para la interactividad. Sin embargo, las calculadoras son un medio de trabajo que ofrece un espacio permanente y fácilmente asequible para la experimentación y la verificación del trabajo matemático. La experimentación y la verificación son ejemplos de formas de actuar del sujeto en el sistema didáctico que son difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel.

El impacto de la utilización de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha dependido hasta ahora de dos tipos de factores. Desde el punto de vista social e institucional, ha dependido del grado con que el sistema educativo en general, y la institución educativa en particular, permiten su utilización en el salón de clase, en el trabajo del estudiante en la casa y en las pruebas de evaluación [12]. Por el otro, también ha dependido, desde el punto de vista de sus efectos en el aprendizaje, de la forma como su utilización se encuentre integrada al diseño y al desarrollo del currículo en cuestión. A nivel institucional, las diferencias surgen de la medida en la que la utilización de las calculadoras está permitida y de si la institución misma apoya el acceso de los estudiantes a esta tecnología. Desde el punto de vista de su utilización en el salón de clase, las diferencias dependen del acceso a la tecnología que se permite a los estudiantes, del conocimiento y el uso que el profesor hace de ella en la clase, de la manera como las tareas que se le proponen a los estudiantes aprovechan sus potencialidades, y de la disponibilidad de las máquinas en las pruebas de evaluación. Con base en estas categorías es posible identificar tres fases en la integración de las calculadoras al currículo: introducción, adaptación y consolidación. Los efectos de la utilización de las calculadoras en el sistema curricular pueden depender de la fase de integración en que se encuentren [10].

En un estudio realizado con calculadoras gráficas en un curso universitario de precálculo, se identificaron algunos de los efectos de esta tecnología. Se miró la utilización de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo, no solamente desde el punto de vista de sus efectos en aspectos particulares del currículo, sino también desde la perspectiva de la complejidad y la dinámica del sistema curricular en el que se introdujo, de tal manera que fue posible explorar la forma como sus elementos se relacionan y evolucionan en el tiempo. Utilizando un esquema cuasi–experimental en el que se recogió información de un grupo de estudiantes que siguió el currículo tradicional y de otros grupos que utilizaron la calculadora, se estudiaron múltiples aspectos curriculares de la innovación [13]. La utilización de la tecnología influyó en las visiones que la institución encargada del diseño curricular, la profesora y los alumnos tenían acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje [14]. Este efecto en las visiones, junto con otros factores (como, por ejemplo, el cambio en la percepción de la autoridad por parte del estudiante) influyeron en el comportamiento de cada uno de los actores: la institución reformuló el diseño curricular y el tipo de actividades que propuso para ser realizadas como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje [15] y la profesora y los alumnos cambiaron su comportamiento y sus actitudes dentro del salón de clase [16]. Estos cambios en los comportamientos y los resultados de los mismos (i.e., nuevas actividades) influyeron en la forma como profesora y estudiantes interactuaron dentro del proceso de construcción del conocimiento matemático [17] y los cambios en esta interacción tuvieron consecuencias en el rendimiento [10], el aprendizaje [18] y las actitudes de los estudiantes [19].

Presentamos a continuación un ejemplo comparativo del tipo de tareas que pueden surgir con motivo de la utilización de la tecnología. Se trata del curso de precálculo mencionado anteriormente. La figura 4 muestra un punto del examen final de este curso para los grupos que siguieron el currículo tradicional y para los grupos que siguieron el currículo que involucraba la utilización de las calculadoras gráficas. Allí se aprecian diferencias con respecto a las expectativas que se tienen de la formación matemática del estudiante.

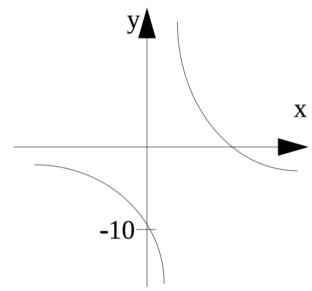
Sin calculadoras	**Con calculadoras**
Resolver la desigualdad $\frac{x}{x-1} \leq x\lvert x\rvert$	La desigualdad $x^3 - k \geq g(x)$ tiene como conjunto solución a $[0,\frac{1}{4}] \cup [c,\infty)$. Se sabe que k y c son números positivos; g(x) corta el eje de las X en $\frac{5}{4}$; si h(x) = x + 2, la función h(g(x)) tiene como asíntota y=0. La figura muestra la gráfica de g(x). Halle k, c y g(x). 

Figura 4. Punto de examen final de precálculo

Las diferencias que surgieron en el diseño curricular del curso están relacionadas con un cambio en las visiones del grupo de investigadores con respecto al saber a enseñar y a la forma como se cree que se debe aprender y enseñar ese conocimiento. El grupo construyó una visión del conocimiento a enseñar en la que se percibe una mayor complejidad y profundidad del contenido matemático. El estudio de las funciones se hizo más coherente gracias a la introducción del concepto de familias de funciones, concepto que permite identificar las diferencias y similitudes entre cada una de las familias (lineales, cuadráticas, etcétera). Por otra parte, el grupo se hizo más consciente de la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, complejidad que se expresa en dos dimensiones, principalmente: la riqueza de cada concepto matemático en cuanto a su expresión en múltiples sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular, verbal); y la complejidad de cada concepto en cuanto a su estatus, ya sea operacional y dinámico, ya sea estructural y estático.

Por otra parte, el grupo logró expresar en la práctica, y de manera explícita, su posición ideológica con respecto al aprendizaje: el constructivismo social. La expresión práctica de esta visión (el individuo construye su conocimiento matemático dentro de un entorno social que simula el funcionamiento de las comunidades científicas) llevó al grupo a centrar buena parte de su atención en el diseño y utilización de situaciones problemáticas que, expresando las nuevas visiones del contenido a enseñar, indujeran a los estudiantes a construir su conocimiento matemático dentro de un contexto de interacción social [20]. Estas nuevas visiones acerca del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de las matemáticas, se complementó con nuevas visiones del estudiante (como alguien mucho más capaz de enfrentar y resolver tareas complejas) y del profesor (como alguien capaz y deseoso de aprovechar apropiadamente una mayor libertad en el desarrollo del currículo).Es así como el nuevo diseño curricular pretende que el conocimiento construido por el estudiante sea coherente y holístico (en contraposición con un conocimiento desagrupado de herramientas específicas); sea rico en sus aspectos procedimental y conceptual (buscando ir más allá de los hechos y los algoritmos, hacia las estructuras conceptuales y procedimentales); y sea rico en las conexiones entre sistemas de representación (buscando que un mismo concepto pueda ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentren conectadas). Se busca además que el estudiante perciba que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única respuesta, ni una única estrategia de resolución; que vea la utilidad práctica del conocimiento que construye (como medio para modelar la realidad); que desarrolle sus capacidades de comunicación y argumentación matemática; que reconozca que el conocimiento se construye socialmente; que desarrolle la capacidad para enfrentarse a lo desconocido (tareas que son diferentes de las que él ya conoce); que desarrolle su capacidad para investigar en matemáticas; y, en general, que desarrolle su capacidad para resolver problemas. Aunque desde un punto de vista superficial, el contenido sufrió solamente cambios leves, un análisis más detallado de los temas tratados y de las tareas propuestas a los estudiantes resulta en un tratamiento del contenido que expresa las visiones que se describieron anteriormente con respecto al conocimiento a enseñar: tratamiento de familias de funciones, riqueza en los sistemas de representación y profundidad en las dimensiones operacional y estructural de los conceptos.El manejo de la interacción entre el profesor y el estudiante dentro del salón de clase alrededor del conocimiento matemático también sufrió cambios importantes, al pasar de una situación en la que se seguía de cerca el libro texto dentro de un esquema de exposición del profesor y resolución individual de ejercicios típicos por parte de los estudiantes a una situación de interacción en grupos de tres o cuatro estudiantes, que gira principalmente alrededor de la resolución de situaciones problemáticas complejas y diferentes, seguida de discusiones de todo el grupo de estudiantes en las que se enfatiza la argumentación y el consenso global para aceptar la validez de las afirmaciones propuestas. Finalmente, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y se convirtió en un medio a través del cual estudiantes y profesores se comunican en su proceso de interacción en la búsqueda de la construcción del conocimiento y en el que se reconocen y enfatizan las capacidades de comunicación y argumentación, la coherencia del discurso, la diversidad de estrategias posibles, la experimentación y la formulación y verificación de conjeturas. Se introdujeron nuevos esquemas de trabajo tales como ensayos escritos, portafolios y proyectos de investigación.

Estos resultados muestran que los efectos de la integración de la tecnología en el currículo de matemáticas se centran en la construcción y consolidación (por parte de los diseñadores del currículo, de los profesores y de los estudiantes) de nuevas formas de ver tanto el contenido matemático, como la relación didáctica entre los estudiantes, los agentes didácticos (profesor y tecnología entre otros) en la construcción por parte del estudiante de un conocimiento matemático más potente.

TECNOLOGÍA Y EL PAPEL DEL PROFESOR

Ya se presentaron argumentos que muestran la dificultad de diseñar y producir sistemas computacionales que puedan automatizar eficientemente la enseñanza y que, por consiguiente, puedan reemplazar al profesor. De hecho, el profesor juega un papel central en el proceso didáctico cuando la tecnología está presente. La tecnología es un catalizador de este proceso, pero el éxito de su utilización depende de la forma como el profesor opere como agente decisor y negociador de tal forma que la tecnología aporte a un encuentro fructífero (desde el punto de vista del aprendizaje) entre el sujeto y el medio. El profesor es quien puede conocer el estado de los estudiantes (sus dificultades y sus necesidades) y quien puede promover y decidir la forma como se debe utilizar la tecnología de manera eficiente. Estas decisiones se expresan en el tipo de situaciones didácticas que el profesor proponga al estudiante y de la manera como estas situaciones didácticas, al requerir o promover la utilización de la tecnología, le permitan al estudiante vivir experiencias matemáticas que aporten a la construcción de su conocimiento matemático. Es en este sentido que no se puede mirar a la tecnología como *la* solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, la tecnología es un catalizador del cambio. En particular, la tecnología, además de promover nuevas formas didácticas que aporten al aprendizaje del estudiante, también puede influir en la formación de los profesores.

El comportamiento del profesor en el salón de clase (en su interacción con los estudiantes para la construcción del conocimiento matemático) depende de su conocimiento y de sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza [21]. Este comportamiento puede cambiar en la medida en que estos conocimientos y estas visiones cambien. Para ello se requiere que el profesor pueda vivir experiencias didácticas que pongan en juego y lo induzcan a cuestionar sus conocimientos y sus visiones. La necesidad de utilizar la tecnología como nuevo agente didáctico y la necesidad de diseñar situaciones didácticas que aprovechen las potencialidades de la tecnología pueden convertirse en la oportunidad para que el profesor viva el tipo de experiencias que se requieren dentro del proceso de cambio. El profesor, como el estudiante, al enfrentarse a estas nuevas situaciones puede construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza y aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento.

CONCLUSIONES

La tecnología no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. Para que esto suceda es necesaria la participación del profesor. El profesor es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes. Esta actividad de diseño e implantación de situaciones didácticas hace parte trascendental de la integración de la tecnología al currículo. Por esta razón, se debe mirar la tecnología educativa como el encuentro de dos vertientes: aquella que produce sistemas computacionales con los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas y aquella (a cargo de los diseñadores de currículo y los profesores) que produce las situaciones didácticas para que estas experiencias matemáticas sean fructíferas desde el punto de vista de las dificultades y las necesidades del estudiante en el proceso de construcción de su conocimiento matemático. Esta interacción entre la tecnología, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. Este es el mayor aporte de la tecnología a la educación matemática.

Queda mucho camino por recorrer. Por una parte, la evolución constante de los recursos tecnológicos (sistemas operacionales, capacidad de las máquinas, herramientas de desarrollo, sistemas de interacción a distancia) abre la posibilidad de nuevas condiciones tecnológicas en el diseño y producción de soluciones que tengan en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar y la complejidad del proceso de comprensión de este contenido matemático. Por otra parte, en la medida en que se avance en la comprensión de estos procesos cognitivos, del papel del profesor en la interacción con los estudiantes con la presencia de la tecnología y del papel que la tecnología puede jugar como agente didáctico, será posible definir más apropiadamente los problemas a los que la tecnología puede aportar y será posible desarrollar las soluciones correspondientes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Kaput, J.J. Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed., 1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. pp. 515-556.

[2] Balacheff, N., Kaput, J.J. Computer–based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds., 1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer. pp. 469-501.

[3] Balacheff, N. Conception, propriété du système sujet / milieu. (Grenoble, 1996). *Documento no publicado*.

[4] Moreno, L. La educación matemática hoy. *Revista EMA*. **2** (2), pp. 101-114.

[5] Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

[6] Tall, D. Computer environments for the learning of mathematics. En R. Biehler et al. (Eds., 1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 189-199.

[7] Hiebert, J., Carpenter, T.P. Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed., 1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. pp. 65-97.

[8] Sfard, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. **22**, pp. 1-36.

[9] Brousseau, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. **7**(2), pp. 33-115.

[10] Gómez, P., Fernández, F. Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En PME (Ed., 1997). *Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki.

[11] Laborde, C. Cabri–geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig, J. Calderón (Eds., 1996). *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Madrid: Visor - MEC. pp. 67-85.

[12] Ruthven, K. Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde, C. (Eds., 1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 435-468.

[13] Gómez, P., Carulla, C., Gómez, C., Mesa, V.M., Valero, P. Calculadoras gráficas y precálculo. En G. Barón, O. Mariño, H. Escobar (Eds., 1996). *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Cali: SENA.

[14] Carulla, C., Gómez, P. Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En L. Puig, A. Gutiérrez (Eds., 1996). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia. pp. I-161.

[15] Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

[16] Valero, P., Gómez, C. Precalculus and Graphic Calculators: The Influence on Teacher's Beliefs. En L. Puig, A. Gutiérrez (Eds., 1996). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia. pp. 4.363-4.370.

[17] Gómez, P., Rico, L. Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En L. Meira, D. Carraher (Eds., 1995). *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. pp. I-205.

[18] Mesa, V.M., Gómez, P. Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. En L. Puig, A. Gutiérrez (Eds., 1996). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia. pp. 3.391-3.399.

[19] Gómez, P. Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en las actitudes de los estudiantes. (Bogotá: 1995). *Documento no publicado*.

[20] Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

[21] Dossey, J.A. The Nature of Mathematics: its Role and its Influence. En Grouws, D.A. (Ed., 1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. pp. 39-48.