Comunicación 6.06

Algunas reflexiones sobre la resolución del "problema del tablero de ajedrez"*

María Consuelo Cañadas Santiago, Francisco Durán Ceacero, Sandra Gallardo Jiménez, Manuel José Martínez-Santaolalla Martínez, María Peñas Troyano y José Luis Villegas Castellanos (Grupo PI de Investigación en Educación Matemática – Universidad de Granada)

Nivel educativo: **E.S.O.**

En este trabajo se parte de la perspectiva constructivista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se considera la resolución de problemas como una actividad interesante y formativa. Se presenta el problema del tablero de ajedrez y distintos itinerarios para su trabajo, siguiendo las fases de Polya (1982) para la resolución de problemas. Finalmente se presentan algunas reflexiones sobre la resolución del problema, sobre el análisis de esta resolución y sobre la utilidad y conveniencia de este tipo de análisis para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Introducción

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está reflejada en los documentos curriculares, que la consideran como un objetivo principal (MEC, 1989; NCTM, 1991). En este trabajo se muestra un ejemplo que manifiesta la utilidad y conveniencia del análisis de la resolución de problemas matemáticos desde el punto de vista constructivista del proceso educativo.

Este trabajo está formado por cuatro partes claramente diferenciadas. En la primera, se presenta el marco desde el que se va a enfocar el análisis de la resolución de problemas matemáticos. En la segunda parte se tratan los antecedentes y algunas características significativas del problema cuya resolución constituye el centro del trabajo, el problema del conteo de cuadrados en un tablero de ajedrez. En la tercera parte se lleva a cabo un análisis de la resolución del problema según Polya (1982) que nos permite obtener un esquema sobre diversos itinerarios que pueden seguir los resolutores de este problema. Finalmente, en la última parte del trabajo, presentamos unas reflexiones sobre la resolución y el análisis realizado referidas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Resolución de problemas matemáticos

En este trabajo se considera que un problema es una situación dificultosa para la que debe darse una solución que no es evidente para el individuo que se encuentra ante ella. Una situación se considera problema cuando el individuo no conoce a priori algoritmos o méto-

* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

dos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. Se hablará de problemas matemáticos cuando los conocimientos necesarios o los procesos implicados para llegar a la resolución del problema pertenezcan a la disciplina matemática (Grupo PI, 2002).

La resolución de un problema es el proceso que comienza con la percepción del problema y finaliza con la solución del mismo. En la educación matemática, la resolución de problemas es considerada una actividad altamente formativa que pone de manifiesto distintos modos de razonamiento (Segovia & Rico, 2001; Cañadas & Castro, 2002). La fase inicial del proceso de la resolución de problemas es la percepción de la situación problemática. La fase final es la generación de soluciones.

Polya (1982) propone cuatro fases para la resolución de problemas:

1. Comprender el problema, estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida.

2. Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta.

3. Llevar a cabo el plan ideado previamente.

4. Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.

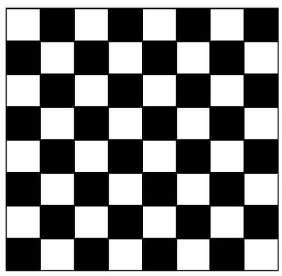
Fijaremos nuestra atención en las fases intermedias de la resolución de un problema.

El problema del tablero de ajedrez

En este apartado presentamos lo que será el centro de nuestro trabajo. Este problema ha sido investigado por diversos autores (Mason, Burton & Stacey, 1988; Stacey & Groves, 1999; Zack, 1997, y Reid, 2002), y fue planteado en la XI olimpiada provincial de matemáticas en Albacete[1]. El Grupo PI (2002) propuso este problema en un taller de resolución de problemas para profesores de matemáticas.

Mostramos, a continuación, el enunciado del problema tal y como apareció en el citado taller:

Alguien me dijo una vez
que 204 cuadrados
hay en un ajedrez.
¿Estaba bien razonado?



El enunciado de este problema es bastante singular ya que aporta una posible solución; se trata de un problema de comprobación que ha sido adaptado del tradicio-

1. http://www.info-ab.uclm.es/mates/Olimpiadas/X1prov/probf3.htm

nal problema del tablero de ajedrez. Como se observa, hay dos únicas posibles respuestas: sí o no. Este trabajo se va a centrar en el proceso que va desde que se lee el enunciado hasta que se da la respuesta.

No se pretende aquí evaluar el proceso de resolución según las fases, sino mostrar distintos caminos en los que el resolutor puede verse inmerso al afrontar el problema.

Resolución del problema

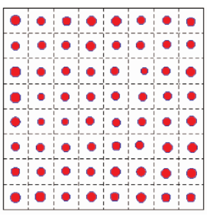
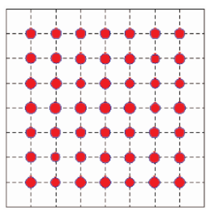
En este apartado se presenta el proceso de resolución del problema según las fases del método general de resolución de problemas de Polya (1982).

1. *Comprender el problema*. Lo más habitual es pensar que en un tablero de ajedrez hay 64 cuadrados. Así, sólo se están considerando los cuadrados que se observan como unidades simples, cuestión a la que no se alude en el enunciado. Al tratarse de un problema de comprobación, la idea expresada en el enunciado –"hay 204 cuadrados"– debería hacer pensar que se están contando más cuadrados de los que habíamos pensado en un comienzo. Esto advierte al resolutor de que debe incluir en su conteo los nuevos cuadrados que se pueden formar en el tablero, los de tamaños: 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8.

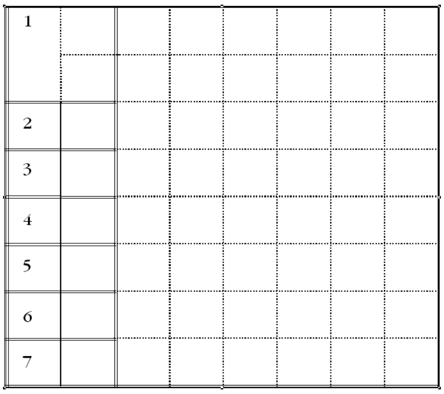
2. *Idear un plan de actuación*. Si el resolutor considera que el número de cuadrados es 64, el problema no estaría bien razonado (porque no se obtienen 204 cuadrados). Si, por el contrario, se cree que el número de cuadrados es diferente de 64 cuadrados, se continuaría con el conteo de cuadrados, tratando de dilucidar si el número total de cuadrados es o no 204. Para ello, el resolutor ha de resolver el problema del tablero de ajedrez. Es probable que no se siga ninguna estrategia de conteo. En este caso, la probabilidad de obtener éxito en la resolución del problema es baja. Lo más conveniente es seguir alguna estrategia de conteo, con cierta sistematicidad en el trabajo. Consideramos dos formas diferentes de contar los cuadrados del tablero de ajedrez 8x8.

2.1 Mediante el *conteo directo* se busca el número total de cuadrados contando los cuadrados de todos los tamaños que encontramos en el tablero 8x8. Este conteo se puede realizar de dos maneras:

- Contar los *centros de gravedad* de los cuadrados para cada tamaño. Se muestran dos ejemplos a continuación, correspondientes al conteo de los cuadrados 1x1 y 2x2. Se realizaría de manera análoga para el resto de los cuadrados de diferentes tamaños dentro del tablero 8x8.

Tamaño 1x1	Tamaño 2x2
	
64 centros de gravedad → 64 cuadrados	7 centros de gravedad por fila y 7 filas → 49 cuadrados

- Contar los cuadrados de cada tamaño que se forman *en cada columna* (o por fila). Como ejemplo, se muestra cómo contar el número de cuadrados 2x2 en el tablero 8x8. Obtenemos 7 cuadrados para la primera columna, y como hay siete columnas, entonces tenemos 7·7=49 cuadrados de tamaño 2x2. Análogamente se realizaría para el resto de los tamaños.



2.2 Mediante el *conteo indirecto* se busca el número total de cuadrados que hay en tableros más pequeños y después buscar un patrón para obtener la solución en el tablero 8x8.

3. *Llevar a cabo el plan*. Se trata de realizar uno de los dos planes de actuación ideados en la fase previa.

4. *Mirar atrás*. Según el plan de actuación llevado a cabo, se organiza la información obtenida. Una de las posibles formas de hacerlo es utilizar una tabla. Así se hace para cada uno de los dos casos considerados anteriormente en la segunda fase.

4.1 Conteo directo:

Tamaño cuadrado	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
nº de cuadrados de cada tamaño en el tablero	64=8·8	49=7·7	36=6·6	24=5·5	16=4·4	9=3·3	4=2·2	1=1·1

Tabla 1

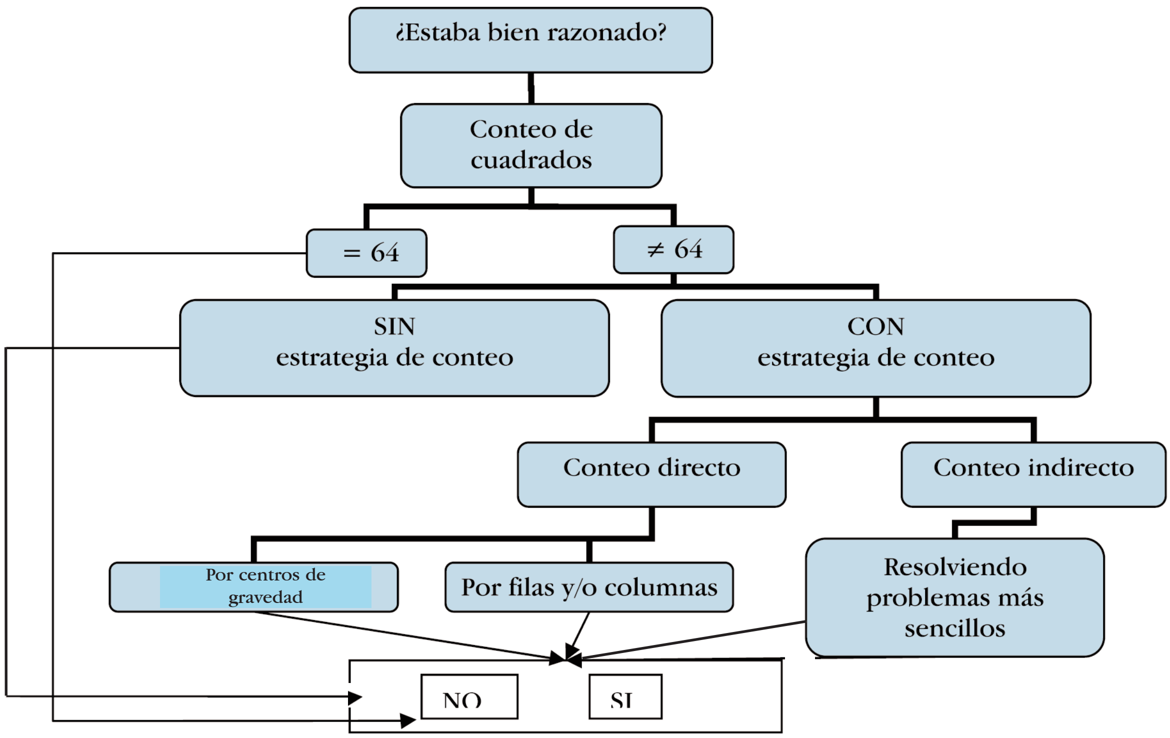
Considerando los cuadrados obtenidos de diferentes tamaños, tenemos 64+49+36+25+16+4+1=204 cuadrados.

4.2. Resolución de problemas más sencillos

Tamaño Tablero	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
nº total de cuadrados	1	5	14	30	55	91	150	204

Tabla 2

Tras superar las cuatro fases de la resolución de problemas de Polya (1982), el resolutor debiera estar en condiciones de dar respuesta a la pregunta que se planteaba en un principio. En el esquema siguiente se presenta el proceso seguido en la resolución de este problema.



Conclusiones

Este problema ha sido planteado con un material (el tablero de ajedrez) que, en la mayoría de los casos, será conocido por el resolutor. El material empleado permite una representación pictórica que facilita la resolución del problema. Se busca así que quien se encuentre con el problema se sienta interesado y motivado; la propuesta se ve como un reto. Esto se comprobó en el taller en el que se planteó este problema (Grupo PI, 2002). El resolutor es así participante activo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la resolución de problemas se emplean diferentes estrategias. En este caso se han empleado el reenunciado del problema (el planteamiento inicial no era el enunciado tradicional del problema del tablero de ajedrez pero finalmente la propuesta es equivalente), el análisis del problema, la organización de datos en una tabla, la búsqueda de patrones (tanto en el conteo directo como en el indirecto) y la formulación de conjeturas (el resolutor va obteniendo posibles resultados a la cuestión planteada que deberá aceptar o refutar en la fase final de la resolución).

El análisis de la resolución del problema ayuda al profesor a conocer el problema en sí, a reflexionar sobre el enunciado, sobre la adecuación de mismo al tipo de resolutor al que se va a plantear y sobre el contenido matemático que se trabaja en su resolución.

Se ha puesto de manifiesto que el problema del tablero de ajedrez requiere unos conocimientos matemáticos básicos. Por tanto, los alumnos a los que dirigir este problema dependerán más de la complejidad de los razonamientos empleados y de las estrategias utilizadas que del contenido matemático. Debido a las capacidades cognitivas y procedimientos empleados en su resolución, consideramos que Secundaria es un nivel adecuado para trabajar este problema.

Las estrategias y modo de proceder seguidos en el problema son de utilidad en otros contextos matemáticos o en situaciones problemáticas cotidianas, lo cual supone cumplir uno de los objetivos educativos principales indicados en los documentos curriculares.

El problema tratado en este trabajo se refiere al tablero 8x8. Éste se puede considerar como un caso particular de un tablero nxn. Desde este enfoque, se podría plantear un problema mediante el que se trabajara el razonamiento inductivo. Se trataría de llevar a cabo un proceso de generalización desde los casos particulares, sobre los que ya se ha avanzado (ver tabla 2), hasta el caso general (tablero nxn).

Bibliografía

- **CAÑADAS, M. C. & CASTRO, E**. (2002). Errores en la resolución de problemas de carácter inductivo. En **J. M. CARDEÑOSO, E. CASTRO, A. MORENO & M. PEÑAS** (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, 147-153.

- **GRUPO PI** (2002). Materiales en la resolución de problemas. En J. M. Cardeñoso, **E. CASTRO, A. MORENO & M. PEÑAS** (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, 101-112.

- **MASON, J., BURTON, L. & STACEY, K**. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

- **MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA**. (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- **NCTM**. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

- **POLYA, G**. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas.

- **REID, D. A**. (2002). E*lements in accepting an explanation*. Journal of Mathematical Behavior 20, 527-547.

- **SEGOVIA, I. & RICO, L**. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En **E. CASTRO** (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

- **STACEY, K. & GROVES, S**. (1999). *Resolver problemas: estrategias*. Madrid: Narcea.

- **ZACK, V.** (1997). You have to proof us wrong: proof at the elementary school level. In **E. PEHKONNEN** (Ed.) *Proceedings of the Twenty-First Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 106-113), Recife, Brazil.