EL VALOR DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Mª Consuelo Cañadas Santiago
Mª Encarnación Nieto Estepa
Almudena Pizarro Sánchez

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la Licenciatura de Matemáticas – estudios que terminamos el curso pasado – el rigor ha sido la característica predominante: siempre se ha demostrado todo lo afirmado o utilizado. Este hecho hizo que no concibiéramos unas matemáticas sin demostraciones. Con este enfoque de las matemáticas iniciamos nuestro periodo de prácticas (correspondientes a la asignatura "Prácticas de la Enseñanza" de 5º curso) y nos enfrentamos por primera vez con la realidad educativa; en la que observamos que no todo lo que se le explica a los alumnos debe ser objeto de demostración.

Mediante esta comunicación pretendemos compartir las reflexiones que hicimos sobre el valor de la demostración en las matemáticas de la Enseñanza Secundaria.

LA DEMOSTRACIÓN, ¿SÍ O NO?

Tras el periodo de prácticas y la posterior puesta en común de nuestras vivencias observamos que camufladas tras distintas situaciones yacía un problema común: qué papel tiene la demostración en la Enseñanza Secundaria. Entre estas experiencias nos resultaron especialmente significativas dos:

- ¿Tenemos que demostrar las identidades notables?.
- ¿Tenemos que obtener razonadamente todas las funciones derivadas?. ¿ Qué hacer en el caso de las trigonométricas?.

Para comenzar, veremos algunas acepciones del verbo *demostrar*. Según el Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; demostrar es *"un proceso lógico que conduce a una proposición a partir de otras tomadas como hipótesis"*. Y el Diccionario de uso del español María Moliner dice: *"seguir cierto razonamiento que produce la certeza sobre una afirmación"*. Aún sabiendo esto, no nos quedaba claro qué razonamientos son demostración y cuáles no, ya que hasta ahora, cuando hablábamos de demostración nos referíamos a la formal.

Nuestro problema era encontrar argumentos que nos pudieran ayudar a decidir si demostramos o no en clase. En el caso de las identidades notables llegamos a la conclusión de que es conveniente hacer la demostración, ya que facilita la asimilación del concepto y ayuda al alumno a comprender el proceso. Mientras que en el caso de la derivada nos plantea más dudas. Veamos porqué:

a) Identidades notables:

Para defender nuestra posición, la explicitaremos en el cuadrado de una suma:

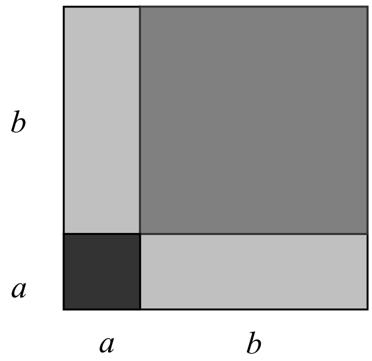
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$$

En este caso la demostración es tan intuitiva que el alumno puede deducirla él mismo si la memoria le juega una mala pasada. Además se les puede demostrar de varias formas y todas a su alcance:

- desarrollando el cuadrado:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + b^2 + 2.a.b$$

- interpretada como el área de un cuadrado de lado $a+b$:



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a.b + b.a = a^2 + b^2 + 2.a.b$$

- las nuevas tecnologías informáticas ofrecen medios, representaciones y técnicas alternativas con las que es posible justificar y comprobar estas identidades. Así, podríamos usar el Cabri y la hoja de cálculo.

b) Derivada de las funciones:

En algunos casos, aplicando la definición se obtiene fácilmente la derivada de la función. Sin embargo, en otros casos aparecen situaciones conflictivas. Por ejemplo, tomemos la función seno:

$$(\operatorname{sen} x)' = lim \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = lim \frac{\operatorname{sen}(x).\cos(h) + \cos(x).\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} =$$

$$= lim \frac{\operatorname{sen}(x).(\cos(h) - 1) + \cos(x).\operatorname{sen}(h)}{h} = \cos(x)$$

En esta demostración se han utilizado las equivalencias de infinitésimos que deberíamos demostrar para que la demostración fuera rigurosa. Estas equivalencias se demuestran en algunos libros de texto por medio de un dibujo, o bien dando valores con la calculadora a ambos infinitésimos. Si queremos encontrar una demostración rigurosa habría que utilizar herramientas potentes propias de las matemáticas formales.

Desde el punto de vista del alumno, llega un momento en la demostración en el que tiene que "creerse" un paso.

Por estos motivos, se nos plantearon dudas a la hora de decidir si hacer esta demostración o no. De hecho, podría cambiarse esta demostración por el estudio de la gráfica de la función seno, determinando sus extremos (puntos de corte de su función derivada con el eje x, crecimientos, etc.) y viendo su relación con la gráfica de la función coseno.

Los dos ejemplos hacen que nos preguntemos qué función tiene en sí la demostración en clase. Analizando esta cuestión, llegamos a la conclusión de que la toma de decisiones y la actuación del profesor dependen de las finalidades que éste se marque con sus alumnos atendiendo a lo que el currículo establece.

LA DEMOSTRACIÓN EN EL CURRÍCULO

Hay unos aportes teóricos que ayudan al profesor a tomar decisiones en el caso que nos ocupa. En primer lugar, lo que indica el currículo. Posteriormente veremos algunos aportes desde la Didáctica de la Matemática que nos pueden ayudar en el análisis.

En el Real Decreto 1007/1991, de la Educación Secundaria Obligatoria (matemáticas), se dice que *"...hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción [...] La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha de atender equilibradamente a sus distintos objetivos educativos:*

a) Al establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general.

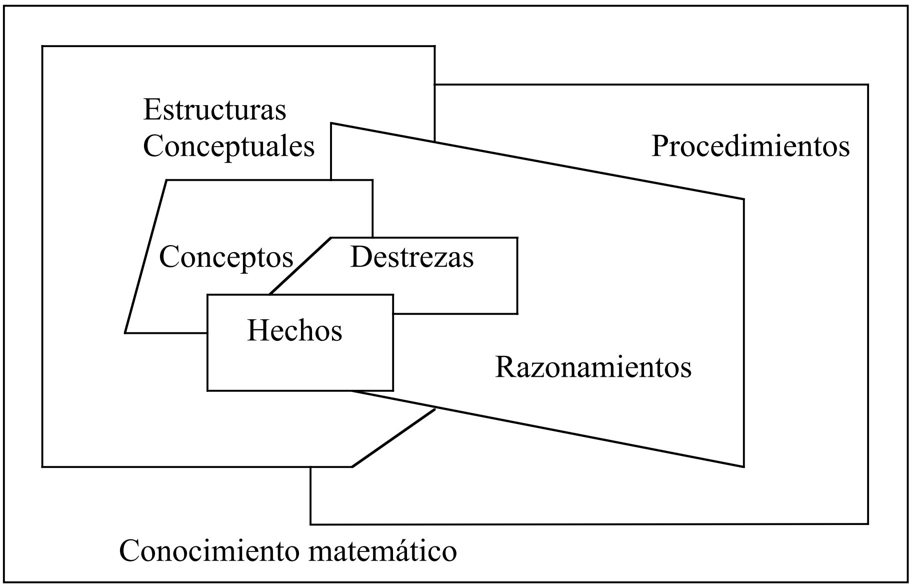
b) A su aplicación funcional en situaciones de la vida cotidiana.

c) A su valor instrumental para el conocimiento científico."

Por otra parte, en el Real Decreto 1178/1992, (Matemáticas I y II) se dice que: *"Las Matemáticas en el Bachillerato desempeñan un triple papel: instrumental, formativo y de fundamentación teórica... El conocimiento científico, en el Bachillerato, debe tener un cierto respaldo teórico. Las definiciones, demostraciones y los encadenamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las intuiciones y confiere solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en estas asignaturas. Sin embargo, éste es el primer* *momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad a la fundamentación teórica de las Matemáticas, y el aprendizaje, por tanto, debe ser equilibrado y gradual.”.*

Observamos que en la E.S.O. se propone el fomento del razonamiento del alumno, para lo cual podría ser más útil mostrar que demostrar, y no basarnos exclusivamente en el sistema de representación simbólico (dibujos, tablas, comprobaciones con calculadora, etc.). En el caso del Bachillerato, el término *demostración* aparece en el currículo, debiendo ser introducido a los alumnos de un modo “*equilibrado y gradual”*, adquiriendo un tratamiento más riguroso que en la etapa anterior y con el fin de darle validez a las intuiciones y sentido a las técnicas aplicadas.

Por otro lado, el currículo actual de matemáticas de la Educación Secundaria clasifica los conocimientos matemáticos en conceptuales, procedimentales y actitudinales. Los conceptos son aquello con lo que pensamos y los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas. Dentro de cada campo distinguimos tres niveles diferentes. Esquemáticamente lo expresamos como sigue:



(RICO, L., 1997, p. 32)

Según lo enunciado por el currículo, la demostración tiene cabida en la Educación Secundaria y, analizando el esquema anterior, la decisión de hacer una demostración o no dependerá del tipo de conocimiento matemático y de las capacidades que queramos desarrollar en los alumnos. Por ejemplo, si se quiere enfatizar en un procedimiento o en una estrategia no parece muy útil una demostración. Pero si se quiere desarrollar la capacidad de razonamiento puede que al alumno le facilite el aprendizaje, aunque no sea una demostración muy rigurosa matemáticamente hablando.

CONCLUSIONES

Nuestra corta experiencia docente nos hizo reflexionar sobre un verbo característico en matemáticas: el verbo "demostrar". No debemos olvidar que parte de la Educación Matemática consiste en que los estudiantes demuestren o, al menos, que vean la necesidad de ello. Así, en un principio, unas matemáticas sin demostración, no nos parecían matemáticas.

Pero...

¿Hay que demostrarlo todo?

¿Tiene sentido unas matemáticas sin demostraciones?

¿La demostración depende del nivel o la edad?

¿Convencer es demostrar?

Con la reflexión hecha, hemos visto que tenemos que partir de la idea de que hay distintos tipos de demostraciones (convencer, explicar, verificar, comprobar, etc.) y que atendiendo a lo que el currículo establece y dependiendo de los alumnos, del nivel de éstos y de las intenciones del profesor, tendremos que elegir un tipo u otro.

BIBLIOGRAFÍA

♣ BENEDICTO C. y NEGRO, A. (1993), **Diseño curricular para el área de Matemáticas. Enseñanza Secundaria Obligatoria**, Síntesis, Madrid.

♣ BERENGUER, L. y otros (1998), **Construir las Matemáticas. 3º de E.S.O.**, Proyecto Sur, Granada.

♣ (M.E.C., 1991), **Real Decreto 1007/1991**, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la E.S.O. BOE nº 252, de 26 de junio.

♣ (M.E.C., 1992), **Real Decreto 1178/1992**, de 2 de octubre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes al Bachillerato. BOE nº 253, 21 de octubre.

♣ RICO, L. y otros (1997), **Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Secundaria**, Síntesis, Madrid.

♣ RICO, L. y otros (1997), **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**, Horsori, Barcelona.

♣ V.V.A.A. (1990), **Diccionario de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, Espasa-Calpe, Madrid.

♣ V.V.A.A. (1986), **Diccionario de uso del español María Moliner**, Gráficas Condor S.A., Madrid.